

Modelagem de análise de falhas para identificação em treliças

- MATERIAL SUPLEMENTAR -

- Metodologia de elementos finitos

Para descrição da metodologia adotada no trabalho devemos definir anteriormente a Matriz de Rigidez do Elemento \tilde{k} pode ser descrita conforme a equação (1):

$$\tilde{k} = \int_{V_e} (\tilde{B}^T \tilde{E} \tilde{B}) dV_e \quad (1)$$

Adicionalmente, descrevemos a matriz de massa do elemento que pode ser obtida pela expressão global de energia cinética de um elemento [1], descrita pela equação (2), na qual m é a matriz consistente de massa, pois é calculada utilizando as mesmas funções de forma da matriz de rigidez, resultando em:

$$m = \int_{\tau} \rho \tilde{\varphi} \tilde{\varphi}^T d\tau \quad (2)$$

- Modelagem de Elemento Finito da Barra de Treliça

Treliças representam estruturas constituídas de conjuntos de hastes de vibração axial, onde as extremidades das hastes são fixadas às articulações. Modelagem de elementos finitos de treliças envolve algumas características como, por exemplo, as hastes podem ter orientações arbitrárias em relação a um referencial dado e normalmente várias hastes são fixadas em um nó. Como resultado, o processo de montagem é sensivelmente mais complicado do que para os membros individuais.

Considerando-se um membro típico de treliça i fazendo um ângulo β_i em relação à direção x e denotam os dois nós por k e l , e os deslocamentos correspondentes por U_{kx} e U_{ly} , e U_{lx} e U_{ly} , respectivamente, como mostrado na Figura (1). Consideramos o membro da treliça como uma haste uniforme submetidos à vibração elástica na direção axial e o

movimento de corpo rígido, no sentido transversal. O movimento de corpo rígido, não afeta a energia potencial máxima e conseqüentemente a matriz de rigidez.

Portanto, a modelagem da haste por meio de n_i elementos finitos através da equação (1) terá a matriz de rigidez global desmembrada para o elemento i da forma:

$$\tilde{k} = EA \int_0^{h_i} (\tilde{B}^T \tilde{B}) dx \quad (3)$$

ou na forma matricial:

$$\tilde{K}_i = \frac{EA_i}{h_i} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

na qual EA_i é a rigidez axial, sendo A_i a área da seção transversal da barra i e h_i é o tamanho do elemento finito. Notamos que "desmembrado" é no sentido de que as matrizes de rigidez globais são para os membros individuais sozinhos e não para os membros como partes de uma treliça.

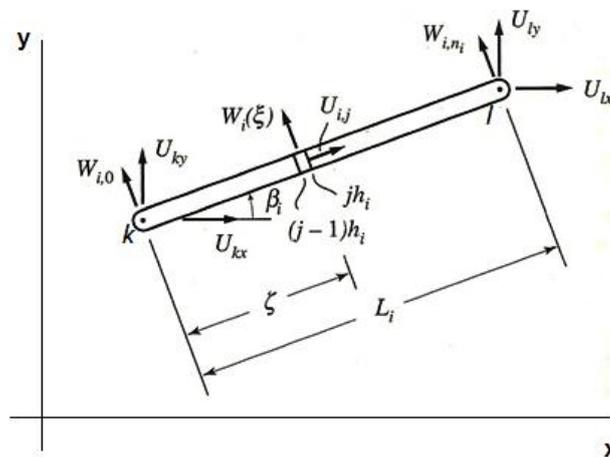


Figura 1: Típico membro i de uma treliça fazendo um ângulo β_i em relação à direção x [2].

Por outro lado, tanto a vibração elástica quanto o movimento de corpo rígido afetam a energia cinética, de modo que a distinção entre uma matriz de massa global M_{ei} devido à vibração axial elástica e uma matriz de massa global M_{rbi} devido ao movimento do corpo rígido transversal. E a matriz de massa global desmembrada para o membro i devido à vibração elástica é:

$$M_{ei} = \frac{\rho h_i}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

em que ρ é a densidade de massa, e

$$C_{\sim i} = \begin{bmatrix} c\beta_i & s\beta_i & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c\beta_i & s\beta_i \end{bmatrix} \quad (6)$$

é uma matriz de transformação $(ni + 1) \times (ni + 3)$ desempenhando o papel de uma matriz de restrição, na qual $c\beta_i = \cos\beta_i$ e $s\beta_i = \sin\beta_i$. A transformação do vetor de restrição \vec{a}_i ao vetor independente $\vec{\tilde{a}}_i$ exige uma transformação correspondente da matriz de rigidez global desmembrada K_i e da matriz de massa M_i . Para esse efeito, podemos escrever a energia potencial máxima para o membro i sob a forma:

$$\Pi_{mas,i} = \frac{1}{2} \vec{a}_i^T \cdot K_i \vec{a}_i = \frac{1}{2} \vec{a}_i^T C_i^T K_i C_i \vec{\tilde{a}}_i = \frac{1}{2} \vec{a}_i^T \tilde{K}_i \vec{\tilde{a}}_i \quad (7)$$

na qual, usando as equações (4) e (6) teremos:

$$\begin{aligned} \overline{K}_{\sim i} &= C_{\sim i}^T \cdot K_{\sim i} \cdot C_{\sim i} \\ &= \frac{EA_i}{h_i} \begin{bmatrix} c^2 \beta_i & s\beta_i c\beta_i & -c\beta_i & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ s\beta_i c\beta_i & s^2 \beta_i & -s\beta_i & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -c\beta_i & -s\beta_i & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -c\beta_i & -s\beta_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -c\beta_i & c^2 \beta_i & s\beta_i c\beta_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -s\beta_i & s\beta_i c\beta_i & s^2 \beta_i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

é o necessário uma matriz de rigidez global desmembrada $(ni + 3) \times (ni + 3)$ para o membro i . Da mesma forma, podemos escrever a equação da energia cinética devido à vibração elástica conforme abaixo.

$$T_{re,ei} = \frac{1}{2} \vec{a}_i^T \cdot M_{ei} \cdot \vec{a}_i = \frac{1}{2} \vec{a}_i^T \cdot C_i^T \cdot M_{ei} \cdot C_i \vec{a}_i = \frac{1}{2} \vec{a}_i^T \cdot \overline{M}_{ei} \vec{a}_i \quad (9)$$

na qual, usando as equações (5) e (6) teremos a matriz:

$$\begin{aligned} \overline{M}_{\sim ei} &= C_{\sim i}^T \cdot M_{\sim ei} \cdot C_{\sim i} = \\ &= \frac{\rho_i h_i}{6} x \begin{bmatrix} 2c^2 \beta_i & 2s\beta_i c\beta_i & c\beta_i & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2s\beta_i c\beta_i & 2s^2 \beta_i & s\beta_i & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ c\beta_i & s\beta_i & 4 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & c\beta_i & s\beta_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c\beta_i & 2c^2 \beta_i & 2s\beta_i c\beta_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & s\beta_i & 2s\beta_i c\beta_i & 2s^2 \beta_i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

na qual $\overline{M}_{\sim ei}$ é a matriz de massa global desmembrada $(ni + 3) \times (ni + 3)$ para o membro i devido às vibrações elásticas.

Em seguida, obtemos a matriz de massa global desmembrada devido ao movimento do corpo rígido transversal. A energia cinética referente é a soma das contribuições de ambas as vibrações elásticas e do movimento do corpo rígido, de modo que

$$T_{ref,i} = T_{ref,ei} + T_{ref,rbi} = \frac{1}{2} \vec{a}_i^T \overline{M}_{\sim ei} \vec{a}_i + \frac{1}{2} \vec{a}_i^T \overline{M}_{\sim rbi} \vec{a}_i = \frac{1}{2} \vec{a}_i^T \overline{M}_{\sim i} \vec{a}_i \quad (11)$$

em que

$$\overline{M}_{\sim i} = \overline{M}_{\sim ei} + \overline{M}_{\sim rbi} = \frac{\rho_i h_i}{6} \begin{bmatrix} 2(c^2 \beta_i + n_i s^2 \beta_i) & 2(1-n_i) s \beta_i c \beta_i & c \beta_i & 0 & 0 & \dots & n_i s^2 \beta_i & -n_i s \beta_i c \beta_i \\ 2(1-n_i) s \beta_i c \beta_i & 2(s^2 \beta_i + n_i c^2 \beta_i) & s \beta_i & 0 & 0 & \dots & -n_i s \beta_i c \beta_i & n_i c^2 \beta_i \\ c \beta_i & s \beta_i & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & \dots & c \beta_i & s \beta_i \\ n_i s^2 \beta_i & -n_i s \beta_i c \beta_i & 0 & 0 & c \beta_i & \dots & 2(c^2 \beta_i + n_i s^2 \beta_i) & 2(1-n_i) s \beta_i c \beta_i \\ -n_i s \beta_i c \beta_i & n_i c^2 \beta_i & 0 & 0 & s \beta_i & \dots & 2(1-n_i) s \beta_i c \beta_i & 2(s^2 \beta_i + n_i c^2 \beta_i) \end{bmatrix} \quad (12)$$

é a matriz de massa desmembrada para o membro i .

Seguindo Meirovitch (2001) [2], neste momento, volta-se a atenção para o processo de montagem. Para este fim, escreve-se a energia potencial máxima do sistema, ou seja, o máximo de energia potencial para a treliça toda, como se segue:

$$\Pi_{max} = \sum_{i=1}^N \Pi_{max,i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \vec{a}_i^T \overline{K}_{\sim i} \vec{a}_i = \frac{1}{2} \vec{a}^T \overline{K}_{\sim} \vec{a} \quad (13)$$

na qual N é o número total de membros da treliça, \vec{a} é o sistema de vetor deslocamento e \overline{K}_{\sim} é a matriz de rigidez do sistema. Similarmente, o sistema referente à energia cinética fica:

$$T_{ref} = \sum_{i=1}^N T_{ref,i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \vec{a}_i^T \overline{M}_{\sim i} \vec{a}_i = \frac{1}{2} \vec{a}^T \overline{M}_{\sim} \vec{a} \quad (14)$$

em que \overline{M}_{\sim} é a matriz de massa do sistema. Assim, o processo de montagem se reduz a geração das matrizes de massa e de rigidez do sistema correspondentes para o sistema de vetores de deslocamentos.

- Metodologia dos Observadores de Estado

Os observadores de estado foram inicialmente propostos e desenvolvidos por Luenberger (1964), que continuou no decorrer dos anos aperfeiçoando a metodologia [3]. A teoria dos observadores de estado encontra-se dentro da teoria de Controle Moderno e tem sido estendida por vários campos de pesquisas para incluir sistemas variando no tempo, sistemas discretos e sistemas aleatórios.

Desde 1964 os observadores têm sido apresentados em numerosos projetos de sistemas de controle dos quais uma pequena porcentagem tem sido informada de forma explícita. A simplicidade de seu projeto e de sua resolução faz do observador um componente atrativo do projeto geral, principalmente pelo fato de reconstruir estados não medidos. Sua teoria está intimamente relacionada a conceitos fundamentais de controlabilidade, observabilidade e estabilidade, os quais se interagem mutuamente.

De acordo com Luenberger (1966) [4], o projeto de um sistema que produz uma aproximação para o vetor de estado é chamado de observador ou observador de Luenberger.

O observador é um sistema dinâmico cujas características são determinadas pelo projetista, tendo como entradas, entradas e saídas do sistema real disponíveis, cujo estado aproximado tem um vetor de estado que é linearmente relacionado com a aproximação desejada.

Segundo Luenberger (1964) [3], quase todo sistema é um observador. Diante disto, considera-se inicialmente, por exemplo, o problema de observar um sistema livre, isto é, um sistema S_1 sem nenhuma entrada. Caso as saídas do sistema S_1 sejam usadas como entradas para monitorar outro sistema, S_2 , este segundo sistema irá quase sempre servir como um observador do primeiro através de uma transformação linear que relaciona o estado do observador com o estado do sistema original. Este resultado forma a base da teoria do observador e explica porque existe muita liberdade no projeto de um observador.

A maior parte dos projetos de sistemas de controle está baseada na suposição de que o vetor de estado completo está disponível por medição direta, mas nem sempre as variáveis de estado estão disponíveis, necessitando assim, estimar as variáveis que não são disponíveis por medição direta. Se caso o sistema for linear, seu vetor de estado pode ser aproximadamente reconstruído, construindo um observador, onde este observador é um sistema linear governado por saídas disponíveis e entradas do sistema original.

Em vários sistemas de controle, é fisicamente e economicamente inviável a instalação de todos os sensores que serão necessários para medir todas as variáveis de

estado. Contudo, o projeto de sistemas de controle usando os observadores de estado pode reconstruir os estados não medidos ou os valores provenientes de pontos de difícil acesso no sistema, no entanto, a condição necessária para esta reconstrução é que todos os estados sejam observáveis [3,5].

4.1.- Controlabilidade e Observabilidade

Um importante objetivo da teoria de controle moderno é o projeto de sistemas que apresentam um desempenho ótimo [5]. A obtenção de sistemas de controle linear com desempenho ótimo está subordinada às propriedades de controlabilidade e observabilidade do sistema. Adicionalmente, estas propriedades estabelecem as condições de equivalência completa entre as representações por meio de funções de transferência e de variáveis de estado.

Um sistema é dito completamente controlável se, qualquer que seja o instante inicial t_0 , seja possível transferir todo estado inicial $\{x(t_0)\}$ para qualquer estado final $\{x(t_f)\}$ em um tempo finito $t_f > t_0$ por intermédio de um vetor de excitação $\{u(t)\}$ não sujeito a restrição [5].

Isso requer que:

$$\text{Posto } [Mc] = \text{Posto } [[B] \quad [A][B] \dots\dots\dots [A]^{n-1}[B]] = n \quad (15)$$

Na qual $[Mc]$ é a matriz de controlabilidade, $[A]$ é a matriz dinâmica do sistema, $[B]$ é a matriz de entradas (matriz de distribuição) e n é a ordem do sistema.

Um sistema é dito completamente observável se todo estado inicial $\{x(t_0)\}$ pode ser determinado exatamente a partir de medidas da resposta $\{y(t)\}$ durante um intervalo de tempo finito $t_0 \leq t \leq t_f$ [5]. Sendo assim, o sistema é completamente observável se a matriz de observabilidade $[Mo]$ apresenta a seguinte propriedade:

$$\text{Posto } [Mo] = \text{Posto } [[C_{me}]^T [A]^T [C_{me}]^T [A^T]^2 [C_{me}]^T \dots\dots\dots [A^T]^{n-p} [C_{me}]^T] = n \quad (16)$$

Na qual é $[Mo]$ a matriz de observabilidade e $[C_{me}]$ é a matriz de medidas. Os conceitos de controlabilidade e observabilidade podem ser ilustrados de acordo com o esquema apresentado na Figura 2.

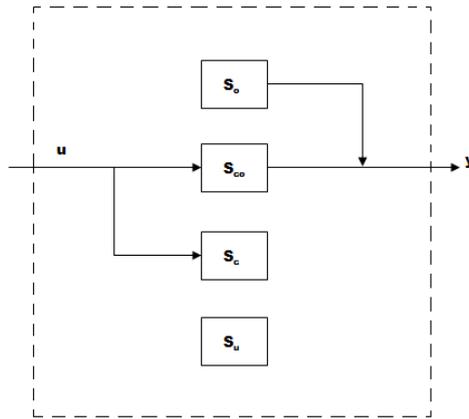


Figura 2: Quatro divisões possíveis de um sistema [6]. S_{co}: subsistema completamente controlável e completamente observável; S_o: subsistema completamente observável e não-controlável; S_c: subsistema completamente controlável e não-observável; S_u: subsistema não-controlável e não-observável.

4.2.- Estrutura Geral dos Observadores de Estado para Sistemas com Variações de Parâmetros

A partir de Luenberger (1964), o observador de estado foi incorporado no controle de um sistema que não tinha seu vetor de estado completo disponível por medição direta, ou seja, o observador de estado seria o responsável em abastecer o vetor de estado do sistema controlado. Sendo assim, para um sistema linear e invariante no tempo, considera-se a seguinte representação da variável de estado do sistema para a descrição do observador de estado:

$$\{\dot{x}(t)\} = [A] \{x(t)\} + [B] \{u(t)\} \quad (17)$$

$$\{y(t)\} = [C_{me}] \{x(t)\} + [D] \{u(t)\} \quad (18)$$

na qual $\{x(t)\} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ é o vetor de estado, $\{u(t)\} \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ é o vetor de entrada (vetor de excitação), $\{y(t)\} \in \mathbb{R}^{k \times 1}$ é o vetor de saída, $[A] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz dinâmica do sistema, $[B] \in \mathbb{R}^{n \times p}$ é a matriz de distribuição, $[C_{me}] \in \mathbb{R}^{k \times n}$ a matriz de medidas e $[D] \in \mathbb{R}^{k \times p}$ é uma matriz constante, sendo n a ordem do sistema, p o número de entradas $\{u(t)\}$, e k o número de saídas $\{y(t)\}$.

Uma das vantagens desse tipo de representação é que o vetor de estado $\{x(t)\}$ contém informações suficientes para resumir completamente o comportamento passado do sistema, e o comportamento futuro é governado por uma simples equação diferencial de 1ª ordem.

De acordo com Meirovitch (1990) [2], um observador de estado para o sistema da equação (17) é dado da seguinte forma:

$$\dot{\{\hat{x}(t)\}} = [A] \{\hat{x}(t)\} + [B] \{u(t)\} + [L] (\{y(t)\} - \{\hat{y}(t)\}) \quad (19)$$

$$\{\hat{y}(t)\} = [C_{me}] \{\hat{x}(t)\} \quad (20)$$

na qual $[L]$ é a matriz do observador de estado, e a matriz $[C_{me}]$ é assumida ser do posto completo, ou seja, o posto dela deve ser igual à ordem do sistema [7].

Trabalhando com sistemas onde são observadas variações dos parâmetros, têm-se:

$$\dot{\{\hat{x}(t)\}} = [A + \Delta A] \cdot \{\hat{x}(t)\} + [B] \{u(t)\} \quad (21)$$

$$\{y(t)\} = [C_{me}] \{x(t)\} + [D] \{u(t)\} \quad (22)$$

na qual $[A + \Delta A]$ é a matriz dinâmica do sistema com variações de parâmetros.

Logo, um observador de estado para o sistema da equação (21) é dado por:

$$\dot{\{\hat{x}(t)\}} = [A + \Delta A] \{\hat{x}(t)\} + [B] \{u(t)\} + [L] \cdot (\{y(t)\} - \{\hat{y}(t)\}) \quad (23)$$

$$\{\hat{y}(t)\} = [C_{me}] \{\hat{x}(t)\} \quad (24)$$

na qual, $\{\hat{x}(t)\}$ é o vetor de estado estimado pelo observador e $\{\hat{y}(t)\}$ denota o vetor de saída do observador de estado.

- Projeto dos Observadores de Estado

Em um sistema mecânico, quando um determinado componente começa a falhar, um observador de estado montado para este sistema é capaz de sentir a influência desta falha de forma bastante rápida. O observador de estado é um conjunto de equações diferenciais ordinárias que apresenta a mesma resposta do sistema real, partindo do princípio de que este esteja funcionando de maneira adequada.

Desta maneira, o efeito sentido pelo observador de estado pode detectar e localizar uma possível falha em um sistema mecânico com variações de parâmetros. O projeto dos

observadores de estado é dividido em duas partes; (i) Montagem do observador global, e (ii) Montagem dos observadores robustos aos possíveis parâmetros sujeitos a falhas.

Na primeira etapa, na montagem do observador global utiliza-se a mesma matriz dinâmica do sistema mecânico em questão. Sendo assim, quando o sistema está funcionando adequadamente sem indícios de falhas, o observador global responderá exatamente como o sistema real. Caso contrário, a resposta do observador não será igual, podendo assim detectar uma possível falha ou irregularidade no sistema. Este observador também pode ser utilizado para a verificação de possíveis falhas em sensores, após haver descartado a existência de falhas nos parâmetros físicos do sistema através dos observadores robustos [8,9].

Na segunda etapa, antes da montagem dos observadores robustos aos possíveis parâmetros do sistema sujeito a falhas, é retirada de cada observador robusto aos parâmetros sujeito à falha uma variação percentual de perda deste parâmetro. Desta forma, a resposta do observador robusto que se aproximar da resposta do sistema com indício de falhas será o observador responsável pela localização desta possível falha do sistema.

Existe ainda a possibilidade de um ou mais parâmetros falharem ao mesmo tempo. Neste caso, a solução seria de projetar observadores de estado robustos a todos os parâmetros sujeitos a falhas [9]. Na Figura 3, apresenta-se o esquema montado para a detecção e localização de falhas em sistemas mecânicos com variações de parâmetros utilizando a técnica dos observadores de estado. Este sistema de observação é composto por um sistema real, por um vetor força de excitação $\{u(t)\}$, por um vetor resposta do sistema $\{y(t)\}$, por um banco de observadores, por uma unidade de precisão lógica, plotagem dos gráficos e resultados.

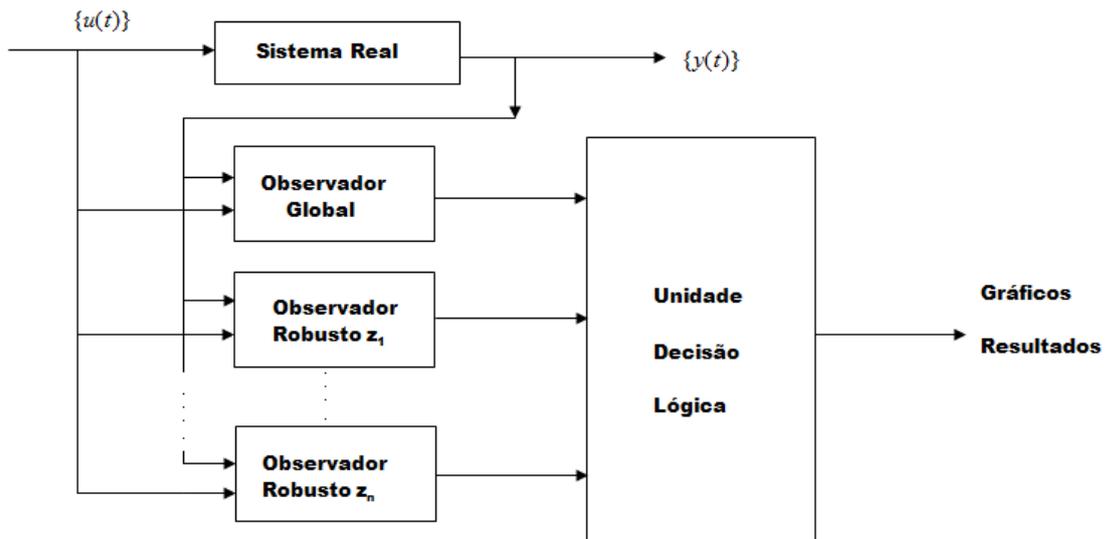


Figura 3: Sistema de observação [6].

Pode-se notar neste esquema que o banco de observadores é composto pelo observador global e pelos observadores robustos aos possíveis parâmetros sujeitos a falhas z_1, \dots, z_n , e que tanto o observador global quanto os observadores robustos recebem os valores da excitação e da resposta do sistema real. Neste mesmo esquema tem-se a unidade de decisão lógica que coleta e analisa a diferença entre a resposta do sistema real e dos observadores de estado montados, a fim de detectar e localizar falhas ou irregularidades no sistema.

- Modelo Analítico De Uma Viga Trincada

A posição da trinca e o seu tamanho, podem ser detectados por alterações na frequência natural e nos modos de vibrar, pois quando uma viga é submetida a situações dinâmicas a trinca abre e fecha alternadamente dependendo da direção da vibração causando variações dos parâmetros físicos do sistema tais como a rigidez [10].

A presença de uma trinca na viga, de acordo com o princípio de Saint Venant, causa uma perturbação na distribuição das tensões na vizinhança da trinca. Esta perturbação é especialmente relevante quando a trinca é aberta e determina uma redução local de rigidez. As propriedades estruturais da matriz de rigidez são mais afetadas pela abertura da trinca [10]. Elementos da viga não danificada foram modelados por Euler usando elementos finitos com dois nós e dois graus de liberdade (deslocamento transversal e rotação) por nó. O elemento trincado poderá ser modelado como elemento sem trinca se a mesma for fechada.

A energia de deformação de um elemento sem trinca, considerando a ação da força cortante, pode ser escrita como:

$$W^{(o)} = \frac{1}{2EI} \int_0^{h_i} (M + Pz)^2 dz = \frac{1}{2EI} \left(M^2 h_i + \frac{P^2 h_i^3}{3} + MP h_i^2 \right) \quad (25)$$

No qual E é o modulo de Young, I o momento de inércia, h_i o comprimento do elemento finito. P e M são as ações da força cortante e do momento fletor, respectivamente, sintetizando a presença dos elementos situados à direita do elemento, quando o comportamento dos elementos situados a esquerda do elemento é considerado de confinamento. O cálculo da energia adicional da tensão de uma trinca é estudado em mecânica da fratura e os coeficientes de flexibilidade são expressos por um fator de intensidade da tensão na escala da linha elástica usando o Teorema de Castigliano. A energia adicional, no exemplo de uma viga de altura h e de largura b , devido à trinca pode ser escrita como:

$$W^{(1)} = b \int_0^a \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E'} + \frac{(1+\nu)K_{III}^2}{E} da \quad (26)$$

na qual $E'=E$ para plano de tensão, $E' = E/(1 + \nu)$ Para o plano de deformação, a é a profundidade da trinca e ν é o coeficiente de Poisson. Fazendo uma análise do elemento flexionado a equação (26) conduz a:

$$W^{(1)} = b \int_0^a \frac{(K_{IM} + K_{IP})^2 + K_{IIP}^2}{E'} da \quad (27)$$

na qual:

$$\begin{aligned} K_{IM} &= \frac{6M}{bh^2} \sqrt{\pi a} F_I(s) \\ K_{IP} &= \frac{3PL}{bh^2} \sqrt{\pi a} F_I(s) \\ K_{IIP} &= \frac{P}{bh} \sqrt{\pi a} F_{II}(s) \end{aligned} \quad (28)$$

são os fatores da intensidade da tensão para as trincas do tipo abertura e escorregamento devido a M e P , respectivamente, e

$$F_I(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi s} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi s}{2}\right)} \frac{0.923 + 0.199 \left[1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right)\right]^4}{\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)}$$

$$F_{II}(s) = (3s - 2s^2) \frac{1.122 - 0.561s + 0.085s^2 + 0.18s^3}{\sqrt{1-s}} \quad (29)$$

Sendo s a relação entre a profundidade da trinca e a altura do elemento ($s=a/h$). Os elementos da matriz de “compliance” (ou flexibilidade) $c_e^{(o)}$ do elemento não trincado podem ser obtidos por:

$$c_{ij}^{(o)} = \frac{\partial^2 W^{(o)}}{\partial P_i \partial P_j}; \Rightarrow i, j = 1, 2 \Rightarrow P_1 = P, P_2 = M \quad (30)$$

E os elementos da matriz adicional de flexibilidade $c_e^{(1)}$ são:

$$c_{ij}^{(1)} = \frac{\partial^2 W^{(1)}}{\partial P_i \partial P_j}; \Rightarrow i, j = 1, 2 \Rightarrow P_1 = P, P_2 = M \quad (31)$$

Finalizando a matriz flexibilidade para o elemento com a trinca aberta fica:

$$c_e = c_e^{(o)} + c_e^{(1)} \quad (32)$$

Das condições de equilíbrio tem-se:

$$\begin{pmatrix} P_i & M_i & P_{i+1} & M_{i+1} \end{pmatrix}^T = T \begin{pmatrix} P_{i+1} & M_{i+1} \end{pmatrix}^T \quad (33)$$

com:

$$T = \begin{bmatrix} -1 & -l & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (34)$$

Pelo princípio do trabalho virtual as matrizes do elemento sem trinca e do elemento trincado podem ser respectivamente determinadas por:

$$\begin{aligned} k_u &= T c_e^{(o)-1} T^T \\ k_c &= T c_e^{-1} T^T \end{aligned} \quad (35)$$

A matriz rigidez do elemento sem trinca com seção transversal retangular vem da teoria de Euler Bernoulli com função hermitiana fica:

$$k_u = \begin{bmatrix} \frac{Ebh^3}{l^3} & \frac{Ebh^3}{2l^2} & -\frac{Ebh^3}{l^3} & \frac{Ebh^3}{2l^2} \\ & \frac{Ebh^3}{3l} & -\frac{Ebh^3}{2l^2} & \frac{Ebh^3}{3l} \\ & & \frac{2l^2}{Ebh^3} & -\frac{6l}{Ebh^3} \\ sim & & & \frac{2l^2}{Ebh^3} \\ & & & \frac{Ebh^3}{3l} \end{bmatrix} \quad (36)$$

A expressão da matriz do elemento trincado é uma função explícita de todos os outros parâmetros aqui envolvidos. Entretanto note que a matriz pode ser escrita por:

$$k_c = \alpha_1 \begin{bmatrix} k_{11}\alpha_2 & k_{12}\alpha_2 & k_{13}\alpha_2 & k_{14}\alpha_2 \\ & k_{22}\alpha_3 & k_{23}\alpha_2 & k_{24}\alpha_4 \\ & & k_{33}\alpha_2 & k_{34}\alpha_2 \\ sim & & & k_{44}\alpha_3 \end{bmatrix} \quad (37)$$

Considerando que a trinca possa atingir uma profundidade de até 40% da altura ($a=0.4h$), os coeficientes α_1 , α_2 , α_3 e α_4 são obtidos das curvas (Figura 4), para diversos valores de profundidade da trinca. E das mesmas, se obtém as equações para os coeficientes, α_1 , α_2 , α_3 e α_4 que estão descritas na Tabela 1.

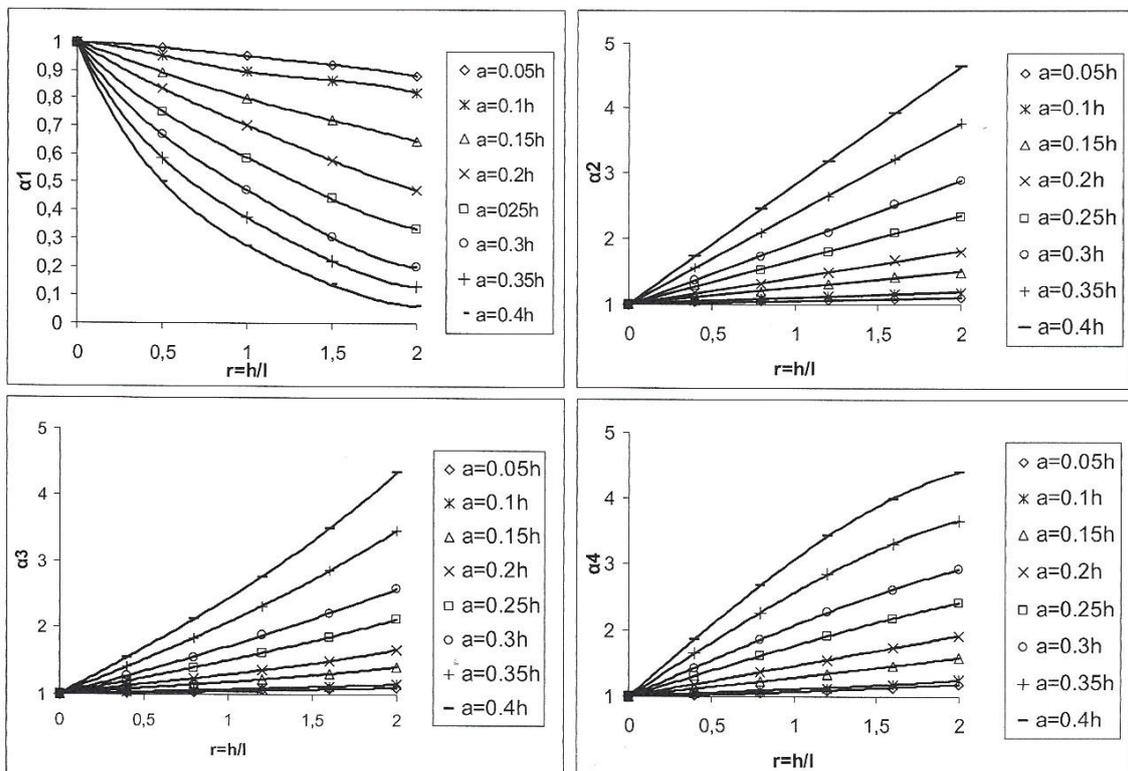


Figura 4: Coeficiente de avaliação da matriz de rigidez modelado para a condição de trinca aberta [10].

Tabela 1: Equações das curvas dos coeficientes α para as profundidades em estudo:

α_1	
$\alpha = 0.05h$	$\alpha = -0,0133r^4 + 0,0533r^3 - 0,0767r^2 - 0,0133r + 1$
$\alpha = 0.10h$	$\alpha = -0,0493r^4 + 0,1907r^3 - 0,2117r^2 - 0,0357r + 1$
$\alpha = 0.15h$	$\alpha = -0,0133r^4 + 0,0447r^3 - 0,0157r^2 - 0,2187r + 1$
$\alpha = 0.20h$	$\alpha = 0,0227r^4 - 0,1013r^3 + 0,1803r^2 - 0,4017r + 1$
$\alpha = 0.25h$	$\alpha = 0,057r^4 - 0,2583r^3 + 0,4577r^2 - 0,6714r + 1$
$\alpha = 0.30h$	$\alpha = 0,0913r^4 - 0,4153r^3 + 0,7352r^2 - 0,9412r + 1$
$\alpha = 0.35h$	$\alpha = 0,0972r^4 - 0,4843r^3 + 0,9653r^2 - 1,2067r + 1$
$\alpha = 0.40h$	$\alpha = 0,1031r^4 - 0,5532r^3 + 1,1954r^2 - 1,4723r + 1$
α_2	
$\alpha = 0.05h$	$\alpha = 0,0306r + 1$
$\alpha = 0.10h$	$\alpha = 0,0857r + 1$
$\alpha = 0.15h$	$\alpha = 0,2421r + 1$
$\alpha = 0.20h$	$\alpha = 0,3985r + 1$
$\alpha = 0.25h$	$\alpha = 0,6712r + 1$
$\alpha = 0.30h$	$\alpha = 0,9439r + 1$
$\alpha = 0.35h$	$\alpha = 1,381r + 1$
$\alpha = 0.40h$	$\alpha = 1,8181r + 1$
α_3	
$\alpha = 0.05h$	$\alpha = -3^{-14}r^2 + 0,05r + 1$
$\alpha = 0.10h$	$\alpha = 1^{14}r^3 - 3^{-14}r^2 + 0,075r + 1$
$\alpha = 0.15h$	$\alpha = 0,0182r^3 - 0,0364r^2 + 0,2045r + 1$
$\alpha = 0.20h$	$\alpha = 0,0363r^3 - 0,0729r^2 + 0,334r + 1$
$\alpha = 0.25h$	$\alpha = 0,0184r^3 + 0,0001r^2 + 0,4867r + 1$
$\alpha = 0.30h$	$\alpha = 0,0004r^3 + 0,0731r^2 + 0,6394r + 1$
$\alpha = 0.35h$	$\alpha = 0,0385r^3 + 0,0392r^2 + 0,9938r + 1$
$\alpha = 0.40h$	$\alpha = 0,0765r^3 + 0,0053r^2 + 1,3482r + 1$
α_4	
$\alpha = 0.05h$	$\alpha = -0,0043r^3 + 0,0342r^2 + 0,0388r + 1$
$\alpha = 0.10h$	$\alpha = 0,0141r^3 - 0,0306r^2 + 0,1257r + 1$
$\alpha = 0.15h$	$\alpha = 0,0141r^3 - 0,0306r^2 + 0,1257r + 1$
$\alpha = 0.20h$	$\alpha = 0,0141r^3 - 0,0306r^2 + 0,1257r + 1$
$\alpha = 0.25h$	$\alpha = 0,0141r^3 - 0,0306r^2 + 0,1257r + 1$
$\alpha = 0.30h$	$\alpha = 0,0141r^3 - 0,0306r^2 + 0,1257r + 1$
$\alpha = 0.35h$	$\alpha = 0,0141r^3 - 0,0306r^2 + 0,1257r + 1$
$\alpha = 0.40h$	$\alpha = 0,0141r^3 - 0,0306r^2 + 0,1257r + 1$

Sendo r a razão entre a altura e o comprimento do elemento trincado ($r=h/l$).

6.1.- Equação do Movimento

A resposta dinâmica da viga nos intervalos de tempo em que a trinca está fechada pode ser considerada, para simplificar, como a de uma viga sem trinca, porque as interfaces de trinca interagem completamente entre si. Debaixo da ação da força de excitação, a abertura e o fechamento da trinca alternarão em função do tempo.

A equação do movimento da viga trincada discretizada para N_e elementos finitos e submetida a um vetor de excitação externo $f(t)$ pode ser escrita por:

$$\begin{aligned} M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + (K_u - \gamma\Delta K)u(t) &= f(t) \\ u(0) &= u^0 \\ \dot{u}(0) &= \dot{u}^0 \end{aligned} \quad (38)$$

na qual:

M : Matriz de Massa

C : Matriz de Amortecimento

$(K_u - \gamma\Delta K)$: Matriz de Rigidez

$\Delta K = K_u - K_c$

$$\gamma = \begin{cases} 1 \rightarrow \text{Quando a trinca está aberta} \\ 0 \rightarrow \text{Quando a trinca está fechada} \end{cases}$$

Considerou-se $\gamma = 1$, pois durante o período em que a trinca permanece fechada ($\gamma = 0$) a matriz rigidez é composta apenas pela parcela em que não se considera a trinca, portanto neste momento não há existência de falha.

Para uma viga em três dimensões, como na Figura 5(a), encontram-se doze graus de liberdade, seis graus de liberdade em cada nó da viga, sendo três de deslocamento e três de rotação.

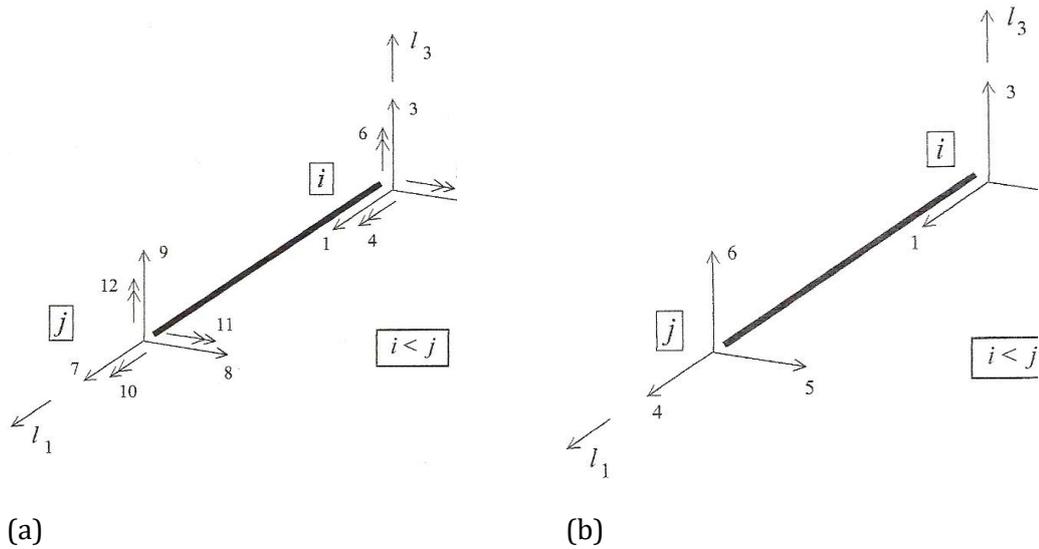


Figura 5: (a) Viga 3D: Doze graus de liberdade da barra ij no referencial local, (b) Treliça 3D: Seis graus de liberdade da barra ij no referencial local [11].

Assim para a viga tridimensional, juntamente com a equação (37) obtém-se a expressão da matriz do elemento trincado, ficando dessa forma:

$$k_c = \alpha_1 \begin{bmatrix} k_{11}\alpha_2 & k_{12}\alpha_2 & k_{13}\alpha_2 & k_{14}\alpha_2 & k_{15}\alpha_2 & k_{16}\alpha_2 & k_{17}\alpha_2 & k_{18}\alpha_2 & k_{19}\alpha_2 & k_{110}\alpha_2 & k_{111}\alpha_2 & k_{112}\alpha_2 \\ & k_{22}\alpha_3 & k_{23}\alpha_2 & k_{24}\alpha_4 & k_{25}\alpha_2 & k_{26}\alpha_3 & k_{27}\alpha_2 & k_{28}\alpha_4 & k_{29}\alpha_2 & k_{210}\alpha_3 & k_{211}\alpha_2 & k_{212}\alpha_4 \\ & & k_{33}\alpha_2 & k_{34}\alpha_2 & k_{35}\alpha_2 & k_{36}\alpha_2 & k_{37}\alpha_2 & k_{38}\alpha_2 & k_{39}\alpha_2 & k_{310}\alpha_2 & k_{311}\alpha_2 & k_{312}\alpha_2 \\ & & & k_{44}\alpha_3 & k_{45}\alpha_2 & k_{46}\alpha_4 & k_{47}\alpha_2 & k_{48}\alpha_3 & k_{49}\alpha_2 & k_{410}\alpha_4 & k_{411}\alpha_2 & k_{412}\alpha_3 \\ & & & & k_{55}\alpha_2 & k_{56}\alpha_2 & k_{57}\alpha_2 & k_{58}\alpha_2 & k_{58}\alpha_2 & k_{510}\alpha_2 & k_{511}\alpha_2 & k_{512}\alpha_2 \\ & & & & & k_{66}\alpha_3 & k_{67}\alpha_2 & k_{68}\alpha_4 & k_{69}\alpha_2 & k_{610}\alpha_3 & k_{611}\alpha_2 & k_{612}\alpha_4 \\ & & & & & & k_{77}\alpha_2 & k_{78}\alpha_2 & k_{79}\alpha_2 & k_{710}\alpha_2 & k_{711}\alpha_2 & k_{712}\alpha_2 \\ & & & & & & & k_{88}\alpha_3 & k_{89}\alpha_2 & k_{810}\alpha_4 & k_{811}\alpha_2 & k_{812}\alpha_3 \\ & & & & & & & & k_{99}\alpha_2 & k_{910}\alpha_2 & k_{911}\alpha_2 & k_{912}\alpha_2 \\ & & & & & & & & & k_{1010}\alpha_3 & k_{1011}\alpha_2 & k_{1012}\alpha_4 \\ & & & & & & & & & & k_{1111}\alpha_2 & k_{1211}\alpha_2 \\ & & & & & & & & & & & k_{1212}\alpha_3 \end{bmatrix} \quad (39)$$

- Modelo de Uma Trinca em Barra de Treliças

Analogamente ao modelo analítico de uma viga trincada, foi feito para treliças. Utilizando uma barra da treliça e analisando separadamente cada membro, de acordo com a Figura 5(b), na qual cada membro possui 6 graus de liberdade.

Assim, a expressão da matriz do elemento trincado de acordo com a equação (37), se torna:

$$k_c = \alpha_1 \begin{bmatrix} k_{11}\alpha_2 & k_{12}\alpha_2 & k_{13}\alpha_2 & k_{14}\alpha_2 & k_{15}\alpha_2 & k_{16}\alpha_2 \\ & k_{22}\alpha_3 & k_{23}\alpha_2 & k_{24}\alpha_4 & k_{25}\alpha_2 & k_{26}\alpha_3 \\ & & k_{33}\alpha_2 & k_{34}\alpha_2 & k_{35}\alpha_2 & k_{36}\alpha_2 \\ & & & k_{44}\alpha_3 & k_{45}\alpha_2 & k_{46}\alpha_4 \\ & & & & k_{55}\alpha_2 & k_{56}\alpha_2 \\ \text{sim} & & & & & k_{66}\alpha_3 \end{bmatrix} \quad (39)$$

Referências

- [1] BATHE, K.J. Finite element procedures. New Jersey: Prentice-Hall, 1996. 1037p.
- [2] LUENBERGER, D. G. Observers for multivariable systems. IEEE Transactions on Automatic Control, New York, v. AC11, n.2, p.190-197, 1966.
- [3] LUENBERGER, D. G. An Introduction to observers. IEEE Transactions on Automatic Control, New York, v. AC16, n.6, p.596-602, 1971.
- [4] MARANO, J. H. **Localização de falhas via observadores de estado em sistema com variações de parâmetros**. 2002. 130 f. Dissertação (Mestrado)- Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Ilha Solteira, 2002.
- [5] MEIROVITCH, L, Dynamics and control of structures. New York: J. Wiley, 1990. 425 p.
- [6] MEIROVITCH, L. **Fundamentals of vibrations**. New York: Mcgraw-hill, 2001. 806 p.
- [7] MELO, G. P. Detecção e localização de falhas via observadores de estado de ordem reduzida. 1998. 125.f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1998.
- [8] AZEVEDO, Á. F. M. **Método dos elementos finitos**. Portugal: Faculdade De Engenharia da Universidade do Porto, 2003. 248 p.
- [9] MUSCOLINO, G.; CACCIOLA, P.; MPOLLONIA, N. Crack detection and location in a damaged beam vibrating under white noise. Computers and Structures, Elmsford, Elmsford, v.81, n.18-19, p. 1773-1782, 2003.
- [10] OGATA, K. Engenharia de controle moderno. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, 1998. 813p.
- [11] PARK, J.; HALEVI, Y.; RIZZONI, G. A New interpretation of the fault-detection filter. Part 1. cosed-form algorithm., International Journal of Control, London, v.60, n.5, p. 767-768, 1994.