

## O TEOREMA DE EULER PARA POLIEDROS CONVEXOS EM SALA DE AULA

### EULER'S THEOREM FOR CONVEX POLYHEDRON IN THE CLASSROOM

*José Haddad Alli<sup>1</sup>*

*Allan Edley Ramos de Andrade<sup>2</sup>*

**Resumo:** Este artigo é referente a uma proposta do uso do origami e do software GeoGebra no curso de Geometria Espacial para alunos do 2º ano do ensino médio. A escolha deste software se deu por suas características didáticas e interativas, que tornam a compreensão dos conceitos trabalhados mais acessível e prazerosa aos alunos. O software foi utilizado na construção de Sólidos de Platão e sua planificação, animada ou não. O origami foi utilizado pela possibilidade de construção das faces e montagens dos poliedros pelos alunos ou professores.

**Palavras-chave:** Sólido Platônico; Origami; GeoGebra; Euler.

**ABSTRACT:** This article is a proposal for the use of origami and GeoGebra software in the course of spatial geometry for the 2nd year high school students. The choice of this software was given for its didactic and interactive features that make the understanding of the concepts worked more accessible and enjoyable for students. The software was used in the construction of Platonic's Solids and their planning, animated or not. The origami was used by the possibility of construction of faces and assemblies of polyhedra by students or teachers.

**Keywords:** Platonic Solid; Origami; GeoGebra; Euler.

#### Introdução

A habilidade de visualizar é imprescindível para o crescimento do aluno no processo ensino-aprendizagem quando se trabalha com geometria espacial.

Os PCN afirmam que "O pensamento geométrico se desenvolve inicialmente pela visualização" (Brasil, 1997, p. 127), que é um processo complexo e pessoal, ou seja, o que é visto por uma pessoa é visto de outra forma por outra pessoa.

---

<sup>1</sup> Mestre em Matemática pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas, Professor na Escola Estadual Dr. Álvaro Guião e Colégio Stela Maris de Andradina. E-mail: josehaddadalli@uol.com.br

<sup>2</sup> Professor Doutor do Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus Três Lagoas (UFMS/CPTL). E-mail: allan.andrade@ufms.br

Kaleff (2003, p. 17) afirma que “É importante que (a visualização) ocupe seu lugar no ensino da Geometria (...) O material concreto permite ao aluno, efetivamente, ver o objeto de seu estudo”.

A visualização de objetos tridimensionais não pode se prender a livros e lousas, por não serem os instrumentos adequados a isso. Dessa forma, o uso de materiais concretos é um interessante recurso para se fortalecer a aprendizagem de noções geométricas, a fim de que o aluno estabeleça conexões entre o campo das ideias e suas aplicações matemáticas, especificamente da Geometria, deixando de lado a noção de que são conceitos e procedimentos apartados do cotidiano e de outras áreas do conhecimento.

A criação de uma imagem mental de um objeto geométrico, como os poliedros, é facilitada pela construção de modelos concretos mediante o uso dos mais variados tipos de materiais e processos. O Origami, por exemplo, e uma técnica que poderá tornar prazerosa a aprendizagem. Tais modelos, associados à tecnologia, também devem ser utilizados, pois tornam possível a elaboração de modelos tridimensionais que podem ser modificados de várias formas simulando aspectos da realidade.

Neste artigo, foram apresentadas algumas ações que possibilitam a professores e alunos a utilização do material concreto de forma a tornar mais dinâmicas as aulas de Geometria, e também a construção de poliedros com um software.

Os alunos são levados a explorar os sólidos regulares de Platão construindo-os com as técnicas do origami e orientações precisas e detalhadas ou visualizando-os, já construídos.

Foram abordados aspectos históricos, tecnológicos e metodológicos com o intuito de encontrar maneiras de tornar a aula mais atrativa, participativa e agradável.

Os poliedros de Platão, o teorema de Euler e uma demonstração desse teorema foram apresentados. Também foi apresentado um estudo dirigido em sala de aula em que alunos do ensino médio de uma escola da rede pública responderam a questões sobre os poliedros antes do uso do software

GeoGebra e da técnica do origami para construção de sólidos. Depois de os alunos travarem conhecimento com o software e com a técnica do origami, eles foram novamente levados a responder às mesmas questões sobre os poliedros, e a duas questões adicionais. Os resultados foram analisados, tabulados e discutidos.

Ao final desse artigo, há algumas considerações e conclusões concernentes ao desenvolvimento do trabalho realizado com os alunos e informações como gráficos, tabelas e figuras.

### **Aspectos Históricos**

Platão e Euler são os principais matemáticos que estão diretamente relacionados à temática dos resultados aqui apresentados, sendo assim, é apresentado a seguir um breve histórico sobre esta relação com base nas referências (Bicudo, 2009), (Boyer, 2018), (Connor, 2016), (Hilbert, 2003) e (Richeson, 2008).

Platão, nascido em 427 a.C., não foi propriamente matemático, mas um filósofo e incentivador do estudo da Matemática. Ele e os membros de sua academia estudaram, dentre outros assuntos, os poliedros regulares, chamados assim de Corpos Platônicos. No entanto, Proclo (410 d.C – 485 d.C), atribuem a descoberta destes sólidos a Pitágoras. Outras evidências, porém, indicam que Pitágoras conhecia apenas o Tetraedro, o Hexaedro e o Dodecaedro. A primeira demonstração escrita da existência de apenas cinco poliedros regulares é atribuída a Euclides.

Leonhard Euler foi o matemático suíço mais importante de todos os tempos, considerado um dos mais prolíficos matemáticos teve suas obras publicadas pela Academia de São Petersburgo até 50 anos após sua morte.

O teorema, ou relação, de Euler para certa classe de poliedros é assim denominado em homenagem a ele, que apresentou a relação numa carta ao matemático e amigo Christian Goldbach em 1750. Euler escreveu dois trabalhos sobre poliedros, em 1750 e 1751. No entanto, esses trabalhos só foram publicados em 1758. No primeiro deles, apresentou o teorema que

estabelece relação entre as arestas ( $A$ ), vértices ( $V$ ) e faces ( $F$ ) dos poliedros, segundo ele válido para vários casos especiais:  $V - A + F = 2$

Não apresentou, porém, uma prova deste resultado. Já no segundo trabalho, ele apresenta uma prova, que se mostrou, depois, não rigorosa e com falhas. As falhas ocorreram por falta de definição precisa do que vem a ser um poliedro.

### Fundamentação Teórica

- Definição 1. Um conjunto  $C$ , do plano ou do espaço, diz-se convexo quando o segmento de reta que liga quaisquer dois pontos de  $C$  está inteiramente contido em  $C$ .

- Definição 2. Um poliedro é uma reunião finita de polígonos planos, satisfazendo as propriedades listadas abaixo.

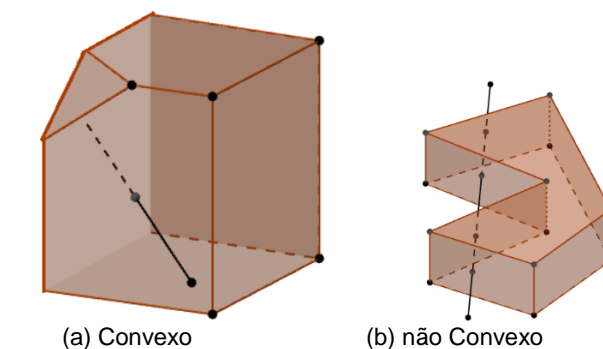
a) A interseção de duas faces quaisquer do poliedro, ou é um lado comum, ou é um vértice, ou é vazia.

b) Cada aresta do poliedro é lado de exatamente duas faces desse poliedro.

Os polígonos planos são chamados as faces do poliedro, os lados desses polígonos chamam-se arestas do poliedro e os vértices dos polígonos são também chamados vértices do poliedro.

Diz-se que um poliedro é convexo quando ele limita um sólido convexo no sentido da definição acima. Diz-se que um poliedro é regular quando ele for convexo, com todas as faces sendo polígonos regulares congruentes e o número de faces concorrentes em cada vértice sendo sempre o mesmo.

**Figura 1:** Poliedro convexo e não convexo

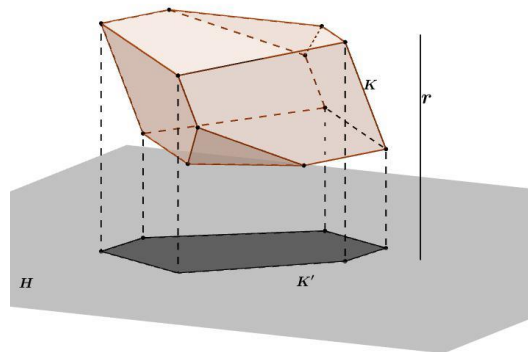


**Fonte:** Elaborada pelos autores.

O principal resultado abordado em sala de aula foi o Teorema de Euler que relaciona os números de vértices, arestas e faces de um poliedro convexo. Essa relação é dada pela expressão  $V - A + F = 2$ . Há várias demonstrações do Teorema de Euler. Neste artigo foi apresentada uma demonstração baseada em (Zoroastro Azambuja Filho, 1983).

Começou-se tomando um poliedro convexo  $P$  e a seguir foi escolhida uma reta  $r$  que não fosse paralela a nenhuma das faces do poliedro convexo  $P$ . Essa é uma condição imprescindível. Foi também utilizado um plano  $H$ , que não intersecta  $P$  e é perpendicular à reta  $r$ . Observe a figura 2 logo a seguir.

**Figura 2:** Poliedro Convexo



**Fonte:** Elaborada pelos autores.

O plano  $H$  foi chamado *plano horizontal* e as retas paralelas a  $r$ , logo perpendiculares a  $H$ , foram chamadas retas verticais.  $H$  divide o espaço em dois semiespaços. O semiespaço que contém o poliedro foi chamado de semiespaço superior, pois seus pontos estão acima de  $H$ .

Supondo o Sol brilhando a pino sobre o semiespaço superior, seus raios serão retas verticais. A cada ponto  $x$  do semiespaço superior corresponde um ponto  $x \in H$ , chamado sombra de  $x$ , obtido como interseção do plano  $H$  com a reta vertical que passa por  $x$ .

A sombra de qualquer conjunto  $K$ , contido no semiplano superior é, por definição, o conjunto  $K' \subset H$ , formado pelas sombras dos pontos de  $K$ .

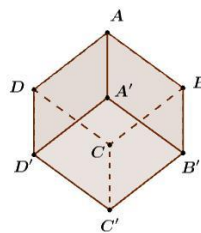
Tal observação pode ser assim enunciada: cada ponto da sombra de  $P_0$  do poliedro é sombra de um ou de dois pontos de  $P$ . Ora, a sombra  $P'$  do

poliedro  $P$  é um polígono convexo do plano horizontal, cujo contorno  $\gamma'$  é sombra de uma poligonal  $\gamma$  fechada, formada por arestas de  $P$ . Cada ponto de  $\gamma'$  é sombra de um único ponto de  $P$  (pertencente a  $\gamma$ ).

A poligonal  $\gamma$  é chamada o contorno aparente do poliedro  $P$ . Cada ponto interior de  $P'$  (isto é, não pertencente a  $\gamma$ ) é sombra de 2 pontos de  $P$ . Dados dois pontos de  $P$  que têm a mesma sombra, é denominado ao mais alto (mais distante de  $H$ ) ponto iluminado e ao mais baixo de ponto sombrio. Assim, o poliedro  $P$  se decompõe em 3 partes disjuntas: o conjunto dos pontos iluminados, o conjunto dos pontos sombrios e o contorno aparente de  $\gamma$ .

Por exemplo, seja  $P$  o hexaedro que tem os quadrados  $ABCD$  e  $A'B'C'D'$  como faces opostas. Pendurando-o pelo vértice  $A$  (de modo que  $A$  e  $C'$  estejam na mesma vertical), as faces  $AA'B'B$ ;  $AA'D'D$  e  $ABCD$  ficarão iluminadas e as outras 3 sombrias. O contorno aparente será a poligonal  $A'B'BCDD'A'$ .

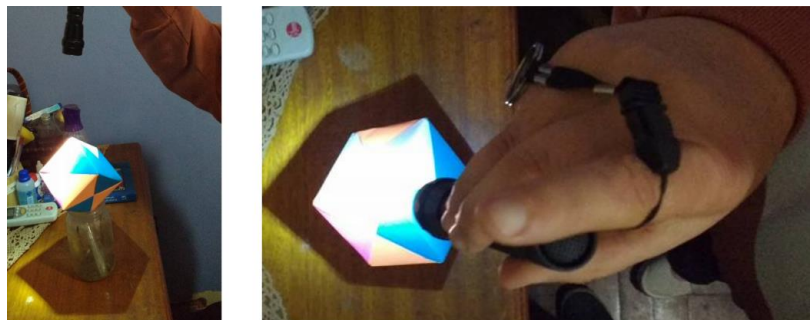
**Figura 3:** Hexaedro  $P$



**Fonte:** Elaborada pelos autores.

Para uma melhor compreensão do que vem a ser o contorno aparente do poliedro, considere as imagens abaixo:

**Figura 4:** Contorno Aparente



**Fonte:** Elaborada pelos autores.

O hexaedro foi posicionado de forma que os vértices ligados por uma diagonal do hexaedro, ou seja, diagonalmente opostos, ficassem sobre a mesma perpendicular ao plano onde está sendo projetada a sombra.

Nas mesmas fotos podem ser observadas as três faces do hexaedro que são iluminadas pela lanterna. No entanto, o que se pretendia era uma projeção da sombra obtida por raios perpendiculares ao plano. E não raios divergentes como os obtidos. As fotos servem, porém, para ilustrar faces iluminadas e contorno aparente.

Seja  $P_1$  o conjunto dos pontos iluminados de  $P$  mais o contorno aparente  $\gamma$ . Cada ponto de  $P'$  é a sombra de um único ponto de  $P_1$ .

Noutras palavras, a regra que associa a cada ponto  $x$  de  $P_1$  sua sombra  $x'$  é uma correspondência biunívoca entre  $P_1$  e  $P'$ .

Usou-se a notação  $P_1$  para representar o polígono  $P'$  decomposto como reunião de polígonos justapostos, que são sombras das faces contidas em  $P_1$ , isto é, das faces iluminadas.

Evidentemente, poder-se-ia também considerar o conjunto  $P_2$ , formado pelos pontos sombrios de  $P$  mais o contorno aparente  $\gamma$ . A regra que associa a cada ponto  $x \in P_2$  sua sombra  $x' \in P'$  também é uma correspondência biunívoca entre  $P_2$  e  $P'$ .

Escrever-se-á  $P'_2$  para indicar a sombra de  $P_2$  expressa como reunião das sombras das faces sombrias de  $P$ , isto é, contidas em  $P_2$ .

Se se decompor cada face de  $P$  em triângulos, traçando diagonais em cada uma delas, alteram-se os números  $F$ ,  $A$  e  $V$  individualmente, mas a expressão

$$F - A + V,$$

permanece com o mesmo valor.

Com efeito, cada vez que se traça uma diagonal numa face, os números  $F$  e  $A$  aumentam, cada um, de uma unidade e o número  $V$  não muda, assim

$$(F + 1) - (A + 1) + V = F - A + V$$

Portanto, a fim de se demonstrar o teorema de Euler, não há perda de

generalidade em supor que todas as faces do poliedro  $P$  são triângulos. Note também que, como toda face tem 3 arestas e cada aresta pertence a 2 faces, segue-se que  $3F = 2A$ .

Todo o indispensável posto, inicia-se a demonstração, que consiste em calcular de duas maneiras distintas a soma  $S$  dos ângulos internos dos triângulos que compõem o poliedro  $P$ . Em primeiro lugar, há  $F$  triângulos e a soma dos ângulos internos de cada um deles é igual a  $\pi$  radianos.

Portanto,

$$S = \pi.F. \quad [1]$$

Como  $F = 3F - 2F = 2A - 2F$  segue de [1] que

$$F = 2A - 2F.$$

Assim, pode-se escrever:

$$S = \pi.F = \pi(2A - 2F) = 2\pi.A - 2\pi F. \quad [2]$$

Por outro lado, tem-se  $S = S_1 + S_2$ , onde  $S_1$  é a soma dos ângulos internos dos triângulos iluminados e  $S_2$  é a soma dos ângulos internos dos triângulos sombrios. A fim de calcular  $S_1$ , partiu-se da observação de que a soma dos ângulos internos de um triângulo  $T$  é igual à soma dos ângulos internos de sua sombra  $T'$ . Daí resultou que  $S_1$  é igual à soma dos ângulos internos dos triângulos nos quais está decomposto o polígono convexo  $P'_1$ , sombra de  $P_1$ . Para calcular esta última soma, somam-se os ângulos vértice a vértice, em vez de somá-lo triângulo por triângulo, como acima.

Sejam  $V_1$  o número de vértices iluminados,  $V_2$  o número de vértices sombrios e  $V_0$  o número de vértices do contorno aparente. Então,

$$V = V_0 + V_1 + V_2.$$

Note-se ainda que  $V_0$  também é o número de vértices (e de lados) da poligonal  $\gamma$ , contorno do polígono convexo  $P'$ .

Em  $P_1$  tem-se  $V_1$  vértices interiores (sombras dos vértices iluminados) mais  $V_0$  vértices do contorno  $\gamma$ . A soma dos ângulos que têm como vértices um dado vértice interior é igual a  $2\pi$  radianos. A soma de todos os ângulos que têm vértice sobre o contorno é igual a  $\pi(V_0 - 2)$ , de acordo com a expressão



bem conhecida da soma dos ângulos internos de um polígono com  $V_0$  lados. Segue-se que  $S_1 = 2\pi \cdot V_1 + \pi(V_0 - 2)$ . Por raciocínio inteiramente análogo, obter-se-ia:

$$S_2 = 2\pi \cdot V_2 + \pi(V_0 - 2).$$

Somando estas duas igualdades, vem:

$$S = S_1 + S_2 = 2\pi(V_0 + V_1 + V_2) - 4\pi = 2\pi V - 4\pi. \quad [3]$$

Comparando com as igualdades em [2] e [3] obtém-se  $2\pi \cdot A - 2\pi \cdot F = 2\pi V - 4\pi$ , resultando em  $F - A + V = 2$ .

### Fundamentação Metodológica

Para o estudo realizado neste trabalho foi usado o software GeoGebra, programa gratuito criado por Markus Hohenwarter, em 2001, com o qual é possível construir todos os poliedros de Platão e suas planificações, como também acompanhar o passo a passo da construção de cada um dos poliedros e visualizar individualmente cada um de seus elementos.

A planificação de um poliedro é um arranjo de polígonos com lados comuns que retornam à forma espacial que lhe deu origem ao serem dobrados.

É aconselhável o uso de atividades em que o aluno possa cortar, montar, modelar e exibir os poliedros. As propriedades matemáticas, os aspectos históricos e os modelos virtuais interativos de cada um dos sólidos platônicos também devem ser explorados. Outro recurso que foi usado em sala de aula foi o uso da técnica do Origami. A motivação do uso do origami para a construção de sólidos se deu ao fato de que com esse recurso detalhes como faces, arestas e vértices são manuseados e construídos por professores e alunos.

Os poliedros de Platão foram analisados e suas características e sua história foram exploradas, tendo como subsídios os materiais concretos, haja vista que o trabalho com esse material pode contribuir com o processo ensino aprendizagem ao fornecer meios para uma melhor compreensão da Geometria. Considerando que novas concepções de ensino e aprendizagem são oferecidas pelos recursos tecnológicos, fez-se uso do computador para

construir e identificar figuras geométricas, observar características dos poliedros, destacando-se arestas, faces e vértices a fim de despertar o interesse do aluno e suscitar questionamentos que provavelmente não seriam feitos se a abordagem fosse apenas teórica.

Nesse período de convivência com os alunos, chamou a atenção a dificuldade que eles demonstravam em visualizar as figuras em três dimensões. Percebeu-se, então, que o ensino da Matemática precisava ser inovador para que os alunos pudessem se sentir mais familiarizados e percebessem um sentido na aprendizagem da Geometria Espacial.

Um aspecto que chamou a atenção foi que, durante o levantamento prévio de seus conhecimentos, os alunos confundiam polígono e poliedro. Alguns também não se lembravam das definições de arestas, faces e vértices.

A pesquisa foi feita sobre o conteúdo de Geometria Espacial, especificamente sobre a Relação de Euler, com 20 alunos do segundo ano do Ensino Médio, no primeiro semestre de 2016, em uma escola estadual em Andradina SP. A escola possui 1450 alunos matriculados, divididos em 760 alunos do Ensino Fundamental e 690 alunos do Ensino Médio. Conta com um corpo docente de 74 professores, um diretor, 3 vice-diretores, duas professoras coordenadoras (uma para Ensino Fundamental e uma para o Ensino Médio), uma supervisora e demais funcionários administrativos.

A escola tem cinquenta anos de existência, conta com 13 salas de aula, uma sala de multimídia, uma sala de informática com 20 computadores e uma biblioteca. O período da manhã apresenta 13 salas de Ensino Médio, o período da tarde 10 salas de Ensino Fundamental e 3 salas de Ensino Médio. No período noturno há 4 salas de Ensino Médio regular, seis salas de Ensino Médio supletivo (EJA) e 3 salas de Ensino Fundamental Supletivo (EJA).

A escola possui cinco salas de segundas séries do Ensino Médio, com um total de cento e setenta e cinco alunos. Deste universo foram selecionados, de apenas uma das salas, os vinte alunos que participaram desta pesquisa. O critério utilizado para esta escolha foi o comprometimento da classe, e mais especificamente, desses alunos, uma vez que participariam com seriedade

possibilitando uma análise fidedigna dos resultados apresentados.

Para o desenvolvimento do estudo dirigido em sala de aula, optou-se por uma abordagem qualitativa com os alunos selecionados. Foi conduzido pelo professor da turma, que assumiu os trabalhos de intervenção no desenvolvimento do origami e do software GeoGebra.

Foram promovidos quatro encontros para o desenvolvimento desta pesquisa sendo realizados no contra turno, um encontro por semana, com duração de aproximadamente uma hora cada encontro.

No primeiro encontro foi realizado um pré-teste para o levantamento dos conhecimentos prévios sobre o assunto, com apresentação de um questionário (Figura 5), o qual foi elaborado pelo Prof. Dr. Fernando Pereira de Souza, docente do curso de Licenciatura em Matemática da UFMS Campus Três Lagoas. Pretendeu-se com isso, uma avaliação da capacidade de visualização dos sólidos nas suas três dimensões.

Na semana seguinte, posterior à aplicação do pré-teste, foram apresentados os Sólidos de Platão com os recursos do origami para um grupo de dez alunos.

Dando continuidade à pesquisa, na semana posterior, foram apresentados os Sólidos de Platão com os recursos do software GeoGebra para o restante do grupo, ou seja, os demais dez alunos.

Para a conclusão do trabalho, reuniu-se o grupo de vinte alunos para que respondessem a um questionário final com a finalidade de avaliar as contribuições dos dois recursos utilizados (origami e GeoGebra).

### **Resultados Preliminares e Construções com Origami**

Os vinte alunos do Ensino Médio selecionados realizaram um pré-teste (Figura 5) para a identificação de seus conhecimentos sobre os Sólidos de Platão.

**Figura 5:** Identificação dos sólidos de Platão

Questionário sobre Geometria Espacial

Nome: \_\_\_\_\_

- 1) O que é um Sólido de Platão?
- 2) Escreva o nome dos seguintes Sólidos



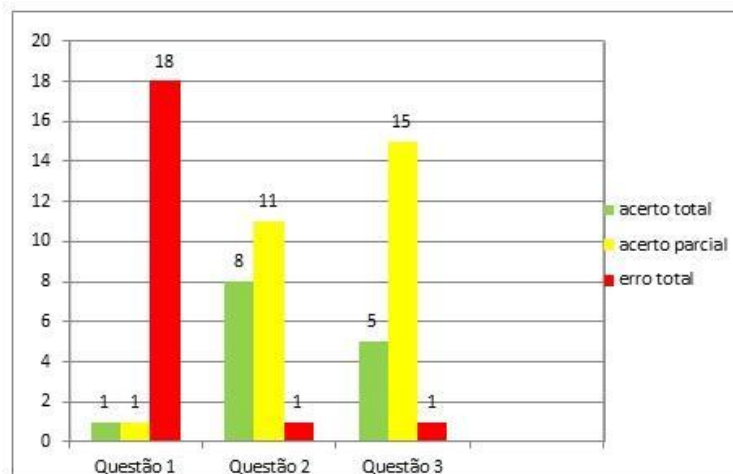
3) Preencha a seguinte tabela:

Nome do Sólido	Número de Faces	Número de Vértices	Número de Arestas
Tetraedro			
Hexaedro			
Octaedro			
Dodecaedro			
Icosaedro			

**Fonte:** Fernando Pereira de Souza (Prof. Dr do curso de Matemática - UFMS/Campus Três Lagoas).

Alguns deles não se lembravam de quais eram os sólidos em questão e confundiram polígono com poliedro. Alegaram que esse conteúdo tinha sido visto no Ensino Fundamental e que não se lembravam mais. Outros disseram nunca ter visto poliedro e polígonos. A maioria dos alunos não soube definir Sólidos de Platão e nenhum deles conhecia a relação de Euler. Alguns achavam que os sólidos eram figuras planas. A figura 6 dada abaixo é apresentado a tabulação com os resultados obtidos.

FIGURA 6 – Acertos do Questionário



Fonte: Elaborada pelos autores

Após a realização do questionário foi feita a etapa de construções dos poliedros de Platão utilizando o origami. Nessa etapa, dez alunos tiveram contato com os Sólidos de Platão utilizando os recursos do origami.

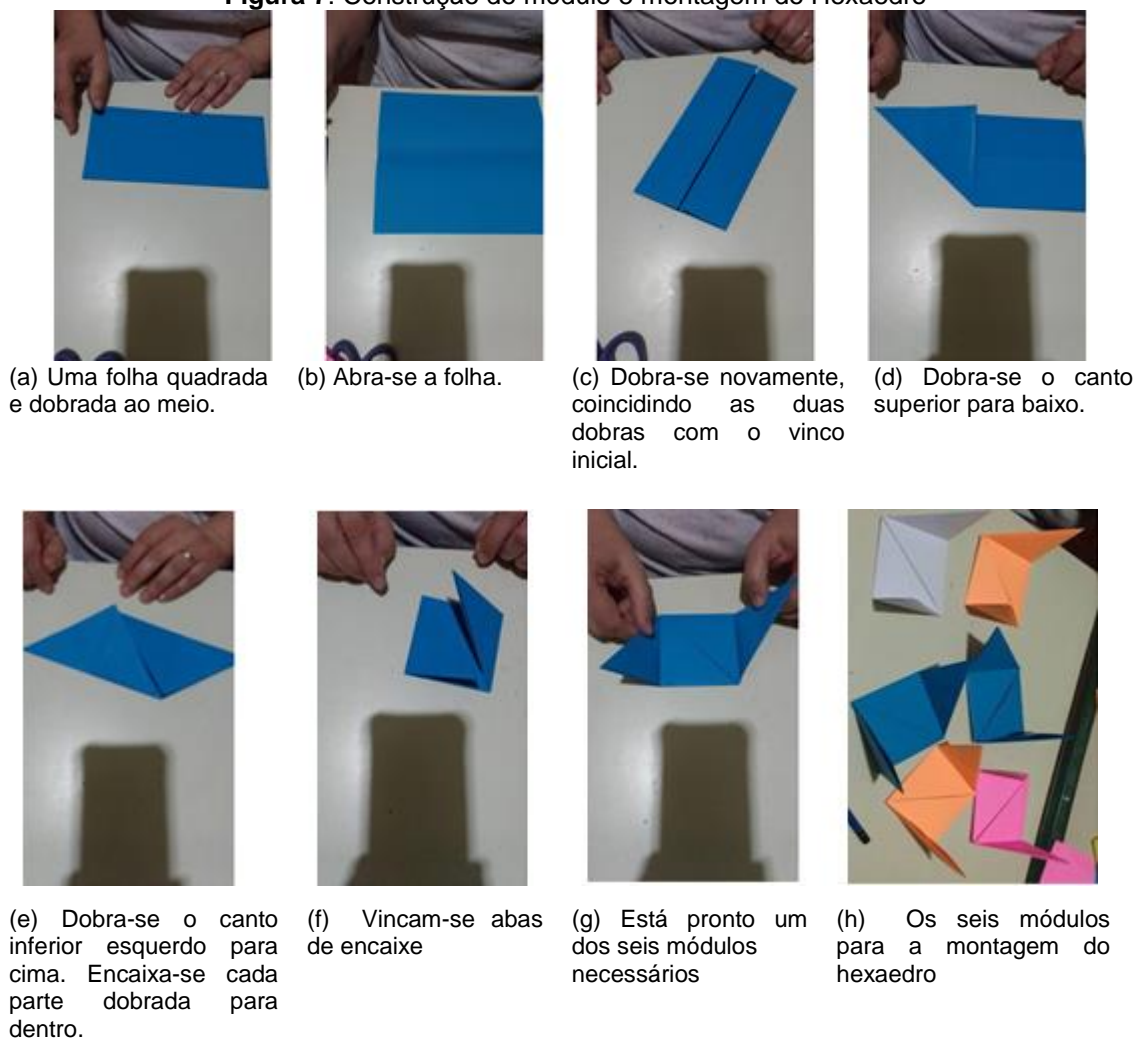
Foram mostrados aos alunos os módulos quadrangulares, triangulares e pentagonais já montados, e o módulo de encaixe utilizado para os módulos triangulares. Os módulos quadrangulares e pentagonais não necessitam do módulo de encaixe, uma vez que apresentam duas abas para encaixe.

Durante a apresentação dos sólidos falou-se das faces, arestas e vértices e respondeu-se a perguntas eventualmente feitas pelos alunos, tais como: “as faces são todas iguais?”, “as faces são polígonos ou poliedros?”, “que são polígonos?”, “que são poliedros?”, “por que as faces têm que ser todas iguais?”, “duas faces seguidas só têm uma aresta em comum?”, “quantas arestas saem de cada vértice?”.

A seguir é apresentado as construções de cada sólido de platão começando pelo Hexaedro.

Foram passadas aos alunos as seguintes etapas visuais seguidas de orientações verbais, como mostrado abaixo. Depois de construído o hexaedro, trabalhou-se planificação com os alunos, pedindo que eles desenhem todas as possíveis planificações do hexaedro.

**Figura 7:** Construção do módulo e montagem do Hexaedro



**Fonte:** Elaborada pelos autores.

Após a confecção dos seis módulos, as abas foram encaixadas nos bolsos de modo que não ficasse nenhuma aba sem encaixar e nenhum bolso sem abas. Assim, ficou pronto o hexaedro regular.

**Figura 8:** Hexaedro finalizado



**Fonte:** Elaborada pelos autores

Abaixo segue a construção do módulo triangular para confecção do tetraedro, octaedro e icosaedro:

**Figura 9:** Montagem do módulo triangular



(a) Dobre uma folha quadrada ao meio.



(b) Dobre novamente, de forma que os vincos quem perpendiculares.



(c) Leve o canto superior direito até um dos vincos



(d) Leve o canto superior esquerdo até o vinco, sobrepassando o vinco anterior.



(e) Dobre o triângulo formado ao meio e para trás.



(f) Vinque bem as dobras.



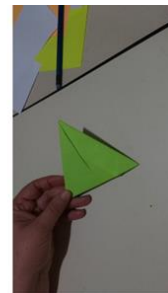
(g) Prenda a pequena aba, virando-a para o outro lado



(h) Embuta uma das abas num dos bolsos da peça



(i) Encaixe a outra aba no outro bolso

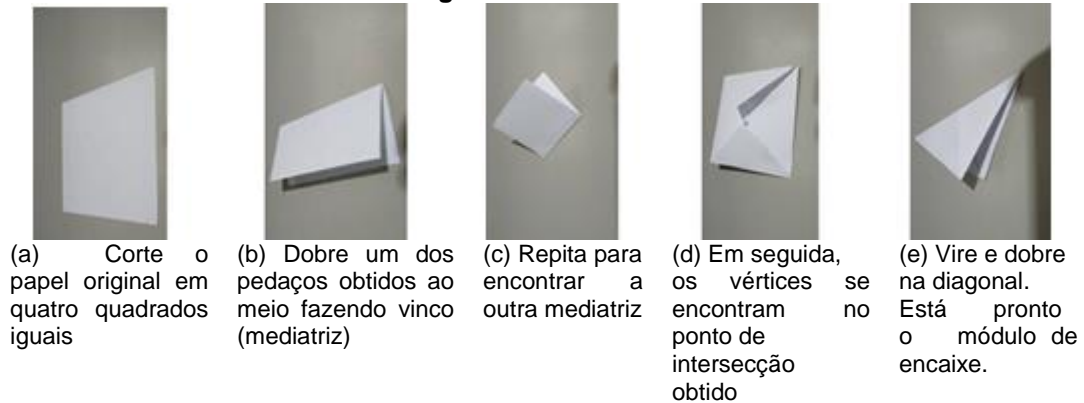


(j) Vinque bem. Está pronto o módulo triangular

**Fonte:** Elaborada pelos autores.

A peça montada é um triângulo equilátero que representa o módulo dos poliedros de faces triangulares. Observe que o triângulo obtido contém um bolso em cada um dos três lados, onde serão colocados os módulos de encaixe, que irão unir as faces do poliedro. Abaixo é feita a construção do módulo de encaixe. Para a confecção do módulo de encaixe, é necessário utilizar um papel com  $1/4$  da área do papel utilizado no módulo triangular.

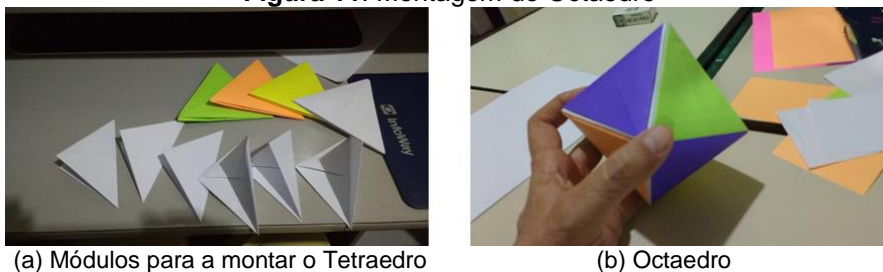
**Figura 10:** Módulos de Encaixe



**Fonte:** Elaborada pelos autores.

A seguir é feita a montagem do tetraedro e do octaedro. Para montar o tetraedro são necessários quatro módulos triangulares e seis módulos de encaixe. Encaixe os módulos triangulares introduzindo o módulo de encaixe nos bolsos de encaixe. No caso do Octaedro os módulos de encaixe são arestas do poliedro, assim para a montagem do octaedro serão necessários 12 módulos de conexão e 8 módulos triangulares.

**Figura 11:** Montagem do Octaedro



**Fonte:** Elaborada pelos autores.

Para montagem do icosaedro que possui 20 faces e 30 arestas, serão necessários 20 módulos triangulares e 30 módulos de conexão.



Figura 12: Montagem do Icosaedro



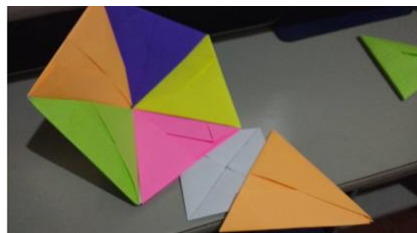
(a) 30 módulos de conexão e 20 módulos triangulares



(b) Encaixe da parte superior do icosaedro



(c) Parte superior do icosaedro já montada



(d) Início da parte lateral do icosaedro



(e) Parte lateral do icosaedro



(f) Parte lateral do icosaedro



(g) Parte superior e lateral já prontas



(h) Parte inferior do icosaedro sendo montada

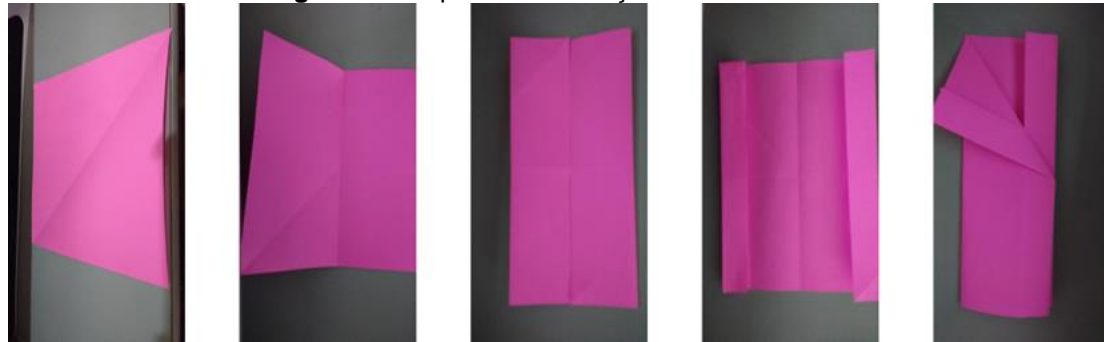


(i) Icosaedro montado

Fonte: Elaborada pelos autores.

A seguir é feita a construção do módulo e montagem do dodecaedro. Construção do módulo em forma de pentágono: Não são necessários módulos de encaixe, uma vez que os módulos pentagonais já dispõem de duas abas para encaixe.

**Figura 13:** etapas da construção do Dodecaedro



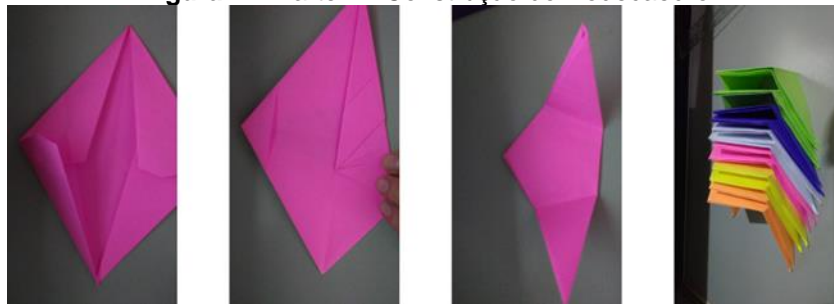
- (a) Vinca-se pela diagonal uma folha quadrada  
 (b) Dobra-se a folha pela mediatriz de um dos lados  
 (c) Dobra-se a folha novamente, levando os lados paralelos ao vinco até esse vinco  
 (d) Desdobra-se e leva-se novamente cada lado ao novo vinco  
 (e) Fecha-se ao meio. Abre-se cada um dos quatro cantos como mostrado



- (f) Os quatro cantos dobrados  
 (g) Abre-se toda a folha  
 (h) Dobram-se os quatro cantos para dentro, seguindo os vincos, como na figura  
 (i) Dobram-se novamente os cantos para dentro, seguindo os vincos, como na figura

**Fonte:** Elaborada pelos autores.

**Figura 14:** Parte 1 - Construção do Dodecaedro



- (a) Encaixam-se as abas para dentro umas das outras  
 (b) Dobram-se novamente duas das abas laterais  
 (c) Vinca-se bem. Está pronto um dos 12 módulos pentagonais  
 (d) Os 12 módulos pentagonais do Dodecaedro

**Fonte:** Elaborada pelos autores.

**Figura 15:** Parte 2- Construção do Dodecaedro



(e) Vinca-se bem. Está pronto um dos 12 módulos pentagonais  
**Fonte:** Elaborada pelos autores

**Figura 16:** Montagem completa do Dodecaedro



(f) Os 12 módulos pentagonais do Dodecaedro  
**Fonte:** Elaborada pelos autores.

É importante salientar que a construção dos sólidos não ocorreu em sala de aula. Foram apresentadas orientações verbais e visuais para que os alunos tivessem contato com as etapas percorridas até a confecção final dos sólidos.

No decorrer das apresentações dos sólidos geométricos, discutiram-se as relações matemáticas encontradas e foram respondidos constantes questionamentos efetuados pelos alunos. Ao final, os alunos manusearam os sólidos, identificando seus principais elementos e características.

Ao trabalhar com Origami modular, tem-se mais opções: identificação dos sólidos e seus elementos (arestas, faces, vértices e base); composição e decomposição; planificação; fórmula de Euler dentre outras opções.

**Figura 17:** Alunos manuseando os sólidos



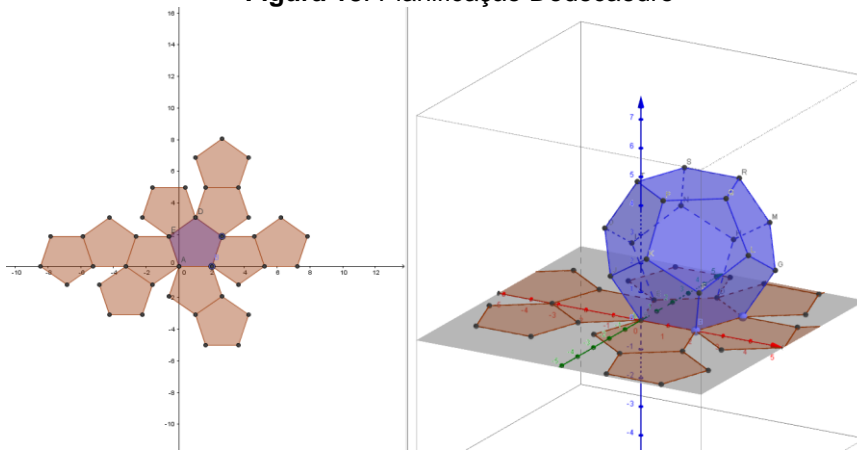
**Fonte:** Elaborada pelos autores.

**Apresentação dos Sólidos de Platão utilizando os Recursos do Geogebra**

Nessa etapa, dez alunos tiveram contato com os Sólidos de Platão utilizando os recursos do GeoGebra. Cada um dos sólidos foi construído perante o grupo.

Durante as construções falou-se das faces, arestas e vértices e foram respondidas perguntas eventualmente feitas pelos alunos, muito parecidas com as questões formuladas pelo primeiro grupo. Abaixo segue planificação do dodecaedro elaborada com o uso do Geogebra nesta etapa

**Figura 18:** Planificação Dodecaedro



**Fonte:** Elaborada pelos autores.

**Figura 19:** Alunos respondendo o questionário sobre os sólidos de Platão



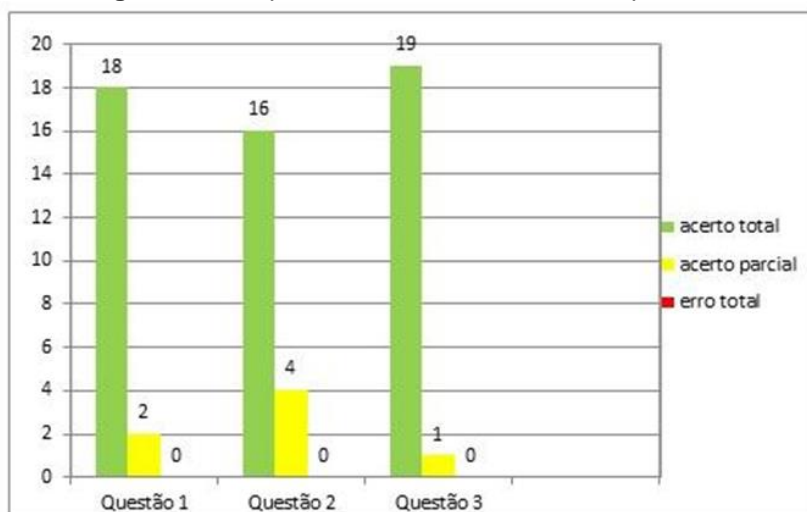
**Fonte:** Elaborada pelos autores.

**Teste Final do Estudo Dirigido em Sala de Aula**

Nessa etapa final, os vinte alunos foram reunidos para responderem às mesmas questões apresentadas na primeira etapa. Foi acrescentada uma coluna em que se solicita ao aluno a verificação da validade da relação de

Euler e uma quarta questão em que o aluno discorre sobre a validade ou não dos recursos utilizados no estudo dirigido em sala de aula.

**Figura 20:** Respostas dos alunos diante das questões



**Fonte:** Elaborado pelos autores.

Observa-se que os dados do gráfico mostram que a primeira questão foi respondida corretamente por dezoito dos vinte alunos; a segunda questão foi respondida corretamente por dezesseis alunos e teve acerto parcial por parte de quatro alunos; a terceira questão foi respondida corretamente por dezenove alunos e teve acerto parcial por parte de um aluno.

### Considerações Finais

A intenção do trabalho apresentado nesse artigo foi abordar um assunto que fosse relevante para os alunos do Ensino Médio da Rede Pública e, de alguma forma, contribuir com a melhora de sua aprendizagem.

Os alunos em geral são constantemente avaliados, tanto com a aplicação de avaliações internas, quanto com a aplicação de avaliações externas como o ENEM e SARESP, sendo que para que possam alcançar bom desempenho, as aulas devem ser bem preparadas e o professor aberto à utilização de recursos tecnológicos. Esse trabalho pretendeu, também, verificar a eficácia, ou não, da utilização desses recursos.

E como a intenção primeira deste trabalho é colaborar com a aprendizagem dos alunos e a verificação da validade da utilização de recursos

tecnológicos, optou-se pela inclusão de um estudo dirigido em sala de aula. Com esse estudo foi possível analisar o desempenho dos alunos antes e depois da utilização dos recursos tecnológicos. A técnica do origami e o software GeoGebra foram os recursos utilizados.

O estudo dirigido em sala de aula foi planejado de forma que pudesse apresentar com clareza o desempenho dos alunos antes e depois da utilização dos recursos tecnológicos.

Pode-se afirmar com convicção, com base nos resultados apresentados durante o estudo dirigido, que esse trabalho cumpriu sua finalidade. Tal resultado deve-se ao sério preparo das aulas. Depende, também, e não menos, da capacidade de se despertar o real interesse e a atenção dos alunos. E isso foi obtido com a utilização dos recursos tecnológicos, o origami e o GeoGebra. Pelo desempenho dos alunos nas várias fases do estudo dirigido pode-se afirmar que são recursos válidos e eficientes.

### **Referências**

BICUDO, IRINEU. **Tradução Os Elementos**, Ed. Unesp, São Paulo, 2009.

BOYER, CARL B.; MERZBACH, UTA C. **História da Matemática**, Ed. Edgard Blucher Ltda, Tradução da 3ª edição americana, 2018.

BORTOLOSSI, HUMBERTO JOSE. **Os Sólidos Platônicos, Conteúdos Digitais para o ensino e aprendizagem de Matemática e Estatística**, Universidade Federal Fluminense-UFF. Disponível <<http://www.cdme.im-uff.mat.br/platonicos/platonicos-html/solidos-platonicos-br.html>>. Acesso em 12 de fevereiro de 2016.

BAIRRAL, M. A. **Alguns contributos teóricos para análise da aprendizagem matemática em ambientes virtuais Paradigma**, v. 20, n. 2, p. 197-214, dez. 2005.

CONNOR, JOHN J. O.; ROBERTSON, EDMUND F. **MacTutor History of Mathematics archive**. Disponível em: <<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/index.html>>. Acesso em 6 de fevereiro de 2016.

ELMES, JAMES. **A general and bibliographical dictionary of the fine arts, Geometry**, Wentworth Press, 2016.

FILHO, ZOROASTRO AZAMBUJA. **Demonstração do Teorema de Euler**

para **Poliedros convexos**, Revista do Professor de Matemática-RPM 3, 1983.

FIORENTINI D.; MIORIM, M. A. **Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática**. Boletim da SBEM. SBM: São Paulo, ano 4, n. 7, 1990.

HILBERT, DAVID. **Fundamentos da Geometria**, Editora: Gradiva 1º edição, 2003.

KALLEF, ANA MARIA M.R. **Vendo e entendendo poliedros: do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças e outros materiais concretos**. Niterói- EdUFF,2003.

LIMA, ELON LAGES. **A matemática do Ensino Médio**. Vol. 2, Editora: SBM, 6º edição 2006.

LIMA, ELON LAGES. **Ainda Sobre o Teorema de Euler para Poliedro Convexos**, Revista do Professor de Matemática, RPM-5.

RICHESON, DAVID S. **Euler's gem: The polyhedron formula and the birth of topology**, Princeton Univerisity Press, 2008.