Material Suplementar

1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A técnica utilizada neste trabalho, para investigar o estado de polarização de um feixe luminoso, se baseia na interação deste feixe com um defasador quarto de onda girante e um polarizador linear. O objetivo nessa seção é desenvolver as expressões, baseadas na teoria de Stokes, que fornecem os parâmetros necessários para a caracterização do estado de polarização do feixe de luz.

1.1 ELIPSE DE POLARIZAÇÃO

Uma onda eletromagnética propagando-se na direção do eixo z, em coordenadas cartesianas, é descrita por duas componentes do campo elétrico, ambas perpendiculares à direção de movimento da mesma (respectivamente nos eixos x e y). A onda eletromagnética pode ser representada então através das seguintes equações [1]:

$$E_x\left(\vec{r},t\right) = E_{ox}\cos\left(\omega t - kz + \delta_x(t)\right) \qquad (0.1)$$

$$E_y\left(\vec{r},t\right) = E_{oy}\cos\left(\omega t - kz + \delta_y(t)\right) \qquad (0.2)$$

onde E_{ox} e E_{oy} são as amplitudes na direção dos eixos x e y, respectivamente, ω é a frequência angular, $\delta_x(t)$ e $\delta_y(t)$ são as diferenças de fases instantâneas. Se o referencial for adotado em z = 0, as equações (0.1) e (0.2) ficam da seguinte forma:

$$E_x\left(t\right) = E_{ox}\cos\left(\omega t + \delta_x(t)\right) \qquad (0.3)$$

$$E_y\left(t\right) = E_{oy}\cos\left(\omega t + \delta_y(t)\right) \qquad (0.4)$$

abrindo os cossenos das equações (0.3) e (0.4), temos:

$$\frac{E_x}{E_{ox}} = \cos\omega t\cos\delta_x - sen\omega t sen\delta_x \qquad (0.5)$$

$$\frac{E_y}{E_{oy}} = \cos\omega t\cos\delta_y - sen\omega t sen\delta_y \qquad (0.6)$$

multiplicando (0.5) por $sen\delta_y$ e (0.6) por $sen\delta_x$, e subtraindo (0.6) de (0.5) obtemos:

$$\frac{E_x}{E_{ox}}sen\delta_y - \frac{E_y}{E_{oy}}sen\delta_x = \cos\omega t\, sen\left(\delta_y - \delta_x\right) \qquad (0.7)$$

multiplicando novamente (0.5) por $\cos\delta_y$, (0.6) por $\cos\delta_x$ e subtraindo (0.6) de (0.5), chegamos a:

$$\frac{E_x}{E_{ox}}\cos\delta_y - \frac{E_y}{E_{oy}}\cos\delta_x = sen\omega t\, sen\left(\delta_y - \delta_x\right). \qquad (0.8)$$

Elevando (0.7) e (0.8) ao quadrado e somando, encontramos:

$$\frac{E_x^2}{E_{ox}^2} + \frac{E_y^2}{E_{oy}^2} - 2\frac{E_xE_y}{E_{ox}E_{oy}}\cos\left(\delta_y - \delta_x\right) = sen^2\left(\delta_y - \delta_x\right) \qquad (0.9)$$

definindo:

$$\delta = \delta_y - \delta_x \qquad (0.10)$$

obtemos:

$$\frac{E_x^2}{E_{ox}^2} + \frac{E_y^2}{E_{oy}^2} - 2\frac{E_xE_y}{E_{ox}E_{oy}}\cos\delta = sen^2\delta. \qquad (0.11)$$

A equação (0.11) representa a equação de uma elipse e, como trata-se do campo elétrico de uma onda eletromagnética, é denominada Elipse de Polarização. É através do campo elétrico de uma onda que representamos o seu estado de polarização.

Para valores específicos de δ, E_{oy} e E_{ox}, teremos casos especiais para os estados de polarização, como veremos a seguir.

1.1.1 *Polarização linear*

Quando $E_{oy} = 0$, a função representada pela equação (0.2) é nula, o que significa que somente a equação (0.1) descreverá a onda eletromagnética; neste caso, somente há oscilação na direção do eixo x. Então, essa onda eletromagnética é conhecida como sendo linearmente polarizada na horizontal [2].

Quando $E_{ox} = 0$, a função que se anula é a representada pela equação (0.1), assim, a função que descreve a onda é dada pela equação (0.2); neste caso, a oscilação é na direção do eixo y e, essa onda eletromagnética, é dita como sendo linearmente polarizada na vertical.

Fazendo $\delta = 0$ ou $\pi\ rad$, a equação (0.11) se torna:

$$\frac{E_x^2}{E_{ox}^2} + \frac{E_y^2}{E_{oy}^2} \pm 2\frac{E_x}{E_{ox}}\frac{E_y}{E_{oy}} = 0 \qquad (0.12)$$

que pode ser reescrita como:

$$\left(\frac{E_x}{E_{ox}} \pm \frac{E_y}{E_{oy}}\right)^2 = 0 \qquad (0.13)$$

resolvendo a equação (0.13) deixando E_y em função de E_x, obtemos:

$$E_y = \pm\left(\frac{E_{oy}}{E_{ox}}\right)E_x . \qquad (0.14)$$

A equação (0.14) é a equação de uma reta com coeficiente angular dado por $\pm\left(E_{oy}/E_{ox}\right)$, nestas condições, a luz é linearmente polarizada com inclinação $\pm\left(E_{oy}/E_{ox}\right)$. Para $\delta = 0$ a inclinação é negativa, e para $\delta = \pi$ a inclinação é positiva. Se as ondas eletromagnéticas apresentarem a mesma amplitude de oscilação, ou seja, $E_{ox} = E_{oy}$, então, a equação (0.14) pode ser escrita como:

$$E_y = \pm E_x \qquad (0.15)$$

o valor positivo da relação (0.15) representa luz linearmente polarizada a (+ 45º), e o valor negativo representa luz linearmente polarizada a (- 45º).

1.1.2 *Polarização Circular*

Para o caso de polarização circular é necessário considerarmos as mesmas amplitudes das oscilações $E_{ox} = E_{oy} = E_o$ e as diferenças de fase como sendo $\delta = \pi/2$ ou $3\pi/2\ rad$. Assim a equação (0.11) se reduz a:

$$\frac{E_x^2}{E_o^2} + \frac{E_y^2}{E_o^2} = 1 . \qquad (0.16)$$

A equação (0.16) descreve uma circunferência de raio E_o. Assim, para esta condição, a onda eletromagnética é conhecida como circularmente polarizada para direita ou esquerda quando as diferenças de fase apresentarem os respectivos valores $\delta = \pi/2$ ou $3\pi/2\ rad$.

1.2 PARÂMETROS DE STOKES

Analisando a equação (0.11), pode-se notar que E_{0x}, E_{0y} e δ são quantidades constantes, enquanto E_x e E_y dependem implicitamente do tempo, como pode ser observado pelas equações (0.1) e (0.2).

Então, podemos reescrever (0.11) em termos de observáveis do campo óptico. Porém, para utilizar esses termos de observáveis, é necessário tomar a média sobre o tempo de observação, ou seja:

$$\frac{\left\langle E_x^2(t)\right\rangle}{E_{ox}^2}+\frac{\left\langle E_y^2(t)\right\rangle}{E_{oy}^2}-2\frac{\left\langle E_x(t)E_y(t)\right\rangle}{E_{ox}E_{oy}}\cos\delta = sen^2\delta . \quad (0.17)$$

Realizando a operação de multiplicação da equação (0.17) por $4E_{ox}^2E_{oy}^2$, temos:

$$4E_{oy}^2\left\langle E_x^2(t)\right\rangle+4E_{ox}^2\left\langle E_y^2(t)\right\rangle-8E_{ox}E_{oy}\left\langle E_x(t)E_y(t)\right\rangle\cos\delta=\left(2E_{ox}E_{oy}sen\delta\right)^2 . (0.18)$$

Para encontrarmos as médias que constam na equação (1.18), usamos as seguintes equações:

$$\left\langle E_x^2(t)\right\rangle = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_o^t E_x^2 dt \quad (0.19)$$

$$\left\langle E_y^2(t)\right\rangle = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_o^t E_y^2 dt \quad (0.20)$$

$$\left\langle E_x(t)E_y(t)\right\rangle = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t E_x(t)E_y(t)dt \quad (0.21)$$

o que resulta em:

$$\left\langle E_x^2(t)\right\rangle = \frac{1}{2}E_{ox}^2 \quad (0.22)$$

$$\left\langle E_y^2(t)\right\rangle = \frac{1}{2}E_{oy}^2 \quad (0.23)$$

$$\left\langle E_x(t)E_y(t)\right\rangle = \frac{1}{2}E_{ox}E_{oy}\cos\delta . \quad (0.24)$$

Fazendo a substituição de (0.22), (0.23) e (0.24) na equação (0.18), temos:

$$2E_{oy}^2E_{ox}^2+2E_{ox}^2E_{oy}^2-\left(2E_{ox}E_{oy}\cos\delta\right)^2=\left(2E_{ox}E_{oy}sen\delta\right)^2 \quad (0.25)$$

A relação (0.25) pode ser reescrita na forma de quadrados perfeitos; basta adicionar e subtrair a quantidade $E_{ox}^4+E_{oy}^4$, isto é:

$$\left(E_{ox}^2+E_{oy}^2\right)^2-\left(E_{ox}^2-E_{oy}^2\right)^2-\left(2E_{ox}E_{oy}\cos\delta\right)^2=\left(2E_{ox}E_{oy}sen\delta\right)^2 . \quad (0.26)$$

A equação (0.26) pode ser simplificada a partir das seguintes definições:

$$S_o = E_{ox}^2+E_{oy}^2 \quad (0.27)$$

$$S_1 = E_{ox}^2-E_{oy}^2 \quad (0.28)$$

$$S_2 = 2E_{ox}E_{oy}\cos\delta \quad (0.29)$$

$$S_3 = 2E_{ox}E_{oy}sen\delta \quad (0.30)$$

com as quantidades definidas em (0.27), (0.28), (0.29) e (0.30), podemos reescrever (0.26) como:

$$S_o^2 = S_1^2+S_2^2+S_3^2 . \quad (0.31)$$

As definições contidas nas equações (0.27), (0.28), (0.29) e (0.30) levam aos parâmetros de Stokes, que permitem caracterizar o estado de polarização de uma onda plana. As quantidades definidas são reais, pois o desenvolvimento matemático foi feito partindo dos observáveis da elipse de polarização do campo óptico. Cada parâmetro tem um significado físico: S_o representa a intensidade total da luz; S_1 descreve a quantidade de polarização linear na direção horizontal ou vertical; S_2 indica a quantidade de polarização linear à + 45° ou - 45°; e por fim, S_3 representa a quantidade de luz circularmente polarizada à direita ou à esquerda contida em um feixe de luz. A justificativa para tais atribuições será apresentada na próxima seção. Pode-se notar que todos os parâmetros são termos relacionados à intensidade da onda luminosa.

É possível fazer uma generalização da equação (0.31), quando tratamos de uma onda eletromagnética parcialmente polarizada, usando as equações (0.27), (0.28), (0.29) e (0.30) para um intervalo de tempo muito pequeno, com variação lenta da amplitude e da fase. Assim, através da desigualdade de Schwarz é possível mostrar que, para qualquer estado de polarização, os parâmetros de Stokes satisfazem a relação:

$$S_o^2 \geq S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \qquad (0.32)$$

A equação (0.32) pode ser aplicada para o caso geral: se uma onda eletromagnética é totalmente polarizada, usa-se o sinal de igual; quando se tratar de uma onda eletromagnética parcialmente polarizada ou não polarizada, a relação leva em consideração o sinal de maior.

Com o auxílio dos parâmetros de Stokes, é possível descobrir o grau de polarização *P* de uma onda eletromagnética, independentemente de qual seja o seu estado de polarização, através da relação:

$$P = \frac{I_{pol}}{I_{tot}} = \frac{\left(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2\right)^{1/2}}{S_o} \qquad (0.33)$$

O grau de polarização pode variar de 0 a 1, onde 1 significa uma onda totalmente polarizada e 0 uma não polarizada; para qualquer valor entre eles, a onda é parcialmente polarizada.

Os parâmetros de Stokes podem também ser obtidos de outra forma, partindo de uma onda eletromagnética com amplitudes complexas descrita pelas seguintes equações:

$$E_x\left(t\right) = E_{ox} e^{i\left(\omega t + \delta_x\right)} = \varepsilon_x e^{i\omega t} \qquad (0.34)$$

$$E_y\left(t\right) = E_{oy} e^{i\left(\omega t + \delta_y\right)} = \varepsilon_y e^{i\omega t} \qquad (0.35)$$

através das equações (0.34) e (0.35) é possível obter as seguintes relações para os parâmetros de Stokes:

$$S_o = E_x E_x^* + E_y E_y^* \qquad (0.36)$$

$$S_1 = E_x E_x^* - E_y E_y^* \qquad (0.37)$$

$$S_2 = E_x E_y^* + E_y E_x^* \qquad (0.38)$$

$$S_3 = i\left(E_x E_y^* - E_y E_x^*\right) \qquad (0.39)$$

as equações (0.36) - (0.39) são os parâmetros de Stokes para ondas eletromagnéticas descritas por amplitudes complexas.

1.3 VETOR DE STOKES

É interessante escrevermos os parâmetros de Stokes em forma de uma matriz coluna, denominado de vetor de Stokes, representado por:

$$S = \begin{pmatrix} S_o \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}. \qquad (0.40)$$

Substituindo as equações (0.27), (0.28), (0.29) e (0.30) em (0.40), obtemos:

$$S = \begin{pmatrix} E_{ox}^2 + E_{oy}^2 \\ E_{ox}^2 - E_{oy}^2 \\ 2E_{ox}E_{oy}\cos\left(\delta\right) \\ 2E_{ox}E_{oy}sen\left(\delta\right) \end{pmatrix} \qquad (0.41)$$

A equação (0.41) resulta em uma maneira simples e interessante de representar o estado de polarização de uma onda eletromagnética. Vamos exemplificar a seguir os diversos estados de polarização conhecidos.

Foi demonstrado anteriormente que, para um feixe eletromagnético linearmente polarizado na vertical ou na horizontal, $E_{ox} = 0$ e $E_{oy} = 0$, respectivamente.

Substituindo essas condições na equação (0.41) chegamos a:

$$S = I_o \begin{pmatrix} 1 \\ \mp 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (0.42)$$

onde $I_o = E_{oy}^2$, para o caso da luz ser linearmente polarizada na vertical e, neste caso, usa-se o sinal negativo, e $I_o = E_{ox}^2$, para o caso onde a luz é linearmente polarizada na horizontal e usa-se o sinal positivo; I_o é a intensidade total da onda eletromagnética.

Para se obter uma onda eletromagnética com polarização linear à + 45° ou - 45°, é necessário ter a mesma amplitude para as ondas perpendiculares, ou seja, $E_{ox} = E_{oy} = E_o$ e uma diferença de fase de δ = 0° ou δ = 180°, respectivamente. Com isso, define-se a matriz:

$$S = I_o \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (0.43)$$

onde, neste caso, definimos a intensidade total como $I_o = 2E_o^2$; o sinal positivo representa um feixe de luz polarizado linearmente a + 45° e o sinal negativo define um feixe de luz linearmente polarizado a - 45°.

Para uma polarização circular, é necessário ter ondas eletromagnéticas perpendiculares entre si possuindo a mesma amplitude $E_{ox} = E_{oy} = E_o$ e uma diferença de fase sendo de $\delta = 90^o$ ou $\delta = 270^o$. Assim escrevemos o vetor de Stokes pela seguinte matriz:

$$S = I_o \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix} \qquad (0.44)$$

onde a intensidade total é definida como $I_o = 2E_o^2$. O sinal positivo representa uma onda eletromagnética circularmente polarizada à direita, devido à diferença de fase ser $\delta = 90^o$. Já o sinal negativo representa uma luz circularmente polarizada à esquerda, devido à diferença de fase ser $\delta = 270^o$.

1.4 MATRIZ DE MUELLER

Até o momento procuramos descrever as propriedades fundamentais de um feixe de luz polarizado. Algo interessante e importante para a sequência deste trabalho é saber como uma onda eletromagnética polarizada se comporta quando interage com alguns elementos ópticos capazes de modificar a polarização incidente. A figura 1 mostra a interação de um feixe incidente polarizado caracterizado pelos parâmetros de Stokes S_i, onde $i = 0, 1, 2, 3$, com um elemento polarizador, e um feixe emergente representado por um novo conjunto de parâmetros de Stokes, $S_i^{'}$, onde $i = 0, 1, 2, 3$.

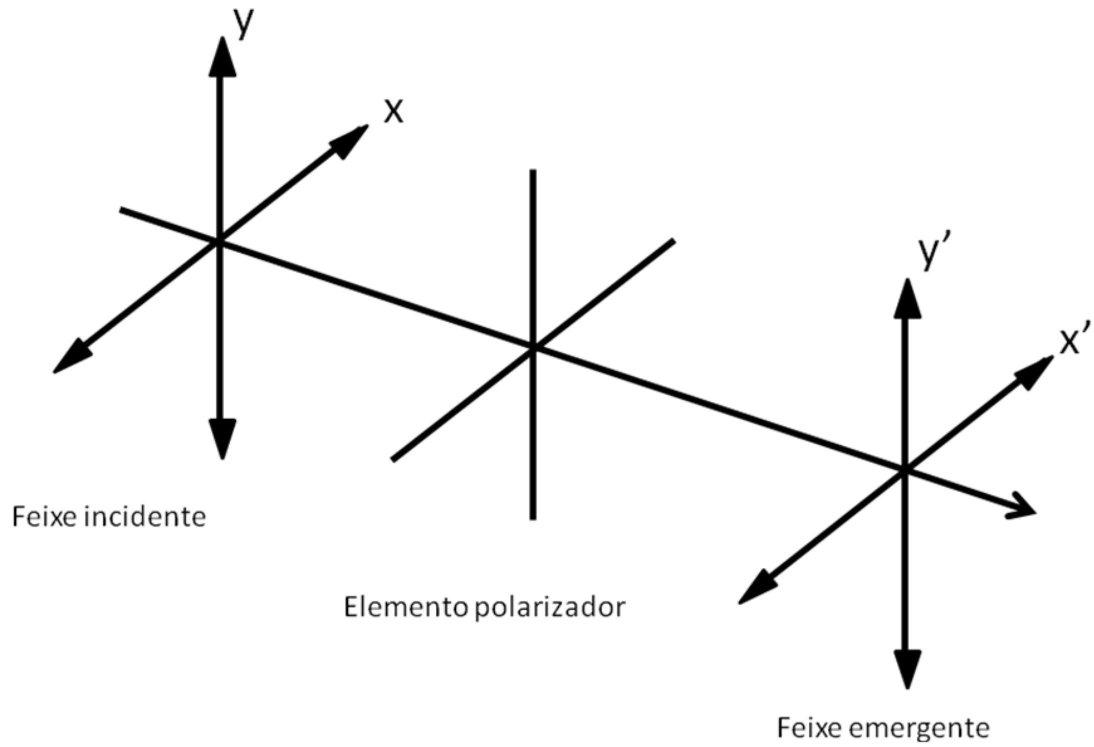

Figura 1 – **Interação de um feixe polarizado com um elemento polarizador.**

Fazendo uma associação dos parâmetros de Stokes do feixe emergente como uma combinação linear dos parâmetros de Stokes do feixe incidente, teremos as seguintes relações:

$$S_o^{'} = m_{00}S_o + m_{01}S_1 + m_{02}S_2 + m_{03}S_3 \tag{0.45}$$

$$S_1^{'} = m_{10}S_o + m_{11}S_1 + m_{12}S_2 + m_{13}S_3 \tag{0.46}$$

$$S_2^{'} = m_{20}S_o + m_{21}S_1 + m_{22}S_2 + m_{23}S_3 \tag{0.47}$$

$$S_3^{'} = m_{30}S_o + m_{31}S_1 + m_{32}S_2 + m_{33}S_3 . \tag{0.48}$$

As relações (0.45) - (0.48) podem ser representadas em notação matricial, usando os vetores de Stokes, na seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} S_o^{'} \\ S_1^{'} \\ S_2^{'} \\ S_3^{'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_o \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} \tag{0.49}$$

ou de uma maneira mais simplificada,

$$S' = M \cdot S \tag{0.50}$$

As matrizes colunas são associadas aos vetores de Stokes e a matriz 4X4 representa a matriz de Mueller característica do elemento polarizador.

1.5 EXTRAINDO OS PARÂMETROS DE STOKES ATRAVÉS DA TÉCNICA DE ELIPSOMETRIA DE EMISSÃO

Foi indicado, no início dessa seção, que a análise e caracterização do estado de polarização de um feixe luminoso poderia ser feita através da interação deste feixe com um defasador quarto de onda girante e um polarizador linear. Em posse das matrizes de Mueller para esses componentes ópticos, podemos agora determinar como é a interação de um feixe incidente com esses elementos, e como ficará o vetor de Stokes do feixe emergente.

Tomando o vetor de Stokes (0.40) para o feixe que incide sobre um defasador quarto de onda girante, teremos a seguinte expressão para o feixe que emerge do defasador:

$$S' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 2\theta & sen2\theta\cos 2\theta & -sen2\theta \\ 0 & sen2\theta\cos 2\theta & sen^2 2\theta & \cos 2\theta \\ 0 & sen2\theta & -\cos 2\theta & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_o \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} \qquad (0.51)$$

realizando essa multiplicação, obtemos:

$$S' = \begin{pmatrix} S_o \\ S_1\cos^2 2\theta + S_2 sen2\theta\cos 2\theta - S_3 sen2\theta \\ S_1 sen2\theta\cos 2\theta + S_2 sen^2 2\theta + S_3\cos 2\theta \\ S_1 sen2\theta - S_2\cos 2\theta \end{pmatrix}. \qquad (0.52)$$

Após interagir com o defasador quarto de onda, o feixe emergente sofrerá uma nova interação com um polarizador linear na horizontal. Usando a matriz **Erro! Fonte de referência não encontrada.** e fazendo a multiplicação do feixe emergente (0.52), teremos:

$$S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_o \\ S_1\cos^2 2\theta + S_2 sen2\theta\cos 2\theta - S_3 sen2\theta \\ S_1 sen2\theta\cos 2\theta + S_2 sen^2 2\theta + S_3\cos 2\theta \\ S_1 sen2\theta - S_2\cos 2\theta \end{pmatrix}. (0.53)$$

A operação resultará em:

$$S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} S_o + S_1\cos^2 2\theta + S_2 sen2\theta\cos 2\theta - S_3 sen2\theta \\ S_o + S_1\cos^2 2\theta + S_2 sen2\theta\cos 2\theta - S_3 sen2\theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (0.54)$$

a qual pode ser rescrita como:

$$S = \frac{1}{2}\left[S_o + S_1\cos^2 2\theta + S_2 sen2\theta\cos 2\theta - S_3 sen2\theta\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (0.55)$$

assim, vemos que a intensidade do feixe de luz depende do ângulo θ de giro do defasador por:

$$I(\theta) = \frac{1}{2}\left[S_o + S_1\cos^2 2\theta + S_2 sen2\theta\cos 2\theta - S_3 sen2\theta\right]. \qquad (0.56)$$

Podemos adequar a equação (0.56) mediante algumas operações simples, isto é:

$$I(\theta) = \frac{1}{2}\left\{S_o + \frac{S_1}{2}\left[\cos^2 2\theta + sen^2 2\theta\right] + \frac{S_1}{2}\left[\cos^2 2\theta - sen^2 2\theta\right] + \frac{S_2}{2} 2sen2\theta\cos 2\theta - S_3 sen2\theta\right\} (0.57)$$

ou

$$I(\theta) = \frac{1}{2}\left[A + B\cdot sen2\theta + C\cdot\cos 4\theta + D\cdot sen4\theta\right] \qquad (0.58)$$

onde utilizamos as relações trigonométricas:

$$\cos^2 x + sen^2 x = 1 \qquad (0.59)$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - sen^2 x \qquad (0.60)$$

$$sen2x = 2senx\cos x. \qquad (0.61)$$

Comparando as equações (0.58) e (0.57), temos as seguintes relações:

$$A = S_o + \frac{S_1}{2} \qquad (0.62)$$

$$B = -S_3 \qquad (0.63)$$

$$C = \frac{S_1}{2} \qquad (0.64)$$

$$D = \frac{S_2}{2}. \qquad (0.65)$$

Destas relações, é fácil ver que:

$$S_o = A - C \quad (0.66)$$

$$S_1 = 2 \cdot C \quad (0.67)$$

$$S_2 = 2 \cdot D \quad (0.68)$$

$$S_3 = -B \quad (0.69)$$

A equação (0.58) mostra como a intensidade do feixe luminoso varia em função do ângulo de giro do defasador quarto de onda. Ajustando a curva experimental com essa equação, determina-se os coeficientes A, B, C e D os quais, postos nas relações (0.66) - (0.69), fornecem os parâmetros de Stokes que caracterizam completamente o estado de polarização do feixe de luz.

Referências

1. Goldstein, D.H., *Polarized light*. 2017: CRC press.
2. Azzam, R.M., N.M. Bashara, and S.S. Ballard, *Ellipsometry and polarized light.* PhT, 1978. **31**(11): p. 72.