

## FRAÇÕES E A GEOMETRIA: ALGUMAS CONEXÕES ENTRE AS SEQUÊNCIAS DE FAREY, OS CÍRCULOS DE FORD E OS SANGAKUS

Bruna Knevez de Azevedo

(UFSM, brunaknevez@hotmail.com)

Eduardo Casagrande Stabel

(UFSM, dudastabel@gmail.com)

### Eixo: Práticas Docentes e Currículo

**Resumo:** Este artigo é um estudo bibliográfico com base em livros, artigos e dissertações. Tem como objetivo a elaboração de atividades que proporcionem aos alunos e professores da Educação Básica uma nova perspectiva sobre o conteúdo de frações e de geometria plana. Neste estudo, estes conteúdos são relacionados entre si e são apresentados novos conceitos que utilizam essas relações, como as sequências de Farey, os círculos de Ford e os Sangakus. Como referencial teórico foram utilizados, principalmente, a legislação brasileira e estudos que tratam das sequências de Farey, dos círculos de Ford e dos Sangakus. A pesquisa seguiu as seguintes etapas: identificação dos conteúdos e da forma que eles poderiam ser abordados em uma sequência didática, criação de uma sequência de atividades na forma de um livro paradidático que revisa os pré-requisitos, ensina os novos conceitos, cria conexões entre eles e os conecta com suas histórias, e a criação de um questionário para determinar as avaliações dos estudantes. Essa sequência de atividades foi construída para ser trabalhada com os alunos da Educação Básica a partir do 9º ano do Ensino Fundamental e - espera-se, com o seu desenvolvimento - despertar nos estudantes o interesse na disciplina de matemática e na sua história.

**Palavras-Chave:** Frações. Sequência de Farey. Círculos de Ford. Sangakus. História da Matemática.

### Introdução

Este trabalho surgiu da vontade de mostrar uma “nova matemática” aos alunos do ensino fundamental e do ensino médio, criar novos vínculos com o conhecimento já adquirido e motivá-los a seguir estudando. Outro ponto importante para a escolha do tema foi a vontade de despertar nos estudantes o interesse pela disciplina de matemática e pela sua história. O objetivo geral desse artigo é apresentar uma sequência de atividades para ser utilizada por alunos e professores da Educação Básica que fornece uma nova perspectiva sobre o conteúdo de frações e de geometria plana, relacionando esses conteúdos entre si e apresentando novos conceitos que utilizam essas relações, como as Sequências de Farey, os Círculos de Ford e os Sangakus. Os objetivos específicos desse trabalho são identificar os conteúdos e a forma que eles poderiam ser abordados em uma sequência didática, criar uma sequência didática que revisa os pré-requisitos, ensina os novos conceitos, cria conexões entre eles e os conecta com suas histórias, e criar um questionário para determinar as opiniões e avaliações dos estudantes sobre a atividade.

A pesquisa consistiu em um estudo bibliográfico com base em livros, artigos e dissertações. Foram utilizados como referências: os trabalhos acadêmicos de Eduardo Casagrande Stabel, Everton Franco de Oliveira, George da Costa Euzébio, Marisa da Costa Cardoso Oliveira, Megumi Miyata, Nathercia Rodrigues, Thaynara Keiko Oda Santos e Jill Vicent e Claire Vicent; a legislação brasileira; e os livros de Godfrey Harold Hardy, Edward Maitland Wright, Tom Mike Apostol, Géry Huvent, Fukugawa Hidetoshi e Tony Rothman.

O projeto seguiu as seguintes etapas: Escolha dos conteúdos que seriam trabalhados na pesquisa; leitura da legislação brasileira que amparasse o desenvolvimento da sequência didática com foco no ensino fundamental e médio; análise sobre os conceitos que seriam abordados nessa atividade e como isso seria desenvolvido com os alunos; criação da sequência didática em forma de um livro paradidático; e a criação do questionário para avaliação da atividade.

Dessa forma, o primeiro passo foi iniciar uma investigação sobre as pesquisas realizadas na área da Matemática que abordassem as sequências de Farey, os círculos de Ford e os Sangakus. Foram encontrados 8 trabalhos que tratavam de, pelo menos, um desses assuntos, mas nenhum deles conectava os três conteúdos na forma de uma proposta de ensino.

Serão destacados abaixo os trabalhos que mais foram utilizados para o embasamento teórico dessa pesquisa.

A pesquisa de Oliveira (2014) visou explorar conceitos básicos de uma forma rigorosa e teve os objetivos de expor os temas escolhidos e gerar conhecimento matemático a partir de questões e desafios propostos ao leitor. Os temas escolhidos pela autora são: Sequências de Farey, Círculos de Ford, Teoria dos Grafos, Árvore de Stern-Brocot e Árvore de Calkin-Wilf. O trabalho foi desenvolvido em 5 capítulos e apresenta as propriedades dos conteúdos junto com suas demonstrações. Além disso, traz conceitos base no início de cada capítulo, questões a serem respondidas pelo leitor no decorrer do texto e sugestões de atividades que visam consolidar e potencializar o entendimento de algumas propriedades.

O trabalho de Rodrigues (2018) foi produzido com o objetivo de sugerir conteúdos e questões sobre frações que abordam aspectos mais complexos do que os vistos, normalmente, nos ensinamentos fundamental e médio. A pesquisa aborda um breve histórico sobre frações, Sequências de Farey, Circunferências de Ford, Árvore de Stern-Brocot, Frações Contínuas e problemas envolvendo esses conteúdos.

A autora afirma que apesar da pesquisa ser voltada para uma matemática mais sofisticada, algumas das questões são voltadas para o ensino médio e procuram mostrar ser possível iniciar esses conteúdos com tais alunos. Além disso, também traz questões mais simples, voltadas para o ensino fundamental a partir do 7º ano, com o objetivo de despertar a curiosidade e o interesse por um estudo mais aprofundado da matemática.

No estudo de Santos (2018), temos uma alternativa à aula tradicional de matemática utilizando os Sangakus. Essa proposta é baseada na Etnomatemática e busca fornecer aos alunos uma diversidade de conhecimento e de cultura, possibilitando entender a disciplina como uma construção ao longo do tempo e que inclui a contribuição de vários povos, tribos e raças. A pesquisa foi realizada com uma revisão bibliográfica qualitativa nos trabalhos desenvolvidos sobre a temática, apresentação do contexto histórico e cultural do Japão e criação de uma atividade que utiliza os Sangakus como motivadores ao ensino de Geometria.

### **Os conteúdos**

Os conteúdos escolhidos para serem abordados na sequência didática são as sequências de Farey, os círculos de Ford e os Sangakus.

Uma sequência de Farey de ordem  $n$ , denotada por  $F_n$ , é a sequência das frações irredutíveis no intervalo  $[0; 1]$ , com denominadores menores ou iguais a  $n$  e ordenadas na ordem crescente. Veja alguns exemplos na figura 1.

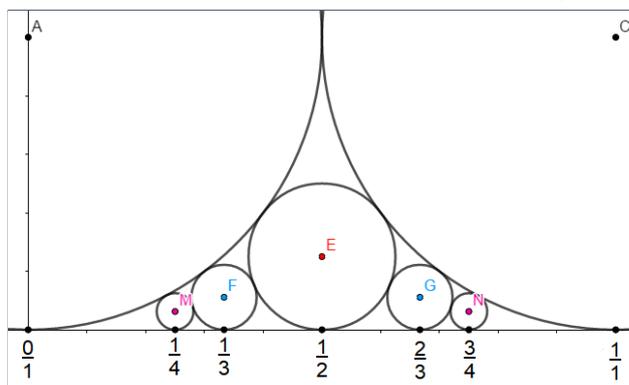
Figura 1 - Sequências de Farey

$F_n$	Termos												
$F_1$	$\frac{0}{1}$										$\frac{1}{1}$		
$F_2$	$\frac{0}{1}$									$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{1}$		
$F_3$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$						$\frac{1}{1}$			
$F_4$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$					$\frac{1}{1}$		
$F_5$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{1}$		
$F_6$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{1}$

Fonte: elaborada pela autora

Os círculos de Ford são círculos que se relacionam com frações próprias e irredutíveis e ficaram conhecidos, segundo J. J. O'Connor e E. F. Robertson (2007), como uma “interpretação geométrica absolutamente maravilhosa da série Farey”. Logo, seja  $\frac{h}{k}$  um número racional irredutível, denominamos o círculo de Ford correspondente a esta fração, denotado por  $C(h, k)$ , o círculo de raio  $\frac{1}{2k^2}$  cujo centro está no ponto  $(\frac{h}{k}, \frac{1}{2k^2})$ . Veja, na figura 2, os círculos de Ford relacionados a sequência de Farey de ordem 4.

Figura 2 - Círculos de Ford relacionados a  $F_4$



Fonte: Elaborada pela autora

Os Sangakus ou 算額 (tábua matemática) são problemas geométricos japoneses feitos em tábuas de madeira que eram colocados como oferendas em santuários xintoístas ou templos budistas entre os séculos 17 e 19. Esses enigmas eram criados por membros de todas as classes sociais como desafios para os congregantes ou como exibições das soluções para outras perguntas.

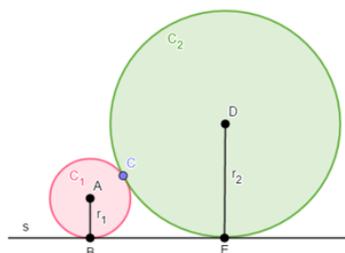
Figura 3 - Réplica de um sangaku que foi pendurado em 1879 no santuário de Aga.



Fonte: (FUKAGAWA e ROTHMAN, 2008, p. 88)

Não se sabe em que ano a tradição dos sangakus começou, mas a tábua mais antiga sobrevivente foi encontrada na prefeitura de Tochigi e data de 1683. Nos dois séculos seguintes, os sangakus apareceram em dois terços dos santuários xintoístas e um terço dos templos budistas em todo o Japão. Acredita-se que, originalmente, existiam milhares a mais do que as 900 tábuas existentes hoje. O sangaku mais recente foi descoberto no santuário de Ubara e data de 1870. Na figura 3, podemos ver um exemplo de Sangaku chamado Wasan.

Figura 4 - Wasan



**O problema:** Sejam  $C_1$  e  $C_2$  dois círculos de raios  $r_1$  e  $r_2$  que são tangentes entre si e tangentes a uma reta  $s$ , conforme a figura acima. Prove que a distância entre os pontos de tangência dos círculos com a reta  $s$  é igual a  $2\sqrt{r_1 r_2}$ , ou seja,

$$(\overline{BE})^2 = 4r_1 r_2$$

Fonte: Elaborada pela autora

### **Metodologia**

Este trabalho surgiu da vontade de mostrar uma “nova matemática” aos alunos do ensino fundamental, criar novos vínculos com o conhecimento já adquirido e motivá-los a seguir estudando. Outro ponto importante para a escolha do tema foi a vontade de despertar nos estudantes o interesse pela disciplina de matemática e pela sua história.

O problema que a pesquisa visou resolver foi: “Como articular as sequências de Farey, os círculos de Ford e os Sangakus em uma proposta didática para a Educação Básica?” e ela consistiu num estudo bibliográfico com base em livros, artigos e dissertações. O seu objetivo geral é elaborar uma sequência de atividades para ser utilizada por alunos e professores da Educação Básica que contemple uma nova perspectiva sobre o conteúdo de frações e de geometria plana, relacionando esses conteúdos entre si e apresentando novos conceitos que utilizam essas relações, como as Sequências de Farey, os Círculos de Ford e os Sangakus.

Foram utilizados como referências os trabalhos acadêmicos de George da Costa Euzébio, Eduardo Casagrande Stabel, Nathercia Rodrigues, Marisa da Costa Cardoso Oliveira, Thaynara Keiko Oda Santos e Jill Vicent e Claire Vicent; a legislação brasileira dos Parâmetros Curriculares Nacionais e da Base Nacional Comum Curricular; os dados obtidos no Sistema de Avaliação da Educação Básica, no Programa Internacional de Avaliação de Estudantes e no Índice de Desenvolvimento da Educação Básica; e os livros de Godfrey Harold Hardy, Edward Maitland Wright, Tom Mike Apostol, Géry Huvent, Fukugawa Hidetoshi e Tony Rothman.

Esse projeto seguiu nas seguintes etapas: escolha dos conteúdos que seriam trabalhados na pesquisa; leitura da legislação brasileira que amparasse o desenvolvimento da sequência didática com foco no ensino fundamental e médio; análise sobre os conceitos que seriam utilizados e como isso seria desenvolvido com os alunos; criação da sequência didática na forma de um livro paradidático; e a criação do questionário para avaliação.

### **A sequência didática**

A sequência de atividades que foi elaborada pode ser aplicada aos alunos a partir do 9º ano do ensino fundamental e recebeu o título de "Algumas conexões entre as frações e a

geometria"<sup>1</sup>. Essa proposta tem 6 aulas, pode ser aplicada no turno regular dos alunos ou no turno inverso com 28 estudantes e segue a distribuição da Figura 5.

Figura 5 - Cronograma

Cronograma da sequência de atividades	
<b>Aula 1</b>	Revisão de frações
<b>Aula 2</b>	Sequências de Farey
<b>Aula 3</b>	Círculos de Ford
<b>Aula 4</b>	Construções no GeoGebra
<b>Aula 5</b>	Sangakus: História e exemplos
<b>Aula 6</b>	Sangakus: Problemas e construções

Fonte: Elaborada pela autora

Cada aula foi pensada para ter duração de 4 períodos de 45 minutos e todas as aulas contam com o material impresso para ser entregue aos alunos.

Na aula 1, temos os objetivos de compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, identificar e obter frações equivalentes a uma fração dada, comparar e ordenar frações em diferentes contextos e associá-las a pontos da reta numérica. Essa aula é muito importante, pois os estudantes devem lembrar o conteúdo de frações antes de iniciar as próximas atividades.

Na aula 2, os objetivos são conhecer as sequências de Farey e algumas de suas propriedades e construir algumas sequências de Farey a partir de suas definições. Essa aula proporciona aos estudantes uma nova possibilidade de trabalhar com frações, com sequências e visualizar padrões e propriedades.

Na aula 3, a ideia principal é conhecer os círculos de Ford e algumas de suas propriedades e construir alguns círculos de Ford a partir de suas definições. Essa atividade trabalha com construções com régua e compasso na folha quadriculada, aborda definições como tangência e relaciona cada círculo construído com uma fração irredutível.

Na aula 4, os alunos são convidados a trabalhar com o software GeoGebra e o objetivo é apresentar aos alunos um software de construções geométricas. Essa aula busca mostrar aos alunos a diferença entre as construções feitas na folha quadriculada e aquelas feitas em um

1

Disponível em <https://partiumatematica.wordpress.com/algumas-conexoes-entre-as-fracoes-e-a-geometria/>

software, despertar nos estudantes a curiosidade sobre as ferramentas do programa e incentivar o uso da tecnologia para facilitar o aprendizado em matemática.

Na aula 5 e 6, o tema são os Sangakus. Na aula 5, o foco será conhecer os Sangakus e sua história e relacionar a história do Japão com a história da matemática japonesa, e na aula 6 o objetivo principal é solucionar alguns Sangakus e criar outros enigmas. Essas duas aulas se complementam e buscam mostrar aos estudantes um novo conteúdo, trabalhar a resolução de problemas e incentivar a elaboração de novos enigmas.

### Considerações finais

A importância do ensino de matemática é inquestionável, pois seus conteúdos fazem parte de nosso dia-a-dia e estão presentes em diversas áreas do conhecimento. Dessa forma, a fim de melhorar o ensino da disciplina, este trabalho foi construído com o objetivo de oferecer aos estudantes e professores uma nova perspectiva de conexões entre o estudo de frações e geometria plana, criar novos vínculos com o conhecimento já adquirido pelos alunos, motivá-los a seguir estudando e despertar o interesse pela disciplina de matemática e pela sua história.

O projeto foi pensado visando a elaboração e a aplicação de uma sequência didática com os alunos do 9º ano do ensino fundamental e dos três anos do ensino médio, mas - devido à pandemia de COVID-19, que ocorreu no ano de desenvolvimento da pesquisa - as aulas presenciais foram proibidas e o projeto não pode ser aplicado na escola.

As atividades disponibilizadas neste trabalho e todo o material de apoio criado pela autora podem ser aplicados tanto em uma oficina no turno inverso, quanto na própria sala de aula. Também é possível que o projeto seja desenvolvido como um projeto interdisciplinar, visto que o trabalho envolve vários pontos que poderiam ser aprofundados, como a história da matemática e do Japão.

Para finalizar esse trabalho, destaco que o estudo aqui concluído contribuiu significativamente na minha formação como professora de matemática no ensino básico. Dessa forma, ele também pode proporcionar uma base matemática adequada a outros professores que não estejam cursando uma pós-graduação, porém que tenham o interesse e a

motivação de proporcionar aulas mais significativas aos seus estudantes, buscando mostrar a beleza da matemática que fica esquecida quando só abordamos fórmulas e exercícios repetitivos.

### Referências

FUKAGAWA, Hidetoshi; ROTHMAN, Tony. **Sacred Mathematics: Japanese Temple Geometry**. Princeton: Princeton University Press, 2008.

HUVENT, Géry. **Sangaku - Le mystère des énigmes géométriques japonaises**. Paris: Dunod, 2008.

MIYATA, Megumi. **Sangaku - A Geometria Sagrada**. UFMG, 2014. Disponível em: <[https://repositorio.ufmg.br/bitstream/1843/EABA-9R8FYM/1/monografia\\_megumi.pdf](https://repositorio.ufmg.br/bitstream/1843/EABA-9R8FYM/1/monografia_megumi.pdf)>. Acesso em: 20/06/2020.

OLIVEIRA, Marisa da Costa C. **Florestas Racionais e Círculos Tangenciais**. FCUP, 2014. Disponível em: <<https://repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/78286/2/34265.pdf>>. Acesso em 18/06/2020.

RODRIGUES, Nathercia Custodio. **Algumas questões sobre frações**. Mestrado profissional em matemática. Rio de Janeiro, 2018. Disponível em: <[https://impa.br/wp-content/uploads/2018/03/TCC\\_2018\\_Nathercia-Rodrigues.pdf](https://impa.br/wp-content/uploads/2018/03/TCC_2018_Nathercia-Rodrigues.pdf)>. Acesso em 18/06/2020.

SANTOS, Thaynara Keiko Oda. **Sangaku: A Matemática Sagrada**. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, 2018. Disponível em: <[http://eadcampus.spo.ifsp.edu.br/pluginfile.php/167284/mod\\_resource/content/0/Thaynara%20Keiko%20Oda%20Santos.pdf](http://eadcampus.spo.ifsp.edu.br/pluginfile.php/167284/mod_resource/content/0/Thaynara%20Keiko%20Oda%20Santos.pdf)>. Acesso em: 21/06/2020.