



## Estudo do conceito de frações equivalentes em obras piagetianas: delineando uma pesquisa

### Study of equivalent fractions concept in Piagetian literature: outlining a research

*Barbara Winiarski Diesel Novaes*<sup>1</sup>

*David Antônio da Costa*<sup>2</sup>

#### Resumo

O presente trabalho objetiva apresentar aspectos sobre o delineamento da pesquisa em desenvolvimento no Estágio Pós-Doutoral no Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica da Universidade Federal de Santa Catarina cuja temática versa sobre o conceito de frações equivalentes em obras piagetianas com previsão de período voltado a consulta dos Arquivos de Jean Piaget na Universidade de Genebra (UNIGE). Adota como referencial teórico-metodológica aportes da História Cultural, sócio-história e da História da educação matemática. Como resultados preliminares trazemos os mecanismos de busca dos arquivos de Jean Piaget, a importância da cooperação entre os integrantes de um grupo de pesquisa que permitem atalhos no acesso a pesquisadores renomados, referência bibliográficas e questões de bastidores. No Brasil, estudos que relacionam frações e Piaget começam a aparecer a partir da década de 1980. Esperamos que a consulta aos arquivos de Jean Piaget em Genebra possa aprofundar e trazer contribuições para a caracterização de uma matemática do ensino de frações equivalentes em bases piagetianas.

**Palavras-chave:** Jean Piaget; Frações equivalentes; Movimento da matemática moderna; Estruturalismo; Construtivismo.

<sup>1</sup> Doutora em Educação pela Pontifícia Universidade Católica do Paraná (PUCPR). Atualmente é professora do Curso de Licenciatura em Matemática e do Programa de Pós-graduação em Matemática (PROFMAT) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná do Campus Toledo (UTFPR-TD). Também atua no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências, Educação Matemática e Tecnologias Educativas (PPGECEMTE) na Universidade Federal do Paraná (UFPR) setor Palotina. É pesquisadora líder do Grupo de Pesquisa em História da educação matemática – Paraná (GHEMATPR). E-mail: barbaradiesel@gmail.com.

<sup>2</sup> Doutor em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUCSP). Atualmente é professor adjunto do Departamento de Metodologia de Ensino e do Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica da Universidade Federal de Santa Catarina. É pesquisador líder do Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática (GHEMAT-SC). E-mail: prof.david.costa@gmail.com.

## Considerações iniciais

As contribuições de Jean Piaget para a Educação Matemática me inquietam desde as pesquisas desenvolvidas no mestrado e no doutorado em educação cujo foco foi o ensino de matemática em Escolas Técnicas Industriais ao tempo do Movimento da Matemática Moderna (MMM) (Novaes, 2007, 2012). Sob orientação da professora Neuza Bertoni Pinto, naquela altura nosso objetivo era compreender como a teoria piagetiana fundamentou a proposta curricular da Matemática Moderna na qual as estruturas do pensamento do sujeito tendem a organizar-se seguindo um modelo lógico-matemático.

Ao longo da trajetória profissional fui tangenciando conceitos piagetianos nas pesquisas, nas orientações, nas disciplinas ministradas na graduação (psicologia de educação, psicologia da educação matemática, História da educação matemática), na maioria das vezes recorrendo a fontes secundárias ou pesquisas pós-piagetianas como as de Terezinha Nunes e Gerard Vergnaud.

Em 2015, com o intuito de aproximar meu projeto individual de pesquisa com o projeto em curso no Ghemat Brasil sobre os saberes elementares matemáticos: a aritmética, a geometria e o desenho no curso primário brasileiro no período de 1890-1970 minhas pesquisas voltaram-se para a temática das frações numa perspectiva histórica que resultaram em algumas produções: frações equivalentes (Marques, Novaes, 2019; Marques, 2021), frações ensinadas em cadernos de alunos na transição do quinto para o sexto ano (Heck, Novaes, 2021), o sentido das frações atribuído por um coletivo de professores (Novaes et al., 2021), frações na reta numérica (Schrenk, 2021), frações em livros didáticos e manuais pedagógicos (Amrein, 2017; Amaral, Novaes, 2019; Amancio, Novaes, 2019), materiais didáticos para ensinar frações (Novaes et al., 2020a, 2020b), frações equivalentes e Escala Cuisenaire (Nierri, Novaes, 2020).

Nos últimos meses, a orientação do trabalho de conclusão (TCC) de curso “A matemática ‘moderna’ do ensino das frações equivalentes nos livros do NEDEM<sup>3</sup>” (Marques, 2021) foi o catalizador para que retomasse os estudos sobre Jean Piaget,

---

<sup>3</sup> Liderado pelo Prof. Osni Dacol, o Núcleo de estudo e difusão do ensino da matemática (NEDEM) foi um grupo de estudo criado ao tempo da matemática moderna no estado do Paraná.

MMM e as frações equivalentes. O objetivo do TCC foi caracterizar as frações equivalentes na coleção de livros didáticos para os primeiros quatro anos de escolarização valendo-se das categorias sequência, significado, graduação, exercícios e problemas (Morais et al., 2021). As autoras (Holzmann et al., 1969) da coleção ressaltam que procuraram seguir os princípios da aprendizagem de Jean Piaget provenientes de seus estudos sobre a psicologia genética para a elaboração dos livros. Escrito no auge do MMM Paranaense, o estudo concluiu que na coleção, o ensino das frações equivalentes parte de experiências concretas (frações de coleções, uso de materiais como os discos de frações) que gradativamente passam a ser semi-concreta (quadros de equivalência, reta e linha numérica) para finalmente chegar à fase abstrata (classes de equivalência, propriedade, rigor matemática, simbologia formal).

Com o afastamento integral para pós-doutoramento surge a possibilidade de pesquisar sobre a teoria piagetiana e frações. Há vários conceitos que precisam ser aprofundados: equivalência, relações de equivalência, classes de equivalência, frações equivalentes, concreto/abstrato, atividade, conservação das quantidades discretas e contínuas, linha/reta numérica e números racionais. Minha orientadora de mestrado e doutorado, a professora Neuza Bertoni Pinto sempre falou muito dos arquivos de Jean Piaget em Genebra, de ler Piaget no original e que o conhecimento que temos de sua vasta contribuição para a educação e educação matemática é muito limitado. O sonho dela passou a ser a minha necessidade.

Diante da problemática anunciada o objetivo do projeto<sup>4</sup> é buscar nos arquivos de Jean Piaget no Instituto Jean-Jacques Rousseau em Genebra textos e documentos produzidos por Jean Piaget<sup>5</sup> e/ou em parceria que auxiliem na

---

<sup>4</sup> O estágio pós-doutoral foi iniciado em 20 de junho de 2022.

<sup>5</sup> Parrat-Dayana (1997) divide a obra de Piaget em quatro fases: fase egocêntrica (anos 1920 e a primeira metade dos anos de 1930), fase funcionalista (nascimento dos filhos de Piaget na segunda metade dos anos de 1930), fase estruturalista (situa-se entre as décadas de 1940 e 1960, maior fase dos trabalhos de Piaget) e fase de síntese (meados da década de 1960, reavaliação das questões funcionais e integração ao trabalho estrutural). A princípio não iremos limitar nosso estudo a uma das fases, pois as leituras prévias mostram que o tema frações aparece em mais de uma fase de suas pesquisas.

caracterização de uma matemática do ensino de frações equivalentes em bases piagetianas. O artigo discorre sobre resultados preliminares do projeto recém iniciado e objetiva apresentar aspectos do delineamento da pesquisa.

### **Primeiro aspecto - Apropriação dos estudos piagetianos para ensinar matemática no Brasil**

O artigo “O Ensino de Cálculo” de Onofre Penteadó Júnior publicado na Revista de Pedagogia em 1958 pode ser considerado uma primeira apropriação dos estudos piagetianos e que anuncia novos tempos para as práticas pedagógicas da matemática no ensino primário (Valente, 2012). Anterior a esse período os trabalhos de Jean Piaget eram utilizados no Brasil no âmbito da Escola Nova (Vasconcelos, 1996).

No trabalho de conclusão de curso que resultou no capítulo “Jean Piaget e o ensino da matemática elementar no curso primário: o que dizem as revistas pedagógicas (1950-1970)?” (Feitoza, Novaes, 2017) realizamos uma busca nas revistas pedagógicas disponíveis no Repositório de Conteúdo Digital da Universidade Federal de Santa Catarina na coleção História da educação matemática<sup>6</sup> sob coordenação do Professor David Antônio da Costa. Verificamos que havia três trabalhos publicados na Revista de Pedagogia de São Paulo que relacionavam o ensino de cálculo a teoria de Jean Piaget de autoria de Onofre Arruda Penteadó Junior (1958, 1961, 1963). Penteadó Junior (1958), professor-catedrático de Didática Geral e Especial da FFCL da USP afirma que “o pensamento matemático se constrói, na criança, a partir do real e geneticamente se desenvolve até atingir o nível abstrato em que ele age independente do suporte anterior, que é o sensível ou o real”. Observamos que essa afirmação está fundamentada na teoria de Jean Piaget.

No Brasil, a teoria piagetiana fundamentou a proposta curricular da Matemática Moderna na qual as estruturas do pensamento do sujeito tendem a organizar-se seguindo um modelo lógico-matemático. Os conteúdos matemáticos estariam todos postos em relação. Há grandes estruturas matemáticas que relacionam tudo isso, as estruturas-mãe: algébricas, topológicas e de ordem, teorizadas pelo grupo Bourbaki

---

<sup>6</sup> <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/1769> acesso em 27 de agosto de 2022.

e que Jean Piaget relaciona com as estruturas de pensamento (Novaes, 2012).

Burigo (1990) afirma que no âmbito do GEEM – Grupo de Estudos do Ensino da Matemática “Moderna”, fundado em São Paulo em 1961 e coordenado por Osvaldo Sangiorgi, um dos idealizadores da reforma brasileira, não há indicações de que se tenham realizado estudos ou debates mais profundos sobre a teoria de Piaget no que diz respeito aos métodos ativos, ao pensamento lógico-matemático e à construção de conceitos matemáticos.

Para Ubiratan D’ambrosio (1986) na década de 1970 houve profundas distorções e uma percepção parcial e estreita da visão piagetiana que resultaram na “Matemática Moderna, que se fez em grande parte como uma aplicação apressada e distorcida das teorias de Jean Piaget ao currículo” (D’ambrosio, 1986, p.50).

No artigo “As contribuições da Teoria de Jean Piaget para o Movimento da Matemática Moderna” que apresentamos no Primeiro Seminário Paulista de história e educação matemática finalizamos o artigo indagando que “como o Movimento da Matemática Moderna se disseminou por vários estados brasileiros, é preciso pesquisar as marcas da influência das ideias piagetianas nas diferentes práticas escolares do referido Movimento” (Novaes et al., 2005).

Pesquisas produzidas sobre o MMM no estado do Paraná<sup>7</sup> (Portela, 2009) revelam que a teoria piagetiana parece ter sido uma teoria-mãe que norteou a proposta curricular elaborada pelo Núcleo de Estudos e Difusão do Ensino de Matemáticas (NEDEM), grupo coordenado por Osny Dacol (Novaes, Pinto, 2019) que dinamizou a inserção do MMM em nível local.

## **Segundo aspecto – Estudos sobre a teoria piagetiana e as frações no Brasil**

No Brasil, na década de 1980<sup>8</sup>, várias pesquisas envolvendo uma visão de

---

<sup>7</sup> Por residir e trabalhar no Paraná, minhas pesquisas focalizam em grande medida as transformações na matemática escolar que ocorreram neste estado.

<sup>8</sup> De agosto do 2021 a junho de 2022, orientei o projeto de iniciação científica que tem por objetivo analisar a proposta de Zoltan Dienes para ensinar frações no ensino primário, materializada por meio de duas obras publicadas pela editora EPU na década de 1970 “Frações” e “Frações – fichas de trabalho”. O autor provavelmente se apropriou de conceitos piagetianos, mas precisamos aprofundar os estudos e dessa forma não traremos o autor para esse trabalho.

desenvolvimento piagetina procuram corrigir distorções, apontadas por Ubiratan D'ambrósio, sobre a teoria piagetiana aplicada aos estudos de ensino e aprendizagem da matemática. Um exemplo são as pesquisas desenvolvidas por Terezinha Nunes Carraher e colaboradores que adapta os conceitos a realidade brasileira. Um divisor de águas foi o livro "Na vida dez na escola zero" (Carraher et al., 2006) em que os pesquisadores aplicam o método clínico a filhos de feirantes do Recife (por exemplo) e concluem que eles possuem todas as estruturas cognitivas necessárias à aprendizagem. Além disso, há vários trabalhos de mestrado desenvolvidos por pesquisadores vinculados a Universidade Federal de Pernambuco, principalmente na década de 1980 sobre a temática das frações.

Um trabalho precursor sobre a compreensão das quantidades representadas por frações por bases piagetianas foi a dissertação de mestrado "Desenvolvimento dos conceitos de fração e de conservação em quantidades discretas e contínuas" defendida por José Maurício de Figueiredo Lima em 1981 no Departamento de Psicologia de Universidade Federal de Pernambuco. Adaptou a metodologia utilizada por Piaget, Inhelder e Szeminska (1960) em "*The Child's Conception of Geometry*" para investigar a compreensão das quantidades representadas por frações.

Em um dos capítulos do livro Aprender Pensando - contribuições da teoria cognitiva para a educação, organizado por Terezinha Nunes, Lima (2012) apresenta um recorte de sua dissertação de mestrado. Contextualiza ontologicamente que antigas civilizações necessitavam de expressões numéricas de medição de terras e que estas raramente remetiam a um número inteiro, "para obter uma maior aproximação da medida real da grandeza (comprimento, área, etc.) foi forçoso subdividir a unidade num certo número de partes iguais" (Lima, 2012, p.103), as frações de unidade. E complementa, "daí o fato de o estudo de fração estar quase sempre ligado à área de figuras geométricas" (Lima, 2012, p.104). Fundamentado em Piaget, alerta para o risco da criança não ter adquirido ainda a conservação de quantidades contínuas (área, comprimento, etc). Se isso ocorrer "uma das condições essenciais do conceito de frações não está sendo observada, qual seja, a soma das frações constituídas de um todo tem que ser percebida pela criança como igual a esse

todo” (Lima, 2012, p.104). O conceito de fração é uma aquisição do estágio das operações concretas.

Segundo Piaget<sup>9</sup> *apud* Lima (2012) há sete condições essenciais à existência de fração: 1) A existência de uma totalidade divisível; 2) Existência de um número determinado de partes; 3) Esgotamento do todo; 4) Relação entre o número de partes e o número de cortes; 5) Igualização das partes; 6) Conceptualização de cada fração como parte de um todo em si, suscetível de novas divisões; 7) Atendimento ao princípio da invariância: a soma das frações constituídas é igual ao todo inicial.

Na aplicação de uma situação de dois retângulos, um inteiro e outro dividido em duas partes iguais, Lima (2012) faz a seguinte apropriação da teoria piagetiana:

Deixa-se a criança tentar resolver, dando-se, eventualmente pistas, que poderão indicar caminhos que levam a solução. O estudo das equivalências de áreas, por meio de superposição, é fundamental para determinar os elementos da classe de equivalência de uma fração, como também realizar as operações aritméticas básicas com uma fração (Lima, 2012, p.114).

A conservação de quantidade discreta antecede a conservação de quantidade contínua, em geral, em torno de um ano. O contexto das coleções já é familiar aos alunos desde muito cedo o que facilita muito o trabalho com fração de quantidade discreta (Lima, 2012).

Para Lima (2012) o estudo da equivalência de frações é fundamental para o domínio das frações e deve ser cuidadosamente trabalhado pela criança para assegurar que haja compreensão de cada equivalência estabelecida. Para garantir a compreensão na construção da classe de equivalência de uma fração e as equivalências resultantes de operações entre frações, a criança precisa executar ela mesma as equivalências entre subcoleções numa atividade comprobatória que leve a compreensão a partir da vivência da criança sobre uma representação concreta.

Para D’Augustine (1976 p. 144) “a ideia de números fracionários é um conceito sofisticado, que requer da criança mais maturidade e maior base Matemática do que

---

<sup>9</sup> Provavelmente retirado da obra que pretendo aprofundar no estágio pós-doutoral: PIAGET, J.; INHELDER, B. e SZEMINSKA. — The child's conception of geometry. Trad. de E. A. Lunzer, New York, Harper e Torchbooks, 1960.

o conceito de número natural”. Complementando essa ideia, Nunes (2012) destaca dois desafios a compreensão por parte do aluno. Primeiro é que a cardinalidade aplicada ao campo dos inteiros não se aplica no campo das frações. Nos inteiros, “duas quantidades equivalentes são representadas pelo mesmo número; reciprocamente, se duas quantidades são representadas pelo mesmo número, elas são equivalentes, e se duas quantidades são representadas por números diferentes elas não são equivalentes” (Nunes, 2012, p.13). O que não se aplica no caso das frações em que a mesma quantidade pode ser representada por números diferentes  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{2}{4}$  representam a mesma quantidade, mas  $\frac{1}{2}$  de 8 e  $\frac{1}{2}$  de 20 não indicam a mesma quantidade, embora a fração seja a mesma, pois as frações são representações relativas a unidades e todos específicos. Um segundo aspecto a ser observado é que “a ordem das quantidades representadas por inteiros é igual à ordem em que enunciamos na contagem” (Nunes, 2012, p. 14) o que não ocorre com as frações. Usamos dois números para representar as quantidades e, por exemplo, se o numerador é constante, a maior fração é aquela que tem o maior denominador. Por outro lado, se o denominador for constante, a maior fração será aquela com o menor denominador o que causa muitas dificuldades nos alunos ao relacionar quantidades e representação numérica com números menores que a unidade.

O ensino de frações com denominadores diferentes, como por exemplo,  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{3}$  deveriam ser ensinados após as frações equivalentes (Aguiar, 1980<sup>10</sup>).

### **Terceiro aspecto – delineando a pesquisa rumo a tomada de decisão**

Adota-se como referência teórico-metodológica aportes da História Cultural, representada por historiadores como: De Certeau (1982), Chervel (1990), Chartier (1990), Julia (2001), Prost (2008), Burke (2016). Também por teóricos da sócio-história como Hofstetter e Schneuwly (2017) e da História da educação matemática: Valente (2012) e Pinto (2021). No caso dos saberes do ensino e da formação matemática, o projeto envolve distintos procedimentos: definição de critérios para

---

<sup>10</sup> Tive acesso ao resumo da dissertação "A formação dos conceitos de fração e de proporcionalidade e as operações concretas e formais" defendida pela autora, em dezembro de 1980, no Mestrado em Psicologia da UFPE e orientada pelos doutores David e Terezinha Carraher (atual Terezinha Nunes) publicado em 1983 na Revista Psicologia: Ciência e Profissão.

seleção dos textos e documentos disponíveis no AIJRR a serem inventariados e analisados; localização, catalogação, digitalização e disponibilização das fontes históricas. Conta também com passos de pesquisa apontados por Burke (2016): compilação, comparação dos dados obtidos em termos de similaridades e divergências, por último, caracterização da matemática do ensino das frações equivalentes a partir das obras Piagetianas.

A primeira grande decisão do trabalho diz respeito aos recortes temporais, pois a obra de Jean Piaget é imensa, pluridisciplinar e complexa (Carvalho Junior, Parrat-Dayan, 2015). Por outro lado, para trazer resultados em um ano de pós-doutorado precisamos fazer escolhas. Como anunciamos na introdução nosso olhar volta-se para os estudos de Jean Piaget sobre frações equivalentes. Não temos como limitar a busca nos arquivos a uma fase, mas leituras preliminares indicam ser a fase estruturalista o período com maior produção sobre essa temática. Com o cuidado de não resumir a interpretação do pensamento piagetiano a uma só obra e uma só fase faremos uma busca minuciosa nos arquivos de Jean Piaget no Instituto Jean-Jacques Rousseau nas outras fases.

A segunda decisão tomada é em relação a analisar somente publicações de autoria de Jean Piaget ou analisar publicações de Jean Piaget com colaboradores. A opção foi por não excluir as publicações com os colaboradores, pois duas obras que são nosso ponto de partida nas pesquisas foram publicadas com Inhelder e Szeminska. Segundo Vasconcelos (1996), a partir da década de 1940 os trabalhos de Piaget encaminhavam-se cada vez mais para a maturidade epistemológica, com a publicação de muitas obras, culminando em 1950 com um livro síntese dos seus trabalhos produzidos até então "*L'Épistémologie Génétique*".

Outras obras foram produzidas em parceria com colaboradores, como Bärbel Inhelder, cuja colaboração duraria mais de quarenta anos. Em 1948 publicou, com Inhelder, *La Représentation de l'Espace chez l'Enfant* e com Inhelder e Szeminska, *La Geometrie Spontanée de l'Enfant*. Da produção desses livros participou um grupo de outros colaboradores, dentre eles Hans Aebli, cuja tese de doutoramento inaugurou uma série de trabalhos sobre as relações entre psicologia genética e a didática (Vasconcelos, 1996, p. 53).

Outra importante etapa da pesquisa é o estágio pós-doutoral em Genebra que tem por objetivo ter acesso a fontes inéditas e/ou com pouca circulação do Brasil

sobre a temática na pesquisa. O professor David Antonio da Costa possui parceria com o professor Bernard Schneuwly e com *Equipe de Recherche em Histoire Sociale de l'Éducation (ERHISE)*, coordenado por Rita Hofstetter - *Université de Genève*, que permitirá o acesso aos arquivos de Jean Piaget no Instituto Jean-Jacques Rousseau em Genebra. Por meio dessas parcerias é que conseguimos autorização para consultar os arquivos e participar do grupo de pesquisa no período de agosto a novembro de 2022.

Os Arquivos do Instituto Jean-Jacques Rousseau (AIJRR) ficam nas dependências da Universidade de Genebra na Suíça e possui na sua página<sup>11</sup> um mecanismo de busca para arquivos de Jean Piaget conforme figura 1.

Figura 01: Busca no site dos arquivos de Jean Piaget no AIJRR



Fonte: AIJRR, 2022

Nosso foco de pesquisa na documentação volta-se para as frações equivalentes em textos e documentos piagetianos por meio de algumas palavras-chave que serão criteriosamente estudadas<sup>12</sup>. Em viagem de estudos aos AIJRR para buscar documentos sobre Édouard Claparede e André Rey, Valente (2016) dá uma importante informação de que há “um motor interno de busca de documentação (não

<sup>11</sup> <https://www.unige.ch/archives/aijrr/archives/institut/> acessado em: 27 de agosto de 2022.

<sup>12</sup> Ressalto essa informação, pois já nos deparamos com textos importantes cujas palavras-chave são: “conservação de quantidades discretas e contínuas”; “o conceito de parte”; “o conceito de metade”; “equivalência”.

disponível ao público, não colocado na internet), nos computadores do Instituto” (Valente, 2016, p. 519).

## Primeiras impressões

Os dois primeiros aspectos elencados anteriormente - apropriação dos estudos piagetianos para ensinar matemática e estudos sobre a teoria piagetiana e as frações no Brasil foram de fundamental importância para o delineamento da pesquisa e mostra que a apropriação dos conceitos piagetianos pelos educadores matemáticos brasileiros tiveram dois momentos a partir da década de 1960. O primeiro de cunho estruturalista para justificar por meio da psicogenética e das estruturas de pensamento a reforma curricular da matemática moderna e que não se atém a uma aprendizagem específica, como das frações equivalentes. Numa busca preliminar, somente a partir da década de 1980 é que encontramos trabalhos que relacionam o ensino de frações e a teoria piagetiana, numa fase pós-matemática moderna, mas que utilizam como referência obras piagetianas anteriores a década de 1960.

Esperamos que a consulta aos arquivos de Jean Piaget em Genebra possa aprofundar e trazer contribuições para a caracterização de uma matemática do ensino de frações equivalentes em bases piagetianas.

## Referências

- Amaral, M. A. T.; Novaes, B. W. D. (2019). Materiais didáticos propostos para o ensino de frações no ensino primário (1950-1980). *Anais do XXIV Seminário de Iniciação Científica da UTFPR*, (1) (pp. 1-6). Curitiba: UTFPR.
- Amâncio, T. W. R.; Novaes, B. W. D. (2019). Problemas para ensinar frações equivalentes presentes em livros didáticos (1950-1980). *Anais do XXIV Seminário de Iniciação Científica da UTFPR*, (1) (pp. 1-6). Curitiba: UTFPR.
- Amrein, A. L. (2017). *A abordagem do ensino das frações em livros didáticos dos quintos e sextos anos*. (Trabalho de Conclusão de Curso). Toledo: Universidade Tecnológica Federal do Paraná.
- Aguiar, M. C. (1980). *A formação de conceitos de frações e de proporcionalidade e as operações concretas e formais*. (Dissertação de Mestrado). Recife: Universidade Federal de Pernambuco.
- Búrigo, E. Z. (1990). Matemática moderna: progresso e democracia na visão de educadores brasileiros nos anos 60. *Revista Teoria & Educação*. (2), 255-265.
- Burke, P. (2016). *O que é história do conhecimento*. Tradução Claudia Freire. 1. ed. São Paulo: Editora Unesp.

- Carraher, T.; Carraher, D.; Schliemann, A. (2006). *Na vida dez, na escola zero*. 14 ed. São Paulo: Cortez.
- Carvalho Junior, G. D.; Parrat-Dayana, S.P. (2015). Recortes históricos sobre a noção de *schème* em Piaget: o processo de desenvolvimento de um conceito. *Rev. Bras. Estud. Pedagog. (online)*. 96 (244), 522-540.
- Chartier, R. (1990). *A história cultural: entre práticas e representações*. Lisboa: Difel.
- Chervel, A. (1990). História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. *Teoria & Educação*. (2),177-229.
- Certeau, M. (1982). A operação historiográfica. In: Certeau, M. *A Escrita da História*. Rio de Janeiro: Forense-Universitária.
- D'Ambrósio, U. (1986). *Da realidade à ação: reflexões sobre educação matemática*. São Paulo: Summus.
- D'Augustine, C. H. (1976). *Métodos para o Ensino da Matemática*. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S/A.
- Feitoza, C. K. ; Novaes, B. W. D. (2017). Jean Piaget e o ensino da matemática elementar no curso primário: o que dizem as revistas pedagógicas (1950-1970)? In: Pinto, N. B.; Novaes, B. W. D. (Org.). *Circulação e apropriação de saberes elementares matemáticos no ensino primário no estado do Paraná (1903 - 1971)*. 1ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, (1), 297-335.
- Heck, R. H. T.; Novaes, B. W. D. (2021). Reflexos das frações ensinadas em um caderno do quinto ano. *Anais do XIX Seminário Temático Internacional*, 1 (1), (pp.1-19) Osasco: Ghemat Brasil.
- Hofstetter, R.; Schneuwly, B. (2017). Saberes: um tema central para as profissões do ensino e da formação. In: Hofstetter, R.; Valente, W. R. (Org.) *Saberes em (trans) formação: tema central da formação de professores*. 1 ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 113-172.
- Holzmann, E.; Arruda, H. D.; Martins, C. T.; Yaremchuk, G.; Humphreys, N. (1969<sup>a</sup>) *Ensino Moderno de Matemática – Caderno de Atividades – NEDEM. 1º Caderno de Atividades - 1ª série*.  
<<https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/219740>>.
- Julia, Dominique. (2001). A cultura escolar como objeto histórico. *Revista Brasileira de História da Educação*, (1),10-43.
- Lima, J. M. F. (2012). Iniciação ao conceito de fração e desenvolvimento da conservação de quantidade. In: Nunes, T. (org.). *Aprender pensando: contribuições da psicologia cognitiva para a educação*. 20 ed. Petrópolis - RJ: Vozes.
- Marques, M. E. B.; Novaes, B. W. D. (2019). Saberes para ensinar frações equivalentes em livros didáticos e manuais pedagógicos (1960 - 1970). *Anais XXIV Seminário de Iniciação Científica da UTFPR*.(1). (pp. 1-6). Curitiba: UTFPR.

- Marques, M. E. B. (2021). *A Matemática “Moderna” do ensino das frações equivalentes nos livros do NEDEM*. (Trabalho de conclusão de curso). Toledo: UTFPR.
- Morais, R. S.; Bertini, L. F.; Valente, W. R. (2021). *A Matemática do ensino de frações: do século XIX a BNCC*. 1. ed. São Paulo: L F Editorial.
- Novaes, B. W. D.; França, I. S. ; Pinto, N. B. (2005). As contribuições da teoria psicológica de Jean Piaget para o Movimento da Matemática Moderna. *Anais do Primeiro Seminário Paulista de História da Educação Matemática* (pp. 483-489). São Paulo: 1º SPHEM.
- Novaes, B. W. D. (2007). *Um olhar sobre a Educação Matemática dos anos 1960 e 1970 dos Cursos Técnicos Industriais Federais do Estado do Paraná*. (Dissertação de Mestrado). Paraná: Pontifícia Universidade Católica do Paraná.
- Novaes, B. W. D. (2012). *O Movimento da Matemática Moderna no Ensino Técnico Industrial no Brasil e em Portugal: impactos na cultura escolar*. (Tese de Doutorado). Paraná: Pontifícia Universidade Católica do Paraná.
- Novaes, B. W. D.; Tortola, E.; Vertuan, R. E. (2021). A “leitura” do sentido das frações: atitudes de professores dos quintos e sextos anos em atividades desenvolvidas no grupo da segunda. *Revista História de Educação Matemática*, (7),1-27.
- Novaes, B. W. D. ; Berticelli, D. G. D. ; Pinto, N. B. (2020a). Guidelines on the Use of Teaching Materials for Teaching Fractions in the Brazilian Primary Course (1930-1970). *Pedagogical Res.* 5(3).
- Novaes, B. W. D.; Berticelli, D. G. D.; Pinto, N. B. (2020b). Transformações nos saberes para ensinar frações no curso primário relacionadas ao uso de materiais escolares (1930-1970). *Anais do 5º Encontro Nacional de Pesquisa em História da Educação Matemática* (pp.1-5). Natal: UFRN.
- Novaes, B. W. D.; Nierri, A M. (2020). A descoberta das frações equivalentes e o material Cuisenaire. *Anais do 5º Encontro Nacional de Pesquisa em História da Educação Matemática* (pp. 1-5). Natal: UFRN.
- Nunes, T. Apresentação da 20ª edição. (2012). In: Nunes, T. (org.). *Aprender pensando: contribuições da psicologia cognitiva para a educação*. 20 ed. Petrópolis - RJ: Vozes.
- Parrat-Dayan, S. P. (1997). la psychologie et ses applications: a propos de l’article de Piaget "Pour l’étude de la psychologie". *Archives de Psychologie*, [Genève]. (65), 247–263.
- Penteado Junior, O. A. (1958). O ensino de cálculo. *Revista de Pedagogia*. Ano IV, 4 (8), 1-5.
- Prost, A. (2008). *Dose lições sobre a história*. Belo Horizonte: Antêntica.
- Pinto, N. B. (2021). Transformações dos saberes para ensinar matemática nos primeiros anos escolares em tempos da escola ativa e do trabalho docente como um ofício (1920 – 1960). *Acervo – Boletim do Centro de Documentação de GHEMAT-SP*. (3), 1-18.
- Pinto, N. B.; Novaes, B. D. (2019). “It is not hard to tech Math”: The prominence of

Nedem in the diffusion of Modern Math in Paraná's State. *Acta Scientiae*, (21),109-122.

Portela, M. S. (2009). *Práticas de Matemática Moderna na Formação de Normalistas no Instituto de Educação do Paraná na Década de 1970*. (Dissertação de Mestrado). Paraná: Pontifícia Universidade Católica do Paraná.

Schrenk, S. (2021). *As produções dos “professores PDE” para o ensino de frações como medida na reta numérica: possibilidades para o apoio pedagógico no Ensino Fundamental*. (Trabalho de Conclusão de Curso). Toledo: Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Valente, W. R. (2012). O que é número?: produção, circulação e apropriação da Matemática Moderna para crianças. *Bolema*. 26 (44), 1417-1441.

Valente, W. R. (2016). História da educação matemática e os arquivos do Instituto Jean-Jacques Rousseau. *Argumentos Pró-Educação*. 1 (3), 516-523.

Vasconcelos, M. S. (1996). *A difusão das ideias de Jean Piaget no Brasil*. *Psicologia e educação*. São Paulo: Casa do Psicólogo.