

**TEXTO COMPLETO – I ENAPHEM
COMUNICAÇÃO-PÔSTER - CP**

Andressa Cesana Biral
Universidade Federal do Espírito Santo – UFES
Programa de Pós-Graduação em Educação – PPGE
andressacbiral@hotmail.com

**O PROBLEMA DE CALCULAR A ALTURA DE UM OBJETO VERTICAL NA
GEOMETRIA DE ORONCE FINE**

INTRODUÇÃO

Este trabalho refere-se a um resultado parcial de pesquisa de doutorado a qual leva em conta a análise histórica e crítica de fontes literárias. É nesta perspectiva que se propõe investigar na tese: *texto e contexto de problemas de alturas em livros do Renascimento à Modernidade*. Investigou-se autores que viveram nesse período e cujas produções matemáticas puderam “contar” como ocorreram tais texto e contexto. A proposta deste trabalho é apresentar um dos autores abordados na investigação, o francês Oronce Fine (1494-1555), que tratou do problema de calcular a altura de um objeto vertical em sua Geometria, incluída como parte de sua obra conhecida por *Prothomatesis*.

Apoiou-se na concepção do quão é importante fazer pesquisa histórica em Matemática e em Educação Matemática e, na concepção de conhecimento de passado do historiador Marc Bloch (2001) quando menciona que a própria definição de passado revela a impossibilidade de sua mudança, no entanto, não há como negar que ele é algo em desenvolvimento, que se transforma e aperfeiçoa. Além disso, tomou-se por base a concepção de história de Fernand Braudel (2009). Para ele, a história nunca parou de depender de condições sociais concretas, ela é “filha de seu tempo”; o papel do historiador é importantíssimo para que os métodos e os programas da história tenham respostas mais precisas e mais seguras, já que tudo isso depende das reflexões, do trabalho e das experiências vividas do mesmo. Como crítico, o trabalho histórico não pode ser realizado unilateralmente. Observou-se, por exemplo, que alguns estudos já feitos sobre autores e obras desde o Renascimento sinalizam a inter-relação existente entre a Matemática e a Arquitetura, assim como a influência que a Matemática

exerceu e ainda exerce sobre outras áreas do conhecimento. Enfim, o aporte teórico desta pesquisa fundamentou-se em pensadores que compreendem que produções humanas não são realizadas e nem são construídas isoladamente.

Considerando o método, tanto a pesquisa de doutorado quanto o trabalho aqui proposto, caracterizam-se como pesquisas qualitativas de abordagem histórica e documental. Contam, portanto, com os seguintes instrumentos metodológicos: pesquisa histórica, pesquisa bibliográfica e análise documental (de obras/livros-texto) e análise de conteúdo, através da utilização de categorias. No caso da análise de conteúdo, toma-se por fundamento a proposta de Laurence Bardin¹, a qual refere-se a um método empírico que depende do tipo de “fala” a que se dedica e do tipo de interpretação que se pretende como objetivo. Como um conjunto de técnicas de análise das comunicações, a análise de conteúdo é marcada por uma grande diversidade de formas e é adaptável a um campo de aplicação muito vasto. No caso desta pesquisa, é compreendida como uma análise dos ‘significados’, dentro da análise temática definida por Bardin (1977) e considera a análise de conteúdo como

[...] um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter, por procedimentos, sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens².

Compreendendo categoria como uma “subdivisão lógica que congrega diferentes objetos ou sujeitos portadores de uma mesma característica”³ e levando em conta a pergunta desta pesquisa, vê-se necessário um tratamento das fontes e dos dados através de categorias de análise. Para Franco (2005, p. 57), “a *categorização* é uma operação de classificação de elementos constitutivos de um conjunto, por diferenciação seguida de reagrupamentos baseado em analogias, a partir de critérios definidos”.

Pretende-se apresentar uma categorização para analisar o problema “medir a altura de um objeto vertical” apresentado na Geometria de Oronce Fine, levando em conta as categorias de análise: enunciado, linguagem, ilustração, abordagem resolutiva, instrumentos e contexto histórico.

¹ Laurence Bardin é professora-assistente de Psicologia na Universidade de Paris V e aplicou as técnicas da Análise de Conteúdo na investigação psicossociológica e no estudo das comunicações de massas. Disponível em: <http://www.almedina.net/catalog/product_info.php?products_id=4337>. Acesso em: 25 jun. 2011.

² Citação direta extraída do artigo intitulado “Análise de conteúdo: a proposta de Laurence Bardin”. Disponível em: <<http://www.caleidoscopio.psc.br/ideias/bardin.html>>. Acesso em: 25 jun. 2011.

³ Definição extraída do Glossário de Fiorentini e Lorenzato (2009).

A principal fonte histórica deste trabalho é uma obra intitulada *Aritmetica, Geometria, Cosmografia, e Oriuoli, Et gli Specchi*⁴ de Oronce Fine. A parte *Aritmetica, Geometria, Cosmografia, e Oriuoli* foi traduzida para o italiano por Cosimo Bartoli e a parte *Et gli Specchi* pelo Cavaleiro Ercole Bottrigaro. Neste trabalho, considerando o autor e a obra, especial atenção é dada aos seguintes aspectos: resumo biográfico, concepção de Geometria, a construção do seu principal instrumento de medida: o quadrante geométrico e, a matemática presente em um problema de medir altura.

1 ORONTIO FINEO⁵

Oronce Fine, nasceu dia 20 de dezembro de 1494, em Dauphiné, uma região do sudeste da França e morreu dia 08 de agosto de 1555, em Paris, França. Na época de seu nascimento esta era uma região semi-independente da França, assim chamada porque o país era governado pelo filho mais velho do rei da França, a quem foi dado o título de delfim. Briançon, a cidade de nascimento de Fine, ficava nessa região de Dauphiné. Sendo assim, o nome de Oronce Fine foi escrito em latim como Orontius Finaeus Delphinatus (ou, como aparece em uma das obras analisadas desta pesquisa, aquela publicada na Itália: Orontio Fineo del Delfinato). O último desses nomes, Delphinatus (Delfinato), indica então que ele veio de Dauphiné. Na tradução para o francês, além do sobrenome Fine, é provável que duas outras formas são possíveis, Finee ou Finé, mas, especialistas sobre a região Dauphiné explicam que Fine é a forma que se esperaria naquela região.⁶

Fine foi um médico francês teve encantamento especial pela matemática. Ele editou obras de matemática e de astronomia, escreveu sobre instrumentos de medidas e foi nomeado professor para a cadeira de matemática no Collège Royal de Paris em 1531, tendo permanecido lá até sua morte.

⁴ Traduzida por: *Aritmética, Geometria, Cosmografia, e Relógios, e os Espelhos*. Disponível em: <<http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/ECHOdocuViewfull?mode=imagepath&url=/mpiwg/online/permanent/library/P9R3M8SW/pageimg&viewMode=images>>. Acesso em: 15 jun. 2010.

⁵ Salvo mencionado o contrário, esta primeira seção compreende uma tradução/adaptação, realizada pela autora deste trabalho, da biografia de Orontio Fineo apresentada pelos matemáticos John O'Connor e Edmund F. Robertson, autores do site intitulado *The MacTutor History of Mathematics archives*. Disponível em: <<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Fine.html>>. Acesso em: 20 jun. 2010.

⁶ Neste trabalho utilizar-se-á sempre, a título de padronização em referência a Orontio Fineo, seu nome traduzido para o francês, Oronce Fine ou, simplesmente Fine, com exceção dos casos das citações, que serão mantidos os nomes originais do autor assim como aparecem nas folhas de rostos das obras pesquisadas.

Pelo fato da principal fonte primária de investigação deste trabalho, a *Aritmetica, Geometria, Cosmografia, e Oriuoli, Et gli Specchi*⁷, ser uma edição italiana de 1587, a pesquisa exigiu primeiramente um trabalho de tradução das partes do texto que interessavam, de acordo com os objetivos propostos, o que demandou cuidado minucioso de uma tradutora de italiano principalmente pelo fato de ser uma obra antiga.

2 A GEOMETRIA DE ORONCE FINE

A obra de Oronce Fine com maior ênfase para a análise neste trabalho, cuja folha de rosto refere-se à Figura 1 a seguir, está em língua italiana e é intitulada *Aritmetica, Geometria, Cosmografia, e Oriuoli* (*Aritmética, Geometria, Cosmografia, e Relógios*) traduzido por Cosimo Bartoli, fidalgo e acadêmico fiorentino, *Et gli Specchi* (*e os Espelhos*), traduzido pelo Cavaleiro Ercole Bottrigaro, fidalgo bolonhês. Em sequência, têm-se as informações da folha de rosto: Novamente publicado com privilégio, em Veneza, Impresso Francesco Franceschi Senese, 1587.



Figura 1 – Folha de rosto da obra de Oronce Fine
Fonte: FINE, 1587, p. 5.⁸

⁷ Traduzida por: *Aritmética, Geometria, Cosmografia, e Relógios, e os Espelhos*. Disponível em: <<http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/ECHODocuViewfull?mode=imagepath&url=/mpiwg/online/permanent/library/P9R3M8SW/pageimg&viewMode=images>>. Acesso em: 15 jun. 2010.

⁸ Disponível em: <<http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/ECHODocuViewfull?url=/mpiwg/online/permanent/library/P9R3M8SW/pageimg&viewMode=images&pn=5&mode=imagepath>>. Acesso em: 29 maio 2012.

Certamente as quatro primeiras partes da obra supracitada referem-se à *Protomathesis* de Oronce Fine a qual foi publicada pela primeira vez em 1532 em latim. Isso porque nas *Preliminares* da tradução da obra *Dos erros de Orôncio Fineo*⁹ para o português, por Carvalho (1960, p. VI), é citado o que contém o volume *Protomathesis*:

- 1° Orontii Finei Delphinatis de Aritmetica practica libri IIII;
- 2° Orontii Finei Delphinatis de Geometria libri duo. Lutetiae Parisiorum 1530;
- 3° Orontii Finei Delphinatis, de Cosmographia sive mundi sphaera libri V. Lutetiae Parisiorum 1530;
- 4° Orontii Finei Delphinatis, de Solaribus libri IIII. Lutetiae Parisiorum 1531.

Os três primeiros títulos (*Aritmetica*, *Geometria* e *Cosmographia*) coincidem com as três primeiras partes dessa tradução de Cosimo Bartoli, de 1587 e, o quarto título (*Solaribus*) coincide também com a quarta parte da tradução italiana (*Oriuoli*) já que se refere a relógios solares. Para auxiliar nessa última ratificação basta observar a folha de rosto da obra publicada em latim de 1560 (Figura 2):



Figura 2 – Folha de rosto da obra *Solaribus Horologiis* de Oronce Fine
Fonte: FINEI, 1560, p. 3.

Este trabalho levará em conta a leitura das versões italiana (1587) e francesa (1556) da *Geometria* de Fine, com mais ênfase à versão italiana e mais especificamente levando em conta as partes que incluem a concepção de *Geometria*, a construção do quadrante geométrico

⁹ Esta obra refere-se ao trabalho do matemático português Pedro Nunes Salaciense, contemporâneo de Oronce Fine. Nela, o autor dedica a maior parte numa crítica aos erros cometidos por Fine. Em suma, ela foi produzida para mostrar que as tentativas de Oronce Fine para resolver os três problemas clássicos: da quadratura do círculo, da trisseção de um ângulo arbitrário e da duplicação do cubo estavam incorretas, além de outros erros cometidos sobre cosmografia.

e os problemas de alturas. O autor começa chamando a atenção para a dificuldade comum que é estudá-la logo após a Aritmética. De fato, Fineo (1587, p. 183, tradução nossa) menciona:

Julgamos estudioso leitor, que seja uma coisa incômoda, ensinar-lhe, depois da prática da Aritmética, os primeiros ensinamentos mais notáveis da Geometria, embora se apresentem cômodos para quase tudo, não o são às nossas obras de Geometria e Cosmografia que se seguirão; mas, ainda parecem necessários aos estudos universais das Matemáticas.

Sua Geometria é composta por dois livros (Livro Primeiro e Livro Segundo), sendo que o primeiro consta de 14 capítulos e o segundo consta de 33.

Para o autor, a Geometria é importantíssima porque fornece o verdadeiro conhecimento de outras disciplinas. Apresentam-se no primeiro livro os princípios da Geometria que não são necessárias demonstrações, de modo que mediante esses princípios seja possível, com simples discurso, chegar às coisas que seguem e às que deles derivam e conceder-lhes a razão (FINEO, 1587, tradução nossa). Isso indica claramente a valorização da Geometria pelo autor assim como o método que segue para apresentá-la, baseado na Geometria de Euclides. De fato, Fineo (1587, p. 236, tradução nossa) destaca que:

Tendo então já tratado dos ensinamentos gerais e princípios dessa Geometria, como a introdução aos Elementos de Euclides, ao entendimento destas nossas obras que seguirão, nos parece razoável conseqüentemente tratar da prática universal da Geometria, isto é, da medição de algumas linhas¹⁰, algumas superfícies e alguns corpos, como demonstraram os elementos de Euclides [...].

O segundo livro da Geometria trata de medir os comprimentos, os planos e os corpos, ou seja, das linhas, das superfícies e dos corpos e também das outras coisas mecânicas, segundo as *Regras de Euclides*. O autor esclarece que é preciso primeiramente medir as linhas, depois os planos e as superfícies e, finalmente, os corpos. Observa-se que há uma tendência de Oronce Fine em recorrer a exemplos práticos para explicar o leitor/estudante sua Geometria.

O segundo capítulo do segundo livro da Geometria de Fine (1587, p. 238) é intitulado *Como se faz o quadrante geométrico comodíssimo para medidas das linhas retas*¹¹. Segundo o autor, mesmo que o comprimento das linhas retas possa ser medido de várias formas e com

¹⁰ Neste caso, as linhas as quais menciona Fine (1587) em seu trabalho representam o que chamamos atualmente de segmentos de retas.

¹¹ Com este título, o autor intenciona mostrar como se constrói um quadrante geométrico, instrumento muito útil ou “cômodo”, como ele denomina, para calcular distâncias.

diversos instrumentos, o agrada em especial examinar seu comprimento com o quadrante geométrico, para ele o melhor dos instrumentos geométricos. Assim, apresenta os passos para a construção do quadrante que será discutido na próxima seção deste trabalho.

Para uma melhor compreensão do desenvolvimento de conceitos matemáticos bem como do movimento de articulação deles, urge conhecer o contexto histórico em que eles surgiram. Levando isso em conta, identifica-se esta pesquisa dentro de uma perspectiva lógico-histórica cujo pressuposto é a “possibilidade do estudo no movimento do pensamento, no sentido de apreensão do objeto de estudo, isto é, do desenvolvimento do conceito” (DIAS; SAITO, 2009, p. 9). O conceito neste caso que se busca compreender é o do instrumento quadrante geométrico a fim de ser utilizado para resolver o problema de calcular a altura de objetos verticais. Isso dentro de um contexto histórico do século XVI.

É provável que o grande interesse de Oronce Fine pela Matemática e, mais especificamente, pela Geometria, o “obrigasse” consequentemente naquela época a interessar-se também pelos instrumentos geométricos. Conforme Saito e Dias (2011, p. 12), os ditos “professores de Matemática” daquela época eram os praticantes de matemática, a maior parte deles não tinha formação universitária e estava associada com alguma corporação de ofício ou trabalhava em alguma oficina de fabricação de instrumentos. Comumente tais profissionais, chamados de artesãos, desenvolviam seu próprio instrumento e depois comunicavam sobre a construção e uso para aqueles que buscavam a instrução.

3 A CONSTRUÇÃO DO QUADRANTE GEOMÉTRICO POR ORONCE FINE

Oronce Fine tinha predileção pelo quadrante geométrico para calcular medidas, por isso fez-se aqui a escolha de pesquisar mais profundamente sobre a construção desse instrumento e como ele foi utilizado por Fine para resolver problemas de alturas. No entanto, o autor trata de outros instrumentos de medidas a fim de resolver problemas práticos, como por exemplo, o quadrante num quarto de círculo, o esquadro e o báculo.

Nesta seção pretende-se apresentar uma sequência de ações para a construção do quadrante geométrico por Oronce Fine, acompanhando o documento de 1587. Para isso, serão

reproduzidas partes do texto original, sempre apresentadas como citações diretas¹², e, acrescentadas com comentários da autora deste trabalho de como as ações podem ter sido desenvolvidas pelos indivíduos que necessitavam construir o instrumento, a partir das instruções dadas por Fine. Intenta-se também mencionar possíveis caminhos e conhecimentos matemáticos que podem ser mobilizados no processo dessa construção.

A Figura 3 é a ilustração dada por Fine (1587, p. 239) para o seu quadrante geométrico.

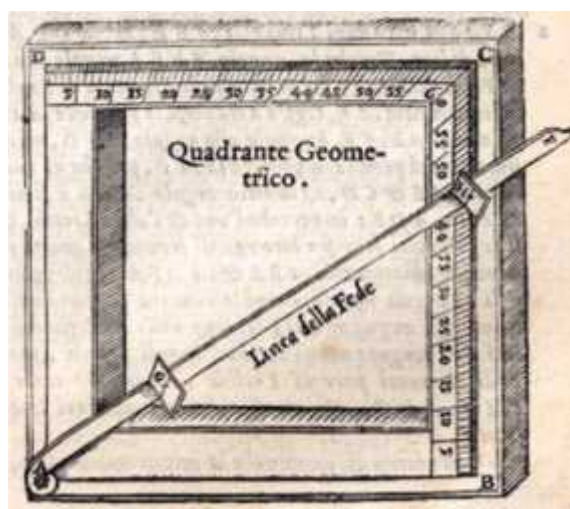


Figura 3 – O quadrante geométrico por Fine
Fonte: FINEO, 1587, p.239

A primeira instrução proposta por Fineo (1587, p. 238, tradução nossa) é:

Munir-se primeiramente de quatro réguas feitas de alguma madeira duríssima que tenham entre si o mesmo comprimento e a mesma largura. Dispô-las de maneira que formem ângulos retos com suas faces (ou terminações ou cabeças), que devem ter ao menos meio pé de largura e o comprimento seja dois ou três cubiti/côvados¹³, ou a medida pode variar de acordo com o fabricante. Ao colocá-las juntas deve-se ter o cuidado de fazê-lo de tal modo que formem um plano e, em esquadro com suas faces e superfícies.

Cabem aqui duas análises. Uma do ponto de vista instrumental a fim de discutir o tipo de material usado para a elaboração do quadrante e outra, do ponto de vista didático, abordando a intencionalidade provável e os conceitos matemáticos implícitos nas instruções para a

¹² A fim de ficar claro para o(a) leitor(a), todas as instruções fornecidas por Fine em seu texto, serão apresentadas aqui como citações diretas já traduzidas do italiano para o português (tradução nossa). Os comentários e interpretações da autora deste trabalho apresentar-se-ão formatadas normalmente.

¹³ A tradução de cubiti do italiano para o português é côvados. Segundo o dicionário online Priberam, côvado era uma antiga medida de comprimento equivalente a 0,66m. Disponível em <http://www.priberam.pt/dlpo/definir_resultados.aspx?pal=c%F4vados>. Acesso em 11 nov. 2011.

confeção do instrumento. Sempre que possível e conveniente, em cada instrução proposta pelo autor para a confecção do instrumento, far-se-ão tais análises.

No caso da primeira instrução, a seleção do tipo de material é importante quando se leva em conta o uso do instrumento, pois, para os artesãos do século XVI ele era útil para um fim prático. Dessa forma, era preciso levar em conta a durabilidade, maleabilidade e resistência do material a ser usado na sua construção. A qualidade “duríssima” indica certamente condição necessária para que o instrumento seja eficiente no momento do manuseio, ou seja, para o instrumento funcionar corretamente.

Mesmo que pudesse ser usado para ensinar Matemática, no contexto social em que estava sendo proposto, o quadrante geométrico não era ferramenta didática voltado para “educação escolar”. No entanto, há de se destacar os vários conceitos matemáticos exigidos pelo construtor a fim de confeccionar um quadrante geométrico. A partir da primeira instrução, fornecida por Fine e citada anteriormente, pode-se elencar: ângulos, perpendicularismo, figuras planas (quadrado), face e superfície. Além disso, o autor sugere uma unidade de medida aproximada para as dimensões das réguas de madeira (tanto para o comprimento quanto para a largura das peças) de modo a tornar simples e adequado o manuseio do instrumento.

As próximas instruções para a construção do quadrante geométrico são:

Depois, sobre uma de suas faces, a mais limpa, deixar do modo que quiser, na direção do lado externo alguns intervalos iguais, e se desenha o quadrado ABCD. Colocada em seguida a régua no ponto A e no ponto C, e desenhada a linha oblíqua CE, em qualquer dos lados BC e CD, se desenharam três linhas paralelas, que venham exatamente a conjugar-se na oblíqua CE e com essas BC e CD de modo que causem intervalos proporcionais entre elas em que o espaço interno que se deseje entre os referidos lados seja o dobro do intervalo que se segue ao lado, ou daquele do meio; e o do meio seja o dobro do primeiro, ou do intervalo de fora de ambos os lados citados (FINEO, 1587, p. 238, tradução nossa).

A escolha da face mais limpa (polida) é feita para facilitar o traçado dos segmentos. Os passos agora seguem com o objetivo de fazer as marcações no instrumento. Deve-se então definir o quadrado ABCD e o segmento oblíquo CE, que servirá de base para serem traçados os segmentos paralelos que indicarão as futuras medidas.

A seguir, faz-se um recorte do quadrante, ilustrado na obra de Fine, (a figura 15 abaixo) e acrescenta-se segmentos de reta coloridos e comentários necessários para entender os passos indicados para a confecção do instrumento. Neste caso, na Figura 4 destacam-se os três segmentos paralelos¹⁴ que devem formar os três intervalos proporcionais entre si, sendo um sempre o dobro do outro em espessura/largura.



Figura 4 – Recorte e adaptação do quadrante geométrico de Oronce Fine
Fonte: FINEO, 1587, p. 239.

Em relação aos conceitos matemáticos requisitados para a construção do quadrante, além dos já mencionados, pode-se destacar: paralelismo, segmento de reta, segmento oblíquo (linha oblíqua CE) e proporcionalidade entre segmentos.

Em continuidade o autor propõe as seguintes instruções:

Divide-se conseqüentemente os lados BC e CD em 12 partes iguais entre elas, e partindo do ponto A, acomodando a régua no ponto escolhido das divisões se puxam suas pequenas linhas, das ínfimas paralelas de dentro por esses intervalos até os citados lados BC e CD [...] (FINEO, 1587, p. 238, tradução nossa).

Agora, na tentativa de esclarecer as instruções, percebe-se que elas estão diretamente relacionadas com a construção das unidades de medidas do instrumento, fundamental para realizar as medições. O autor orienta a necessidade da divisão dos segmentos BC e CD em doze partes iguais, mas não deixa claro como realizar esse passo, nem mesmo que as divisões devem ser feitas no segmento interno (dos três paralelos já evocados antes). Para elucidar, encontra-se em destaque, na cor vermelha o segmento CD que deve ser dividido em doze partes iguais na Figura 5 abaixo.



Figura 5 – Recorte e adaptação do quadrante geométrico de Oronce Fine

¹⁴ Os três segmentos paralelos foram postos em destaque coloridos (amarelo, vermelho e verde) para ilustrar com mais clareza as interpretações a seguir. Sempre que conveniente, ao longo do texto, serão apresentados segmentos coloridos com essa mesma intenção.

Fonte: FINEO, 1587, p. 239.

Para fazer as divisões no lado CD, por exemplo, não é possível remeter ao traçado de mediatrizes, por suas próprias caracterizações, até serem obtidos doze segmentos de mesma medida em CD. Necessita-se de outro processo que recorre ao *Teorema de Tales*, cujo resultado trata das partes proporcionais estabelecidas por duas retas transversais em um conjunto de retas paralelas. Assim, sabe-se que é possível traçar, utilizando apenas régua não graduada e compasso, segmentos congruentes entre si.

Para prosseguir a construção, após a divisão do segmento CD em doze partes iguais, o autor propõe o alinhamento da régua usando os pontos A e cada um dos obtidos com a divisão do segmento CD em doze partes iguais a fim de obter segmentos de retas transversais às paralelas, que constituirão a organização da segunda escala do instrumento e, devem atingir apenas o primeiro intervalo que foi obtido anteriormente através da construção dos três segmentos paralelos tomando como referência cada um dos segmentos BC e CD.

Observa-se que após fazer todo esse processo em uma das doze divisões do lado CD do quadrado, não será preciso repeti-lo para o lado BC. De fato, bastará transferir com o compasso o tamanho (abertura) do segmento obtido da subdivisão anterior, formando doze novos segmentos contíguos no lado BC.

Dessa forma, o segmento em destaque na Figura 6 estará dividido em doze partes congruentes.



Figura 6 – Recorte e adaptação do quadrante geométrico de Oronce Fine
Fonte: FINEO, 1587, p. 239.

Os passos seguintes são propostos pelo autor:

[...] cada duodécima parte de novo do lado BC e do CD, se redivida de novo em 5 partes iguais. E outra vez colocada a régua no ponto A e em qualquer ponto desta nova divisão, se puxam as linhas mais curtas, estendidas somente para os dois intervalos dos lados menores. Desse modo então, cada um dos lados BC e CD será dividido em 60 partes iguais entre si, pois que 5 vezes 12 ou 12 vezes 5 fazem 60 [...] (FINE, 1587, p. 238, tradução nossa).

Num processo análogo o autor indica uma nova divisão, obtendo cinco segmentos de mesma medida, em cada um dos doze segmentos construídos no processo anterior, tanto em BC quanto em CD. Por isso conclui que nesta subdivisão encontrar-se-ão sessenta segmentos. A Figura 7 ilustra os dois segmentos (coloridos de amarelo e vermelho) que ficarão divididos em sessenta partes iguais.

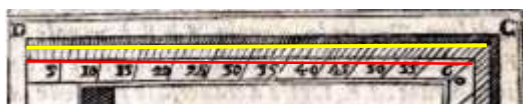


Figura 7 – Recorte e adaptação do quadrante geométrico de Oronce Fine
Fonte: FINEO, 1587, p. 239.

Pode-se finalmente redividir este primeiro exterior, ou seja, o menor intervalo destes três em duas partes iguais e cada uma dará 30 minutos das partes passadas: ou, realmente, se dividirá qualquer das 60 partes em três, e cada uma destas partes representará 20 minutos, ou se poderá dividir em 4 partes e, cada uma delas será 15 minutos e assim sucessivamente pode-se continuar dividindo a vontade, ou, segundo o tamanho e a capacidade do instrumento. No mais baixo e maior espaço das divisões de um lado e do outro se reunirão os convenientes números de um e de outro ponto B e D, de 5 em 5, indo na direção do ponto C, distribuindo-os até o 60, ou seja, 5,10,15,20,25,30,35,40,45,50,55,60, como se vê na figura da página 239. A linha que corta o quadrante se chama “Linha de Fé” (FINEO, 1587, p. 238, tradução nossa).

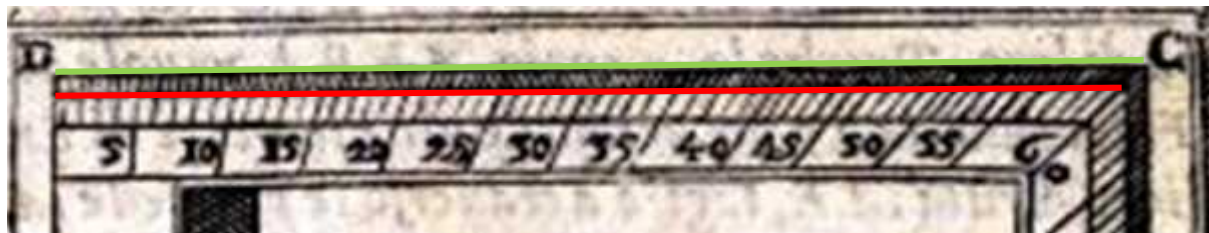


Figura 8 – Recorte e adaptação do quadrante geométrico de Oronce Fine
Fonte: FINEO, 1587, p. 239.

Observa-se que na última parte dividida, aquela de menor largura, destacada entre os segmentos coloridos de verde e vermelho da Figura 8 acima, sugere-se uma nova divisão, a partir de cada divisão anterior, em duas partes iguais, gerando assim 120 pequenos intervalos iguais, sendo que cada uma dessas 120 partes representam para o autor 30 minutos em relação à divisão anterior, logo, obtém-se a operação 120 vezes 30 minutos, que representam um total de 3600 minutos a divisão de cada um dos segmentos BC e CD. Além disso, as instruções de Fine mostram que cada parte anterior pode ser subdividida de acordo com a “vontade” do construtor ou a limitação do tamanho do instrumento, o que implica, em sua explicação, caso seja possível na construção do instrumento, por exemplo, subdividir cada parte anterior em 4 partes iguais (e não em 2 como ele mostra na ilustração do texto), então, tem-se um total de 4

vezes 60 partes, ou seja, 240 partes compõem cada um dos segmentos BC e CD. Logo, conforme a convenção adotada por Fine, cada uma destas 240 partes representará 15 minutos de cada divisão anterior, para se obter um total de 3600 minutos referentes aos segmentos BC e CD ($240 \times 15 \text{ minutos} = 3600 \text{ minutos}$).

A explicação que segue na obra de Fine procura elucidar a “régua” ou “linha de fé”:

Fabrica-se finalmente uma régua, a guisa de demonstrador, como uma parte da linha do astrolábio¹⁵, puxada igualmente na espessura e na largura, e plana, a qual chamaremos AF, que seja pelo menos tão longa quanto a oblíqua AC, e ainda dos quatro cantos a esquadro da mira da fé, se acomodem duas miras furadas diametralmente e os tais furos sejam muito pequenos sobre essa linha da fé como nos apresentam as letras G e H, na figura da pagina 239. Que essa linha ou régua se acomode de tal forma no centro A que se possa levar para cima e para baixo livremente, e que a linha da fé AF, puxada por meio da mira do ponto A, ou qualquer das divisões dos lados acima citados possam da mesma forma conduzir-se com facilidade e para maior compreensão dos fatos supracitados, eis a figura do supracitado quadrante geométrico (FINEO, 1587, p. 239, tradução nossa).

Na sequência, Fine (1587, p. 239) exhibe então a ilustração do seu quadrante geométrico (Figura 3) e, com a citação anterior contendo o esclarecimento sobre a “linha de fé”, finaliza o Capítulo II¹⁶ do seu segundo livro, da Geometria. Percebe-se que a “linha da fé” é essencial ao instrumento porque servirá como uma mira no momento da medição da altura de algum objeto, isso ratifica todo o processo minucioso de construção, de forma mais precisa possível, com a finalidade de obtenção de um instrumento realmente eficiente. Enfim, a construção do quadrante geométrico é necessária, pois é um instrumento que possibilita executar inúmeras medições, e é para Fine, como já mencionado, o melhor deles.

4 A MATEMÁTICA PRESENTE EM UM PROBLEMA DE MEDIR ALTURA POR FINE

De acordo com os propósitos deste trabalho, escolheu-se um problema de medir altura que foi tratado na parte da Geometria na *Prothomatesis* de Fine considerando que cada um dos 33 capítulos do segundo livro da sua Geometria representa um problema prático de medição, tanto de altura, quanto distância ou de profundidade.

¹⁵ Foi o instrumento matemático astronômico mais conhecido.

¹⁶ Intitulado “Como se faz o quadrante geométrico comodíssimo para medidas das linhas retas”.

O sétimo capítulo do segundo livro intitula-se *Como se medem, com o quadrante geométrico, as linhas retas que estejam sobre o plano do terreno formando ângulos com o quadrante*. Esse capítulo trata então de resolver um problema de altura utilizando-se o quadrante geométrico. A Figura 8 exibe uma ilustração que o autor utiliza para ajudar na compreensão do problema. A frase “formando ângulos com o quadrante” indica que Fine propõe o cálculo de mais de uma altura, no caso, três alturas, considerando os ângulos que o quadrante faz com a torre. No caso, são indicadas três situações diferentes.

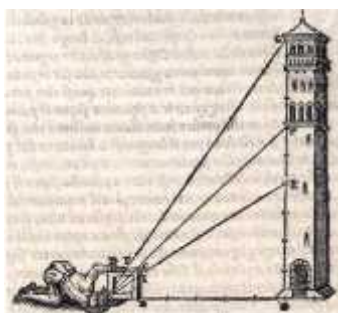


Figura 8 – Ilustração de como usar o quadrante geométrico para medir alturas de objetos verticais por Oronce Fine
Fonte: FINEO, 1587, p. 253.

Observa-se que, para resolver o problema, o medidor deve estar com o quadrante geométrico mirando à uma certa distância e se posicionar em direção à base da torre, além disso, são feitas três marcações distintas utilizando a “linha de fé”. Para compreender melhor, apresentar-se-ão os passos propostos por Fine e em seguida serão feitas explicações complementares ao texto original. Em primeiro lugar, Fineo (1587, p. 251, tradução nossa) propõe: “tomada a título de demonstração uma linha reta, cujo comprimento deva ser medido, que seja EG ou EH ou ainda EK para o comprimento e na direção da torre EKHG que esteja sobre um plano proposto AE na perpendicular, ou em prumo”.

Segue instruindo:

Acomoda-se então sobre o mesmo plano que lhe está em torno, o quadrante ABCD, de forma que os lados BC e CD, compartilhadas em partes, se voltem diretamente para essa linha proposta, pois que isto parece ser sempre necessário. Posto então o olho no ponto A, levanta-se ou abaixa-se esta linha contanto que o raio de visão de A, passando pelas miras, chegue ao final da linha proposta. Feito isso, observa-se a interseção dessa linha, isto é se ela baterá no lado BC ou no lado CD, visto que ela não poderá chegar a outro lugar.

Diga-se, então que ela bata primeiramente no lado CD, isto é, no ponto F, e seja a linha a ser medida EG, então essa linha EG será maior do que o comprimento do plano AE e corresponderá na mesma proporção a AE, que o lado AD à parte intersectada DF. Como que se DF será 40 das partes das quais cada lado é igual a

60, porque o 60 corresponde ao 40 de *sesquialtera*¹⁷, isto é, 40 mais sua metade, não diferentemente, a linha EG abraçará uma vez e meia a linha AE. Logo se o comprimento AE, for, por exemplo, igual a 18 cúbitos, a linha EG considerada será de 27 cúbitos. E isto se demonstra desse modo, porque os dois triângulos ADF e AEG são de ângulos iguais, por isso que o ângulo DAF é igual ao ângulo AGE, pelo 29 do primeiro livro dos Elementos de Euclides. E da mesma forma, o ângulo AFD é também igual ao ângulo EAG, visto que tanto o ângulo ADF como o ângulo AEG são retos e iguais entre si. São então de ângulos iguais os triângulos ADF e AEG, cujos lados então que estão de frente aos ângulos iguais estarão mediante a 4 enquanto que o de 6 os mesmos elementos entre eles proporcionais. Logo, como o lado AD corresponde à parte intersectada DF assim será a proposta linha EG ao comprimento do plano AE. (FINEO, 1587, p. 251-252, tradução nossa).

Os passos acima são bem detalhados por Fine, e, mais ainda, estão muito bem justificados matematicamente levando em conta a possibilidade de medir a altura EG utilizando-se da semelhança entre os triângulos ADF e AGE. Pretende-se a seguir explicar alguns pontos que poderão gerar algum tipo de dúvida para o leitor em relação à leitura das instruções contidas na citação anterior.

Primeiro, fica claro observar que a medida AE (do vértice do quadrante geométrico, do qual parte a “linha de fé”, até a base da torre) é acessível. Neste caso considerado acima, o objetivo é obter a medida da altura EG, da base ao cume da torre.

Outro item interessante é quando se utiliza a mira do quadrante geométrico, isto é, a “linha de fé”, então, o autor, supondo que ela seja mirada no topo da torre e intersecta o lado CD do quadrante no ponto F, afirma que tal segmento EG será maior do que o segmento AE. De fato, isso só pode ocorrer por ser assumida a seguinte propriedade geométrica de desigualdades nos triângulos: “Se dois ângulos de um triângulo não são congruentes, então os lados opostos a eles não são congruentes e o maior deles está oposto ao maior lado” (DOLCE; POMPEO, 2005, p. 55). Como, por hipótese, a mira com a “linha de fé” intersecta o lado CD até atingir o topo da torre, o ângulo $E\hat{A}G$ é maior do que 45° . Considerando que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° , que o triângulo AGE é retângulo em $A\hat{E}G = 90^\circ$, tem-se que a soma dos outros dois ângulos $E\hat{A}G + A\hat{G}E = 90^\circ$ e, como o ângulo $E\hat{A}G$ é maior do que 45° , o ângulo $A\hat{G}E$ será menor do que 45° . Sendo assim, $E\hat{A}G > A\hat{G}E$, e, portanto, como afirma Fine, $EG > AE$, ou seja, o segmento EG será maior do que o segmento AE.

¹⁷ Palavra que não foi possível traduzi-la, porém, não alterará o sentido do texto.

5 OLHAR GERAL PARA ORONCE FINE

O trabalho de Oronce Fine teve grande repercussão na época de publicação, tanto que sua obra mais importante, a *Protomathesis*, foi publicada em latim em 1532, na mesma época em que assumiu cadeira de lente na Faculdade Real de Paris, além de ter sido traduzida e publicada em 1587 por Cosimo Bartoli, 55 anos após a primeira aparição, a qual é a obra italiana em que se faz a análise principal nesta pesquisa. Sem contar que o próprio Bartoli publicou uma obra em 1564, em que o primeiro livro segue a sequência proposta por Oronce Fine. Há também uma edição francesa já considerada no texto, que foi traduzida e publicada por Oronce Fine em 1556. Ela trata da sua Geometria prática, uma parte da *Protomathesis*.

É notável mencionar que tomando por referência a Geometria de Oronce Fine, em especial, seu texto que trata da construção dos instrumentos, percebe-se a articulação que existe entre a construção e o uso dos instrumentos. De fato, o texto não pode ser classificado como um manual do tipo “faça você mesmo” e pode-se observar que ele estava destinado a um público que tinha que ter conhecimentos não apenas da Geometria implícita à construção do instrumento, mas também da prática do ofício. As ações para a construção do quadrante geométrico são somente apresentadas em forma de instrução, exigindo do leitor que ele cumpra as tarefas, porém, é preciso que se saiba executá-las.

Em síntese, apresenta-se uma análise sobre o problema de encontrar a altura de um objeto, especificamente na obra de Fine (1587), segundo algumas categorias:

- Quanto ao enunciado: fornece apenas um título geral para o problema. Exemplo: “Como se medem, com o quadrante geométrico, as linhas retas que estejam sobre o plano do terreno formando ângulos com o quadrante” (p. 251).
- Quanto à linguagem do problema: utiliza uma linguagem natural, como se fosse um diálogo, é retórica. O uso do simbolismo matemático fica a cargo da nomenclatura utilizada para referência de um segmento de reta, como por exemplo, “[...] seja a linha a ser medida EG, então essa linha EG será maior do que o comprimento do plano AE [...]” (p. 251), e também para o caso de indicação de um ângulo. De fato, Fine (1587, p. 251) afirma que “[...] e da mesma forma, o ângulo AFD é também igual ao ângulo EAG, visto que tanto o ângulo ADF como o ângulo AEG são retos e iguais entre si [...]”.

- Quanto às ilustrações: para cada problema apresenta uma ilustração que simula a realidade. Cada ilustração é rica em detalhes, demonstrando não apenas um esquema explicativo, mas, a imagem da situação que o problema/capítulo apresenta incluindo o objeto a ser medido, o instrumento e uma paisagem.
- Quanto à abordagem resolutiva: a maior preocupação do autor é realmente de “transmitir” as instruções passo a passo para quem deseja resolver um problema como o do tipo apresentado anteriormente. A fundamentação matemática existe, mas, está implícita. Além disso, a apresentação de um exemplo numérico corrobora com a ideia de esclarecer cada um dos passos de resolução do problema. Como ferramentas matemáticas, Fine utiliza-se da semelhança de triângulos e também de uma propriedade geométrica de desigualdade triangular, no entanto, sem dar justificativas, como já mencionado.
- Quanto aos instrumentos: propõe o uso do quadrante geométrico, o instrumento preferido de Fine, dedicando um capítulo especial para tratar da construção do mesmo, apesar de considerar ainda em sua obra outros instrumentos de medida como o quadrante num quarto de círculo, o esquadro e o báculo.
- Quanto ao contexto histórico: a primeira metade do século XVI, época vivida por Oronce Fine e coincidente com o período classificado como *Cinquecento*, o qual, conforme Jaguaribe (2001, p. 458), pode-se afirmar que representou uma extensão “das grandes tendências intelectuais e artísticas do século precedente”, no caso, época do dito Renascimento, além de ter promovido “mudança profunda no sistema internacional”. Além disso, foi tempo de aparecimento de monarquias modernas na França, Inglaterra e Espanha (JAGUARIBE, 2001).

Acredita-se que a categorização dos problemas de alturas encontrados nas obras da pesquisa contribuirá de modo relevante para se reconstituir uma trajetória histórica da linguagem matemática desses problemas.

REFERÊNCIAS

BLOCH, Marc Leopold Benjamin. **Apologia da história, ou, O ofício do historiador**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 2001.

BRAUDEL, Fernand. **Escritos sobre a história**. Tradução de J. Guinburg e Tereza Cristina Silveira da Mota. São Paulo: Perspectiva, 2009.

BRAUDEL, Fernand. **Escritos sobre a história**. Tradução de J. Guinsburg e Tereza Cristina Silveira da Mota. São Paulo: Perspectiva, 2009.

CARVALHO, João Pitombeira de. Os três problemas clássicos da Matemática Grega. In: II BIENAL DA SBM. 2004, Salvador. **Anais...** Salvador: SBM, UFBA e Instituto do Milênio, 2004. P. 1-21.

CARVALHO, Joaquim de; PERES, Manuel (orgs). **Pedro Nunes: Obras**. Nova edição revista e anotada por uma comissão de sócios da Academia das Ciências. Vol. III. De erratis Orontii Finaei Regii Mahematicarum Lutetiae Professoris. Lisboa: Imprensa Nacional de Lisboa, MCMLX (1960).

DIAS, Marisa da Silva; SAITO, Fumikazu. Interface entre história da matemática e ensino: uma aproximação entre historiografia e perspectiva lógico-histórica. In: IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2009, Brasília. **Anais do IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. Brasília: SBEM, 2009.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Plana**. V. 9. 8. ed. São Paulo: Atual, 2005.

FINE, Oronce. **La composition et usage du quarre geometrique, par lequel on peut mesurer fidelement toutes longueurs, hauteurs, & profunditez, tant accessibles, comme inaccessibles, que lon peut appercevoir à l'ceil: Le tout reduit nouvellement en François, escrit, e pourtraict**. Paris: Avec Privilege, 1556. Disponível em: <http://www.bvh.univ-tours.fr/Consult/consult.asp?numtable=B372615206_15105&numfiche=129&mode=3&offset=0&ecran=0>. Acesso em: 02 nov. 2011.

FINEI, Orontii. **Solaribus Horologiis, & Quadrantibus, Libri quatuor**. Paris: Lutetiae Parisiorum, 1560. Disponível em: <<http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/ECHODocuViewfull?url=/mpiwg/online/permanent/library/N8XZR6KW/pageimg&viewMode=images&pn=3&mode=imagepath>>. Acesso em: 29 maio 2012.

FINEO, Orontio. **Aritmetica, Geometria, Cosmografia, e Orivoli, EtgliSpecchi**. Venetiá: Presso Francesco Franceschi Senese, 1587. Disponível em: <<http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/ECHODocuViewfull?mode=imagepath&url=/mpiwg/online/permanent/library/P9R3M8SW/pageimg&viewMode=images>>. Acesso em: 15 jun. 2010.

FINEO, Orontio. **Liber de geometria practica : sive de practicis longitudinum, planorum et solidorum hoc est, linearum, superficierum et corporum mensionibus alijsque mechanicis, ex demonstratis Euclidis elementis corollarius ; vbi [ubi] et de quadrato geometrico, et virgis seu baculis mensorijs [ensoriis]**. Argentorati: Knobloch, 1558. Disponível em: <<http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/ECHODocuViewfull?url=/mpiwg/online/permanent/library/661KYHE9/pageimg&viewMode=images&pn=5&mode=imagepath>>. Acesso em 29 maio 2012.

FIorentini, Dario; Lorenzato, Sergio. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. 3. ed. rev. Campinas, SP: Autores Associados, 2009.

FRANCO, Maria Laura Puglisi Barbosa. **Análise de conteúdo**. 2. ed. Brasília: Liber Livro Editora, 2005.

JAGUARIBE, Helio. **Um estudo crítico da histórica**. Tradução de Sérgio Bath. V. 2. São Paulo: Paz e Terra, 2001.

O'CONNOR, John; ROBERTSON, Edmund F. **The MacTutor History of Mathematics archives: Indexes of Biographies: Oronce Fine**. 2005. Disponível em: <<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Fine.html>>. Acesso em: 20 jun. 2010.

SAITO, Fumikazu; DIAS, Marisa da Silva. Articulação de entes matemáticos na construção e utilização de instrumentos de medida do século XVI. In: IX Seminário Nacional de História da Matemática, 9, 2011, Aracaju. **Coleção História da Matemática para professores**.

Aracaju: Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2011.