



História da Educação Matemática nos caminhos do
mundo digital e da democratização do conhecimento

Ensino de Transformações Geométricas em tempos de Matemática Moderna: estudo de um livro didático do Gruema

Teaching Geometric Transformations in the Times of Modern Mathematics:
Study of a Gruema Textbook

Guilherme Rodrigues Magalhães¹

Ana Paula Jahn²

Resumo

Este estudo examina um volume da coleção de livros didáticos do Grupo de Ensino de Matemática Atualizada (Gruema), publicado na década de 1970, com o objetivo de compreender como um saber específico – as transformações geométricas planas (TG) – foi apropriado pelas autoras e inserido no ensino de geometria, em consonância com as diretrizes do Movimento da Matemática Moderna. A análise histórica é fundamentada em pressupostos da História Cultural e da Educação Matemática, baseando-se no conceito de "matemática do ensino", conforme estudado por W. R. Valente e colaboradores. Destacam-se os conceitos de 'matemática a ensinar' e 'matemática para ensinar', que representam, respectivamente, o conteúdo que é objeto de ensino do professor e as ferramentas utilizadas no processo de ensino. Os resultados mostram que a única TG abordada no livro é a reflexão em relação a uma reta, inicialmente definida como função. No entanto, os exercícios enfatizam a relação entre pontos e figuras simétricas, preparando a introdução da noção de figuras congruentes. Dessa forma, a TG é introduzida em conexão com o estudo das figuras na geometria euclidiana, fundamentando a noção de congruência sem explorar explicitamente a abordagem funcional.

Palavras-chave: História da educação matemática; simetria axial; matemática a ensinar; matemática para ensinar.

Introdução

O trabalho aqui apresentado integra um projeto maior do Grupo de Estudos e Pesquisas em Geometria Escolar: História e Formação de Professores (GEPGE)³,

¹ Licenciado em Matemática, IME-USP, Mestrando do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática do IME-USP, São Paulo/SP, Brasil. E-mail: guilherme@ime.usp.br.

² Doutora em Didática da Matemática, Universidade Joseph Fourier (Grenoble 1, França). Professora do Departamento de Matemática do IME-USP, São Paulo/SP, Brasil. Pós-doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEM) da UNESP Rio Claro/SP. E-mail: anajahn@ime.usp.br.

³ Grupo cadastrado no CNPq. O projeto em questão é coordenado pela líder do Grupo, Profa. Dra. Maria Célia Leme da Silva (UNIFESP; UNESP) e vem sendo desenvolvido com apoio da FAPESP (Projeto 2023/04639-8). Agradecemos ao GEPGE pelas valiosas sugestões que contribuíram significativamente para o aprimoramento deste texto.

cujo objetivo é examinar a circulação de determinados saberes geométricos durante o período do Movimento da Matemática Moderna (MMM) em dois estados brasileiros – São Paulo e Bahia –, em diálogo com o contexto francês. Em particular, este estudo é um recorte do projeto de dissertação do primeiro autor, que busca compreender como as transformações geométricas (TG) foram entendidas e implementadas nas propostas modernizadoras a partir da década de 60.

Nossa pesquisa se utiliza dos pressupostos da História Cultural para analisar a geometria presente no livro didático (LD) destinado aos alunos da 7^a série ginásial⁴ da coleção do Grupo de Ensino de Matemática Atualizada (Gruema), à luz do conceito de *matemática do ensino*, conforme Valente (2020). Nosso foco recai sobre as propostas de introdução de TG e os exercícios que enfatizam essa noção. Dada a limitação de espaço, a análise priorizará os elementos de conteúdo matemático do livro, abordando apenas sucintamente aspectos relevantes sob a perspectiva da História Cultural.

Chervel (1990, p. 203) considera que "a tarefa primeira do historiador das disciplinas escolares é estudar os conteúdos explícitos do ensino disciplinar" e destaca o LD como uma fonte de pesquisa fundamental. Afirma ainda que "dos diversos componentes de uma disciplina escolar, o primeiro na ordem cronológica, senão na ordem de importância, é a exposição pelo professor ou pelo manual de um conteúdo de conhecimentos" (Chervel, 1990, p. 202, grifo nosso).

Podemos considerar que o LD reflete como cada autor interpretou as normas oficiais, e tais interpretações podem ser influenciadas por suas experiências profissionais e de formação, ou eventualmente vivenciadas no ambiente escolar. Essa vivência de autores e professores em relação ao LD é destacada por Munakata (2016, p. 122, grifo nosso):

O importante é, então, levar em conta que a noção de cultura escolar refere-se não apenas a normas e regras, explícitas ou não, símbolos e representações, além dos saberes prescritos, mas também, e sobretudo, a práticas, apropriações, atribuições de novos significados, resistências, o que produz configurações múltiplas e variadas, que ocorrem topicamente na escola. Afinal, não há como negar que haja

⁴ Atual 8º ano do Ensino Fundamental.

coisas que só existem na escola. [...] Uma dessas coisas peculiares à escola é precisamente o livro didático.

O livro que será analisado foi produzido durante o período do MMM, que no Brasil tem seu marco inicial na década de 1960⁵. Conforme Duarte e Leme da Silva (2006, p. 88, grifo nosso):

Nos anos 60, o ensino de Matemática no Brasil, e também em outros países, sofreu a influência do chamado Movimento da Matemática Moderna, que buscava aproximar a Matemática desenvolvida na escola básica com a Matemática produzida pelos pesquisadores da área. Como consequência, as propostas defendidas pelo movimento enfatizam as estruturas algébricas, a teoria dos conjuntos, a topologia, as transformações geométricas, entre outras.

As propostas de ensino de geometria via transformações, introduzidas no contexto do MMM, marcaram uma mudança de abordagem em relação ao período precedente (década de 1950) e geraram debates sobre sua relevância e implementação. Optamos pelo livro do Gruema destinado à 7^a série (Averbuch et al., 1975) porque as autoras integraram as TG ao conteúdo de geometria euclidiana, diferentemente de outros autores paulistas que optaram por apresentá-las isoladamente em apêndices (Leme da Silva & Jahn, 2024). Além disso, as autoras, educadoras matemáticas ativas no Grupo de Estudos do Ensino de Matemática (Geem)⁶, eram comprometidas com a formação de professores do Geem e com as ideias modernizadoras. O volume destinado à 7^a série foi o escolhido porque é nessa série que a geometria dedutiva e as transformações geométricas são introduzidas.

Como já mencionado, a análise da obra do Gruema será particularmente centrada no conceito de *matemática do ensino*, que foi revisitado e ampliado nos estudos recentes de W. R. Valente e colaboradores, conforme descrito a seguir.

A matemática do ensino

Valente (2020) discute a distinção entre "matemática acadêmica e matemática escolar" e defende que essa separação aprofunda a distância entre a formação de professores e suas práticas profissionais. Ele argumenta que os saberes mobilizados

⁵ Para mais detalhes sobre o MMM, ver Leme da Silva (2008, p. 70).

⁶ Grupo criado por uma das lideranças do MMM no Brasil, o professor Osvaldo Sangiorgi, ver Leme da Silva (2008, p. 69).

pelo futuro docente não se restringem a uma única matemática. Para superar essa dicotomia, Valente propõe uma hipótese teórica que analisa as relações entre a matemática presente na formação do professor e a matemática que será objeto do trabalho docente.

Historicamente, a hipótese estuda as relações entre o campo disciplinar matemático, o campo das ciências da educação, o campo profissional da docência em matemática e o campo da Educação Matemática. Revela as interações entre a *matemática a ensinar* (o objeto de ensino do professor) e a *matemática para ensinar* (as ferramentas mobilizadas para ensinar). Nessa proposta de Valente (2020), a relação entre a formação do professor e sua atuação docente produz um saber que é denominado pelo autor como *matemática do ensino*. Essa "matemática do ensino revela em cada época as articulações estabelecidas entre a *matemática a ensinar* e a *matemática para ensinar*" (Valente, 2020, p. 167, grifo do autor).

Valente enfatiza o interesse histórico na caracterização dos saberes que os professores mobilizam e transformam desde a formação até a prática profissional. Livros didáticos e instruções metodológicas são fontes essenciais para identificar os saberes envolvidos na formação docente. Conforme o autor, o uso e a produção desses saberes são condicionados pelo modo como a escola é organizada, em particular pelo tempo escolar, incluindo níveis, ciclos, tempo de aula e de avaliações.

Para lidar com esses condicionantes, que afetam a produção do saber escolar, Valente (2020, p. 170) propõe considerar três elementos estruturantes, os quais ele considera como integrantes de "uma anatomia da matemática": *significado*, *graduação* e *exercícios e problemas*. O *significado* é a ideia inicial que o aluno tem sobre um tema e é descrita pelo "modo como o professor deverá se referir a um dado tema da matemática do ensino, de maneira a introduzi-lo em suas aulas, tendo em vista o inicial contato do aluno com um novo assunto" (Valente, 2020, p. 171); *graduação* refere-se à ordem e importância dos temas em cada momento escolar; e *exercícios/problemas* são as respostas esperadas dos alunos a partir do ensino. O autor relaciona esses três elementos estruturantes indicando que:

Significado e graduação articulam-se nas escolhas que faz o professor para obter respostas de seus alunos aos exercícios e problemas que são propostos durante e posteriormente à realização do ensino. São definidas por determinações do tempo escolar e

adotadas em conformidade com as relações travadas entre campo disciplinar matemático, ciências da educação e campo profissional da docência, tendo em vista um dado contexto político e social, balizador das finalidades da escola (Valente, 2020, p. 171).

Para realizar a análise do livro didático escolhido, visando compreender como as TG são inseridas e participam da *geometria do ensino*⁷ para a 7^a série do 1^º grau, e considerando que se trata de um único volume de uma coleção, nos ateremos apenas a dois elementos estruturantes: o *significado* e os *exercícios/problemas* propostos. Com isso, formulamos a questão norteadora de nossa análise: qual o *significado* da *geometria do ensino* de TG no volume 7 da coleção do Gruema?

A coleção de livros Gruema

Entre 1967 e 1974, a Companhia Editora Nacional (CEN) publicou a coleção "Curso Moderno de Matemática para a Escola Elementar", elaborado por Manhúcia Liberman, Lucilia Sanchez e Anna Franchi, destinado às quatro séries do curso primário, hoje correspondente aos Anos Iniciais do Ensino Fundamental e fundamentados nas concepções da Matemática Moderna (Villela, 2010, p. 393).

Com a reforma educacional que estabeleceu o ensino de 1^º grau em 8 séries, a CEN estendeu a coleção para incluir as quatro últimas séries, renomeando-a para "Curso Moderno de Matemática para o Ensino de 1^º Grau", com a sigla Gruema na capa. Para esses novos volumes, Anna Averbuch e Franca Gottlieb se juntaram ao grupo, sob a supervisão do professor Luiz Henrique Jacy Monteiro.

Leme da Silva e Jahn (2024), ao analisarem quatro LD destinados a 7^a série ginásial e produzidos durante o MMM, identificaram dois grupos nessas produções: o dos doutores em matemática pela Universidade de São Paulo, entre eles Jacy Monteiro, representando o campo acadêmico, e o de professoras(es) de matemática, representando o campo profissional e o conhecimento da cultura escolar. No caso do Gruema, a participação das autoras mencionadas marcou, de forma pioneira, a autoria de LD de matemática por educadoras matemáticas (Villela, 2010, p. 393).

O volume 7 da coleção Gruema, foco deste estudo, está disponível no

⁷ Usaremos a expressão *geometria do ensino* para destacar que, na perspectiva da *matemática do ensino* Valente (2020), manteremos nosso foco na geometria, vista como subárea do campo disciplinar da Matemática.

repositório da Universidade Federal de Santa Catarina⁸. A edição, direcionada ao professor, tem um suplemento de 29 páginas com objetivos instrucionais, observações didáticas e sugestões de questões de provas, seguido do texto completo destinado aos alunos, que tem 12 capítulos não numerados, totalizando 212 páginas.

Neste volume, quatro capítulos são dedicados à geometria: "Paralelismo e Direção", "Circunferência", "Simetria" e "Congruência", abrangendo 98 páginas. O estudo das transformações geométricas inicia-se no capítulo "Simetria", principal objeto de nossa análise.

Cada seção do livro segue uma estrutura que começa com "Exercícios Preliminares" (EP), seguidos de observações e generalizações, e termina com "Exercícios de Aplicação" (EA). As observações destacam resultados importantes e definições, recorrendo a quadros como "De um modo geral" e "Anote". Além do livro do aluno, o suplemento do professor ajuda a identificar elementos tanto da *matemática a ensinar* quanto da *matemática para ensinar*.

No tópico *Simetria*, que introduz o tema transformação geométrica no livro, as autoras elencam nove objetivos instrucionais, entre os quais destacamos: "1. Reconhecer e construir pontos simétricos em relação a uma reta [...] 4. Determinar o eixo de simetria de figuras planas. 5. Identificar os invariantes de uma simetria" (Averbuch et al., 1975, p. 3, suplemento do professor). Encontramos também as seguintes observações didáticas:

O estudo da simetria apresentado no livro tem dois objetivos:
a) formativo: desenvolver o domínio do espaço ligado aos movimentos de uma figura plana no espaço;

b) informativo: estudar a geometria através de transformações geométricas, fazendo assim, a integração com a linguagem utilizada em álgebra.

O estudo da simetria, além de enriquecer, facilita o estudo de congruência (Averbuch et al., 1975, p. 4, suplemento do professor).

Com isso, percebemos que as autoras visam situar a simetria como um objeto de ensino no âmbito da geometria, destacando a relação entre o estudo da simetria axial e a congruência. Além disso, a integração com a linguagem algébrica é um objetivo fundamental, conforme preconizado na Matemática Moderna.

⁸ Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/208927>. Acesso em 8 jul. 2024.

A estrutura do livro, que apresenta os conceitos a partir de exercícios, torna os elementos estruturantes *significado* e *análise dos exercícios* bastante imbricados. Portanto, do ponto de vista da *matemática do ensino*, a análise do *significado* dos conceitos será feita conjuntamente com a dos *exercícios*, considerando os EP e seus quadros, e os EA.

Para a análise, serão considerados apenas os EA que estão diretamente relacionados com o conceito de simetria axial. Exercícios em que a noção de simetria axial ou suas propriedades não estão explicitamente envolvidas não foram incluídos.

O Grupo I de EA do capítulo sobre congruência será incluído na análise, pois articula os conceitos de simetria axial e congruência, permitindo compreender uma finalidade principal da introdução dessa isometria na geometria da 7^a série. O Quadro 1 sintetiza o levantamento dos EA a serem considerados em nossa análise.

Quadro 1: Exercícios de Aplicação sobre Simetria a serem analisados

Tópico/ Tema	Grupo Ex. de Aplicação	Páginas	Total de Exercícios	Total de Exercícios de Simetria
SIMETRIA (p. 143-167) 25 páginas	II	145-146	6	6
	IV	149-150	5	2
	VI	152-153	6	6
	VIII	155-158	4	4
	X	160-165	13	2
	XII	166-167	5	3
Total	6 Grupos	18 páginas	39	23
CONGRUÊNCIA (p. 168-212) 45 páginas	I	170-173	7	1
Total	1 Grupo	4 páginas	7	2

Fonte: Elaborado pelos autores.

Análise do capítulo *Simetria*

Conforme já mencionado, o estudo de TG no volume 7 do Gruema foi desenvolvido no capítulo intitulado *Simetria*, que apresenta a única TG estudada no livro, a reflexão em reta, denominada pelas autoras de simetria axial.

O *significado* de simetria que as autoras desenvolveram começa com dois exercícios; em um deles o aluno deve traçar duas circunferências secantes, de centros *A* e *B*, marcar suas intersecções *P* e *P'*, e perceber que qualquer

circunferência com centro em um ponto sobre a reta AB passando por P , também passa por P' . No segundo exercício, o aluno deve traçar duas circunferências tangentes, de centros A e B , marcar a interseção P e perceber que qualquer circunferência com centro em um ponto sobre a reta AB , passando por P , é tangente às duas circunferências originais. Após esses exercícios, três quadros sistematizam e definem o que é a reflexão em reta (simetria axial), como mostra a Figura 1.

Figura 01: Quadros utilizados para destacar observações e conclusões
DE UM MODO GERAL

Dadas duas circunferências secantes de centros A e B e de interseção P e P' , qualquer outra circunferência de centro em \overleftrightarrow{AB} que passa por P passa por P' .
Dadas duas circunferências tangentes de centros A e B e de interseção P , qualquer outra circunferência de centro em \overleftrightarrow{AB} passando por P é tangente às circunferências dadas.

Anote:

P e P' são simétricos em relação à reta \overleftrightarrow{AB} , também chamada eixo de simetria.
Todo ponto da reta \overleftrightarrow{AB} é simétrico de si mesmo em relação a \overleftrightarrow{AB} .

E mais:

Simetria axial de eixo \overleftrightarrow{AB} é a função que transforma pontos do plano em seus simétricos em relação a \overleftrightarrow{AB} .
Representamos $S_{\overleftrightarrow{AB}}: P \rightarrow P'$

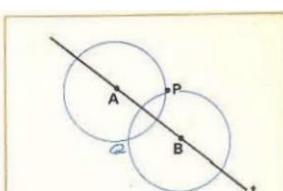
Fonte: Averbuch et al. (1975, p. 144)

A definição de simetria apresentada no quadro "E mais:" sugere uma intenção inicial de tratar a simetria axial como função. No entanto, a análise dos dois primeiros exercícios mostra que o *significado* que pode ser entendido é o de simetria como uma relação entre os pontos determinados por duas circunferências secantes, conforme os quadros "De um modo geral" e "Anote:". Esse entendimento é reforçado pela análise dos EA que seguem, em que cinco dos seis envolvem a determinação de pontos simétricos em relação a uma reta, obtidos por meio de construções de circunferências (utilizando o compasso) conforme proposto nos EP (cf. Figura 2).

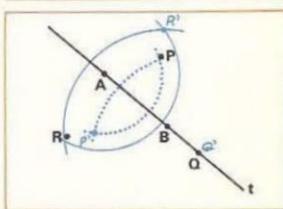
Figura 02: Grupo de exercícios de aplicação

Grupo II – Exercícios de Aplicação

1) a) Trace a circunferência de centro A passando por P e a circunferência de centro B passando por P .
b) Chame de Q a outra interseção das duas circunferências.
c) Qual é o simétrico de P em relação a \overleftrightarrow{AB} ? _____



2) Na figura ao lado, assinale os pontos P' , Q' e R' simétricos de P , Q e R em relação a \overleftrightarrow{AB} .



Fonte: Averbuch et al. (1975, p. 145)

O grupo de EP que segue serve de introdução para importantes propriedades

de pontos simétricos quando relacionados a pontos do eixo. Com isso, interpretamos que o *significado* da simetria axial está sendo ampliado, pois a relação entre o(s) ponto(s) determinado(s) por duas circunferências do primeiro grupo de EP vai sendo caracterizada de forma mais precisa. Os três EP propõem, respectivamente, identificar as seguintes propriedades, sendo dados os pontos simétricos P e P' em relação a uma reta t . - todo ponto de t é equidistante de P e P' ; - a intersecção de $\overleftrightarrow{PP'}$ com \overrightarrow{AB} é M , ponto médio de $\overleftrightarrow{PP'}$; - $\overleftrightarrow{PP'}$ é perpendicular à \overrightarrow{AB} . Antes do enunciado da terceira propriedade, uma história em quadrinhos traz um diálogo entre algumas crianças comentando que agora descobriram uma maneira de encontrar o eixo de simetria \overrightarrow{AB} sendo dados P e seu simétrico P' e uma nova maneira de encontrar o ponto médio de $\overleftrightarrow{PP'}$, permitindo que percebessem que \overrightarrow{AB} é perpendicular a $\overleftrightarrow{PP'}$.

De posse dessas novas propriedades, seguem cinco EA, dos quais apenas dois envolvem explicitamente o conceito de simetria axial. No primeiro, apresenta-se R e R' , e solicita-se a reta t que torna R' simétrico de R . No segundo, dados uma reta t e um ponto P , o objetivo é construir um losango. O aluno deve marcar A e A' em t , tal que $m(AP) = m(A'P)$, determinar P' simétrico de P em relação à t (com auxílio de duas circunferências) e, assim, obter o quadrilátero $PAP'A'$. Este exercício, de nosso ponto de vista, demonstra a aplicação das propriedades de simetria para construir o losango. Contudo, enquanto a propriedade das diagonais poderia ser observada no exercício, indagando se PP' é perpendicular à t , a congruência dos lados nos parece bastante implícita para que o aluno, usando a propriedade de equidistância de pontos simétricos, identifique que se trata de um losango. Em termos do objetivo desse exercício, consideramos que os elementos para que se estabeleça a relação entre pontos simétricos e o losango estão presentes, mas não de maneira explícita.

O próximo conjunto de EP, em nossa interpretação, vai permitir (re)aproximar a simetria axial da noção de função, conforme anunciado na definição inicial dessa transformação, porque foca nas propriedades invariantes da simetria axial, como a conservação de alinhamento e distâncias, o que alude a uma abordagem funcional. Esse grupo de EP destaca ainda dois outros resultados, consequências das referidas propriedades: - dados A' e B' simétricos de A e B respectivamente, os segmentos de reta AB e $A'B'$ são simétricos e as retas AB e $A'B'$ são simétricas; - o simétrico de uma circunferência em relação à reta t é uma circunferência.

Todos os seis EA que seguem pedem a determinação dos simétricos de figuras compostas por segmentos de reta (polígonos, barcos, letras e robôs), apresentadas em uma malha quadriculada e com o eixo de simetria a ser considerado inclinado em 45° ou na horizontal ou na vertical; em apenas um dos exercícios o eixo intercepta as figuras. A resolução sugerida nos dois primeiros exercícios usa o compasso, da mesma maneira como feito nos EP que antecederam, mas para os demais, a malha quadriculada parece ser um suporte suficiente para uma resolução mais visual, baseada na contagem de quadrados de forma a obter a equidistância ao eixo, em particular nas direções usuais (vertical e horizontal).

Em seguida, um único EP solicita o traçado dos simétricos de figuras em relação ao eixo t , para observar que algumas figuras se transformam em si mesmas pela simetria axial, enquanto outras não. Isso conduz à definição de figura simétrica: uma figura é simétrica se possui um eixo de simetria. Essa definição aparece em um quadro intitulado "De um modo geral", o que é apropriado, pois há figuras simétricas sem eixo de simetria. Os EA associados pedem a identificação dos eixos de simetria de várias formas geométricas, incluindo a circunferência. Os dois últimos grupos de EP/EA definem mediatrix, mediana e bisetriz de triângulos, destacando propriedades como a intersecção das medianas de um triângulo em um ponto único.

O capítulo final do livro, intitulado "Congruência", introduz a definição de figuras congruentes por meio de uma história em quadrinhos e um conjunto de sete EA. Nos seis primeiros, são apresentados pares de polígonos congruentes, nos quais os alunos devem associar os vértices dos polígonos para confirmar a congruência. O sétimo exercício apresenta seis figuras compostas por segmentos e objetos geométricos, chamadas de "bonecos" e nomeadas como F , F' , F'' etc. A figura F destaca os pontos A , B , C e D e o aluno deve marcar nas outras figuras os respectivos pontos simétricos que determinam a congruência. Embora esse exercício tenha um grande potencial para o estudo da composição de simetrias axiais, ele pode ser resolvido sem mobilizar conhecimentos desta TG, apenas comparando a posição relativa de cada ponto na figura original F .

Após esses exercícios, temos a definição: "Quando é possível transformar uma figura F em uma figura G , por uma sucessão de simetrias, as figuras são congruentes" (Averbuch et al., 1975, p. 175). Como já observado, esse sétimo exercício tinha o

potencial para que essa definição fosse naturalmente derivada da simetria axial, mas a sua proposta não favorece essa relação, e a definição, apesar de invocar as simetrias, dificilmente terá sido compreendida assim pelos alunos.

Considerações Finais

Neste artigo, analisamos o que é apresentado sobre o ensino de TG no volume 7 da coleção do Gruema, à luz do construto teórico da matemática do ensino proposto por Valente (2020). No caso, detivemos nossa atenção à análise dos exercícios e demais elementos do texto buscando compreender o *significado* da simetria axial, única TG introduzida no livro. O suplemento do professor sugere a integração da geometria com a linguagem da álgebra, conforme recomendações no MMM, e destaca que o estudo da simetria enriquece e facilita o estudo da congruência. Esses elementos refletem a *matemática do ensino* ao indicar aspectos metodológicos (*matemática para ensinar*) e conexões entre os conteúdos curriculares (*matemática a ensinar*).

Através de exercícios e quadros sistemáticos, a simetria axial é inicialmente apresentada como uma função, mas a ênfase recai sobre a relação entre pontos simétricos. Exercícios subsequentes expandem o entendimento dessa TG ao incluir propriedades como conservação de alinhamento e distâncias, além de mostrar que segmentos e figuras podem ser simétricos em relação a uma reta. Observa-se, contudo, que a abordagem funcional da simetria nos exercícios não é explorada explicitamente, e estes concentram-se nas relações geométricas entre pontos do plano e o eixo de simetria. Conceitos como mediatriz, mediana e bissetriz, bem como suas propriedades, reforçam a compreensão do que são pontos simétricos, embora a conexão direta com a simetria axial não seja explicitada.

A seção final do capítulo, que trata da congruência, apresenta um potencial didático significativo, mas a definição de figuras congruentes a partir de "sucessão de simetrias" poderia ser mais naturalmente derivada se houvesse, nos exercícios, uma conexão mais clara entre a proposta e a definição pretendida. Em síntese, o conceito de simetria axial é abordado principalmente como uma relação entre pontos e figuras, fundamentando a noção de congruência na geometria euclidiana.

Entendemos ser importante uma análise dessa natureza por oferecer uma

visão detalhada de como os conceitos matemáticos foram historicamente incorporados no currículo escolar, permitindo entender os objetivos educacionais de épocas passadas e inferir elementos das práticas pedagógicas. Isso, por sua vez, ilumina o desenvolvimento da *matemática a ensinar* – o conteúdo que se pretende que os alunos aprendam. Além disso, tal análise ajuda a compreender a *matemática para ensinar* – as ferramentas e estratégias pedagógicas que os professores podem utilizar para ensinar esses conteúdos.

Identificar como os livros didáticos abordam e sequenciam os conceitos matemáticos fornece *insights* sobre a eficácia das metodologias de ensino e os desafios enfrentados pelos professores. Finalmente, essa análise histórica pode informar a criação e a revisão de materiais didáticos atuais e futuros, garantindo que eles sejam projetados para atender de maneira mais efetiva às necessidades educacionais dos alunos e os objetivos pedagógicos dos professores. Assim, a análise de livros didáticos do passado não só preserva o legado educacional, mas também pode contribuir para a evolução contínua do ensino da matemática.

Referências

- Averbuch, A., Gottlieb, F. C., Sanchez, L. B., & Liberman, M. P. (1975). *Curso Moderno de Matemática para o ensino de primeiro grau – Gruema 7*. São Paulo: Companhia Editora Nacional.
- Chervel, A. (1990). História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. *Teoria & Educação*, 2, 177–229.
- Duarte, A. R. S., & Leme da Silva, M. C. (2006). Abaixo Euclides e acima quem? Uma análise do ensino de Geometria nas teses e dissertações sobre o Movimento da Matemática Moderna no Brasil. *Práxis Educativa*, 1(1), 87–93.
- Leme da Silva, M. C. (2008). A geometria escolar moderna de Osvaldo Sangiorgi. In W. R. Valente (Ed.), *Osvaldo Sangiorgi – um professor moderno* (pp. 69-93). São Paulo: Editora Annablume.
- Leme da Silva, M. C., & Jahn, A. P. (2024). Transformações Geométricas no Ensino de Geometria: Diferentes apropriações na matemática moderna. *Bolema*, 38, 1–21.
- Munakata, K. (2016). Livro didático como indício da cultura escolar. *História da Educação*, 20(50), 119–138.
- Valente, W. R. (2020). História e Cultura em Educação Matemática: a Produção da Matemática do Ensino. *Rematec*, 15(36), 164–174.
- Villela, L. M. A. (2010). Revivendo o Gruema: da memória das autoras à produção de uma história. *Bolema - Boletim de Educação Matemática*, 23(35B), 387–403.