www.enaphem.com

5 Enaphem
ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA:
PANORAMAS CURRICULARES E CIRCULAÇÃO DE CONHECIMENTO
UFRN - Evento Virtual, Novembro de 2020

Uma análise acerca do conteúdo de equidifferenças e proporções

An analysis about the content of equidifference and proportion

Jeremias Stein Rodriguês[1]

David Antonio da Costa[2]

Resumo
Pode ser difícil identificar nos livros didáticos quando o ensino de Aritmética termina e o de Álgebra tem início, principalmente pelo último ser percebido como uma generalização do primeiro. Livros de Aritmética do início do século XX evidenciam isto nos conteúdos de *equidifferença* e proporção com o uso de incógnitas e, implicitamente, na resolução de equações. Contudo, poderíamos considerar a abordagem de tais temas como um ensino de Álgebra? Em caso afirmativo, que Álgebra seria esta? Deste modo, propomos um estudo histórico com base na análise de cinco livros didáticos de Aritmética, na busca por caracterizar os aspectos algébricos deste ensino e verificar sua relação com as perspectivas de Peacock (1842) acerca da Álgebra aritmetizada e da Álgebra simbólica. Foi possível perceber que esta abordagem se aproxima da primeira perspectiva do autor, mas que ainda assim não poderia ser caracterizada como um ensino de Álgebra.
Palavras-chave: História da educação matemática; Ensino de álgebra; Livro didático.

A abordagem de equidifferença e proporção no livro de aritmética

O ensino de *equidifferença* e proporção está associado a noção de razão entre quantidades, sendo que estes conteúdos se faziam presentes no ensino de Aritmética no início do século XX. Livros do ensino de Aritmética[3] apresentam, sob o título de "Proporções" (Leyssenne, 1911; Trajano, 1922) ou "Razões e proporções" (L.L., 1916; Souza, 1910; Silva, 1923), que as razões podem ser por diferença ou quociente "Se as razões forem por differença a proporção será [...] *arithmetica* ou ainda

[1] Doutorando do Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica pela Universidade Federal de Santa Catarina. Professor do Instituto Federal de Santa Catarina, Brasil. E-mail: jeremias.stein@ifsc.edu.br.

[2] Doutor em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Professor da Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil. E-mail: david.costa@ufsc.br.

[3] As obras foram identificadas na pesquisa de doutorado elaborada pelo primeiro autor (em andamento) voltada a investigar a inserção da Álgebra na instrução elementar entre 1890 e 1930. A seleção destes livros didáticos se deu pela possibilidade e acesso a estes e pelas diferentes abordagens apresentadas no conteúdo analisado.

equidifferença. Se as razões forem por quociente a proporção será [...] *geometrica* ou *proporção*” (Silva, 1923, p. 39-40, grifos do autor). Assim, devemos entender que “A razão de dois numeros resulta da comparação entre esses numeros” (Silva, 1923, p. 39) e que “proporção é uma egualdade de duas razões” (Silva, 1923, p. 40, grifos do autor). O exemplo a seguir possibilita compreender estes conceitos e visualizar a notação utilizada na época.

Exemplos.—*Equidifferença:* 5 — 3 = 8 — 6 ou 5.3:8.6

5 e 6 são os extremos, 3 e 8 os meios, 5 e 8 os antecedentes, 3 e 6 os consequentes.

Proporção: $\frac{15}{3} = \frac{20}{4}$ ou 15 : 3 : : 20 : 4; mesmas definições.

Figura 1 – Exemplo e notação de equidifferença e de proporção.
Fonte: Silva (1923, p. 40).

Após apresentar a ideia de *equidifferença* e proporção, os livros fazem uso deste conceito para determinar um, ou mais, termo desconhecido para que a proporção se estabeleça. Silva (1923), por exemplo, apresenta a ideia para determinar um “termo desconhecido” (p. 40), sem indicar o que tal elemento seria. Trajano, aponta que um termo de uma proporção pode ser determinado se os outros três forem conhecidos, dizendo então que “O termo desconhecido é representado na proporção pela lettra x, e chama-se a incognita da proporção” (1922, p. 100).

Para evidenciar o processo para determinar o valor desconhecido, Silva (1923) apresenta como propriedades: “1ª. – Numa equidifferença a somma dos meios é egual á somma dos extremos” e “2ª. – O termo desconhecido de uma equidifferença é egual á somma dos outros dois menos o termo conhecido de mesma espécie” (Silva, 1923, p. 40). O autor apresenta o exemplo de *equidifferença* “$\mathbf{12\,.\,4 : 15\,.\,\boldsymbol{x}}$”, e usa a segunda propriedade para sua solução: o termo desconhecido ($\boldsymbol{x}$), um extremo, seria igual à soma dos meios (4 e 15) menos o outro extremo (12), ou seja, $\boldsymbol{x} = \mathbf{4} + \mathbf{15} - \mathbf{12} = \mathbf{7}$. Devemos destacar que a primeira propriedade não é utilizada e, com ela, se obteria a equação “$\mathbf{4} + \mathbf{15} = \mathbf{12} + \boldsymbol{x}$”. Isto destaca um método de resolução de um tipo de equação sem o uso de saberes algébricos, como operações inversas.

Os autores seguem evidenciando algo semelhante para a resolução de uma *proporção*, em que o produto dos meios é igual ao produto dos extremos. Em seguida, é apresentada a regra: “O termo incognito de uma proporção [...] é egual ao produto dos outros dois dividido pelo termo conhecido da mesma espécie” (Silva, 1923, p. 41).

Contudo, determinar o valor de uma incógnita é equivalente a pensar que esta instrução se constitui como um ensino de Álgebra? Se sim, que Álgebra seria esta?

A “Álgebra aritmetizada” e da “Álgebra simbólica”

Segundo George Peacock, existem duas ciências relacionadas com a Álgebra (Peacock, 1842): a Álgebra aritmetizada e a Álgebra simbólica[4]. Segundo o autor,

> Na Álgebra aritmetizada, consideramos símbolos como representantes de números, e as operações às quais eles são submetidos seguindo as mesmas

[4] Os termos usados em inglês são “arithmetical algebra”, ou “arithmetic algebra”, e “symbolical algebra”, respectivamente. O primeiro também poderia ser traduzido “Álgebra aritmética”.

 ISSN 2596-3228

> definições (seja na forma de expressar ou de entender) da Aritmética comum: os sinais de + e – denotam as operações de adição e subtração no seu sentido comum apenas, e estas operações são consideradas impossíveis em todos os casos em que os símbolos sujeitos a elas assumam valores em que não é possível realizar a operação, [...] de forma que em expressões, [...], como $a - b$, temos de supor que a é maior que b [...] (Peacock, 1842, p. IV[5]).

Esta Álgebra surge a partir de uma generalização da Aritmética e de seus processos, de modo que a primeira é submetida as delimitações da segunda. De forma semelhante, Santos, Pereira e Nunes (2017) indicam que a Álgebra contemporânea seguiria um modelo dominante de uma “Aritmética generalizada”, na qual “as letras indicam sempre incógnitas com valor numérico a serem determinadas, ficando de lado seu papel como variável, parâmetro ou outros possíveis significados não numéricos” (p. 87). Na perspectiva de Peacock (1842) esta Aritmética generalizada só se relacionaria com a Álgebra aritmetizada se a Aritmética estabelecer delimitações em relação a sua constituição.

A Álgebra simbólica, segundo Peacock (1842), buscaria a generalização da forma, não sendo limitada pelas restrições do uso de números, de modo que as limitações só existam em decorrência das definições. A Álgebra simbólica segue as

> regras da Álgebra aritmetizada, mas remove totalmente suas restrições: portanto a subtração simbólica difere da mesma operação na Álgebra aritmetizada por ser possível para todas as relações de valor para os símbolos ou expressões empregadas: até onde essas relações são admissíveis na última ciência, elas são iguais (Peacock, 1842, p. VI).

Com isso os resultados da Álgebra simbólica e que não são comuns na Álgebra aritmetizada são o que o autor considera como “generalizações de forma, e não necessariamente consequências das definições” (Peacock, 1842, p. VIII).

As perspectivas teórico-metodológicas adotadas

Para as análises aqui desenvolvidas, compreendemos que os livros didáticos, com base em Choppin (2004, p. 553), exercem quatro funções essenciais, sendo uma delas a função referencial, em que o livro didático reflete o programa de ensino, de forma integral ou como uma interpretação. Nesta perspectiva, o livro didático se constitui como “suporte privilegiado dos conteúdos educativos, o depositário dos conhecimentos, técnicas ou habilidades que um grupo social acredita que seja necessário transmitir” (Choppin, 2004, p. 553). Esta função aponta o livro didático como um produto cultural que reflete como se dava a estruturação do ensino em determinado período. Desse modo, ao nos debruçarmos sobre este material podemos compreender se a abordagem de *equidifferença* e proporção pretendia um ensino de saberes algébricos, bem como as nuances deste ensino na instrução.

Para Le Goff (1990) os documentos se constituem a partir de relações de forças de uma sociedade, se tornando vestígios de uma cultura. Assim,

> O documento não é inócuo. É antes de mais nada o resultado de uma montagem, consciente ou inconsciente, da história, da época, da sociedade que o produziram, mas também das épocas sucessivas durante as quais continuou a viver, [...] continuou a ser manipulado, ainda que pelo silêncio. [...]

[5] Todas as citações diretas de Peacock (1842) são traduções efetuadas pelos autores.

 ISSN 2596-3228

> Resulta do esforço das sociedades históricas para impor ao futuro [...] determinada imagem de si próprias (Le Goff, 1990, p. 472).

Os livros assumem aqui a perspectiva de enaltecer as características de um ensino, uma vez que se constituem como elementos de uma cultura escolar, que segundo Julia (2001) se configura como um apanhado de

> normas que definem conhecimentos a ensinar e condutas a inculcar, e um conjunto de práticas que permitem a transmissão desses conhecimentos e a incorporação desses comportamentos; normas e práticas coordenadas a finalidades que podem variar segundo as épocas (Julia, 2001, p. 10).

Nesta análise, buscamos observar nos livros didáticos suas opções para a abordagem dos conteúdos, seus exemplos e exercícios, de forma a constatar a utilização de saberes algébricos que poderiam ser também transmitidos no ensino. Além disso, também buscamos indícios que apontassem se a utilização de tais saberes algébricos estaria vinculada a ideia de resolução de equações, bem como a presença das barreiras impostas pela Aritmética, na busca por uma aproximação da abordagem dos autores com as perspectivas de Peacock (1842).

Análise dos livros de Aritmética

Aos lançarmos nosso olhar para os livros de Aritmética na abordagem dos conteúdos de *equidifferença* e proporção, não se observa uma abordagem homogênea entre eles. Nesse sentido, os livros de Souza (1910), Silva (1923) e Trajano (1922) nos apresentam três perspectivas singelamente distintas. Silva (1923) traz a resolução de proporções como a aplicação direta da regra, ou seja, para a proporção $12{:}\,4 :: x{:}\,5$ é apresentado que a solução seria x seria o produto de 12 e 5, dividido por 4. Trajano (1922) antes de realizar processo análogo, apresenta que

> Como o producto dos dois meios é igual ao producto dos dois extremos, dividindo o producto dos meios por um extremo teremos o outro extremo. Nesta proporção, o producto dos meios é $3 \times 18 = 54$; dividindo este numero pelo extremo 9, teremos o quociente 6 que é o valor de x (Trajano, 1922, p. 100).

Estas duas abordagens se assemelham por não destacar qualquer saber algébrico na resolução. Em contrapartida, Souza (1910) apresenta a proporção $24{:}\,8 :: x{:}\,9$ e busca mostrar que x é igual ao produto 24×9 dividido por 8.

> Pela propriedade fundamental temos $8 \times x = 24 \times 9$. Uma igualdade não se altera quando se divide ambos os membros pelo mesmo numero, por isso vamos dividir ambos os membros desta igualdade por 8 que é o termo que está multiplicando a incognita x [...]. Porém, no primeiro membro, nós temos 8 que multiplica e 8 que divide, simplifica-se, isto é, o quociente sendo a unidade, corta-se este numero do dividendo (Souza, 1910, p. 152).

Conseguimos notar que o autor (Souza, 1910) apresenta a solução a partir da equação do 1º grau e utiliza saberes algébricos, como "dividir ambos os membros da igualdade", para determinar o valor desconhecido.

Na obra de L.L. (1916) não são apresentados exemplos numéricos para a determinação do valor da incógnita, contudo o autor desenvolve as regras utilizando letras e fazendo uso de propriedades algébricas para apresentar fórmulas. Como exemplo, para determinar a solução para *equidifferenças* na forma $a.\,x{:}\,x.\,b$ o autor utiliza o princípio de que a soma dos meios é igual à soma dos extremos, resultando

 ISSN 2596-3228

em $2x = a + b$, e disso indicando que o valor de x seria metade da soma $a + b$. Poderíamos então dizer que L.L. (1916) adota abordagem ainda mais generalizada, em comparação aos outros autores, ao enunciar suas “regras” com letras e não números, se aproximam de uma abordagem algébrica. Além disso, nenhuma das obras apresenta questões ou exemplos que tenham solução negativa para x.

No livro do francês Leyssenne (1911), uma abordagem intermediária é observada. Nela, se percebe que o autor faz uso de propriedades algébricas na resolução de proporções, mas não as enuncia. Como exemplo, na proporção $9: x :: x: 4$ o autor logo indica que esta leva a igualdade $x^2 = 9 \times 4$ e assim $x = \sqrt{9 \times 4}$. A resolução de proporções com a repetição da incógnita (nos meios ou nos extremos, exclusivamente) que determinam equações do 2º grau é possível de se observar na maioria das obras, menos na de Trajano (1922). Contudo, nenhuma das obras apresenta ou explica o motivo de não se considerar a solução negativa, ou seja, no exemplo anterior, temos que para $x^2 = 36$ uma solução possível $x = -6$.

Assim, a forma como esses conteúdos são apresentados os aproximam de uma Álgebra aritmetizada, sob as perspectivas de Peacock (1842). Contudo, por mais que a resolução de alguns tipos de equações do 1º e 2º graus sejam realizadas, a falta de homogeneidade na abordagem dos diversos livros, alguns tendendo a uma aproximação totalmente aritmética e outros fazendo uso de alguns saberes algébricos, nos leva a advogar que a instrução desses conteúdos não se caracterizaria como o ensino de Álgebra. Além disso, majoritariamente a abordagem dos conteúdos focam na verificação se termos estão em *equidifferença* ou proporção, ou o cálculo de um valor desconhecido, deixando espaço para o professor fazer suas escolhas quanto a uma abordagem mais aprofundada de saberes algébricos e a resolução de equações que ocorre “por trás dos panos”. Porém, como é possível observar nas obras de Souza (1910) e L.L. (1916), o livro adotado ou a abordagem feita pelo professor poderia levar ao ensino de saberes algébricos.

Referências

Choppin, A. (2004). História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte. *Educação e Pesquisa*, v. 30, n. 3, p. 549-566.

Julia, D. (2001). A cultura escolar como objeto histórico. *Revista Brasileira de História da Educação*, v. 1, n. 1, p. 9-43.

L.L. (1916). *Elementos de arithmetica*. Campinas: Typografia da Casa Ideal.

Le Goff, J. (1990) *História e Memória*. Tradução de Bernardo Leitão. et al. Campinas, SP. Editora da UNICAMP.

Leyssenne, P. (1911). *Traité D’Arithmétique*: Théorique et Pratique. Librairie Armand Colin, Paris.

Peacock, G. A. (1842). *TREATISE ON ALGEBRA*: Vol. 1 Arithmetical Algebra. Cambridge: J. & J. J. Deighton; London, G. F. & J. Rivington.

Santos, A. B. C., Pereira, J. C. S. & Nunes, J. M. V. (2017). Concepções de professores de matemática do ensino básico sobre a álgebra escolar. *Educação Matemática Pesquisa*, 19(1), p. 81-103.

ISSN 2596-3228

Silva, R. L. (1923). *Arithmetica Pratica e Formulario*. Rio de Janeiro: Besnard Frère.

Souza, A. M.(1910). *Arithmetica Elementar*. 4. ed. Rio de Janeiro: Rodrigues & C.

Trajano, A. B. (1922). *Arithmetica Elementar Illustrada*. 92ª ed. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves.

 ISSN 2596-3228