



Como abordar o conceito de fração? As propostas de Zoltan P. Dienes

How to approach the concept of fraction? The proposals of Zoltan P. Dienes

Armando Freitas Tramontano

Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ/ProPEd

ftarmando@gmail.com

Denise Medina França

Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ/ProPEd

denisemedinafranca@gmail.com

Resumo

O presente estudo investiga, por meio da análise sócio-histórica, as propostas de Dienes para a abordagem do conceito de fração em sua obra intitulada *Frações: fichas de trabalho* (1971a). O objetivo é buscar elementos do processo de sistematização dos saberes *a* e *para ensinar* o conceito de fração com a utilização do material multibase, durante o Movimento da Matemática Moderna (1960-1980) no Brasil. Buscamos compreender como Dienes orientou o início da abordagem do conceito de fração para crianças. Quais os saberes docentes sistematizados para a abordagem do conceito de fração nas propostas de Dienes no livro *Frações: fichas de trabalho* (1971a)? Quais saberes *a* e *para ensinar* fração são postos pelo autor? As primeiras análises indicam: uma abordagem lógico-matemática e a definição do caráter “arbitrário de unidade” para desenvolver o conceito de fração de acordo com sua proposta para o ensino; a concretização destes conceitos por meio da utilização do material multibase. **Palavras-chave:** Ensino de matemática; Sistematização de saberes; Movimento da Matemática Moderna; Multibase.

Introdução

O presente estudo apresenta uma pesquisa de doutoramento¹ vinculada ao Programa de Pós-graduação em Educação – ProPEd da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. A investigação está vinculada ao projeto de pesquisa “Uma caracterização da matemática *a ensinar* e *para ensinar* em publicações do Laboratório

¹ Pesquisa intitulada Zoltan P. Dienes e o ensino de frações: uma análise dos saberes *a* e *para ensinar* nos programas do Laboratório de Currículos do Estado do Rio de Janeiro (1960-1980).

de Currículos do Estado do Rio de Janeiro (1975-1983)”, financiado pela Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro².

Nesse trabalho, temos como objeto de pesquisa o livro de Dienes intitulado *Frações: fichas de trabalho* (1971a). Aqui, objetivamos investigar, por meio da análise sócio-histórica dessa obra o movimento de sistematização de saberes *a* e *para ensinar* frações com a utilização de materiais didáticos concretos, no período do Movimento da Matemática Moderna - MMM (1960-1980). Buscamos compreender o movimento de sistematização desses saberes no momento da introdução do conceito de fração, apoiado pelos blocos multibase, com foco nas orientações dadas por Dienes para o início da abordagem desse do conceito. Quais os saberes docentes necessários para introdução do conceito de fração?

Leme e Valente (2013), França (2016, 2019), Soares (2014) investigam as transformações na estrutura da disciplina e no ensino da matemática propostos pelo ideário do MMM no Brasil. Segundo eles, as discussões sobre a necessidade de mudanças tiveram início em meados de 1950, tempo de transformações na estrutura e no ensino da matemática caracterizado pela circulação de experiências educacionais, que, dentre outras medidas, recomendava o uso de materiais concretos como facilitadores na concretização de ideias abstratas.

Para nortear nossos estudos, mobilizamos os aportes teóricos postos por Valente (2017), que se apropriou dos trabalhos da Equipe de Pesquisa em História das Ciências da Educação (ERHISE), da Universidade de Genebra, na Suíça. Tomamos como hipótese teórica que existe dois tipos de saberes ligados ao ensino de matemática: os *saberes para ensinar* e os *saberes a ensinar*, objetos do trabalho do professor, saberes ligados à formação do professor, os saberes advindos dos campos disciplinares.

Valente (2017), acrescenta que o *saber a ensinar* seja caracterizado como parte do que o professor deve utilizar para a tarefa formativa (por exemplo, regulamentado por planos de aulas, legislações, manuais etc.) e o *saber para ensinar* como aquele que deve ser mobilizado em sua prática docente (a forma que serão

² Programa Jovem Cientista do Nosso Estado.

abordados os saberes *a ensinar*, o manejo das aulas, suas dinâmicas, as adaptações necessárias ao bom andamento do currículo etc.).

Consideramos ainda que *saberes a ensinar* e *saberes para ensinar* matemática referentes ao ensino das frações, nesta obra, podem ser entendidos como elementos constitutivos de saberes de referências para a docência do professor que ensina matemática no período analisado.

Estas categorias nos auxiliam a compreender historicamente os saberes profissionais da docência que, segundo Valente (2018), referem-se aos saberes de formação de professores dado pela articulação entre os *saberes a ensinar* e os *saberes para ensinar*.

Especificamente, buscamos identificar, na obra de Dienes aqui analisada, *saberes a e para ensinar* matemática sistematizados por meio de abordagem que utiliza material didático concreto em fichas de trabalho sugeridas pelo autor, ou seja, atividades para a construção do conceito de fração pela criança.

Para tal, focamos nossa análise nas prescrições e nas diretrizes referentes ao ensino de fração no livro *Frações: fichas de trabalho* (1971a) que circulou no Brasil durante a vigência do ideário do Movimento da Matemática Moderna (MMM) e que, de modo geral, objetivou “modernizar” o ensino e a aprendizagem da Matemática, alterando e atualizando os conteúdos e métodos, incentivando a participação de professores em eventos nos quais se discutia questões relacionadas à nova proposta de ensino. (Leme & Valente, 2013; França, 2019), entre outros.

Zoltan Dienes e o Laboratório de Currículos do Rio de Janeiro

Zoltan Paul Dienes (1916-2014) foi um educador húngaro, doutor em Matemática e Psicologia, que considerava o pensamento matemático como um espaço rico em “superestruturas [que] estão sendo constantemente construídas sobre o que foi anteriormente construído” (Dienes, 1969a, p. 15) e utilizava uma metodologia baseada em materiais concretos com o objetivo de que os alunos pudessem alcançar a aprendizagem. Foi um dos grandes pioneiros dos estudos alusivos à metodologia para o ensino nas séries iniciais e considerado referência no campo da Educação Matemática.

O Laboratório de Currículos do Rio de Janeiro (LC) foi criado pela Secretaria de Estado de Educação e Cultura, em 1975, com objetivo de “especificar as necessidades do Sistema Estadual de Educação e Cultura” (p. 12), além de atuar nos planos para a elaboração dos Planos Gerais da Educação do Estado.

A relevância desse estudo encontra-se no fato de que os especialistas designados para o trabalho de reformulações curriculares, feito no LC, apropriaram-se das ideias de Dienes em suas orientações aos docentes. Nas referências para o livro *Reformulação de Currículos* (1982) os autores utilizaram sete dos livros de Dienes apresentados no quadro 1, abaixo. Além disso, observamos que essa é a primeira pesquisa com o tema em questão no Rio de Janeiro. Em um primeiro levantamento no catálogo de teses da CAPES com o termo “Zoltan Dienes” encontramos somente 31 resultados, sendo 11 teses e 17 dissertações. Refinando a pesquisa pelas áreas do conhecimento e ficando somente com Educação, Ensino e Matemática, esse resultado diminuiu para sete (quatro dissertações e três teses). Ressaltamos que nenhuma dessas sete pesquisas foi realizada por instituições do Rio de Janeiro, além de nenhuma delas tratar do tema ensino de frações.

Observando o quadro 1, podemos inferir que a fundação do Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (GEEM), em 1961, e o oferecimento de cursos divulgando as ideias Dienes, pode ter possibilitado a tradução, publicação e circulação, no Brasil, de seus livros, a partir de 1967. Além disso, a partir de 1970, a coleção *Primeiros passos em Matemática*, foi publicada pela EPU - Editora Pedagógica e Universitária, com financiamento do Ministério da Educação e Cultura - MEC, e supervisão do GEEM, de maneira semelhante aos livros de bolso franceses, em papel jornal e tamanho pequeno, permitindo o aumento de tiragem e consequente redução dos custos, popularizando as ideias do autor. (França, 2019)

Quadro 1 – Livros de Zoltan Dienes

TÍTULO	PUBLICAÇÃO NO BRASIL
Aprendizado Moderno de Matemática	Rio de Janeiro, 1967.
A Matemática Moderna no Ensino Primário	São Paulo, Rio de Janeiro, 1967.
As seis etapas do processo de aprendizagem em matemática	São Paulo, 1969.
O Poder da Matemática	São Paulo, 1969.
Pensando em estruturas	São Paulo, 1974.
Exploração do espaço e prática de medição	São Paulo, 1969.

Primeiros passos em Matemática Vol.1 - Lógica e jogos lógicos Vol.2 - Conjuntos, números e potências Vol.3 – Exploração do espaço	São Paulo, 1974. São Paulo, 1974. São Paulo, 1974.
Geometria pelas transformações: Vol.1 Vol.2 Vol.3 - Grupos e coordenadas	São Paulo, 1967.
Frações: fichas de trabalho	São Paulo, 1971.
Frações	São Paulo, 1971.

Fonte: Elaborado pelos autores a partir de França (2019)

França (2019) observa que os investimentos públicos na produção de livros didáticos era parte do programa de divulgação das ideias do ideário do MMM. Do quadro apresentado anteriormente, destacamos o livro Frações: fichas de trabalho (1971a) que será mais bem analisado na próxima seção. Desejamos observar se o material em análise fazia circular orientações referentes aos *saberes docentes* e divulgavam experiências educacionais exitosas, incluindo novas metodologias que utilizavam os materiais concretos estruturados por Dienes.

O livro Frações: fichas de trabalho

Para este estudo selecionamos o livro Frações: fichas de trabalho (1971a) em virtude da proposta com uso do multibase³ para o ensino do conceito de fração. A seguir, apresentamos a capa desse livro para que o leitor possa construir a ideia deste material.

Figura 1 – Livro considerado nesta pesquisa



Fonte: Dienes (1971a)

Inferimos que esse livro era indicado aos estudantes, pois encontramos um volume semelhante com orientações para o professor. O livro em análise aqui possui

³ Material concreto proposto por Dienes que será apresentado e explicado nas próximas páginas.

dimensões de 21 cm por 28 cm, aproximadamente no formato A4, e tem 92 páginas. Foi traduzido, do original em francês, por Maria Pia Brito de Macedo Charlier e René François Joseph Charlier com supervisão do GEEM. Impresso em papel jornal, prática comum na época, barateando o custo e facilitando o acesso. (França, 2019)

Diversas atividades da publicação Dienes (1971a) são desenvolvidas a partir de exemplos para direcionar o trabalho do aluno. Constatasse que o livro possui vocabulário rebuscado e de difícil entendimento. Dessa forma, acreditamos que eram necessários maiores esclarecimentos do professor na realização das atividades por parte dos estudantes. Notamos que para facilitar a compreensão das orientações dadas no livro seria necessário ter em mãos o material multibase.

O livro dirigido ao aluno pode ser caracterizado como um portfólio de fichas de trabalho⁴, onde todas as fichas contém orientações específicas ao aluno sobre o que fazer em cada uma das atividades, acompanhado do material necessário para sua realização. As oito partes se organizam da seguinte maneira: 1ª. Introdução às frações; 2ª. Neutralização (Frações equivalentes); 3. Multiplicação de frações; 4. Divisão de frações; 5. Comparação de frações; 6. Adição e subtração de frações; 7. Razões-Proporções; 8. Fracionários e decimais. Dessa forma, há uma sequência de atividades a ser seguida pelos alunos na construção dos conceitos e das operações com frações. Tudo indica que a publicação seja um livro não consumível. Por falta de espaço para escrever no material, podemos concluir que os estudantes deveriam resolver essas atividades fora do livro. Nesse trabalho, focaremos nossas análises na primeira ficha de trabalho da Introdução às frações.

Fato importante que se percebe ao manusear o livro é que o material do aluno não possui as respostas das atividades propostas. Também não encontramos indícios dessas respostas no livro do professor. Contudo, nossas análises ainda são iniciais e é possível que as encontremos futuramente.

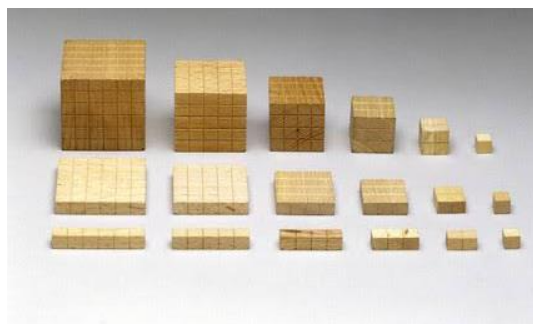
Evidenciamos que o material é organizado em forma de um diálogo entre Dienes e os alunos: “pegue a peça tal na caixa do multibase”, “construa montes que possuam tantas peças quanto você observa na unidade”. Ou seja, toda atividade tem

⁴ O caracterizamos dessa forma pois cada página do livro apresenta uma ficha de trabalho que deve ser seguida pelo estudante com um determinado objetivo acerca dos conceitos de frações.

orientações sobre como fazer e o que fazer, indicando os materiais necessários em cada uma delas.

Buscando exemplificar essa estrutura usada por Dienes em suas atividades, apresentaremos uma ficha do livro *Frações: fichas de trabalho*. Entretanto, para que o leitor possa compreender as orientações oferecidas, antecipadamente, precisamos apresentar o material multibase proposto pelo autor.

Figura 1: Material multibase



Fonte: França (2019, p.121)

O material multibase proposto é composto por cubos, placas, barras e cubinhos, de forma similar ao material dourado, amplamente conhecido por docentes e alunos no Brasil. Todavia, o multibase propõe que, além da base 10 (que é a base presente no material dourado), sejam trabalhadas outras bases: bases 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10. Como exemplo, tomando o cubinho como nossa unidade de medida, a caixa que contém o material da base 2 possui um cubo com arestas medindo dois (formado por oito cubinhos), placas com lados medindo dois (formadas por quatro cubinhos), barras com largura 1 e altura 2 (formadas por dois cubinhos) e diversos cubinhos representando a unidade. O mesmo acontece nas demais caixas do material, mudando a base⁵.

A seguir, exemplificamos o encaminhamento dado pelo autor para com uma das atividades propostas.

Figura 2: Exemplo de atividade do livro *Frações: fichas de trabalho* e o “caráter arbitrário da unidade”

Em cada caixa de blocos “multibase”, você encontrará diversos tipos de peças de madeira. Escolha uma caixa. Tire a peça *maior*. Chamaremos essa peça maior de *Unidade*. As outras peças serão então denominadas partes da unidade ou *frações* da unidade.

Fonte: Dienes (1971a, p. 1)

⁵ Maior aprofundamento sobre o uso deste material, consultar: Dienes (1967b, p. 85).

Observando a Figura 2, destacamos a estratégia utilizada pelo autor para apresentação das atividades em forma de uma instrução direta ao aluno orientando sua realização.

No início da atividade, os alunos são orientados a escolher uma, entre diversas, caixas do material multibase, ou seja, pode ser qualquer base (2, 3, 4, 5, 6, ...). Entretanto, Dienes (1971a) não deixa claro quais bases está disponibilizando aos alunos, nesta atividade.

De posse de uma das caixas o multibase, a partir desse momento, o aluno deve pegar a “peça *maior*” contida na caixa e chamá-la de “*Unidade*”. Levantamos a hipótese de que a intenção do autor seja abordar o conceito de “caráter arbitrário da unidade” proposto por Dienes, visto que o aluno teve a possibilidade de escolha da unidade dentre um universo diversificado (no momento de escolha da caixa).

A publicação não informa qual é o público-alvo, contudo observando os conceitos abordados percebemos o desenvolvimento de atividades referentes ao trabalho com as frações, ou seja, parece que são indicadas para percorrer todo o 1º grau. Os conceitos são apresentados em etapas graduais e, as primeiras análises levam a acreditar que, à medida que os conceitos se acumulam, os alunos adquirem autonomia para atuar independentemente com as fichas de trabalho.

Dando prosseguimento à Ficha 1, Dienes propõe atividades com o objetivo de construir o conceito de “peça-unidade” e as diferentes maneiras de obtê-la. Sugere questões de modo que o aluno possa vivenciar a criação de hipóteses e suas comprovações por meio de várias etapas de uma investigação acerca das possibilidades de composição do inteiro utilizando as peças do multibase.

Figura 3: Continuação da atividade 1 do livro Frações: fichas de trabalho com orientações para a construção da unidade

Empregando apenas as peças de uma só caixa por vez, coloque-as de tal forma que aquilo que você vai construir contenha a mesma quantidade de madeira que a peça-unidade.

1. *a) Entre essas construções, quais são as que podem ser divididas exatamente em duas quantidades iguais de madeira?*
- b) Quais são as que podem ser divididas exatamente em três quantidades iguais?*
- c) Quais, as que podem ser divididas exatamente em quatro quantidades iguais?*
- d) Quais, as que podem ser divididas exatamente em 5, 6, 8, 9, 12 quantidades iguais?*
- e) Todos os montes de quantidades iguais de madeira se parecem? Ou, então, todos contêm exatamente o mesmo número de peças de madeira?*

Fonte: Dienes (1971a, p. 1)

Assim, o aluno é questionado sobre a “peça-unidade” em diversos momentos da tarefa e sob vários aspectos. As respostas para as perguntas propostas devem ser elaboradas com o aluno observando a “peça-unidade” montada à sua frente, de diversas maneiras com as peças do multibase, mantendo a forma.

Note que nos itens b), c) e d) da prática, os alunos deverão refletir sobre a possibilidade de dividir em 3, 4, 5, 6, 8, 9 ou 12 partes iguais a quantidade de peças do multibase utilizada para compor a “peça-unidade”. Sem possuir o multibase em mãos é difícil a compreensão dessa atividade ao professor que faz a leitura do material. Precisamos construir uma adaptação dos blocos multibase para poder nos apoiar neste trabalho.

Seguindo com a atividade, ainda na ficha 1, Dienes sugere que “Toda construção que contiver tanta madeira quanto uma *peça-unidade* será chamada “MONTE-UNIDADE”. A partir desse momento, o aluno deverá refletir sobre a construção da metade e de uma vez e meia desse monte.

Figura 4: Conclusão da atividade 1 do livro Frações: fichas de trabalho com a construção do conceito de “MONTE-UNIDADE”

Tôda construção que contiver tanta madeira quanto uma *peça-unidade* será chamada “MONTE-UNIDADE”.

2. a) Com que se parece uma metade de “MONTE-UNIDADE”?

b) Construa a metade de um “MONTE-UNIDADE” de tantas maneiras diferentes quantas conseguir.

c) Em seguida, construa, de várias maneiras distintas, uma vez e meia o “MONTE-UNIDADE”.

Fonte: Dienes (1971a, p. 1)

Note que é importante perceber nessa parte da atividade que, dependendo da caixa do multibase selecionada inicialmente pelo aluno, não há possibilidade de abordagem do conceito de metade do “MONTE-UNIDADE”, conforme sugerido. Explicamos esse fato a seguir.

Figura 5a – Blocos da base 4



Figura 5b – Blocos da base 5



Fonte: Proposta pelos autores a partir de França (2019)

Na Figura 5a, observamos que a escolha da base 4 possibilita a visualização do conceito de metade (e de uma unidade e meia), pois qualquer construção do “MONTE-UNIDADE” terá quantidade de peças do multibase possível de ser dividida em duas partes iguais (veja quadro 2). Se ao invés disso, o aluno escolher a caixa que contém os blocos da base 5 (conforme Figura 5b), não poderá obter a metade do “MONTE-UNIDADE” usando o multibase, material concreto proposto por Dienes. Veja, no quadro abaixo, algumas possibilidades para essa divisão do “MONTE-UNIDADE” em duas partes iguais.

Quadro 2 – Algumas possibilidades para dividir o “MONTE-UNIDADE” em duas partes iguais nas bases 4 e 5

Base 4 (podem ser divididas em duas partes iguais)	Base 5 (não podem ser divididas em duas partes iguais)
64 cubinhos	125 cubinhos
4 placas	5 placas
2 placas e 8 barras	2 placas e 15 barras
2 placas e 32 cubinhos	3 placas e 10 barras
4 placas	4 placas e 25 cubinhos

Fonte: Proposto pelos autores

Até aqui somente analisamos a primeira atividade do livro que Dienes sugere para o trabalho com os estudantes. Pudemos perceber que o início do trabalho da construção do conceito de fração e da noção de “arbitrariedade da unidade” (o aluno precisa compreender que pode escolher qualquer peça para representar o inteiro) é feita com auxílio do multibase proposto pelo autor. E todo o trabalho é bastante reflexivo por parte do aluno. Está evidenciada a necessidade do uso do material concreto e do rigor matemático na abordagem matemática para a construção dos conceitos, mesmo que sejam os mais simples.

Evidenciamos que essa ficha apresentada é o início do trabalho que intenta a construção do conceito de fração proposto por Dienes:

[...] Uma fração pode ser considerada como a descrição de um estado de coisas ou, então, como uma ordem, isto é, o resultado de uma ordem para executar uma operação. “Dois terços” pode significar que descrevemos os dois terços de qualquer coisa. Isto é o estado de coisas. Ou poderíamos dizer: “Tome dois terços do objeto em questão, seja o que fôr”. (Dienes, 1971b, p. 2)

Dienes considera a fração como um estado (descrição de uma coisa; metade da maçã; $\frac{2}{3}$ da classe; a indicação de uma quantidade) ou como operador no sentido de função ou uma aplicação. Aprofundaremos a abordagem desses conceitos com os estudantes em trabalhos futuros.

Algumas considerações

Voltando à nossa questão: Quais os saberes docentes sistematizados para a abordagem do conceito de fração nas propostas de Dienes no livro Frações: fichas de trabalho (1971a)? Quais saberes *a e para ensinar* fração são postos pelo autor? A atividade analisada indica que o autor procurou prescrever minuciosamente, um modelo de como proceder na abordagem inicial do conceito de fração.

Nossas primeiras análises indicam que a *arbitrariedade da unidade* deva ser considerada como um saber *a ensinar*, pois esse conhecimento deve fazer parte do arsenal docente para o professor que ensina matemática.

O diálogo proposto intenta familiarizar o aluno com frações não presentes em seu cotidiano por meio de situações problema ainda não vivenciadas, variedades matemáticas que, segundo Dienes, são necessárias ao estabelecimento de propriedades das frações.

A abordagem do conceito de fração inicia por uma discussão sobre diferentes unidades de medidas e suas implicações para a medição de objetos. De acordo com o autor, a atividade propicia a percepção da arbitrariedade da unidade que pode assumir diferentes valores de acordo com os objetivos estabelecidos na abordagem de fração. (Dienes, 1971b)

Em síntese, Dienes inicia a abordagem do conceito de fração a partir da ideia de parte-todo, com encaminhamento por meio da definição de arbitrariedade da unidade. Em seguida, utiliza esta definição para construir o conceito de partes de diferentes todos, em atividades com material concreto de perguntas e respostas. Em prosseguimento, concretiza a ideia de monte-unidade com atividades de manipulação dos blocos multibase. Com estes conceitos já trabalhados, finaliza desafiando o aluno a simbolizar, com os blocos multibase, a metade do monte-unidade de diferentes maneiras quantas possíveis e o inteiro mais a metade, ou seja, montes maiores que um inteiro.

Além disso podemos dizer que, a atividade analisada neste trabalho, Ficha 1 do livro *Frações: fichas de trabalho* (1971a), perpassa pela primeira e segunda etapas das seis etapas do processo de ensino e aprendizagem em matemática⁶ propostas por Dienes, pois encaminha a abordagem do conceito de fração com o uso do multibase da seguinte forma: jogo livre: onde são propostas situações concretas com materiais a fim de familiarizar com as variedades matemáticas de fração; jogo estruturado por regras e comparação de jogos: trabalha atividades de comparação por meio de material manipulável que variam a “unidade” considerada.

Mediante as reflexões realizadas, podemos considerar que alguns saberes sistematizados na obra de Dienes se referem a abordagens do conceito de fração em uma perspectiva lógico-matemática de maneira concreta, ou seja, com os blocos multibase construir e concretizar saberes referentes a fração como parte-todo com conceitos pré-definidos pelo autor e atividades ligadas às estruturas lógicas de comparação.

Referências

Hofstetter, R., Schneuwly, B. (2017) Saberes: um tema central para as profissões do ensino e da formação. IN: Hofstetter, R.; Valente, W. R. (Orgs.). *Saberes em (trans)formação: tema central da formação de professores*. 1ª ed. São Paulo: Editora Livraria da Física. (Coleção Contextos da Ciência), p.113-172.

Dienes, Z. P. (1967a). *Aprendizado moderno da Matemática*. Rio de Janeiro: Zahar

Dienes, Z. P. (1967b). *A Matemática Moderna no ensino primário*. São Paulo: Editora Fundo de Cultura S/A.

Dienes, Z. P. (1969a). *O poder da Matemática*. São Paulo: Herder.

Dienes, Z. P. (1969b). *Pensando em estruturas*. São Paulo: Herder.

Dienes, Z. P. (1971a). *Frações: fichas de trabalho*. Traduzido por M. P. B. de M. Charlier; R. F. J. Charlier. Supervisão do Grupo de Estudos do Ensino da Matemática - GEEM - São Paulo. São Paulo: Herder. 92p.

Dienes, Z. P. (1971b). *Frações*. Traduzido por M. P. B. de M. Charlier; R. F. J. Charlier. Supervisão do Grupo de Estudos do Ensino da Matemática - GEEM - São Paulo. São Paulo: Herder. 55p.

⁶ Ver Dienes (1986).

Dienes, Z. P., GOLDING, E. (1971) *A geometria pelas transformações: grupos e coordenadas*. São Paulo: Herder, 147p.

Dienes, Z. P., Golding, E. W. (1974). *Lógica e jogos lógicos*. Traduzido por E. J. Dotto. Revisão e adaptação de I. T. Filisetti. (2ª ed.) São Paulo: EPU – Editora Pedagógica e Universitária Ltda., Brasília. 127p.

Dienes, Z. P., Golding, E. W. (1974). *Conjuntos, números e potências*. Traduzido por E. J. Dotto. Revisão e adaptação de I. T. Filisetti. (2ª ed.) São Paulo: EPU – Editora Pedagógica e Universitária Ltda., Brasília. 141p.

Dienes, Z. P., Golding, E. W. (1974). *Exploração do espaço*. Traduzido por E. J. Dotto. Revisão e adaptação de I. T. Filisetti. (2ª ed.) São Paulo: EPU – Editora Pedagógica e Universitária Ltda., Brasília. 89p.

Dienes, Z. P. (1975). *O poder da matemática*. Traduzido por I. Bicudo, M. A. V. Bicudo, I. C. Tetzke. Supervisão do Grupo de Estudos do Ensino da Matemática - GEEM - São Paulo. (1ª reimp.) São Paulo: EPU – Editora Pedagógica e Universitária Ltda. 175p.

Dienes, Z. P. (1986). *As seis etapas do processo de aprendizagem em matemática*. Traduzido por M. P. B. de M. Charlier; R. F. J. Charlier. Supervisão do Grupo de Estudos do Ensino da Matemática - GEEM - São Paulo. São Paulo: EPU – Editora Pedagógica e Universitária Ltda. 72p.

Fischer, M. C. B. (2007). Formação de professores em tempos de Matemática Moderna: uma proposta de investigação histórica. In: *Revista Diálogo Educacional*, v.8. Curitiba: PUC-PR.

França, D. M. (2019). *A Matemática nas séries iniciais: o que mudou (1960-1980)?* Curitiba: Appris.

França, D. M. (2016). A educação elementar pela pedagogia de Zoltan Dienes. *Anais do 3º Congresso Iberoamericano de História da educação matemática*. Belém: SBHMat, 2016. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/22574/>

Leme, M. C., Valente, W. R. (2013). Uma breve história do ensinar e aprender matemática nos anos iniciais: uma contribuição para a formação de professores. In: *Educação Matemática Pesquisa*, v. 15, Número Especial.

Rio de Janeiro (Estado). (1976) Secretaria de Estado de Educação e Cultura. *Reformulação de Currículos: síntese*. Imprensa Oficial.

Rio de Janeiro (Estado). (1982) Secretaria de Estado de Educação e Cultura. *Reformulação de Currículos: Matemática 5ª a 8ª série*. Imprensa Oficial.

Valente, W. R. (2015). História da educação matemática nos anos iniciais: a passagem do simples/complexo para o fácil/difícil. *Cadernos de História da Educação*,

UFU. V. 14, N. 1, -jan./abr., p. 357-367. Recuperado de <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/160421>

Valente, W. R. (2017) A matemática a ensinar e a matemática para ensinar: os saberes para a formação do educador matemático. In: Hofstetter, R.; Valente, W. R. (Org.). *Saberes em (trans)formação: tema central da formação de professores*. São Paulo, SP: Editora Livraria da Física.

Valente, W. R. (2018) *Processos de investigação histórica da constituição do saber profissional do professor que ensina matemática*. Acta Scientiae, v. 20, n. 3, p. 377-385, maio/jun.