



www.enaphem.com



Lucienne Félix e a Estrutura Matemática: apontamentos sobre as relações de equivalências

Lucienne Félix and Mathematical Structure: notes on equivalence relations

*Jonathan Machado Domingues*¹

*Carla Coradini*²

Resumo

O presente artigo tem o objetivo de realizar apontamentos sobre a compreensão de Lucienne Félix a respeito da definição geral de equivalência, a partir das obras desta personagem. Justifica-se a escrita deste ensaio em virtude da relevância de Félix no cenário de participação e divulgação do ideário do Movimento da Matemática Moderna no continente europeu, ou seja, além das fronteiras que podem ser vistas a partir do oferecimento de curso de extensão e aperfeiçoamento, como ocorreu no Rio Grande do Sul e, ainda, de suas apropriações, que podem ser vistas em livros didáticos brasileiros, especificamente aquele elaborado por Osvaldo Sangiorgi. Em linhas de síntese, infere-se a necessidade de utilização de símbolos no ensino e aprendizagem de relações de equivalência, os quais direcionam para determinadas especificidades, possibilitando a manutenção de um diálogo matemático aos saberes algébricos.

Palavras-chave: História da Educação Matemática; Movimento da Matemática Moderna; Saberes Algébricos; Ensino.

¹ Mestre em Educação Científica e Tecnológica pela Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo Associado de Estudos e Pesquisas sobre História da Educação Matemática (GHEMAT-BRASIL). Jonathandomingues18@gmail.com.

² Mestra em Educação Matemática e Ensino de Física pela Universidade Federal de Santa Maria. carlacoradini77@gmail.com.

Considerações Iniciais

O Movimento da Matemática Moderna tem se apresentado como uma vaga pedagógica para os historiadores da educação matemática e, ainda, potente e fértil para o ensino e docência. Dito isso, este artigo apresenta alguns resultados preliminares de uma pesquisa que os autores começaram a realizar de maneira independente, acerca de uma importante personagem que contribuiu para a difusão do ideário da Matemática Moderna na Europa, a saber, Lucienne Félix.

Lucienne Félix (1901-1944) realizou sua formação em Matemática pela *École Normale de Sevres*, e um dos seus professores foi o docente Henri Lebesgue. Em relação à sua trajetória profissional, sinaliza-se que a iniciou em uma escola francesa. Além disso, foi ensaiadora e assistente de Lebesgue na *École Normale de Sèvres*. Ao longo de sua carreira, atuou na Associação de Professores de Educação Pública (Bock, 2021). Cabe destacar que Félix marcou presença nas reuniões organizadas pelo grupo de Calleb Gattegno: *Commission Internationale Étude Amélioration Enseignement Mathématiques* (CIEAEM), que pode ser mais bem compreendido em Búrigo (2012).

Figura 1: Lucienne Félix (com óculos) durante a reunião do CIEAEM em La Rochette-lez-Melun (França), 1952



Fonte: Bock, 2021, p. 37.

Félix (1969), ao iniciar sua compreensão a respeito das estruturas fundamentais matemáticas, especificamente quando do Movimento da Matemática Moderna, sinaliza, em relação à matemática escolar, que esta engloba múltiplas áreas, as quais foram consideradas separadas e/ou independentes, a saber:

álgebra, geometria, entre outras. Uma das justificativas se dá pelo fato de o discente apropriar-se da noção de números e, em seguida, realizar operações com eles, podendo, ainda, realizar o movimento de ensino e aprendizagem com as figuras geométricas que podem ser desenhadas e observadas. Neste sentido, infere-se, a partir de Félix (1969), que a geometria analítica possibilita a gênese do surgimento de ideias da separação não ser de forma plena e absoluta.

Sabe-se que no período de 1956-1957, ocorreram, em Paris, especificamente, em Sorbonne, dezenas de conferências, tendo, como participantes, renomados pensadores matemáticos, com a finalidade de apresentar, aos professores que atuavam em nível secundário, as estruturas fundamentais que compõem a Matemática Moderna. Bock (2021) afirma, em sua análise, que essa atividade formativa tinha um viés para Félix de não só expor, mas antes, tinha o direcionamento de compreender melhor seus alunos no processo de formação.

Sinaliza-se que, no Brasil, as ideias de Lucienne Félix a respeito das estruturas matemáticas circularam a partir de Osvaldo Sangiorgi, como pode ser visto em sua obra voltada ao ensino e docência, de nível secundário:

Na Matemática da Escola Secundária, há diversas partes consideradas tradicionalmente distintas entre si ou mais ou menos autônomas, tais como: aritmética, álgebra, geometria, trigonometria, etc. Essa distinção é intuitivamente justificada, desde que se estudem de um lado os números e suas operações e, de outro lado, as figuras geométricas, suas propriedades e construções das mais diversas. [...] Preocupando-se, então, a Matemática atual, muito menos com a natureza dos elementos que estuda (números, polinômios, pontos, vetores, etc...) e muito mais com o tipo de estruturas que caracterizam as relações entre esses elementos [...] é fundamental que a Escola de hoje [...] transmita aos seus jovens alunos as verdadeiras mensagens de que é portadora a Matemática contemporânea (Sangiorgi, 1965a, p. 103).

Nessas considerações iniciais, o intuito de apresentar a temática deste texto, a saber, “*As estruturas matemáticas que tangem a Matemática Moderna*”, não focalizavam numa constituição de saberes elementares, com os objetos das investigações em si. Conforme sinaliza Félix (1969), no que se referem às estruturas das relações com os objetos, que podem ser concebidas através da geometria tradicional que era contextualizada como teoria de operações com parâmetros da álgebra. Nesta mesma direção, outra exemplificação desta compreensão se dá a partir da exposição de figuras geométricas supérfluas, as quais possibilitam ao

discente, e até mesmo ao docente, realizar o movimento de ensino e docência de forma espontânea, com a finalidade de utilizar a imaginação nos esboços de apoio.

Desta forma, Búrigo (2012) afirma que Lucienne Félix fundamenta o protagonismo das estruturas num viés lógico, ou seja, “[...] pela generalidade ou abrangência das conclusões que o seu estudo propicia, ele ênfatiza a ideia de uma matemática mais acessível aos alunos” (Búrigo, 2012, p. 07, *grifo nosso*), que possibilita a levantar a hipótese de que Sangiorgi encontrava-se em diálogo com ideias providas de Félix.

Nesta direção, em relação às estruturas algébricas, Félix (1969) sugere que deveria haver um diálogo com as estruturas topológicas, podendo serem utilizadas por meio dos seguintes termos: (a) vizinhança, (b) limite e (c) continuidade. Através deste entendimento, poderia, assim, haver um alargamento de conceitos elementares (de espaço) geométricos até a chegada de uma possível análise matemática.

Detalha-se que, Piaget (1979) sinaliza que estrutura é:

[...] Uma estrutura é um sistema de transformações que comporta leis enquanto sistema (por oposição às propriedades dos elementos) e que se conserva ou se enriquece pelo próprio jogo de suas transformações, sem que estas conduzam para fora de suas fronteiras ou façam apelo a elementos exteriores. Em resumo, uma estrutura compreende os caracteres de totalidade, de transformações e de autoregulação (Piaget, 1979, p.8).

Diante do exposto, este artigo tem, como objetivo principal, realizar apontamentos sobre a compreensão de Lucienne Félix a respeito da definição geral de equivalência. Para tanto, considera-se o que Félix (1969) expõe em sua obra, ou seja, expressões de extrema relevância, as quais podem ser entendidas como definição de um significado, com protagonismo para determinar certas percepções. Para isso, se torna necessária uma exposição de símbolos que condiz com as especificidades das condições sob as quais se mantêm diálogos matemáticos.

Para haver a contemplação do objetivo elencado anteriormente é necessária a utilização de símbolos, os quais possibilitam, de acordo com Félix (1969), a realização de um processo que envolve os enunciados e as sentenças num formato de fórmulas que acabam se diferenciando a partir da linguagem, o que evidencia, assim, o conteúdo lógico matemático.

Assim sendo, Félix (1960) compreende que a noção de relação de equivalência é, portanto:

[...] o princípio fundamental de toda classificação: dentro do conjunto mais ou menos conhecido dos elementos dos quais falamos, conjunto chamado referencial, certos elementos são considerados análogos, como equivalentes entre eles, sob um certo ponto de vista (Félix, 1960, p. 01).

O presente artigo, para além das considerações iniciais, se estrutura da seguinte maneira: Movimento da Matemática Moderna - um breve panorama europeu; relação de equivalência: alguns apontamentos, e finda, com algumas considerações e encaminhamentos futuros.

Movimento da Matemática Moderna: um breve panorama europeu

A partir de Gispert e Schubring (2011) em relação ao campo investigativo histórico em que se encontra imersa a educação matemática, mais especificamente o decorrer do século XX, podendo-se utilizar, como exemplo, a nação francesa, tendo em vista que ocorram, em 1902, múltiplas reformas de ensino em nível da educação secundário, que, de forma bem similar e intrínseca, ocorreu na Alemanha, a partir de Felix Klein (1849-1925), com gênese no ano de 1908, por meio do seguinte movimento formativo: *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI).

Kántor e Schubring (2008) apontam a existência de uma assistência direcionada ao ensino e à formação, com ênfase na prática de ensino do nível secundário, o qual se encontrava em um movimento de transformações juntamente com a universidade, com protagonismo, com relação à rubrica funções.

Nesta direção, tendo em vista que o artigo possui um viés histórico, sinaliza-se que, em virtude da Primeira Guerra Mundial que ocorreu, e a qual afetou diretamente o espaço europeu, acabou-se a restringir a cooperação que existia no referido marco temporal. Dito isso, pode-se afirmar que o ICMI acabou não tendo o devido sucesso que era esperado. Igualmente, observou-se, a partir de Gispert e Schubring (2011), que na década de 1950 iria haver um movimento de grande valia de cooperação internacional para o ensino e docência, que ficou caracterizado como Matemática Moderna.

Na década de 1950, especificamente no ano de 1952, foi criado, no continente europeu, especificamente por Caleb Gattegno, a *Commission Internationale Étude Amélioration Enseignement Mathématiques* (CIEAEM), que tinha um propósito a ser realizado, a saber, constituir redes formativas de formação, entre outros ramos voltados para a aprendizagem, com interesses voltados à articulação de saberes provindos da pedagogia e da psicologia, o que pode ser notado através das investigações de Jean Piaget, partindo-se de uma matemática renovada, em diálogo com o grupo Bourbaki.

Nesta direção, aponta-se, a partir de Búrigo (2022), que havia um enfoque idealizado pelos Bourbaki franceses que, para Félix, havia direcionamento de “[...] uma alternativa ao “dogmatismo”, ao focar não mais os objetos particulares e as relações entre eles, mas as estruturas dessas relações” (BÚRIGO, 2022, p. 3).

Doravante, registra-se que, em relação ao engajamento que havia presente no “movimento bourbakista”, este foi proporcionado pela participação em dois grupos que surgiram nesse período: “[...] a Comissão Internationale pour l’Étude et l’Amélioration de l’Enseignement *des Mathématiques* (CIEAEM) e o dos militantes modernizadores da Association des Professeurs des Mathématiques de l’Enseignement Public (APMEP)” (BÚRIGO, 2022, p. 3).

Assim, compreende-se, neste artigo, que o Movimento da Matemática Moderna foi responsável pela transformação que ocorreu à época, numa perspectiva estrutural do cenário educativo, que influenciou os currículos, o ensino e a formação de Matemática.

O presente artigo irá analisar, a seguir, uma materialidade direcionada ao ensino primário, corroborando-se com d’Enfert (2010), o qual afirma que a existência do seguinte desafio não é mais propiciar aos discentes uma “[...] bagagem de conhecimento prático necessário para o cotidiano” dos alunos que, em sua maioria, concluem seus estudos ao final do ensino fundamental; mas para prepará-los para o ensino secundário (d’Enfert, 2010 p. 55, *tradução livre*).

No próximo tópico, há de apresentar-se o resultado e a análise do respectivo artigo: Relações de Equivalência: alguns apontamentos.

Relações de Equivalência: alguns apontamentos

O conceito de relação de equivalência é bastante intuitivo. Conforme a concepção de Félix (1960, p. 69) tem-se que: “A noção de classe de equivalência é o princípio fundamental de toda classificação: dentro do conjunto mais ou menos conhecidos dos elementos dos quais falamos, conjunto chamado “referencial”, certos elementos são considerados análogos, como equivalentes entre eles, sob um certo ponto de vista.”

A relação de equivalência era uma das estruturas que Catunda (1962) indicava para a construção de objetos matemáticos e deve contemplar as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva quaisquer que sejam os elementos do conjunto considerado, representadas na Figura 2:

Figura 2: Definição geral de equivalência

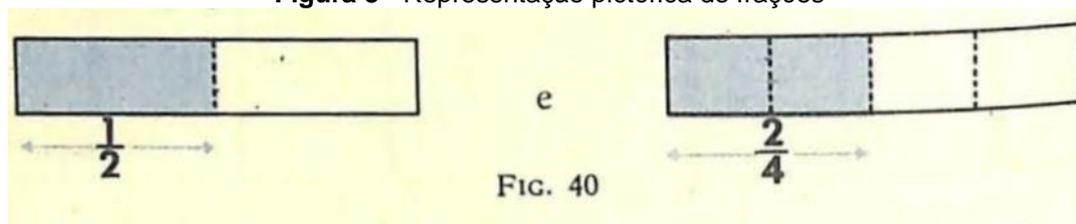
$$\left\{ \begin{array}{l} 1. \forall a, a \equiv a \quad (\text{Reflexivität}); \\ 2. \forall a, \forall b : [a \equiv b] \Rightarrow [b \equiv a] \quad (\text{Symmetrie oder} \\ \text{Reziprozität}); \\ 3. \forall a, \forall b, \forall c : [a \equiv b \text{ und } b \equiv c] \Rightarrow [a \equiv c] \quad (\text{Transitivität}). \end{array} \right.$$

Fonte: Félix, 1969, p. 07.

A propriedade reflexiva exposta na Figura 2 pode ser exemplificada a partir do conjunto dos números reais, onde se tem que, todo qualquer número real é igual a ele mesmo. Já, a propriedade simétrica que nos permite trocar o lado esquerdo e o lado direito de uma equação. Portanto, se um segundo elemento é tido como equivalente a um primeiro, o primeiro também deve ser equivalente ao segundo. Por sua vez, a propriedade transitiva possibilita dizer que, se dois elementos são equivalentes entre si, e um terceiro é equivalente a um deles, porque é equivalente ao outro também.

A noção de equivalência durante o MMM passa a estar presente em temas como o ensino de frações. Através do exemplar integrante da coleção Matemática Curso Moderno Volume 1, para os ginásios, Sangiorgi (1965), destinado a alunos da 5ª série ginásial, por meio dos exercícios de fixação, identifica-se as seguintes representações (Figura 3):

Figura 3 - Representação pictórica de frações



Fonte: Sangiorgi, 1965, p. 174.

Ainda que as representações evidenciadas na Figura 3, apresentem termos distintos, como $1/2$ e $2/4$, estes são indicados pelas partes coloridas de retângulos iguais e, portanto, representam o mesmo valor. Félix (1969) compreende que, quando ocorre um acordo com o propósito de os membros de um conjunto determinar aqueles que podem ser concebidos como equivalente, são compreendidos como relação de equivalência. Nesta direção, devem se fazer presentes determinados recursos para haver essa compreensão, a saber, um entendimento reflexivo, simétrico, intercalando-se com a relação transitiva que configura numa relação de equivalência.

Tendo em vista que dentro de um conjunto “E” existem diversos vestígios com relação de equivalência, acaba-se fazendo presente todo um subconjunto, no qual existem elementos equivalentes a outro elemento, o que pode ser compreendido, a partir de Félix, como classe de equivalência. Isto quer dizer que todos os membros de uma classe, baseando-se na lei da transitividade, podem ser considerados, mutuamente, equivalentes.

Nesta compreensão, infere-se a partir do ‘m’ em ‘E’, “[...] tacitamente o caso que m é o único membro de sua classe se não houver outros há elementos equivalentes a ela” (Félix, 1966, p. 07, *tradução livre*). Neste sentido, ‘E’, torna-se a união de classes que está de acordo com uma relação de equivalência explicada sobre ‘E’, com uma classificação e/ou decomposição determinada em classes de equivalência sobre ‘E’.

Partindo desta premissa, Félix (1966) pontua que, cada classe de equivalência acaba sendo caracterizada por qualquer um de seus elementos, que podem proporcionar como representante dessa classe. A partir disso, pode-se levantar a seguinte situação, como exemplo:

[...] o critério de divisibilidade por 5 determina uma decomposição do conjunto dos inteiros em cinco classes, cujos representantes são os cinco restos possíveis 0, 1, 2, 3, 4. No conjunto das retas do plano, toda reta de uma família de paralelas determina a mesma direção; cada direção é uma classe de equivalência em relação à relação de concorrência. Trata-se, portanto, de uma relação de equivalência (Félix, 1966, *tradução livre*).

Conforme Félix (1960), o Jardim da Infância pode ser um momento privilegiado para o ensino de teoria dos conjuntos, classes de equivalência e topologia. Souza e Búrigo (2022) buscaram vestígios de como e por meio de quem o ensino da Matemática Moderna chegou ao Rio Grande do Sul, particularmente no curso de formação dos professores pré-primários do Instituto de Educação General Flores da Cunha de Porto Alegre nos anos 1960 e 1970.

A partir dessa premissa, pode ser visto, através de Félix (1960), que as noções de classe e de relação de equivalência são consideradas de grande valia para o movimento de aprendizagem, como já sinalizado anteriormente, no jardim de infância, uma vez que é um saber que será constantemente utilizado ao longo da formação do estudante. Desta forma, evidencia-se que a importância da utilização dessas noções elementares acaba a tornar-se "[...] inconscientes e parecem novas, desde que as tomemos como objeto de estudo num nível superior. Antes de examinar a sua sequência ao longo da escolaridade, recordemos de que se trata" (Félix, 1960, p. 01).

No jardim de infância, em relação ao tratamento e utilização das classes de equivalência no jardim de infância, infere-se que houve potenciais elementos direcionados para os saberes algébricos, especificamente no tocante aos conjuntos e à topologia, sendo utilizados antes das rubricas de medidas, e a abordagem das classes de equivalências, antes da apresentação da conceituação e compreensão de número.

Félix (1960) apresentou algumas exemplificações, em outras palavras, falas que podem aparecer no jardim de infância ao tratar sobre esses elementos algébricos sinalizados anteriormente: "Se a criança classificar objetos por cor e procurar os amarelos, se ela perguntar: "Este ou aquele?", em lugar de responder: "É a mesma coisa", respondamos: "É equivalente" e falemos sobre a classe dos objetos amarelos" (Félix, 1960, p. 04, *grifo nosso*).

Em relação ao curso elementar e ao curso ginásial identifica-se números, contagem, medição, na medida em que se configuram, como consequências desses movimentos, o aparecimento de novas operações a serem utilizadas. Porém, de acordo com Félix (1960), existe uma dificuldade enorme para trabalhar relação e classe de equivalência com este nível de escolaridade. Doravante, "[...] as barrinhas coloridas do material Cuisenaire simboliza perfeitamente o mais simples dessas classes que nós chamamos de números, e sobre as quais definem-se as operações" (Félix, 1960, p. 04, *grifo nosso*).

No que se refere ao contar:

[...] depois de ter aprendido de cor uma lista de palavras, um, dois, três, quatro, cinco,...., atribuir a cada classe uma dessas palavras. Deste modo, nós voltamos à correspondência bi-unívoca entre os elementos de um protótipo de classe estudada (por ex., conjunto dos meus dedos) e as palavras de lista tomadas em ordem a partir de 'um'. A última palavra pronunciada é o nome do número. Eu digo 'cinco', mas se tivesse tomado a lista 'violeta', azul, verde, amarelo,...., eu teria dito amarelo (Félix, 1960, p. 05)

Félix (1960, p.05) considera esse movimento de aprendizagem "[...] muito complexo, mas a criança é tão inteligente que lhe basta um ou dois anos para ter um conhecimento dos 100 primeiros números, suficiente para utilizá-los e fazer algumas operações". Neste sentido, Félix (1960) demonstra que, no 1º ano elementar [...] ela ainda não esqueceu que se trata de classes de equivalência dentro dos conjuntos que ela manipula ou desenha" (Félix, 1960, p. 05).

No movimento de medir e das rubricas direcionadas às medidas, infere-se que o processo de ensino e aprendizagem indicado por Félix (1960) é regido pela definição de práticas e experiências, as quais podem ser consideradas convenientes e acabam a dialogar com a relação de equivalência, com o propósito de identificar e fazer existir a consideração entre as classes de um determinado elemento de um conjunto dos números, com a resultante que tenha uma correspondência biunívoca.

[...] é preciso, no curso ginásial, introduzir os números decimais, mas ainda uma classe de equivalência definida por ter a mesma medida, torna-se terrivelmente rica: 5 metros, 5 gramas, 5 horas, 5 francos, é bem mais variado do que 5 ovos, 5 porta-ovos, 5 dedos, e isso não pode realmente, ser desenvolvido, digo desenhado. Deve-se fazer intervir uma outra relação de equivalência: ser de grandezas da mesma espécie (Félix, 1960, p. 5).

Dessa forma, infere-se a partir de Félix (1960), partindo da premissa exposta anteriormente, que se acaba tendo um protagonismo da álgebra dos números, e a álgebra dos conjuntos acaba, de certa maneira, perdendo um protagonismo no ensino e aprendizagem. Dito isso, pode-se considerar como uma espécie de "[...] progresso técnico e uma consciência, o abandono de todo um domínio matemático. Precisemos em toda ocasião a correspondência biunívoca entre o conjunto de grandezas e o conjunto de números" (Félix, 1960, p. 6).

Considerações Finais

O presente ensaio teve como objetivo realizar apontamentos sobre a compreensão de Lucienne Félix a respeito da definição geral de equivalência. Diante disso, a partir das obras da personagem em questão, infere-se a necessidade de utilização de símbolos, os quais direcionam para determinadas especificidades, as quais possibilitam a manutenção um diálogo matemático, mais especificamente direcionado aos saberes algébricos.

Partindo dessa premissa, infere-se que a utilização de símbolos para o ensino e aprendizagem da relação de equivalência é de grande valia para a emersão dos discursos e sentenças que se caracterizam em fórmulas, as quais possibilitam por meio do recurso de linguagem matemática, a exposição de elementos que caracterizam uma lógica matemática.

Assim, as literaturas cinzentas de Félix refletem na compreensão da relação de equivalência como elemento protagonista para haver, de certo modo, a categoria e a classificação, a partir de todo um conjunto referencial, e até aqueles elementos compreendidos como análogos, mas que possuem uma equivalência entre eles, partindo-se de uma perspectiva.

Em relação ao jardim de infância, a relação de equivalência se apresenta e possui uma inclinação a partir da abordagem de tais rubricas, a saber: conjuntos, a topologia, sendo utilizadas antes das rubricas de medidas, enquanto a abordagem das classes de equivalências é utilizada antes da apresentação da conceituação e compreensão de número, existindo, portanto, protagonismo dos saberes algébricos.

Em contrapartida, no que se refere ao curso elementar e ao curso ginásial, a abordagem da relação de equivalência encontra-se evidenciada a partir dos saberes

de números, contagem, medição, o que revela a apresentação, aos discentes, de novas formas e maneiras de se realizar operações matemáticas.

Referências

Búrigo, E. Z. (2012). Sessão 9: Lucienne Félix no Brasil: repercussões de um movimento em curso na França dos anos 1960 . *Anais Do ENAPHEM - Encontro Nacional De Pesquisa Em História Da Educação Matemática*, (1), 1-17.

Catunda, O. (1962). *Curso de análise matemática – v. 1*. São Paulo: EDUSP.

D'Enfert, R. (2010). En attendant la réforme. Disciplines scolaires et politiques éducatives sous la IVe République, Grenoble: Presses universitaires de Grenoble.

Félix, L. (1960). *As relações de equivalência*. Secretaria de Estado dos Negócios da Educação e Cultura: Rio Grande do Sul.

Félix, L. (1966). *The Modern Aspect Of Mathematics*. Montana: Kessinger Publishing.

Félix, L. (1969). *Elementarmathematik in moderner Darstellung*. Braunschweig: Vieweg.

Gispert, H., & Schubring, G. (2011). Societal, Structural, and Conceptual Changes in Mathematics Teaching: Reform Processes in France and Germany over the Twentieth Century and the International Dynamics. *Science in Context*, 24(1), 73-106.

Kántor-Varga, T. & Schubring, G. (2008). Emanuel Beke. Recuperado de: <http://www.icmihistory.unito.it/portrait/beke.php>.

Piaget, J. (1979). *O estruturalismo*. São Paulo: Difel.

Sangiorgi, O. (1965a). Sistemas matemáticos e estruturas. In: GEEM. *Matemática moderna para o ensino secundário*. São Paulo: IBCEC.

Sangiorgi, O. (1965b). Introdução da matemática moderna no ensino secundário. In:

GEEM. *Matemática moderna para o ensino secundário*. São Paulo: IBCEC.

Souza, J. de, & Burigo, E. Z. (2022). Matemática Moderna no jardim de infância: um estudo com documentos do acervo do Laboratório de Matemática do Instituto de Educação General Flores da Cunha. *Seminário Temático Internacional*, 1(1), 1-15.