SOUZA, Fernando Pereira de[1]

LUCAS, Felipe Bernardino da Silva[2]

PROENÇA, Gustavo Bertarelo[3]

LIRA, Roberta de Araujo[4]

SANTOS, Alanis Eduarda Ferreira dos[5]

CHACOROCCI, Allef Junior[6]

RESUMO: O estudo da reta tangente remonta à antiguidade, com contribuições significativas dos matemáticos gregos, incluindo Euclides, Arquimedes e Apolônio. Mesmo sem o formalismo matemático desenvolvido posteriormente, eles investigaram propriedades das retas tangentes em curvas específicas, como círculos, parábolas, elipses, hipérboles e espirais. Euclides abordou o problema da tangência em círculos em "Os Elementos", enquanto Arquimedes avançou no estudo da reta tangente em espirais. Apolônio introduziu a excentricidade em cônicas, relacionada à tangência, explorando propriedades de tangentes a parábolas, elipses e hipérboles. A compreensão da evolução histórica desse conceito pode enriquecer a compreensão do cálculo diferencial e integral. O grupo PET Conexões de Saberes Matemática/CPTL apresenta neste artigo um estudo dos diferentes métodos de se encontrar a reta tangente e apresenta um roteiro para a construção da reta tangente à circunferência, parábola, elipse e hipérbole com o auxílio do software GeoGebra.

PALAVRAS CHAVES: História do Cálculo; Método das Tangentes, GeoGebra.

ABSTRACT: The study of the tangent line dates back to antiquity, with significant contributions from Greek mathematicians, including Euclid, Archimedes, and Apollonius. Even without the later-developed mathematical formalism, they investigated properties of tangent lines on specific curves such as circles, parabolas, ellipses, hyperbolas, and spirals. Euclid addressed

[1] Tutor do PET Conexões de Saberes Matemática/CPTL UFMS Campus de Três Lagoas. E-mail: fernando.pereira@ufms.br

[2] Integrante do do PET Conexões de Saberes Matemática/CPTL UFMS Campus de Três Lagoas. E-mail: f.bernardino@ufms.br

[3] Integrante do do PET Conexões de Saberes Matemática/CPTL UFMS Campus de Três Lagoas. E-mail: gustavo.bertarelo@ufms.br

[4] Integrante do do PET Conexões de Saberes Matemática/CPTL UFMS Campus de Três Lagoas. E-mail: robertalirararaujo@gmail.com

[5] Integrante do do PET Conexões de Saberes Matemática/CPTL UFMS Campus de Três Lagoas. E-mail: alanis.eduarda@ufms.br

[6] Integrante do do PET Conexões de Saberes Matemática/CPTL UFMS Campus de Três Lagoas. E-mail: allef.chacorocci@ufms.br

the problem of tangency in circles in "The Elements," while Archimedes made advancements in the study of the tangent line in spirals. Apollonius introduced the concept of eccentricity in conics, related to tangency, exploring properties of tangents to parabolas, ellipses, and hyperbolas. Understanding the historical evolution of this concept can enhance comprehension of differential and integral calculus. The PET Connections of Mathematical Knowledge/CPTL group presents in this article a study of different methods for finding the tangent line and provides a guide for constructing the tangent line to the circumference, parabola, ellipse, and hyperbola with the assistance of the GeoGebra software.

KEYWORDS: History of Calculus; Method of Tangents, GeoGebra.

INTRODUÇÃO

O curso de graduação em Matemática-Licenciatura, localizado no Câmpus de Três Lagoas (CPTL) da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), está situado na parte leste do estado de Mato Grosso do Sul desde o dia 7 de julho de 1986 (PPC- Projeto Pedagógico do Curso, 2022 p. 5). Ao longo dos anos, tem desempenhado um papel significativo ao fornecer valiosas contribuições na capacitação de profissionais que desejam ensinar Matemática, além de prepará-los para atuar em diferentes áreas relacionadas.

No Campus de Três Lagoas da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, o Projeto Pedagógico do Curso de Matemática tem como objetivo geral:

> *"O Curso de Matemática - Licenciatura tem como objetivo a formação profissional inicial de professores de Matemática para o Ensino Básico (6º ao 9º ano do ensino fundamental e todas as séries do ensino médio), com sólida formação em Matemática e uma formação pedagógica que permita uma visão abrangente do papel de educador com capacidade de trabalhar em equipes multidisciplinares."* (PPC- Projeto Pedagógico do Curso, 2022, p. 15).

Acreditamos que, para alcançar uma formação sólida e abrangente, como a descrita no objetivo mencionado anteriormente, os estudantes devem ter a oportunidade de se envolver em diversas atividades científicas ao longo do curso. Essa abordagem permitirá que eles adquiram uma ampla experiência relacionada à Matemática, o que contribuirá para seu desenvolvimento profissional e pessoal de maneira significativa. O Programa de Educação Tutorial (PET) realiza pesquisas, visando suprir um dos componentes do tripé acadêmico, tendo em vista que Ensino, Pesquisa e Extensão trabalham em colaboração de forma indissociável.

Entendemos que a realização da pesquisa contribui para a formação dos estudantes, visto que estimula o pensamento científico e crítico, além do aprendizado técnico adquirido em contato com a pesquisa. Nesse sentido, o grupo PET Conexões de Saberes Matemática/CPTL realiza pesquisas sobre diversos temas. Segundo o Manual de Orientações Básicas (MOB), uma das características do PET é: "r*ealização de atividades que envolvam pesquisa, ensino e extensão."* (BRASIL, 2006, p. 9).

Como um dos pilares da tríade acadêmica, as atividades de pesquisa são incentivadas dentro do PET Conexões de Saberes Matemática/CPTL. Elas possibilitam o conhecimento de diferentes áreas da Matemática, propiciando uma formação homogênea e servindo de complemento para a formação acadêmica.

A pesquisa coletiva permite que diferentes indivíduos contribuam com suas experiências, ideias e perspectivas. Oferece a oportunidade de aprender com os outros membros da equipe, expandir horizontes e desenvolver novas habilidades. A troca de conhecimentos e experiências promove o crescimento profissional e acadêmico de todos os envolvidos.

A atividade de Pesquisa Individual consiste no estudo individual ou coletivo de um tema escolhido pelos integrantes do grupo. No ano de 2023, o tópico "História da Matemática" foi escolhido para ser pesquisado. Essa escolha foi feita após analisar o Projeto Pedagógico do Curso, o qual passou por uma reestruturação em 2022 e incluiu a disciplina "História da Matemática" na grade curricular. Os alunos que estão se formando não tiveram a oportunidade de conhecer esse ramo da matemática e, portanto, a pesquisa seria uma forma de familiarizá-los com este tópico.

De acordo com Mendes e Chaquiam (2016, p. 79), nos últimos tempos, observou-se um crescimento no progresso de estudos ligados à História da Matemática. De acordo com os autores, essa perspectiva tem a capacidade de criar um ambiente para aprimorar o processo aprendizagem de diversos tópicos matemáticos. Essa melhoria, segundo eles, é alcançada ao combinar o uso da História da Matemática com outras ferramentas educacionais e metodologias. E isso, por sua vez, proporciona possibilidades de:

> "[...] buscar uma nova forma de ver e entender a Matemática, tornando-a mais contextualizada, mais integrada às outras disciplinas, mais agradável, mais criativa, mais humanizada." (MENDES; CHAQUIAM, 2016, p. 80).

Nessa perspectiva, este artigo, tem como propósito principal fornecer um estudo da construção da reta tangente na antiguidade, seguindo as ideias de Euclides, Arquimedes e Apolônio e como construí-las usando o software GeoGebra. Nos livros e artigos estudados, os autores não detalham a construção das retas, são feitos cálculos analíticos provando a existência de retas tangentes em certas curvas e o presente artigo apresenta um roteiro de cada construção. Para alcançar o objetivo de elaborar um passo a passo das construções, o grupo procurou entender os cálculos apresentados nos artigos (AABOE, 1964), (COOLDIGE, 1951), (EDWARDS, 1979), (ZEUTHEN, 1902) e utilizou os resultados conhecidos de geometria plana e do software GeoGebra para elaborar o roteiro.

A escolha do software GeoGebra foi fundamental para a elaboração do trabalho, visto que em algumas construções foram necessárias o cálculo de medidas de curvas, o que seria inviável utilizando apenas régua e compasso. Além do mais, as tecnologias estão cada vez mais presentes no nosso dia a dia e no dos alunos, estamos rodeados de aparatos tecnológicos, celulares, tablets e podem ser um auxílio que desperte a atenção e entusiasmo dos estudantes.

> [...] o uso das TDIC pode vir a contribuir para a constituição de uma educação mais adequada a sociedade atual das seguintes maneiras: colaborando com a

> aprendizagem de diversos conteúdos; possibilitando a criação de espaços de integração e comunicação; permitindo novas formas de expressão criativa, de realização de projetos e reflexões críticas, sendo um instrumento importante para a resolução de problemas. (SANTOS; NEVES; NOGURA, 2016, p.2).

Estudar retas tangentes na antiguidade nos permite apreciar as raízes históricas desse conceito matemático, entender o desenvolvimento da geometria e sua influência nas bases matemáticas, encontrar inspiração para pesquisas contemporâneas, contextualizar historicamente o conhecimento matemático e valorizar o legado deixado pelos matemáticos antigos.

Apresentamos na primeira seção uma análise histórica do problema da reta tangente, iniciando pelos estudos de Euclides na construção da mesma em relação à circunferência. Após Euclides, o artigo apresenta o estudo feito por Arquimedes, o qual estudou o problema na curva Espiral Arquimediana. Por fim, relatamos o conceito de reta tangente às cônicas pelo matemático Apolônio.

No decorrer da segunda seção, incluímos um roteiro para a construção da reta tangente com o auxílio do software educacional GeoGebra e, por fim, trazemos as considerações finais a respeito da pesquisa e finalizamos com as referências bibliográficas.

CONCEITO HISTÓRICO

Os matemáticos contemporâneos utilizam o cálculo para encontrar a reta tangente a uma curva, isto é, para o gráfico de uma função $y = f(x)$, em um determinado ponto $(a, f(a))$, a reta tangente é definida da seguinte forma:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a),$$

assumindo que a derivada

$$f'(a) = \lim_{h \to \infty} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

exista.

Note que esta definição depende do conceito de limite e da existência de números positivos arbitrariamente pequenos, dois elementos que estavam ausentes na definição mais antiga de retas tangentes. No entanto, antes do surgimento deste ramo da análise, vários métodos haviam sido desenvolvidos, pois a questão das tangentes interessava aos geômetras da antiguidade. As abordagens e métodos para encontrar retas tangentes a curvas eram mais limitados e baseados em geometria e propriedades específicas das mesmas.

Durante a antiguidade, matemáticos gregos como Euclides, Arquimedes e Apolônio estudaram as propriedades das retas tangentes em círculos, parábolas, elipses, hipérboles e espirais. Eles estabeleceram algumas regras básicas e propriedades geométricas para determinar retas tangentes em um ponto específico na curva.

A consideração mais antiga conhecida de retas tangentes pode ser encontrada nos Elementos de Euclides, livro três. A única curva mencionada é a circunferência, que já havia sido objeto de estudo de vários outros matemáticos, tornando natural a necessidade de considerar suas tangentes. Por exemplo, Bryzon (ZEUTHEN, Histoire des Mathématiques, 57) tentou quadrar o círculo através da construção de um polígono entre um polígono inscrito e seu correspondente circunscrito, o que só seria possível com a noção de reta tangente à circunferência.

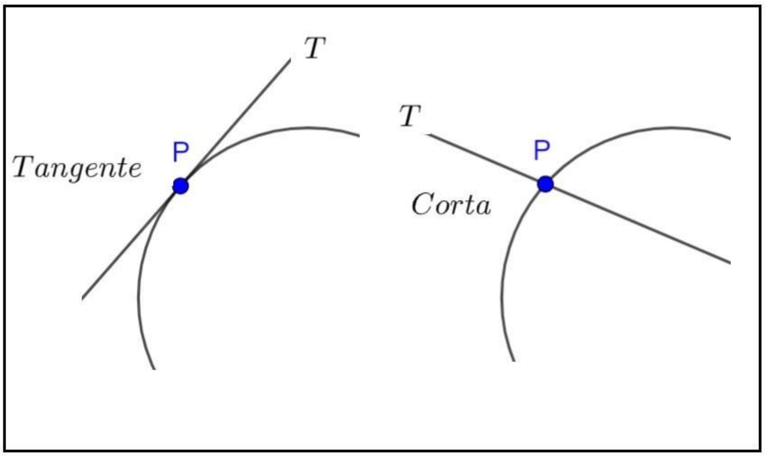
O primeiro registro conhecido sobre o conceito de reta tangente é atribuído a Euclides, que viveu por volta de 300 a.C. em Alexandria, Egito. Em seu livro "Os Elementos", mais especificamente no Livro III, Euclides explorou a geometria e apresentou algumas propriedades básicas da tangência entre linhas e círculos. A primeira definição de reta tangente encontra-se no livro dos Elementos, e diz que:

> *"Uma linha reta diz-se que toca um círculo se, encontrando o círculo e sendo prolongada, não corta o círculo."* (HEATH, 1956, vol. 2, p. 1).

A expressão "toca o círculo" não é comum atualmente, no entanto, essa definição busca ser uma tradução fiel do grego, levando em consideração o fato de que não existe um termo grego equivalente a "tangente" (MACHADO, 2003, vol. V, p. 268). A definição de tangência de Euclides prevaleceu por centenas de anos, embora tenha sido ajustada e expandida para abranger uma classe maior de curvas.

Na notação moderna, podemos entender a definição de Euclides como a seguinte: dada uma curva $y = f(x)$ e um ponto da curva $P = (x_0, f(x_0))$, a reta $T(x)$ é tangente à curva no ponto P se ela passar pelo ponto P e se todos os pontos da curva suficientemente próximos de P estiverem do mesmo lado da reta. Se a reta passa pelo ponto P, mas houver pontos da curva em ambos os lados da reta próximos a P, diz-se que a reta corta a curva $y = f(x)$ no ponto P.

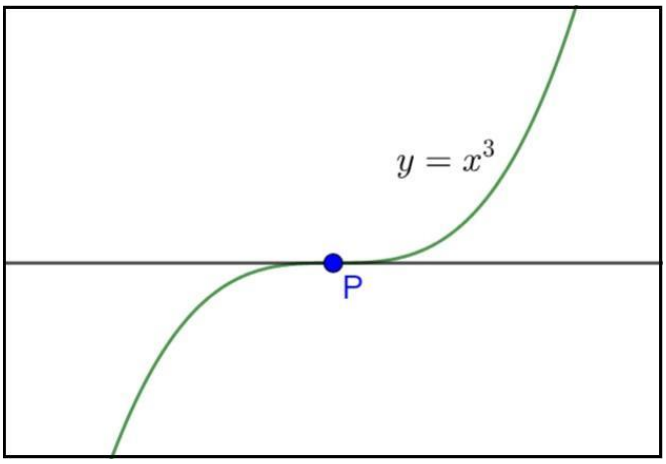
Figura 1: Reta tangente descrita por Euclides



Fonte: O autor

A definição de reta tangente dada por Euclides não é equivalente à moderna. Por exemplo, considere o ponto de inflexão $P = (0,0)$ da curva $y = x^3$. A reta tangente a esse ponto existe, mas, devido ao fato de que a função muda a concavidade nesse ponto, a reta irá cortar a curva e, de acordo com a definição de Euclides, não poderá ser considerada tangente.

Figura 2: Reta tangente a curva $y = x^3$



Fonte: O autor

Euclides estabeleceu que, se uma reta toca um círculo e é perpendicular ao raio que passa pelo ponto de tangência, então essa reta é chamada de tangente ao círculo. Embora Euclides não tenha desenvolvido explicitamente a noção de reta tangente a uma curva arbitrária, suas contribuições iniciais na geometria estabeleceram a base para estudos posteriores sobre tangência.

Em seguida, vários matemáticos contribuíram para o estudo do problema das retas tangentes em diferentes contextos e curvas. O primeiro matemático conhecido, depois de Euclides, a considerar tangentes a uma curva diferente de um círculo foi Arquimedes, que viveu aproximadamente de $287\ a.C.$ a $212\ a.C.$ (SKINNER, 2015).

Arquimedes foi um matemático, físico e engenheiro grego, nascido na cidade de Siracusa, na Sicília, e fez importantes contribuições para a matemática, física e engenharia na antiguidade (AABOE, p. 73). Ele apresentou um método para traçar tangentes à espiral, tornando-a assim a primeira curva, após a circunferência, a ter suas tangentes conhecidas.

O mesmo definiu sua famosa espiral como a composição de um movimento linear uniforme e um movimento circular uniforme:

> *"Se uma reta desenhada em um plano girar a uma taxa uniforme em torno de uma extremidade que permanece fixa e retornar à posição de onde*

> *começou, e se, ao mesmo tempo em que a reta gira, um ponto se mover a uma taxa uniforme ao longo da linha reta a partir da extremidade que permanece fixa, o ponto descreverá uma espiral no plano."* (EDWARDS, p. 55).

As primeiras vinte proposições do tratado Sobre as Espirais são dedicadas principalmente à determinação da reta tangente à espiral em um ponto dado.

Assim como Arquimedes, Apolônio de Perga (século III a.C.) também realizou pesquisas relevantes sobre tangentes em parábolas, elipses e hipérboles. Apolônio é conhecido por sua obra "As Cônicas", na qual ele estudou as propriedades das seções cônicas e desenvolveu métodos geométricos para determinar as retas tangentes a elas. Embora os escritos de Apolônio sobre retas tangentes tenham sido influentes, é importante notar que sua abordagem era principalmente geométrica, baseada em construções e propriedades visuais, e não nos métodos analíticos mais avançados que foram desenvolvidos posteriormente.

Em relação a retas tangentes, Apolônio afirma:

> *"Se uma linha reta for traçada através do extremo do diâmetro de qualquer cônica paralelamente às ordenadas desse diâmetro, a linha reta tocará a cônica e nenhuma outra linha reta poderá cair entre ela e a cônica."* (COOLDIGE, p. 1951).

Isso significa que, se começarmos um segmento de linha entre a reta tangente dada e a curva de um lado do ponto em questão, esse segmento de linha cortará em vez de tocar a curva. A compreensão de Apolônio expandiu o trabalho de Euclides ao propor a unicidade das retas tangentes. Em termos gerais, essa é a forma como as retas tangentes foram consideradas por mais de mil anos. No entanto, essa compreensão é aplicável apenas a um conjunto muito específico de curvas.

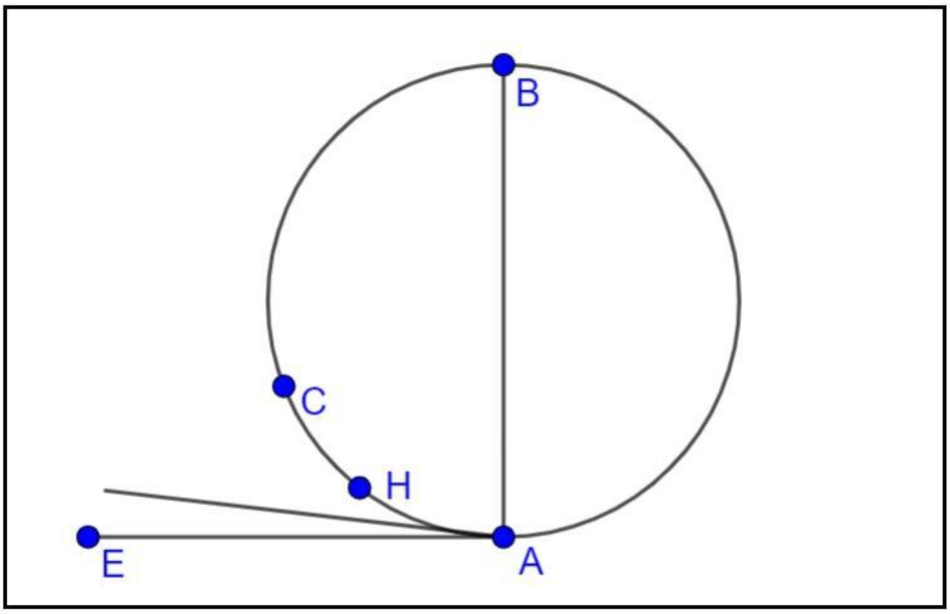
MÉTODO DE EUCLIDES

O corolário da proposição 16 do livro III de Elementos de Euclides nos dá um método para encontrar a reta tangente em um ponto dado de uma circunferência.

Proposição III, 16: A linha reta perpendicular ao diâmetro de um círculo pela sua extremidade cairá fora do círculo, e no espaço entre a linha reta e a circunferência não pode ser interposta outra linha reta; além disso o ângulo do semicírculo é maior, e o restante ângulo menor, do que qualquer ângulo retilíneo agudo (HEATH, 1956, vol. 2, p. 37).

Em outras palavras, a proposição III, 16 diz que, tendo um círculo ABC com diâmetro AB, então a reta perpendicular ao diâmetro AB, cairá toda fora do círculo ABC e no espaço entre a reta AE e o arco de circunferência CHA não é possível interpor outra reta.

Figura 3: Ilustração da demonstração da proposição III, 16



Fonte: O autor

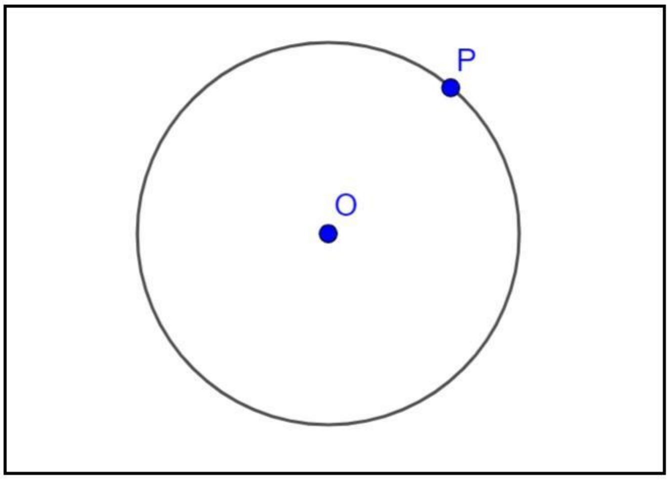
Corolário: A linha reta perpendicular ao diâmetro de um círculo na sua extremidade toca o círculo (HEATH, 1956, vol. 2, p. 39).

Para construção da reta tangente à circunferência no ponto P, utilizamos o software GeoGebra com o seguinte roteiro:

- Trace uma circunferência de centro O, e um ponto P pertencente a ela.

No GeoGebra, clique na ferramenta *"Círculo: dados Centro e Um de seus pontos"*, selecione o centro e, depois, um ponto da circunferência, oculte este ponto. Nomeie o centro de O. Utilize a ferramenta *"Ponto"* e selecione um ponto da circunferência, nomeie este ponto de P.

Figura 4: Circunferência de centro O

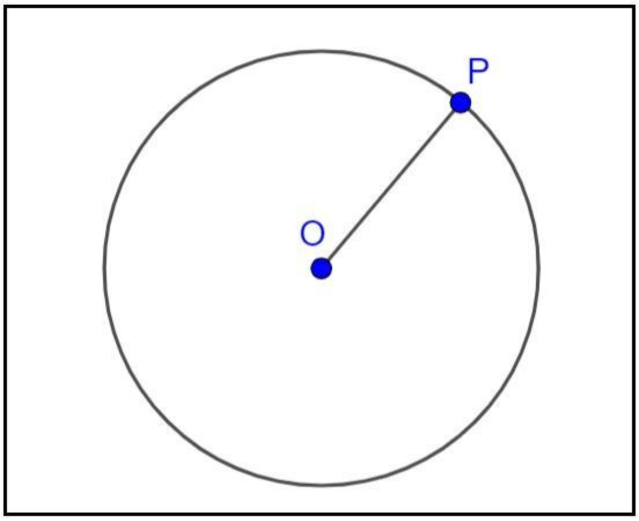


Fonte: O autor

- Trace o raio da circunferência pelo ponto P;

Clique na ferramenta *"Segmento"*, selecione o ponto O e o ponto P.

Figura 5: Raio da circunferência de centro O

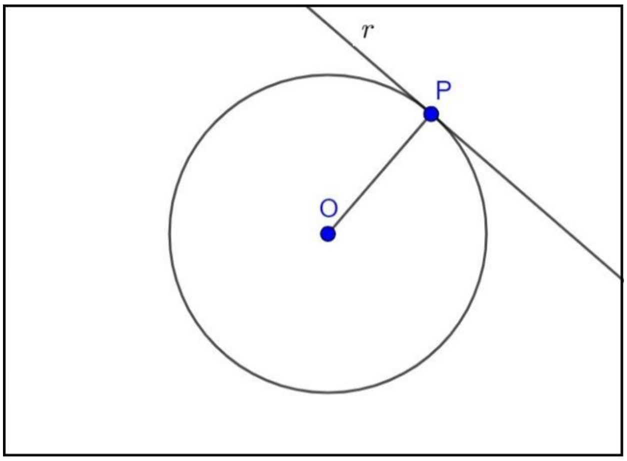


Fonte: O autor

- Trace a perpendicular ao raio pelo ponto P, que é a tangente procurada.

Clique na ferramenta *"Reta perpendicular"*, selecione o ponto P e o segmento OP.

Figura 6: Reta tangente à circunferência



Fonte: O autor

A reta r é a reta tangente à circunferência pelo ponto P.

MÉTODO DE ARQUIMEDES

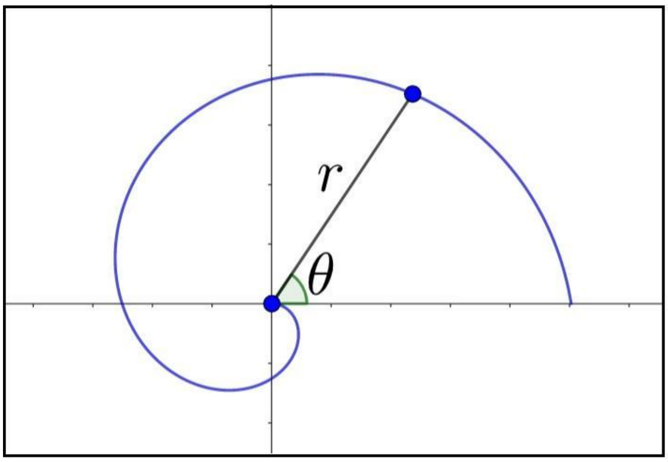
Arquimedes foi o primeiro matemático conhecido, depois de Euclides, a considerar tangentes a uma curva diferente de um círculo. Ele aplicou a noção de tangentes à sua espiral arquimediana a fim de encontrar o comprimento do arco para um determinado segmento de sua espiral.

A espiral é representada nos dias de hoje em coordenadas polares como:

$$r = k\theta,$$

onde o raio r varia proporcionalmente ao ângulo θ, que é determinado entre o raio e o eixo x, como mostra a figura 7:

Figura 7: Espiral de Arquimedes



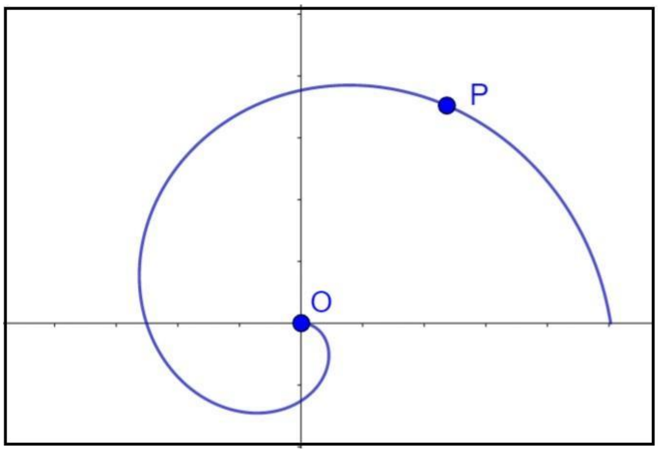
Fonte: O autor

Arquimedes demonstra que a subtangente polar, correspondente ao extremo da primeira espira, é igual ao comprimento da primeira circunferência. O método de Arquimedes, para encontrar a reta tangente à espiral pelo ponto P é descrito da seguinte forma:

- Trace uma espiral de centro na origem e um ponto P pertencente a ela.

Na caixa de *"Entrada"*, digite $r(t) = (t\cos t\,, -t sen t\,)$. Utilize a ferramenta *"Ponto"* e selecione um ponto na espiral, nomeie-o de P e a origem de O.

Figura 8: Espiral de Arquimedes

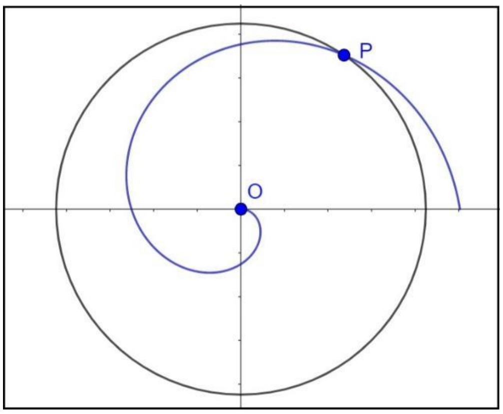


Fonte: O autor

- Trace a circunferência de centro O e raio OP;

Clique na ferramenta *"Círculo: dados Centro e Um de seus Pontos"*, selecione o ponto O e ponto P.

Figura 9: Circunferência de centro O e raio OP



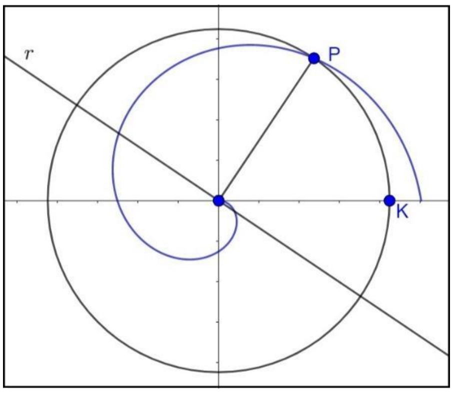
Fonte: O autor

- Marque o ponto K na interseção do eixo horizontal com a circunferência. Trace-se uma reta r perpendicular a OP passando por O.

Clique na ferramenta *"Interseção de Dois Objetos"*, selecione a circunferência e o eixo x, exclua o ponto de interseção da esquerda e renomeie o outro ponto para K.

Clique na ferramenta *"Segmento"*, selecione o ponto O e ponto P. Feito o segmento OP, utilize a ferramenta *"Reta Perpendicular"*, selecionando o ponto O e o segmento OP. Nomeie a reta de r.

Figura 10: Reta perpendicular ao raio OP

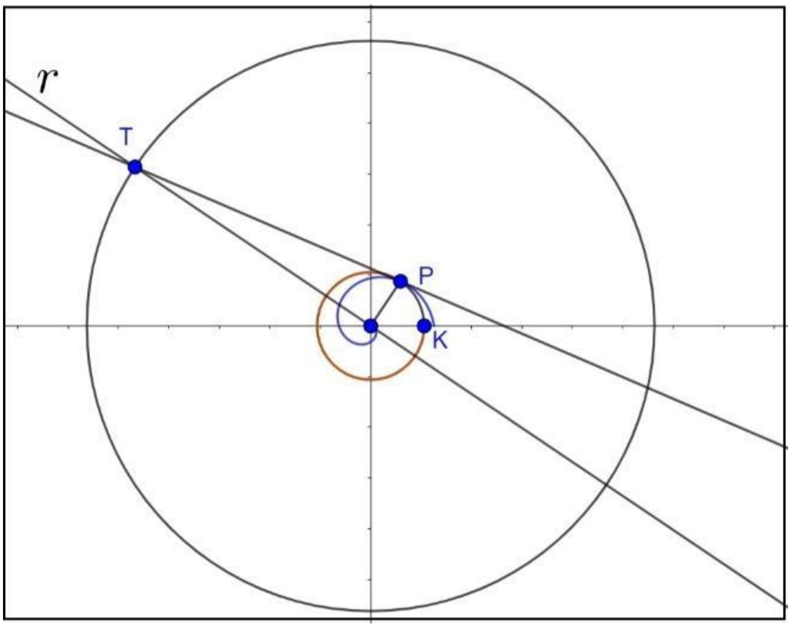


Fonte: O autor

- Trace a circunferência de centro O com raio de comprimento do arco PK e marque o ponto T na interseção da circunferência com a reta r.

Clique na ferramenta *"Arco Circular"*, selecione os pontos O, P, K nesta ordem. Utilize a ferramenta *"Círculo: Centro & Raio"*, selecione o centro O e selecione como raio o arco PK. Utilize a ferramenta *"Interseção de Dois Objetos"* e selecione a circunferência de centro O com raio PK e a reta r, nomeie o ponto da interseção de T.

Figura 11: reta tangente a uma espiral



Fonte: O autor

A reta PT é a reta tangente à espiral no ponto P.

A subtangente polar descrita no método de Arquimedes é o segmento OT e o comprimento da primeira circunferência é o comprimento do arco PK.

MÉTODO DE APOLÔNIO

Apolônio de Perga baseou-se na definição de Euclides para considerar retas tangentes a cônicas. As Proposições 33 e 34 do livro I da grande obra de Apolônio, *As Cônicas*, fornecem métodos para a construção de tangentes a essas curvas.

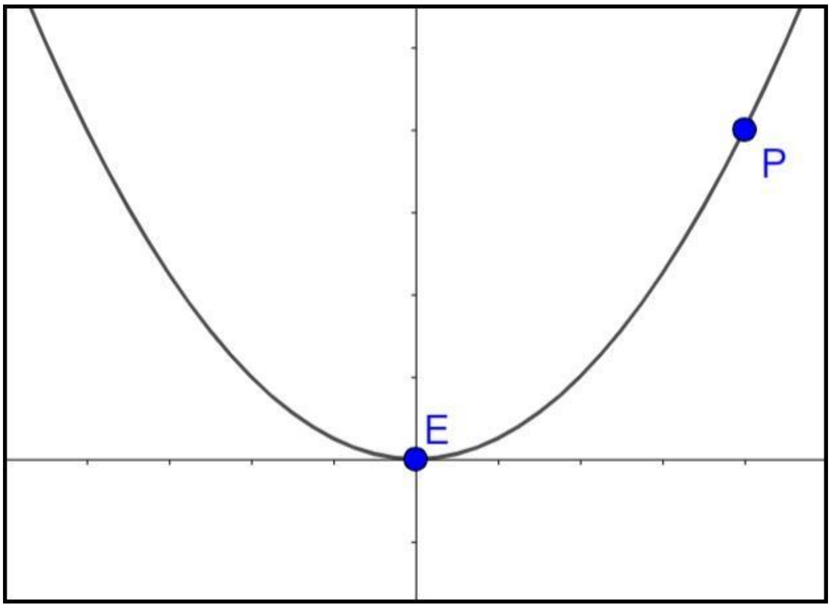
***Proposição I - 33**. Seja P um ponto da parábola com vértice E, com PD perpendicular ao eixo de simetria. Se A está no eixo de simetria fora da curva de modo que $AE = ED$, então AP será tangente à parábola em P.*

A construção da reta tangente à parábola, pelo método de Apolônio, é descrito como:

- Trace uma parábola de vértice E e um ponto P pertencente a ela.

Utilize a ferramenta *"Parábola"*, selecione primeiro o foco e, depois, a diretriz. Oculte o foco, nomeie o vértice de E. Utilize a ferramenta *"Ponto"* e selecione um ponto da parábola, nomeie-o de P.

Figura 12: Parábola de vértice E

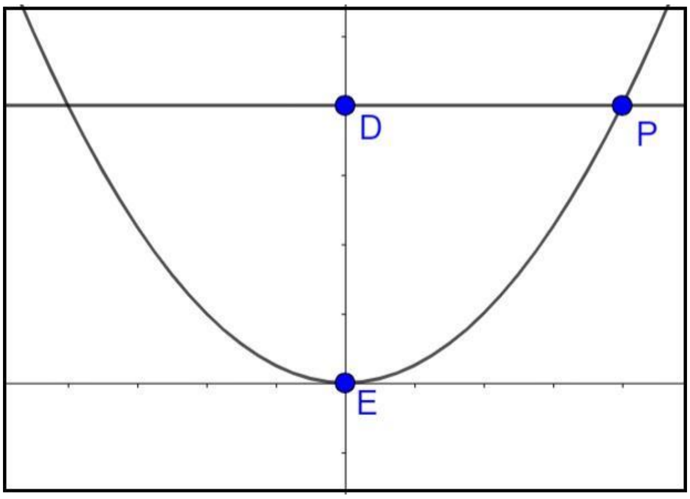


Fonte: O autor

- Trace por P a reta perpendicular ao eixo de simetria da parábola, marque o ponto D na interseção da reta com o eixo.

Clique na ferramenta *"Reta Perpendicular"*, selecione o ponto P e o eixo de simetria. Utilize a ferramenta *"Interseção de Dois Objetos"*, selecione a reta e o eixo de simetria, nomeie o ponto de interseção de D.

Figura 13: Reta perpendicular ao eixo de simetria da parábola

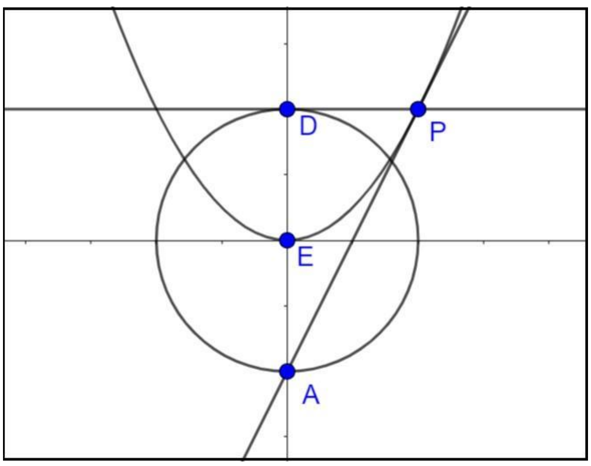


Fonte: O autor

- Trace a circunferência de centro E com raio ED e marque o ponto A fora da parábola na interseção da circunferência com o eixo de simetria.

Clique na ferramenta *"Círculo: dados Centro e Um de seus Pontos"*, selecione o centro E e ponto D. Utilize a ferramenta *"Interseção de Dois Objetos"*, selecione a circunferência e o eixo de simetria da parábola, exclua o ponto de interseção que pertence ao interior da parábola, nomeie o ponto da interseção que está no exterior da parábola de A. Clique na ferramenta *"Reta"*, selecione o ponto A e o ponto P.

Figura 14: Reta tangente à parábola



Fonte: O autor

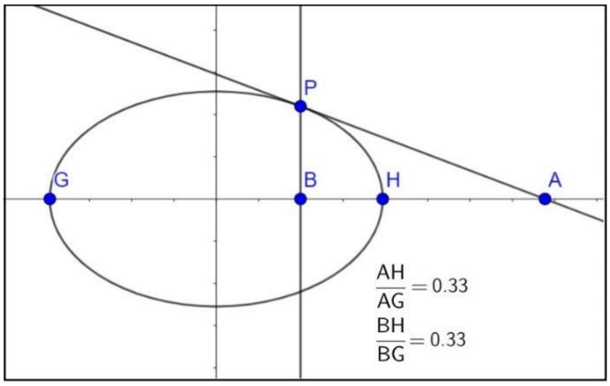
A reta AP é a reta tangente à parábola no ponto P.

***Proposição I - 34**: Seja P um ponto em uma elipse ou hipérbole e PB a perpendicular do ponto ao eixo principal. Sejam G e H as interseções do eixo com a curva e escolha A no eixo de modo que*

$$\frac{|AH|}{|AG|} = \frac{|BH|}{|BG|}. \quad (1)$$

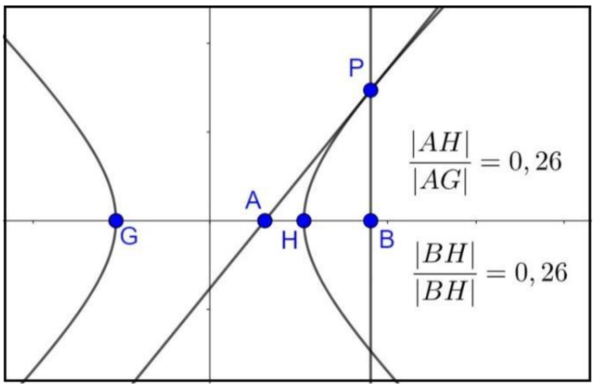
Então AP será tangente à curva em P.

Figura 15: reta tangente à Elipse



Fonte: O autor

Figura 16: Reta tangente à Hipérbole no ponto P



Fonte: O autor

Geometricamente a construção é realizada se encontrada, por exemplo, a medida $|AG|$.

No caso da Elipse, da equação (1), obtemos:

$$1-\frac{|AH|}{|AG|}=1-\frac{|BH|}{|BG|}.$$

$$\frac{|AG|-|AH|}{|AG|}=\frac{|BG|-|BH|}{|BG|}$$

$$\frac{|GH|}{|AG|}=\frac{2|BG|-|GH|}{|BG|}.$$

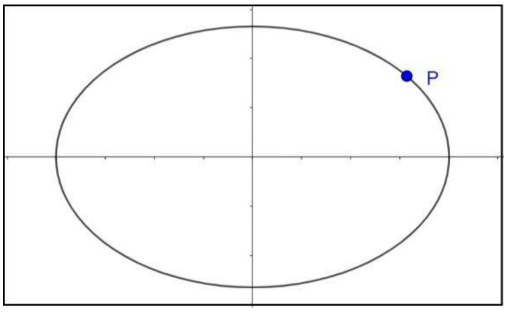
$$|AG|=\frac{|GH||BG|}{2|BG|-|GH|}. \qquad (2)$$

A construção da reta tangente à Elipse, pelo método de Apolônio, é descrita como:

- Construa uma elipse e um ponto P pertencente a ela.

Clique na ferramenta *"Elipse"*, selecione dois focos e, depois, um ponto da elipse. Oculte os focos da elipse e ponto. Utilize a ferramenta *"Ponto"* e selecione um ponto da elipse, nomeie este ponto de P.

Figura 17: Elipse

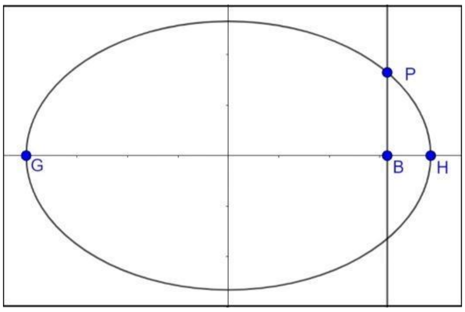


Fonte: O autor

- Trace por P a reta perpendicular ao eixo maior da Elipse, marque o ponto B na interseção da reta com o eixo maior. Marque os pontos G, H na interseção da elipse com o eixo maior.

Clique na ferramenta *"Reta Perpendicular"*, selecione o ponto P e o eixo maior da elipse. Utilize a ferramenta *"Interseção de Dois Objetos"* e selecione a reta e o eixo maior, nomeie o ponto da interseção de B. Novamente, use a ferramenta *"Interseção de Dois Objetos"* e selecione a elipse e o eixo maior. Nomeie os pontos da interseção de G e H.

Figura 18: Interseção da elipse com o eixo maior



Fonte: O autor

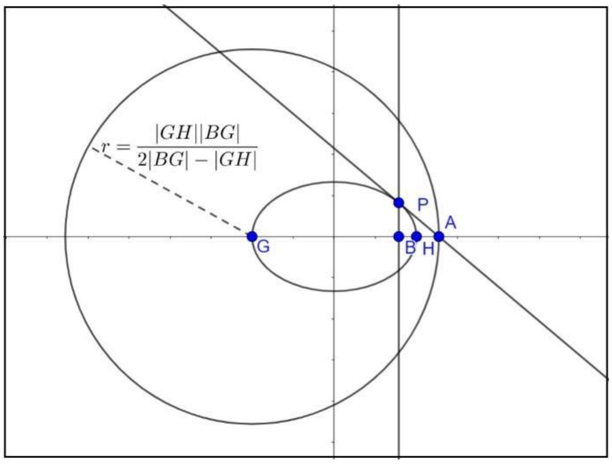
- Calcule as medidas $|GH|, |BG|$ e a medida $|AG|$ dada pela equação (2).

Utilize a ferramenta *"Distância, Comprimento ou Perímetro"* selecione os pontos G e H para calcular o comprimento do segmento GH e selecione os pontos B e G para calcular o comprimento do segmento BG. Além disso, adicionando na ferramenta "Entrada" a equação (2), obtém-se a medida $|AG|$.

- Trace uma circunferência de centro G e raio $|AG|$. Marque o ponto A na interseção da circunferência com o eixo maior da Elipse.

Utilize a ferramenta *"Círculo: Centro & Raio"*, selecione como centro o ponto G, utilize a medida $|AG|$ como sendo a medida do raio. Use a ferramenta *"Interseção de Dois Objetos"*, selecione a circunferência e o eixo maior da elipse, oculte o ponto oposto ao ponto P em relação ao eixo menor e nomeie o outro ponto de A.

Figura 19: Construção da reta tangente à Elipse no ponto P



Fonte: O autor

A reta AP é tangente à Elipse no ponto P.

Para a Hipérbole, usamos a equação (1) e obtemos:

$$1 + \frac{|AH|}{|AG|} = 1 + \frac{|BH|}{|BG|}.$$

$$\frac{|AG| + |AH|}{|AG|} = \frac{|BG| + |BH|}{|BG|}$$

$$\frac{|GH|}{|AG|} = \frac{|GH| + 2|BH|}{|BG|}.$$

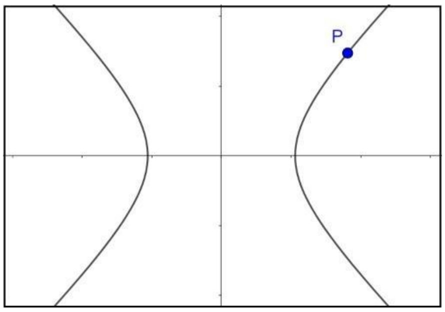
$$|AG| = \frac{|GH||BG|}{|GH| + 2|BH|}. \qquad (3)$$

A construção da reta tangente à hipérbole, pelo método de Apolônio, é descrita como:

- Construa uma hipérbole e um ponto P pertencente a ela.

Clique na ferramenta *"Hipérbole"*, selecione dois focos e, depois, um ponto da hipérbole. Oculte os focos da hipérbole e ponto. Utilize a ferramenta *"Ponto"* e selecione um ponto da hipérbole, nomeie este ponto de P.

Figura 20:Hipérbole

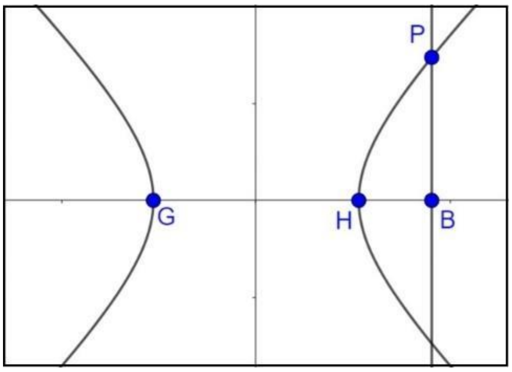


Fonte: O autor

- Trace por P a reta perpendicular ao eixo maior da hipérbole, marque o ponto B na interseção da reta com o eixo maior. Marque os pontos G, H na interseção da hipérbole com o eixo maior.

Clique na ferramenta *"Reta perpendicular"*, selecione o ponto P e o eixo maior da hipérbole. Utilize a ferramenta *"Interseção de Dois Objetos"* e selecione a reta e o eixo maior, nomeie o ponto da interseção de B. Novamente, use a ferramenta *"Interseção de Dois Objetos"* e selecione a hipérbole e o eixo maior. Nomeie os pontos da interseção de G e H.

Figura 21: Interseção da hipérbole com o eixo maior



Fonte: O autor

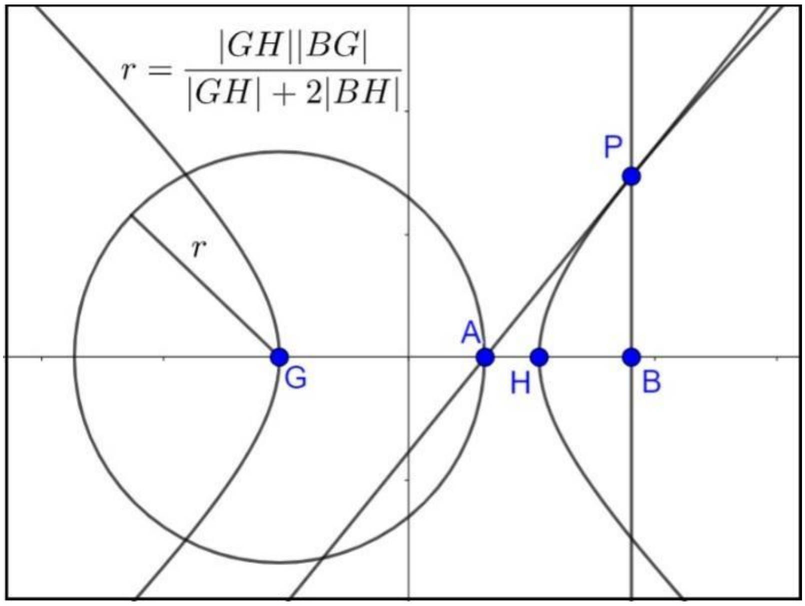
- Calcule as medidas $|GH|, |BG|, |BH|$ e a medida $|AG|$ dada pela equação (3).

Utilize a ferramenta *"Distância, Comprimento ou Perímetro"* selecione os pontos G e H para calcular o comprimento do segmento GH. Selecione os pontos B e G para calcular o comprimento do segmento BG e por fim selecione os pontos B e H para calcular o comprimento do segmento BH. Por fim, digite a equação (3) no campo *"Entrada"* para calcular a medida $|AG|$.

- Trace uma circunferência de centro G e raio $|AG|$ dado pela equação (3). Marque o ponto A na interseção da circunferência com o eixo maior da hipérbole.

Utilize a ferramenta *"Círculo: Centro & Raio"*, selecione como centro o ponto G, utilize a medida $|AG|$ como sendo a medida do raio. Use a ferramenta *"Interseção de Dois Objetos"*, selecione a circunferência e o eixo maior da hipérbole, oculte o ponto no interior do ramo da hipérbole e nomeie o outro ponto de A.

Figura 22: reta tangente à hipérbole no ponto P



Fonte: O autor

A reta AP é tangente à hipérbole no ponto P.

Os métodos de Apolônio para a construção de retas tangentes a curvas eram limitados porque só podiam ser aplicados a uma quantidade muito pequena de curvas. É claro que, na antiguidade, não haviam tantas curvas que fossem interessantes em estudar e, portanto, não havia tanta necessidade de um método geral.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O grupo PET Conexões de Saberes em Matemática/CPTL inclui em seu planejamento a pesquisa individual e coletiva, o que tem proporcionado grandes benefícios para os petianos. O estudo em grupo permite que os estudantes trabalhem em conjunto, aprendam uns com os outros e desenvolvam habilidades de trabalho em equipe. Tal interação é fundamental e o grupo PET Conexões de Saberes em Matemática/CPTL tem buscado oportunidades para aprimorar a formação acadêmica de seus integrantes.

Ao realizar pesquisas em grupo, os alunos têm a oportunidade de explorar um tópico com maior profundidade do que conseguiriam individualmente. Isto é, cada membro do grupo pode trazer perspectivas distintas e contribuir com ideias singulares, o que enriquece o trabalho e amplia o conhecimento dos participantes.

A pesquisa realizada visa esclarecer de que maneira o conceito de reta tangente teve origem e como podemos construí-las atualmente, utilizando recursos tecnológicos, como, por exemplo, o software GeoGebra. Além disso, durante as atividades, aprendemos sobre a história da reta tangente na antiguidade, seu surgimento e as variações no modo como ela é estudada nos dias atuais.

A escolha do software GeoGebra foi essencial para o bom andamento do trabalho, visto que proporcionou rapidez e praticidade na construção das retas tangentes, fatores que, não foi observado no início das construções utilizando régua e compasso. Tal recurso é extremamente prático e intuitivo de utilizar, além de ser uma ferramenta rápida de estudo, visto que possibilita correções com poucos cliques.

Neste trabalho, o fator coletivo foi fundamental. Isto é, os alunos com mais experiência no software GeoGebra compartilharam suas habilidades com os demais, ensinando e até mesmo encontrando a melhor maneira de realizar as construções.

Por fim, esperamos que, nos próximos anos, possamos progredir nos estudos dessa área, analisando o problema da reta tangente no século XVII e fazendo comparações com a atualidade.

REFERÊNCIAS

AABOE, A. Episodes from the early history of mathematics, Volume 13, Washington, D.C., 1964.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Superior. Manual de Orientações Básicas – Programa de Educação Tutorial. Brasília, 2006. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=338-manualorientabasicas&category_slug=pet-programa-deeducacao-tutorial&Itemid=30192. Acesso em 13/06/2023

COOLDIGE, J. L., The Story of Tangents The American Mathematical Monthly. Mathematical Association of America. pp. 449-462, 1951.

EDWARDS, C. H., The Historical Development of the Calculus, Springer-Verlag New York, Inc, 1979.

HEATH, T. L. Euclid. The thirteen books of the Elements. Vol 1, 2 e 3. New York: Dover Publications, Inc, 1956.

MACHADO, J. P. Dicionario Etimologico da Língua Portuguesa, 5 Edição, 5 Vol. Lisboa: Livros Horizonte. 2003.

MENDES, I. A.; CHAQUIAM, M. História nas aulas de matemática: fundamentos e sugestões didáticas para professores. 1ª edição. Belém: SBHMat, 2016.

Projeto Pedagógico do Curso de Matemática. Três Lagoas, 2022.

SANTOS, C. M.; NEVES, T. G.; TOGURA, T. C. F. As tecnologias digitais no ensino de matemática: Uma análise das práticas pedagógicas e dos objetos educacionais digitais. 2016. Disponível em: < http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/5245_2978_ID.pdf > Acesso em 25 de nov. de 2023.

SKINNER, L. The World Before Calculus: Historical Approaches to the Tangent Line Problem, 2015.

ZEUTHEN, H. G. Histoire Des Mathématiques Dans L'antiquité Et Le Moyen Âge. Paris, 1902.