ENSIN@ UFMS

Três Lagoas, V.1, N. 4, 2019.
ISSN: 2525 -7056

"Ensinar é ação intencional, que na tensão entrea realidade e o mundo que sonhamos, mobiliza professores e estudantes a reiventarem a escola." Valdeci Luiz Fontoura dos Santos

REVISTA ENSIN@ UFMS - ISSN 2525-7056

REVISTA ENSIN@ UFMS - ISSN 2525-7056

Três Lagoas/MS, v. 1, n. 4, Dezembro 2019

Tema: Matemática, Ensino e Aplicações: Desafios e Possibilidades

ORGANIZADORAS

Cláudia Carreira da Rosa, UFMS - Campus de Ponta Porã, Brasil.

Eugenia Brunilda Opazo Uribe, UFMS - Campus de Três Lagoas, Brasil.

Os autores são responsáveis pelo texto final, quanto ao conteúdo e quanto à correção da linguagem.

REVISTA ENSIN@ UFMS - ISSN 2525-7056

A Revista ENSIN@ UFMS é uma publicação anual vinculada ao Grupo de Pesquisa Laboratório de Ensino e Pesquisa Multidisciplinar (LEA UFMS) e ao Grupo de Estudos e Pesquisas em Formação de Professores (GFORP). Ambos os grupos são formados por professores que atuam na graduação e Pós Graduação na Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), Campus de Três Lagoas (CPTL). A revista está vinculada aos Programas de Pós-Graduação em Educação (PPGE) e PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do CPTL/ UFMS, bem como ao Programa de Pós-Graduação Mestrado e Doutorado em Geografia (PPGGeo).

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

Endereço para correspondência:
UFMS - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
AV. Ranulpho Marques Leal, 3484
Caixa Postal 210 – CEP: 79620-080

E-mail: revista.ensinaufms@gmail.com
Site: https://periodicos.ufms.br/index.php/anacptl/index

ISSN 2525-7056

SUMÁRIO

ISSN 2525-7056

EDITORIAL

A quarta edição da revista ENSIN@ UFMS, sob a organização das professoras Cláudia Carreira da Rosa (Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Ponta Porã - Brasil) e Eugenia Brunilda Opazo Uribe (Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas – Brasil), é um número temático que objetiva refletir sobre os Desafios e Possibilidades encontrados por alunos(as) e professores(as) da Educação Básica e do Ensino Superior, no trabalho acadêmico vinculado à Matemática, seu Ensino e Aplicações.

Como professoras e editoras da Revista ENSIN@ UFMS defendemos a educação, a ciência, a importância da produção e da divulgação do conhecimento científico como caminho para o desenvolvimento de um mundo mais humano, sustentável e democrático. Assim, agradecemos a todos(as) os autores(as) pelas contribuições encaminhadas e aos avaliadores que contribuíram emitindo pareceres para a seleção dos textos, sem os quais não seria possível a publicação do presente número da revista.

Boa leitura!

Profª. Drª. Patricia Helena Mirandola Garcia
Editora Revista ENSIN@ UFMS

Profª. Drª. Eugenia Brunilda Opazo Uribe
Editora-adjunta Revista ENSIN@ UFMS

APRESENTAÇÃO

Temos a grande satisfação de apresentar o quarto número do primeiro volume da Revista ENSIN@ UFMS com o tema Matemática, Ensino e Aplicações: Desafios e Possibilidades. Esse número é composto por seis trabalhos científicos avaliados por pares, sendo quatro artigos e dois relatos de experiência.

O artigo *Saberes Docentes e Currículo: Um ensaio a partir da Modelagem nas aulas de Matemática* de autoria de Estevão Ovando neto e Cláudia Carreira da Rosa é um trabalho teórico que objetiva responder algumas questões relacionadas à articulação dos saberes profissionais com o currículo ao implementar atividades de Modelagem na sala de aula. Como resultado, destacam a importância de ações de formação inicial e continuada de professores que tenham um viés no ensinar e aprender sobre e por meio da Modelagem Matemática com o intuito de constituir saberes profissionais e que esses se deem por meio de uma postura reflexiva sobre a sua própria prática

Já o artigo *O Teorema de Euler para poliedros convexos em sala de aula*, de autoria de José Haddad Alli e Allan Edley Ramos de Andrade apresentam uma proposta do uso do Origami e do software GeoGebra no curso de Geometria Espacial para alunos do 2º ano do ensino médio. Os autores escolheram esse software por suas características didáticas e interativas e o utilizaram na construção de Sólidos de Platão e sua planificação, utilizando também as técnicas de Origami para montagens dos poliedros.

Os autores Vinicius Lopes de Aguilar,, Renato César da Silva e Edivaldo Romanini apresentam no artigo *Geometria Fractal: abordando conceitos a partir de construções com software GeoGebra,* um estudo sobre Geometria Fractal abordado a partir de construções no software GeoGebra. Os autores apresentam também uma proposta para educadores de contextualização de conceitos abordados em sala de aula, a partir da Geometria Fractal com o objetivo de fornecer um aprendizado significativo para alunos do Ensino Básico.

O artigo *Modelagem Matemática: uma possibilidade para o ensino de Matemática nos cursos de Pedagogia*, das autoras Debora Coelho de Souza, Alyne Alves Coelho da Silva e Claudia Carreira da Rosa objetiva mostrar as possíveis contribuições da modelagem matemática para o ensino de Matemática, na formação inicial de professores que não têm formação específica. As autoras utilizam a Modelagem, como uma ferramenta de ensino e aprendizagem, com intuito de aprofundar conhecimentos em relação aos conteúdos específicos de matemática possibilitando trabalhar em sala de aula com desenvoltura e segurança e proporcionando aos alunos a possibilidade de participação ativa na própria aprendizagem.

O primeiro relato de experiência intitulado E*nsino de cônicas: experiências de ensino com metodologias alternativas*, dos autores Celson André de Lima Júnior, Alessandro Ribeiro da Silva, Gerson dos Santos Farias, Eugenia Brunilda Opazo Uribe tem como objetivo apresentar uma proposta para o ensino de cônicas por meio de oficinas, utilizando metodologias diferenciadas. As oficinas foram desenvolvidas com alunos de ensino médio de duas escolas da cidade de Três Lagoas – MS, abordando aspectos teóricos, realizando trabalho prático com materiais manipuláveis para a construção da Hipérbole, bem como trabalho em laboratório de informática utilizando ferramentas de tecnologias, como é o caso do Software SCRATCH e o Software GeoGebra.

Encerramos esse número temático com o relato *A História da Matemática como ferramenta desmistificadora e propulsora do processo de ensino-aprendizagem* dos autores José Paulo Rodrigues da Silveira e Fernando Pereira de Souza, que descreve uma experiência de ensino com alunos do Ensino Fundamental, Médio e EJA da cidade de Três Lagoas / MS, realizada entre os anos de 2016 e 2018. Os autores desenvolveram rodas de conversa e formação de grupos de pesquisa entre os alunos para estudar

ISSN 2525-7056

História da Matemática.

De um modo geral, acreditamos que os trabalhos apresentados trazem contribuições na medida em que possibilitam reflexões, apresentam propostas de novas abordagens e abrem possibilidades para novos estudos.

Organizadoras

Cláudia Carreira da Rosa, UFMS - Brasil
Eugenia Brunilda Opazo Uribe, UFMS - Brasil

ARTIGOS

SABERES DOCENTES E CURRÍCULO: UM ENSAIO A PARTIR DA MODELAGEM NAS AULAS DE MATEMÁTICA

TEACHING KNOWLEDGE AND CURRICULUM: AN ESSAY FROM MODELING IN MATHEMATICS CLASSES

Estevão Ovando Neto [1]

Claudia Carreira da Rosa [2]

RESUMO: Esse trabalho consiste em um ensaio teórico feito a partir das primeiras experiências com a Modelagem Matemática ao ingressar no mestrado em Educação Matemática. Temos por objetivo, com esse trabalho, responder algumas questões relacionadas à articulação dos saberes profissionais com o currículo ao implementar atividades de Modelagem na sala de aula. A discussão do texto se orienta de Tardif e Pimenta, no que tange a gênese dos saberes docentes, Sacristán, nas discussões sobre currículo e Almeida e Brito, em relação a Modelagem e suas concepções tendo como ponto de partida sua implementação nas aulas de Matemática. Como resultado, destacamos a importância de ações de formação inicial e continuada de professores que tenham um viés no ensinar e aprender sobre e por meio da Modelagem Matemática com o intuito de constituir saberes profissionais e que esses se deem por meio de uma postura reflexiva sobre a sua própria prática.

PALAVRAS-CHAVE: Educação Matemática. Educação Básica. Sala de Aula.

ABSTRACT: This work consists of a theoretical essay made from the first experiences with Mathematical Modeling when entering the Masters in Mathematical Education. With this work, we aim to answer some questions related to the articulation of professional knowledge with the curriculum when implementing Modeling activities in the classroom. The discussion of the text is guided by Tardif and Pimenta, regarding the genesis of teaching knowledge, Sacristán, in the discussions about curriculum and Almeida and Brito, in relation to Modeling and its conceptions having as a starting point its implementation in Mathematics classes. As a result, we highlight the importance of initial and continuing training of teachers who have a bias in teaching and learning about and through Mathematical Modeling with the aim of constituting professional knowledge and that these are given through a reflective posture on their own practice.

KEYWORDS: Math Education. Basic Education. Classroom.

Introdução

Pesquisas na Educação Matemática, em todos os níveis, apontam a necessidade de promover o ensino e a aprendizagem de modo a desempenhar com os alunos competências como desenvolver o raciocínio, o pensamento

[1] Doutorando em Educação Matemática do Programa de Pós Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (PPGEDUMAT/UFMS). E-mail: estevaoovando@gmail.com
[2] Doutora no Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Estadual de Maringá (UEM). Professora do Campus de Ponta Porã da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (CPPP/UFMS) e do Programa de Pós Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (PPGEDUMAT/UFMS). E-mail: claudia.rosa@ufms.br

crítico, o trabalho em grupo, investigar e resolver problemas, entre outras habilidades que possibilitem o indivíduo a se posicionar em seu meio, desenvolver a cidadania e proporcionar a busca por novas formações a fim de participar ativamente na sociedade, que se encontra em constantes mudanças.

Devido a essas mudanças, a formação do professor é importante, pois o profissional tem o papel de promover o ensino por meio de ações que vão além de apenas transmitir conteúdos para os alunos por meio de definições. Nesse sentido, a formação inicial e continuada de professores é relevante, pois o docente que busca novas ideias está em constante reflexão sobre a sua prática e isso pode desenvolver posturas que se aproximam com a realidade do aluno e favoreçam a aprendizagem.

A partir da leitura de Tardif (2000), os saberes docentes e as suas implicações na formação de professores e consequentemente resultados para a sala de aula nos reforçou para o seguinte pensamento, há tempos discutido na literatura em Educação: a formação inicial não é suficiente para preparar o professor para o mercado de trabalho, uma vez que é na experiência prática que ocorre o desenvolvimento profissional, por isso considera-se importante a formação continuada. Nesse sentido, formação inicial e continuada se complementam ao longo da carreira do professor.

O professor recém-formado, ao se deparar com a sala de aula diante do processo de ensino e aprendizagem apresenta dificuldades em “juntar as matemáticas”, a curricular com a do cotidiano, por não conseguir relacionar as orientações prescritas no referencial curricular com a realidade do aluno, muitas vezes influenciado por saberes que trouxe consigo desde a escolarização, quando aluno, sobre o que era ser um bom professor e isso pode remeter a posturas tradicionalistas de ensino na crença de que todos aprendem da mesma maneira.

Para “juntar” a matemática da rua com a matemática escolar e trabalhar de maneira diferenciada o professor se encontra em um grande desafio por serem posturas que exigem estudo e busca por formação constante. Nessa perspectiva, ao relacionar o ensino ao currículo escolar se faz necessário promover posturas inovadoras de ensino de modo a motivar o aluno com situações próximas do seu cotidiano.

Na Educação Matemática existem diferentes tendências que tem como objetivo trabalhar a matemática por meio de situações diferenciadas. No sentido de promover o ensino da Matemática por meio de situações reais, pesquisas discutem a Modelagem Matemática para o ensino sob diferentes perspectivas. Consideramos a perspectiva de Almeida e Brito (2005) que apresenta a Modelagem Matemática como uma alternativa de ensino que propõe trabalhar conteúdos matemáticos por meio de problemas reais não originalmente matemáticos.

A postura como professor em sala de aula pode estar diretamente relacionada ao que acreditamos ser um “bom professor” e isso é algo construído desde quando éramos alunos da educação básica, como quando avaliamos se este professor era didático e aquele outro não, por exemplo. Essas relações podem refletir em futuros professores diferentes ações em sala de aula, juntamente acrescido às experiências trazidas da formação inicial e as primeiras experiências em sala de aula, ou seja, os saberes construídos por diversas experiências ao longo do tempo.

Em relação aos saberes docentes constituídos pelo professor, Tardif (2000) caracteriza que estes são adquiridos com o tempo, desde a sua escolarização, e são considerados variados e heterogêneos, pois não definem um repertório de conhecimentos unificados, uma vez que o professor nunca tem uma postura unificada em sua prática, sempre detêm de alternativas conforme as necessidades para cumprir os objetivos de aprendizagem em sala de aula.

Como são questões que perpassam o ambiente escolar ao pensarmos no ensino da Matemática, vamos relacionar esses saberes na formação de professores juntamente com questões do currículo que se trabalha em sala de aula. Para compreensão de currículo, consideramos Sacristán (2000) que compreende que o currículo escolar deve atingir conhecimentos prévios dos alunos, considerando que cada aluno é um indivíduo oriundo de um meio social e cultural muito particular, ou seja, cada um por vir de uma realidade diferente consequentemente aprende de maneiras diferentes.

Visando esta relação, entre saberes docentes, Modelagem Matemática e currículo, temos como objetivo neste artigo nortearmo-nos pela seguinte questão: “como os saberes docentes se relacionam com o currículo ao trabalharmos a Modelagem Matemática na sala de aula, principalmente ao que remete o desenvolvimento do currículo escolar?”.

Para discutir essa questão, vamos nos orientar pelo referencial teórico apresentado até então sobre saberes docentes, Modelagem Matemática e currículo a fim de ponderar questões em relação a dificuldades encontradas ao trabalhar de maneira diferenciada em sala de aula, problemas enfrentados durante a formação inicial e que possivelmente se prolongaram após a graduação e emergiram ao desenvolvermos a Modelagem Matemática com alunos.

Saberes Docentes: Algumas Considerações

O pesquisador Maurice Tardif (2000) aborda seu trabalho norteado por algumas questões disparadoras; uma consiste em quais são os saberes profissionais dos professores; a outra questiona em que e como esses saberes se distinguem dos conhecimentos universitários elaborados pelos pesquisadores da educação voltadas para a formação inicial de professores e quais relações deveriam existir entre os saberes e os conhecimentos universitários, tanto de professores da educação básica quanto ao ensino superior, ao que remete a profissionalização do ensino e a formação de professores.

Para Tardif (2000), ao pensar na profissionalização, o professor em sua prática profissional, deve se orientar em conhecimentos especializados e formalizados por meio de um longo processo de formação que garante a titulação para exercer seu ofício e o diferenciar de profissionais das outras áreas, uma vez que apenas habilitados da área tem licença e competência para usar destes conhecimentos e a capacidade de avaliar como competente ou incompetente as ações de seus colegas de profissão.

Neste sentido, os conhecimentos profissionais não são padronizados ou seguem uma regra para sua execução prática, pelo contrário, são espontâneos e se adaptam a diferentes situações que exigem reflexão para compreender o problema, para organizar os objetivos lançados e os caminhos para concluí-los. Na prática, os conhecimentos profissionais são evolutivos e progressivos e necessitam de contínuas ações de formação, mesmo após a graduação.

Na tentativa de caracterizar os saberes docentes, Tardif (2000) considera que estes são adquiridos pelos professores com o tempo, uma vez que algumas crenças presentes na prática do professor podem estar relacionadas à maneira como ele aprendeu em toda sua trajetória escolar, assim os primeiros anos de prática profissional são determinantes para definir a identidade profissional do indivíduo.

Deste modo, os saberes docentes e os saberes profissionais são conceitos complementares que se unificam em confronto com a prática. Os saberes docentes podem estar relacionados ao que se almeja para desenvolver uma prática e os saberes profissionais são as ideias que se consolidam ao colocarmos esses saberes em prática, ou seja, no exercício de constituir tais saberes.

> Querer estudar os saberes profissionais sem associá-los a uma situação de ensino, a práticas de ensino e a um professor seria, então, um absurdo. É a mesma coisa que querer estudar uma situação real de trabalho, uma situação real de ensino, sem levar em consideração a atividade do professor e os saberes por ele mobilizados. Finalmente, querer estudar os professores sem estudar o trabalho e os saberes deles seria um absurdo maior ainda (TARDIF, 2000, p. 11).

Os saberes profissionais dos professores, nessa perspectiva, são considerados variados e heterogêneos, pois não constituem um repertório de conhecimentos únicos, pois o professor nunca tem uma postura única em sua prática, sempre detêm de alternativas conforme a necessidade para cumprir os diferentes objetivos na sala de aula. Também são considerados personalizados e situados, pois cada professor vem de um meio social e cultural muito particular e está em uma realidade muito singular também, e isso pode levá-lo a tomar diferentes caminhos em suas ações.

No mesmo sentido, Pimenta (1999) considera que o docente para cumprir os objetivos de desenvolver a cidadania dos alunos e superar o fracasso das desigualdades sociais necessita de formação inicial e continuada a fim de refletir e elaborar alternativas para esses desafios. A autora pondera de seu trabalho ser voltado para o ensino da didática por meio de ações de formação inicial e continuada de professores com o objetivo de desenvolver saberes profissionais com alunos a partir de posturas investigativas e reflexivas de modo a mobilizar saberes da experiência com atividades práticas. O trabalho desenvolvido é coletivo e propõe atividades interdisciplinares nas escolas com o intuito de construir profissionais docentes (conhecimentos, habilidades, atitudes, valores) com ações de formação inicial.

A identidade profissional, para Pimenta (1999), não é imutável podendo mudar ao decorrer do tempo descontruindo crenças durante a formação do indivíduo, pois essa identidade se constrói a partir da significação social da profissão, da revisão constante desses significados e revisão das tradições. Também pode se constituir pelo significado que o professor (ator/autor) confere a atividade docente no seu cotidiano, do confronto entre teoria e prática com a sua cultura e crenças trazidas durante sua trajetória.

Nesta perspectiva, Pimenta (1999) explica os saberes da docência categorizando-os em diferentes aspectos. O primeiro deles está relacionado aos saberes da experiência do indivíduo construído desde todo o seu desenvolvimento, uma vez que os alunos da graduação trazem desde as séries iniciais diversos saberes sobre o que é ser professor, ou o que consideram de professor bom ou ruim, o que pode influenciar em repetir modelos pedagógicos aos quais foi submetido.

Para os professores em formação inicial ou continuada, os saberes da experiência são também aqueles que os professores produzem no seu cotidiano docente, num processo permanente de reflexão sobre sua prática associada a outras experiências (colegas de trabalho, pesquisas, entre outros).

Os saberes pedagógicos envolvem o repertório didático com o qual os

ISSN 2525-7056

professores constituem seus saberes profissionais na experiência, ou seja, é na prática pedagógica, pela experiência docente, que o professor recorre aos saberes pedagógicos que remete ao que ele conhece sobre métodos e técnicas para o ensino.

Os saberes da docência ao remeterem para os saberes pedagógicos podem ser associados à ideia de que ter didática é saber ensinar. Essa ideia se contradiz, pois, os professores passaram por essa formação na graduação, mas o que realmente define sua prática profissional em sala de aula está nos saberes docentes que ele desenvolveu durante toda sua formação, e isso não é definido somente pelas técnicas apresentadas na formação inicial.

Pimenta (1999) aponta os saberes pedagógicos se constituem a partir de necessidades pedagógicas trazidas pelo currículo em ação (prática na sala de aula) e se reinventam por meio da prática social da educação. Deste modo, o saber-fazer só se constitui a partir do fazer, ou seja, o que se faz. A prática (práxis) que constitui os saberes pedagógicos, num processo de confronto e reelaboração contínua. Assim, a teoria só é construída a partir da prática docente, por isso se faz necessário documentar os saberes que vão sendo construídos a partir das práticas dos professores (reflexão, erros, hipóteses, acertos, entre outros).

O Currículo e os Saberes do Professor

Ao discutir questões curriculares com professores é comum em discursos de alguns colegas a crença de que o currículo consiste na lista de conteúdos a serem trabalhados ao longo de determinado período de tempo, remetendo ao que o aluno aprende.

> Temos uma sensação contraditória ao falar do currículo, pois sentimos, por um lado, a necessidade de simplificar para que nos façamos entender, o que nos transforma em seus promotores. Nesse sentido, afirmamos que o currículo é algo evidente e que está aí, não importa como o denominamos. É aquilo que o aluno estuda. Por outro lado, quando começamos a desvelar suas origens, suas implicações e os agentes envolvidos, [...] damo-nos conta de que nesse conceito se cruzam muitas dimensões que envolvem dilemas e situações perante os quais somos obrigados a nos posicionar. (SACRISTÁN, 2013, p. 16)

Por meio da literatura relacionando o currículo com a Educação, percebemos diferentes concepções que remetem a esse conceito. A partir disso, buscamos aproximações que tratam do currículo relacionado à prática do professor em sala de aula na interação com os alunos, entretanto vamos discutir com base na concepção de currículo de Sacristán.

Para Sacristán (2013), o currículo a ensinar é "como uma seleção organizada de conteúdos a aprender, os quais por sua vez, regularão a prática didática que se desenvolve durante a escolaridade" (SACRISTÁN, 2013, p.17). Neste sentido, os saberes da experiência e pedagógicos que o professor traz consigo são colocados em prática no currículo em ação e a partir disso podem se desenvolver novas ideias que complementam os saberes docentes já constituídos, ou seja, são construídos saberes profissionais em confronto com a prática do professor.

Ao pensar no currículo como algo complexo constituído por relações que perpassam o meio escolar, Sacristán (2000) sistematiza o currículo em diferentes currículos com níveis de significados diferentes.

O currículo prescrito existe em todo sistema educacional e é resultado de propostas oriundas do meio em que está inserido. Serve para orientar quais conteúdos e procedimentos devem ser abordados em cada nível escolar. No currículo prescrito existe, de acordo com Silva (2013), uma crença relacionada a interpretações dos conteúdos curriculares que podem levar a ideia do pré-requisito, como se um conteúdo precisasse de uma sequência anterior para ser trabalhado. Esta crença é denominada de currículo linear, que é a interpretação que o professor faz em relação ao currículo prescrito.

O currículo moldado pelos professores é aquele em que o professor é responsável por tomar decisões em como desenvolver os conteúdos em suas aulas a partir de suas crenças (saberes docentes), e a partir disso constituir uma proposta que considera ideal para cada turma. O currículo em ação ocorre na prática docente do professor, a partir de fundamentos teóricos e práticos (saberes docentes) que o professor já tem, no qual pode se ver o significado real das propostas curriculares que sustentam as práticas pedagógicas.

ISSN 2525-7056

O currículo realizado é consequência da prática na sala de aula, podendo produzir diferentes efeitos: cognitivo, social, cultural, etc; e vai além do sistema educacional e das teorias sobre práticas pedagógicas. Neste momento, o professor toma consciência dos saberes docentes que tinha e a partir de sua experiência é capaz de construir novos saberes profissionais. O currículo avaliado engloba ações além da escola que atingem o professor, tais como controle para liberação de títulos (diplomas), ideologias políticas, teorias pedagógicas e cultura levando o docente a reconsiderar a avaliação do currículo, que pode concordar ou não com as ideias de quem o elaborou ou até mesmo com os objetivos do professor.

Acreditamos que considerando os diferentes níveis de significado do currículo é possível perceber como a prática na sala de aula é fundamental para desenvolver saberes profissionais a partir dos saberes da experiência e saberes pedagógicos que o professor já tem consigo, pois é no cotidiano em sala que estão presentes os obstáculos em que os professores precisam superar e desenvolver estratégias com o intuito de obter êxito na aprendizagem dos alunos.

O currículo é um documento que elenca fundamentos que orientam a prática do professor, e a maneira como se desenvolve a partir dos diferentes níveis de significado juntamente com os saberes que estão em jogo, possibilitam continuamente enfrentamentos e reflexões sob a prática desenvolvida, desde o currículo prescrito até o currículo avaliado, e o professor por ser autor/ator de sua prática em sala de aula é livre para desenvolvê-lo da maneira que achar mais conveniente em suas ações.

Nesta perspectiva, o currículo é importante para avaliar como as práticas e posturas educacionais se manifestam e se consolidam no meio escolar. Segundo Sacristán (2000), o currículo para o professor é importante, pois serve como referência para a prática docente na qual podem estar presentes relações entre orientações sugeridas de uma teoria relacionando-a com a prática. Refletimos então que avaliamos os estudantes para pensarmos nossas práticas pedagógicas, ou ainda, novas práticas que direcionem resultados satisfatórios de aprendizagem desses estudantes.

Modelagem Matemática, Currículo e os Saberes Profissionais: Algumas Discussões a partir da Prática

Diferentes pesquisas em Educação Matemática apontam para a necessidade de desenvolver a Matemática em sala de aula com o intuito de fugir a abordagens tradicionais a fim de motivar o aluno a se interessar pelos estudos por meio de atividades contextualizadas em sua realidade e desenvolver conteúdos matemáticos de maneira menos abstrata.

A fim de promover a matemática no contexto de situações reais, o professor é desafiado a desenvolver seu planejamento relacionando a matemática escolar com a matemática real do cotidiano do aluno. Entretanto, existem em geral, dificuldades em promover na prática essas relações no planejamento da aula a ser desenvolvido. Os professores não se sentem aptos em trabalhar com práticas diferenciadas por acreditarem que não conseguirão concluir a aula seja por falta de tempo ou por falta de domínio do conteúdo matemático que pode emergir das discussões com os alunos, por exemplo.

Na literatura que remete Modelagem Matemática como tendência em Educação Matemática existe diversas concepções que se diferem no que se refere a como trabalhar os conteúdos curriculares em sala de aula.

A partir de nossa experiência em sala de aula, consideramos a Modelagem Matemática segundo Almeida e Brito (2005) que a caracteriza como uma alternativa pedagógica que trabalha conteúdos matemáticos por meio de situações reais a partir de um problema não necessariamente matemático.

Nessa perspectiva, consideramos a Modelagem Matemática uma possibilidade diferenciada para as aulas de matemática que desafia o professor em refletir sobre sua prática pedagógica a partir da sua prática em sala de aula, no que se refere a como desenvolver as aulas e discutir os conteúdos curriculares com os alunos. Essa alternativa acontece por meio de problemas reais autênticos partindo do interesse dos alunos, com o intuito de motivá-los a investigar a situação, coletar dados, elaborar hipóteses e validar possíveis soluções por meio de um modelo.

Ao desenvolvermos ações de ensino ou formação que envolve a Modelagem Matemática com alunos que não tem contato com essa tendência, consideramos a perspectiva de Almeida e Dias (2004) que sugere a inserção de atividades dessa natureza respeite três momentos.

No primeiro momento, o professor é responsável em apresentar o tema para os alunos e tentar motivá-los a se interessar pelo assunto, em seguida propõe um problema para que investiguem, articula a construção de hipóteses e a coleta de dados com os alunos, e orienta a solução do problema instigando na reflexão sobre o problema e os conteúdos matemáticos que vão emergindo;

No segundo momento o professor discute com os alunos uma situação problema a partir de um tema e orienta os alunos na elaboração de um problema a ser investigado e na elaboração de hipóteses.

No terceiro momento o professor propõe aos alunos que busquem uma situação com um tema que achem interessantes. O tema escolhido, a formulação do problema, a coleta de dados e discussão de hipóteses, a resolução do problema proposta e a validação da resposta ou modelo deve ser responsabilidade dos alunos. Neste, o professor só acompanha a atividade e orienta discussões que vão surgindo, intervindo somente quando necessário.

Consideramos, por meio de Bassanezi (2006), que a atividade de Modelagem Matemática deve produzir um modelo, no sentido em que este justifique as ações e os pensamentos dos alunos na resolução do problema proposto. Deste modo, acreditamos como modelo matemático em nossas atividades desenvolvidas a perspectiva de Rosa (2009, p.36) que o caracteriza como “um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado. Uma equação, um gráfico, uma tabela, uma figura, são exemplos de modelos matemáticos”.

A nossa primeira experiência em contato com pesquisas relacionadas Modelagem Matemática na Educação Matemática ocorreu ao ingressar no Programa de Pós-Graduação por meio de discussões com nosso grupo de pesquisa. Mesmo trabalhando por dois anos em uma escola particular e uma escola estadual de nossa cidade, estávamos habituados a utilizar apostilas orientadas, rotineiramente adotadas por escolas particulares com as quais tivemos contato, que seguiam a mesma ideia tradicional de ensino com atividades limitadas. Na outra escola seguíamos orientações prescritas no referencial curricular na qual sentíamos mais abertos a novas possibilidades de ensino ao planejar as aulas.

Como éramos recém egressos da graduação, trouxemos diversos saberes pedagógicos que aprendemos durante a formação inicial por meio de metodologias e teorias discutidas nas disciplinas de prática de ensino e ações discutidas e realizadas em uma escola pública vinculada ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência da qual fizemos parte durante grande parte da formação inicial. Por mais que esses saberes pedagógicos estavam de certa forma consolidados em nossa prática por meio dessas experiências, trazemos também saberes da experiência adquiridos ao vivenciar práticas de nossos professores da educação básica e graduação quando assistimos suas aulas e nos apropriamos de alguns destes saberes na crença do que acreditávamos que dava certo.

Diante do Mestrado, ao desenvolver a Modelagem Matemática em sala de aula após estudar a teoria por meio da literatura da área tivemos nossos primeiros experimentos na escola, os quais foram fundamentais para confrontar os saberes que tínhamos e permitiram desenvolver novos saberes em relação a essa alternativa de ensino.

Temos resultados para discutir a partir de algumas experiências da pesquisa de Mestrado de Ovando Neto (2019) que descreveu e analisou três atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas com o objetivo de investigar os desafios e possibilidades ao implementar atividades de modelagem em sala de aula de acordo com o referencial curricular de Mato Grosso do Sul. Como nos envolvemos e colaboramos com a elaboração das atividades e das coletas de dados, percebemos que os saberes pedagógicos e saberes da experiência que trazíamos conosco nos aproximaram consequentemente da perspectiva de Almeida e Brito (2005), porque uma das preocupações era o cumprimento das orientações curriculares. Neste sentido, usamos os saberes que tínhamos.

O primeiro saber profissional constituído está relacionado aos conteúdos, à ideia linear do currículo prescrito, trazido desde a educação básica, quando víamos professores ensinarem determinados conteúdos primeiramente que outros, como se todos eles dependessem de uma ordem e não pudessem ser trabalhados de outra maneira.

Este modo, isso foi desconstruído na prática com a modelagem, pois pudemos ver no currículo em ação o desenvolvimento de um novo currículo, que se aproximava da perspectiva espiral de Bruner (1973) que caracterizava que os conteúdos curriculares deviam ser desenvolvidos várias vezes em diferentes níveis de dificuldade dependendo do problema proposto, uma vez que de acordo com Ovando Neto e Rosa (2017) essa crença (currículo linear) na modelagem é desconstruída.

> A maneira como são apresentados os conteúdos na resolução da atividade diverge da crença equivocada do currículo trabalhado em "escada", com a ideia de linearidade, como se os conteúdos tivessem de ser trabalhados separadamente e seguindo uma ordem, sem promover uma interdisciplinaridade. Durante o desenvolvimento da atividade, verificamos a articulação de diferentes conteúdos para a solução do problema proposto, como vista na descrição desse trabalho (OVANDO NETO E ROSA, 2017, p.14).

Nessa perspectiva pudemos ver os alunos como protagonistas do seu aprendizado investigando um problema real proposto a eles, uma vez que desenvolvemos apenas atividades no primeiro e segundo momento, e validado em grupo por diferentes caminhos, justificando aquilo que eles estavam pensando ao desenvolverem as atividades propostas.

Outro saber profissional constituído está relacionado às experiências, ou seja, a forma com a qual as discussões em torno da atividade promoveram diferentes diálogos que vão além de conhecimentos matemáticos, perpassam a visão de mundo de cada aluno, sua história e experiências, que muitas vezes acabam sendo desconsideradas em posturas tradicionalistas. Nesse sentido a ideia que tínhamos sobre a sala de aula em silêncio enquanto apresentávamos os conteúdos também foi desconstruída, pois nas discussões pudemos avaliar que os conteúdos matemáticos estavam fazendo sentido ao cotidiano deles e aquilo os motivavam a resolver os problemas propostos.

O terceiro saber profissional é em relação a prática pedagógica, que pode ser prejudicada pela falta de experiência com a metodologia adotada. No que diz respeito a modelagem o "medo" do professor em desenvolver as atividades pode ser um bloqueio. Consideramos essencial que o mesmo tenha um "amadurecimento" sobre o assunto, que se familiarize com as etapas do desenvolvimento, com a dinâmica das atividades, ou seja, que ele tenha um "tempo" para se sentir seguro. Ovando Neto (2019, p.111) coloca que "Estes tempos servem como orientação para que os professores se acostumem a trabalhar com a Modelagem Matemática, visto que gradativamente tanto ele quanto os alunos vão se familiarizando com as etapas da modelagem".

Os tempos para o professor permitem uma introdução gradativa de atividades de Modelagem Matemática de modo a produzir experiência ao professor em relação à ansiedade em dar respostas, o nervosismo sobre o que pode surgir durante uma atividade, entre outros, uma vez que nestas atividades o professor deixa de ser detentor do saber e estes tempos, juntamente com os momentos sugeridos por Almeida e Dias (2004) o auxilia a desenvolver a modelagem na sala de aula.

Estes tempos possibilitam a introdução gradual de atividades de Modelagem Matemática com o intuito de orientar o professor na aquisição de experiência que podem estar relacionados a ansiedade em fornecer respostas, o nervosismo as surpresas e imprevistos durante as atividades e questionamentos que possam surgir, considerando que no ambiente de modelagem o professor deixa de ser hierarquicamente detentor do saber.

Assim, enxergamos a Modelagem Matemática com uma dessas possibilidades para fugir de abordagens tradicionais que rotineiramente estamos habituados a trabalhar, na qual consideram o aluno, propositalmente ou não, como submisso a tudo que é apresentado, na crença de que o professor sabe muito e o aluno sabe pouco, sem considerar sua cultura, história e os conhecimentos já adquiridos.

Considerações Finais

Ao relacionar as experiências que tivemos até então, tanto com a formação inicial e continuada, incluindo a pesquisa em Modelagem Matemática na Educação Matemática verificamos a possibilidade de discutir os saberes docentes presentes e os novos saberes profissionais constituídos socialmente e historicamente em nossa trajetória por meio do confronto com a atividade prática da modelagem, uma vez que a atividade é rica em registros, discussões e soluções diferenciadas que levam o professor a rever suas ações a todo o momento.

Nesse sentido, consideramos que o currículo prescrito disposto no referencial curricular no qual se está trabalhando serve para nortear as ações do professor a planejar os objetivos de aprendizagem das aulas e é neste que o docente utiliza os saberes pedagógicos e da experiência constituídos até então. Deste modo, a Modelagem Matemática é um ambiente aberto que possibilita a construção de diversos saberes profissionais, pois a cada atividade não existe uma previsão do que pode acontecer, o que leva o professor procurar novas estratégias de ensino e refletir suas ações constantemente, ou seja, confronto de saberes já adquiridos com a prática docente.

Neste contexto, as crenças que o professor traz consigo, como por exemplo, a ideia de linearidade do currículo por conta da disposição dos conteúdos presentes nas prescrições advindas do currículo podem ser desconstruídas, pois na modelagem não existe uma linearidade em que os conteúdos emergem, estes surgem de acordo com a investigação da situação-problema em questão.

Deste modo, consideramos que não precisa existir uma hierarquia entre os conteúdos, pois qualquer assunto pode ser apresentado de uma maneira compreensível, conforme a necessidade, independentemente do nível de instrução de alunos. Contudo, o sucesso no desenvolvimento das aulas por meio da modelagem pode estar relacionado ao amadurecimento do professor frente a prática, pois o mediador precisa se familiarizar com o ambiente espontâneo que se constrói por meio da Modelagem Matemática, ou seja, tempos de familiarização do professor.

Tanto por meio da Modelagem Matemática quanto por qualquer ação em sala de aula, devemos considerar a obtenção de saberes docentes como um processo que se estende ao longo de toda a carreira docente e não deve ser considerado uma sequência de fatos, pois se complementam, constroem e reconstroem constantemente a partir do confronto com abordagens que desafiam a prática docente, no nosso caso a Modelagem Matemática. Neste sentido, o professor adquire saberes profissionais a partir do saber-ser (da teoria) e o saber-fazer (da prática), no qual o profissional mobiliza os saberes da experiência e pedagógicos.

Referências

ALMEIDA, L. M. W.; DIAS, M. R**. Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. Bolema**, ano 17, n. 22, p.19-35, 2004.

ALMEIDA, L. M. W.; BRITO, D. S. **Atividades de Modelagem Matemática: que sentido os alunos podem lhe atribuir?** Ciência e Educação, v.11, n. 3, p. 483- 498, 2005 a.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia.** São Paulo: Contexto, 2006.

BRUNER, J. S. **O processo da educação**. 3. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1973.

OVANDO NETO, E.; ROSA, C.C**. Modelagem Matemática e Currículo: algumas considerações.** In: X Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática. Maringá – PR, 2017.

OVANDO NETO, E. **Modelagem Matemática e Currículo: desafios e possibilidades.** 2019. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande-MS.

PIMENTA, Selma Garrido. **Formação de professores: identidade e saberes da docência.** In: PIMENTA, Selma Garrido. (Org). Saberes pedagógicos e atividade docente. São Paulo: Cortez Editora, 1999. (p. 15 a 34)

ROSA, C. C. **A Formação do Professor Reflexivo no Contexto da Modelagem Matemática.** Tese de doutorado (Programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência e a Matemática). Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2013.

ROSA, C. C. **Um estudo do fenômeno de congruência em conversões que emergem em atividades de modelagem matemática no ensino médio.** 2009. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática), Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

SACRISTÁN, J.G. **O Currículo**: uma reflexão sobre a prática. Porto Alegre: Artmed, 2000.

SACRISTÁN, J. G. **Saberes e Incertezas do Currículo**. Porto Alegre: Penso, 2013.

SILVA, M. A.; PIRES, C. M. C. Organização curricular da matemática no Ensino Médio: a recursão como critério. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 19, n. 2, p. 249- 266, jan. 2013.

TARDIF, M. Saberes profissionais dos professores e conhecimentos universitários. **Revista Brasileira de Educação** nº 13, Rio de Janeiro, jan./fev./mar./abr. 2000, p. 5-24.

O TEOREMA DE EULER PARA POLIEDROS CONVEXOS EM SALA DE AULA

EULER'S THEOREM FOR CONVEX POLYHEDRON IN THE CLASSROOM

José Haddad Alli [1]

Allan Edley Ramos de Andrade [2]

Resumo: Este artigo é referente a uma proposta do uso do origami e do software GeoGebra no curso de Geometria Espacial para alunos do 2º ano do ensino médio. A escolha deste software se deu por suas características didáticas e interativas, que tornam a compreensão dos conceitos trabalhados mais acessível e prazerosa aos alunos. O software foi utilizado na construção de Sólidos de Platão e sua planificação, animada ou não. O origami foi utilizado pela possibilidade de construção das faces e montagens dos poliedros pelos alunos ou professores.

Palavras-chave: Sólido Platônico; Origami; GeoGebra; Euler.

ABSTRACT: This article is a proposal for the use of origami and GeoGebra software in the course of spatial geometry for the 2nd year high school students. The choice of this software was given for its didactic and interactive features that make the understanding of the concepts worked more accessible and enjoyable for students. The software was used in the construction of Plato's Solids and their planning, animated or not. The origami was used by the possibility of construction of faces and assemblies of polyhedra by students or teachers.

Keywords: Platonic Solid; Origami; GeoGebra; Euler.

Introdução

A habilidade de visualizar é imprescindível para o crescimento do aluno no processo ensino-aprendizagem quando se trabalha com geometria espacial.

Os PCN afirmam que "O pensamento geométrico se desenvolve inicialmente pela visualização" (Brasil, 1997, p. 127), que é um processo complexo e pessoal, ou seja, o que é visto por uma pessoa é visto de outra forma por outra pessoa.

[1] Mestre em Matemática (PROFMAT) pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas. Professor na Escola Estadual Dr. Álvaro Guião e Colégio Stela Maris de Andradina. E-mail: josehaddadalli@uol.com.br
[2] Doutor em Matemática pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCar). Professor Campus de Três Lagoas da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (CPTL/UFMS). E-mail: allan.andrade@ufms.br

Kaleff (2003, p. 17) afirma que “É importante que (a visualização) ocupe seu lugar no ensino da Geometria (...) O material concreto permite ao aluno, efetivamente, ver o objeto de seu estudo".

A visualização de objetos tridimensionais não pode se prender a livros e lousas, por não serem os instrumentos adequados a isso. Dessa forma, o uso de materiais concretos é um interessante recurso para se fortalecer a aprendizagem de noções geométricas, a fim de que o aluno estabeleça conexões entre o campo das ideias e suas aplicações matemáticas, especificamente da Geometria, deixando de lado a noção de que são conceitos e procedimentos apartados do cotidiano e de outras áreas do conhecimento.

A criação de uma imagem mental de um objeto geométrico, como os poliedros, é facilitada pela construção de modelos concretos mediante o uso dos mais variados tipos de materiais e processos. O Origami, por exemplo, e uma técnica que poderá tornar prazerosa a aprendizagem. Tais modelos, associados à tecnologia, também devem ser utilizados, pois tornam possível a elaboração de modelos tridimensionais que podem ser modificados de várias formas simulando aspectos da realidade.

Neste artigo, foram apresentadas algumas ações que possibilitam a professores e alunos a utilização do material concreto de forma a tornar mais dinâmicas as aulas de Geometria, e também a construção de poliedros com um software.

Os alunos são levados a explorar os sólidos regulares de Platão construindo-os com as técnicas do origami e orientações precisas e detalhadas ou visualizando-os, já construídos.

Foram abordados aspectos históricos, tecnológicos e metodológicos com o intuito de encontrar maneiras de tornar a aula mais atrativa, participativa e agradável.

Os poliedros de Platão, o teorema de Euler e uma demonstração desse teorema foram apresentados. Também foi apresentado um estudo dirigido em sala de aula em que alunos do ensino médio de uma escola da rede pública responderam a questões sobre os poliedros antes do uso do software

GeoGebra e da técnica do origami para construção de sólidos. Depois de os alunos travarem conhecimento com o software e com a técnica do origami, eles foram novamente levados a responder às mesmas questões sobre os poliedros, e a duas questões adicionais. Os resultados foram analisados, tabulados e discutidos.

Ao final desse artigo, há algumas considerações e conclusões concernentes ao desenvolvimento do trabalho realizado com os alunos e informações como gráficos, tabelas e figuras.

Aspectos Históricos

Platão e Euler são os principais matemáticos que estão diretamente relacionados à temática dos resultados aqui apresentados, sendo assim, é apresentado a seguir um breve histórico sobre esta relação com base nas referências (Bicudo, 2009), (Boyer, 2018), (Connor, 2016), (Hilbert, 2003) e (Richeson, 2008).

Platão, nascido em 427 a.C., não foi propriamente matemático, mas um filósofo e incentivador do estudo da Matemática. Ele e os membros de sua academia estudaram, dentre outros assuntos, os poliedros regulares, chamados assim de Corpos Platônicos. No entanto, Proclo (410 d.C − 485 d.C), atribuem a descoberta destes sólidos a Pitágoras. Outras evidências, porém, indicam que Pitágoras conhecia apenas o Tetraedro, o Hexaedro e o Dodecaedro. A primeira demonstração escrita da existência de apenas cinco poliedros regulares é atribuída a Euclides.

Leonhard Euler foi o matemático suíço mais importante de todos os tempos, considerado um dos mais prolíficos matemáticos teve suas obras publicadas pela Academia de São Petersburgo até 50 anos após sua morte.

O teorema, ou relação, de Euler para certa classe de poliedros é assim denominado em homenagem a ele, que apresentou a relação numa carta ao matemático e amigo Christian Goldbach em 1750. Euler escreveu dois trabalhos sobre poliedros, em 1750 e 1751. No entanto, esses trabalhos só foram publicados em 1758. No primeiro deles, apresentou o teorema que estabelece relação entre as arestas (A), vértices (V) e faces (F) dos poliedros, segundo ele válido para vários casos especiais: $V - A + F = 2$

Não apresentou, porém, uma prova deste resultado. Já no segundo trabalho, ele apresenta uma prova, que se mostrou, depois, não rigorosa e com falhas. As falhas ocorreram por falta de definição precisa do que vem a ser um poliedro.

Fundamentação Teórica

- Definição 1. Um conjunto C, do plano ou do espaço, diz-se convexo quando o segmento de reta que liga quaisquer dois pontos de C está inteiramente contido em C.
- Definição 2. Um poliedro é uma reunião finita de polígonos planos, satisfazendo as propriedades listadas abaixo.

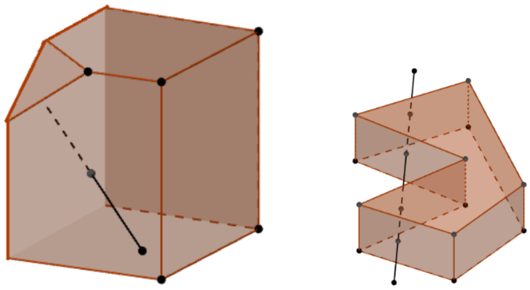
a) A interseção de duas faces quaisquer do poliedro, ou é um lado comum, ou é um vértice, ou é vazia.

b) Cada aresta do poliedro é lado de exatamente duas faces desse poliedro.

Os polígonos planos são chamados as faces do poliedro, os lados desses polígonos chamam-se arestas do poliedro e os vértices dos polígonos são também chamados vértices do poliedro.

Diz-se que um poliedro é convexo quando ele limita um sólido convexo no sentido da definição acima. Diz-se que um poliedro é regular quando ele for convexo, com todas as faces sendo polígonos regulares congruentes e o número de faces concorrentes em cada vértice sendo sempre o mesmo.

Figura 1: Poliedro convexo e não convexo



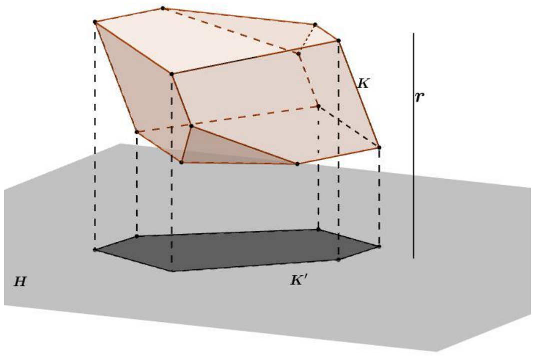
(a) Convexo (b) não Convexo

Fonte: Elaborada pelos autores.

O principal resultado abordado em sala de aula foi o Teorema de Euler que relaciona os números de vértices, arestas e faces de um poliedro convexo. Essa relação é dada pela expressão $V - A + F = 2$. Há várias demonstrações do Teorema de Euler. Neste artigo foi apresentada uma demonstração baseada em (Zoroastro Azambuja Filho, 1983).

Começou-se tomando um poliedro convexo P e a seguir foi escolhida uma reta r que não fosse paralela a nenhuma das faces do poliedro convexo P. Essa é uma condição imprescindível. Foi também utilizado um plano H, que não intersecta P e é perpendicular à reta r. Observe a figura 2 logo a seguir.

Figura 2: Poliedro Convexo



Fonte: Elaborada pelos autores.

O plano *H* foi chamado *plano horizontal* e as retas paralelas a r, logo perpendiculares a *H*, foram chamadas retas verticais. *H* divide o espaço em dois semiespaços. O semiespaço que contém o poliedro foi chamado de semiespaço superior, pois seus pontos estão acima de H.

Supondo o Sol brilhando a pino sobre o semiespaço superior, seus raios serão retas verticais. A cada ponto x do semiespaço superior corresponde um ponto *x* ∈ *H*, chamado sombra de *x*, obtido como interseção do plano *H* com a reta vertical que passa por *x*.

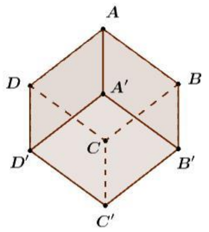
A sombra de qualquer conjunto *K*, contido no semiplano superior é, por definição, o conjunto $K' \subset H$, formado pelas sombras dos pontos de K.

Tal observação pode ser assim enunciada: cada ponto da sombra de P_0 do poliedro é sombra de um ou de dois pontos de P. Ora, a sombra P' do poliedro P é um polígono convexo do plano horizontal, cujo contorno γ' é sombra de uma poligonal γ fechada, formada por arestas de P. Cada ponto de γ' é sombra de um único ponto de P (pertencente a γ).

A poligonal γ é chamada o contorno aparente do poliedro P. Cada ponto interior de P' (isto é, não pertencente a γ) é sombra de 2 pontos de P. Dados dois pontos de P que têm a mesma sombra, é denominado ao mais alto (mais distante de H) ponto iluminado e ao mais baixo de ponto sombrio. Assim, o poliedro P se decompõe em 3 partes disjuntas: o conjunto dos pontos iluminados, o conjunto dos pontos sombrios e o contorno aparente de γ .

Por exemplo, seja P o hexaedro que tem os quadrados ABCD e A'B'C'D' como faces opostas. Pendurando-o pelo vértice A (de modo que A e C' estejam na mesma vertical), as faces AA'B'B; AA'D'D e ABCD ficarão iluminadas e as outras 3 sombrias. O contorno aparente será a poligonal A'B'BCDD'A'.

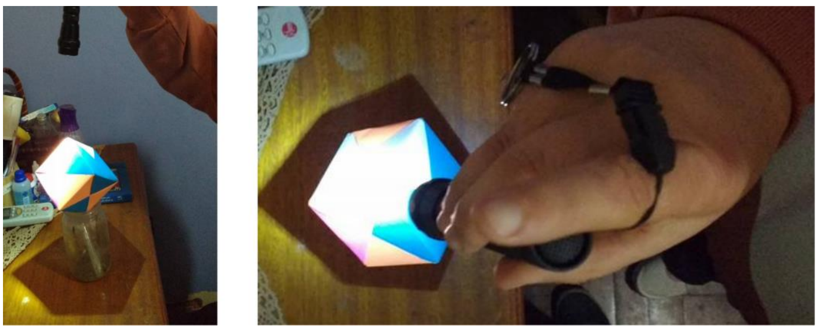
Figura 3: Hexaedro P



Fonte: Elaborada pelos autores.

Para uma melhor compreensão do que vem a ser o contorno aparente do poliedro, considere as imagens abaixo:

Figura 4: Contorno Aparente



Fonte: Elaborada pelos autores.

O hexaedro foi posicionado de forma que os vértices ligados por uma diagonal do hexaedro, ou seja, diagonalmente opostos, ficassem sobre a mesma perpendicular ao plano onde está sendo projetada a sombra.

Nas mesmas fotos podem ser observadas as três faces do hexaedro que são iluminadas pela lanterna. No entanto, o que se pretendia era uma projeção da sombra obtida por raios perpendiculares ao plano. E não raios divergentes como os obtidos. As fotos servem, porém, para ilustrar faces iluminadas e contorno aparente.

Seja P_1 o conjunto dos pontos iluminados de P mais o contorno aparente γ. Cada ponto de P' é a sombra de um único ponto de P_1.

Noutras palavras, a regra que associa a cada ponto x de P_1 sua sombra x' é uma correspondência biunívoca entre P_1 e P'.

Usou-se a notação P_1 para representar o polígono P' decomposto como reunião de polígonos justapostos, que são sombras das faces contidas em P_1, isto é, das faces iluminadas.

Evidentemente, poder-se-ia também considerar o conjunto P_2, formado pelos pontos sombrios de P mais o contorno aparente γ. A regra que associa a cada ponto x $\in P_2$ sua sombra x' $\in P'$ também é uma correspondência biunívoca entre P_2 e P'.

Escrever-se-á P'_2 para indicar a sombra de P_2 expressa como reunião das sombras das faces sombrias de P, isto é, contidas em P_2.

Se se decompuser cada face de P em triângulos, traçando diagonais em cada uma delas, alteram-se os números F, A e V individualmente, mas a expressão

$$F - A + V,$$

permanece com o mesmo valor.

Com efeito, cada vez que se traça uma diagonal numa face, os números F e A aumentam, cada um, de uma unidade e o número V não muda, assim

$$(F + 1) - (A + 1) + V = F - A + V$$

Portanto, a fim de se demonstrar o teorema de Euler, não há perda de generalidade em supor que todas as faces do poliedro P são triângulos. Note também que, como toda face tem 3 arestas e cada aresta pertence a 2 faces, segue-se que $3F = 2A$.

Todo o indispensável posto, inicia-se a demonstração, que consiste em calcular de duas maneiras distintas a soma S dos ângulos internos dos triângulos que compõem o poliedro P. Em primeiro lugar, há F triângulos e a soma dos ângulos internos de cada um deles é igual a π radianos.

Portanto,

$$S = \pi.F. \qquad [1]$$

Como $F = 3F - 2F = 2A - 2F$ segue de [1] que

$$F = 2A - 2F.$$

Assim, pode-se escrever:

$$S = \pi.F = \pi(2A - 2F) = 2\pi.A - 2\pi F. \qquad [2]$$

Por outro lado, tem-se $S = S_1 + S_2$, onde S_1 é a soma dos ângulos internos dos triângulos iluminados e S_2 é a soma dos ângulos internos dos triângulos sombrios. A fim de calcular S_1, partiu-se da observação de que a soma dos ângulos internos de um triângulo T é igual à soma dos ângulos internos de sua sombra T'. Daí resultou que S_1 é igual à soma dos ângulos internos dos triângulos nos quais está decomposto o polígono convexo P'_1, sombra de P_1. Para calcular esta última soma, somam-se os ângulos vértice a vértice, em vez de somá-lo triângulo por triângulo, como acima.

Sejam V_1 o número de vértices iluminados, V_2 o número de vértices sombrios e V_0 o número de vértices do contorno aparente. Então,

$$V = V_0 + V_1 + V_2.$$

Note-se ainda que V_0 também é o número de vértices (e de lados) da poligonal γ , contorno do polígono convexo P'.

Em P_1 tem-se V_1 vértices interiores (sombras dos vértices iluminados) mais V_0 vértices do contorno γ. A soma dos ângulos que têm como vértices um dado vértice interior é igual a 2π radianos. A soma de todos os ângulos que têm vértice sobre o contorno é igual a $\pi(V_0 - 2)$, de acordo com a expressão bem conhecida da soma dos ângulos internos de um polígono com V_0 lados. Segue-se que $S_1 = 2\pi.V_1 + \pi(V_0 - 2)$. Por raciocínio inteiramente análogo, obter-se-ia:

$$S_2 = 2\pi.V_2 + \pi(V_0 - 2).$$

Somando estas duas igualdades, vem:

$$S = S_1 + S_2 = 2\pi(V_0 + V_1 + V_2) - 4\pi = 2\pi V - 4\pi. \qquad [3]$$

Comparando com as igualdades em [2] e [3] obtém-se $2\pi.A - 2\pi.F = 2\pi V - 4\pi$, resultando em $F - A + V = 2$.

Fundamentação Metodológica

Para o estudo realizado neste trabalho foi usado o software GeoGebra, programa gratuito criado por Markus Hohenwarter, em 2001, com o qual é possível construir todos os poliedros de Platão e suas planificações, como também acompanhar o passo a passo da construção de cada um dos poliedros e visualizar individualmente cada um de seus elementos.

A planificação de um poliedro é um arranjo de polígonos com lados comuns que retornam à forma espacial que lhe deu origem ao serem dobrados.

É aconselhável o uso de atividades em que o aluno possa cortar, montar, modelar e exibir os poliedros. As propriedades matemáticas, os aspectos históricos e os modelos virtuais interativos de cada um dos sólidos platônicos também devem ser explorados. Outro recurso que foi usado em sala de aula foi o uso da técnica do Origami. A motivação do uso do origami para a construção de sólidos se deu ao fato de que com esse recurso detalhes como faces, arestas e vértices são manuseados e construídos por professores e alunos.

Os poliedros de Platão foram analisados e suas características e sua história foram exploradas, tendo como subsídios os materiais concretos, haja vista que o trabalho com esse material pode contribuir com o processo ensino aprendizagem ao fornecer meios para uma melhor compreensão da Geometria. Considerando que novas concepções de ensino e aprendizagem são oferecidas pelos recursos tecnológicos, fez-se uso do computador para construir e identificar figuras geométricas, observar características dos poliedros, destacando-se arestas, faces e vértices a fim de despertar o interesse do aluno e suscitar questionamentos que provavelmente não seriam feitos se a abordagem fosse apenas teórica.

Nesse período de convivência com os alunos, chamou a atenção a dificuldade que eles demonstravam em visualizar as figuras em três dimensões. Percebeu-se, então, que o ensino da Matemática precisava ser inovador para que os alunos pudessem se sentir mais familiarizados e percebessem um sentido na aprendizagem da Geometria Espacial.

Um aspecto que chamou a atenção foi que, durante o levantamento prévio de seus conhecimentos, os alunos confundiam polígono e poliedro. Alguns também não se lembravam das definições de arestas, faces e vértices.

A pesquisa foi feita sobre o conteúdo de Geometria Espacial, especificamente sobre a Relação de Euler, com 20 alunos do segundo ano do Ensino Médio, no primeiro semestre de 2016, em uma escola estadual em Andradina SP. A escola possui 1450 alunos matriculados, divididos em 760 alunos do Ensino Fundamental e 690 alunos do Ensino Médio. Conta com um corpo docente de 74 professores, um diretor, 3 vice-diretores, duas professoras coordenadoras (uma para Ensino Fundamental e uma para o Ensino Médio), uma supervisora e demais funcionários administrativos.

A escola tem cinquenta anos de existência, conta com 13 salas de aula, uma sala de multimídia, uma sala de informática com 20 computadores e uma biblioteca. O período da manhã apresenta 13 salas de Ensino Médio, o período da tarde 10 salas de Ensino Fundamental e 3 salas de Ensino Médio. No período noturno há 4 salas de Ensino Médio regular, seis salas de Ensino Médio supletivo (EJA) e 3 salas de Ensino Fundamental Supletivo (EJA).

A escola possui cinco salas de segundas séries do Ensino Médio, com um total de cento e setenta e cinco alunos. Deste universo foram selecionados, de apenas uma das salas, os vinte alunos que participaram desta pesquisa. O critério utilizado para esta escolha foi o comprometimento da classe, e mais especificamente, desses alunos, uma vez que participariam com seriedade

ISSN 2525-7056

possibilitando uma análise fidedigna dos resultados apresentados.

Para o desenvolvimento do estudo dirigido em sala de aula, optou-se por uma abordagem qualitativa com os alunos selecionados. Foi conduzido pelo professor da turma, que assumiu os trabalhos de intervenção no desenvolvimento do origami e do software GeoGebra.

Foram promovidos quatro encontros para o desenvolvimento desta pesquisa sendo realizados no contra turno, um encontro por semana, com duração de aproximadamente uma hora cada encontro.

No primeiro encontro foi realizado um pré-teste para o levantamento dos conhecimentos prévios sobre o assunto, com apresentação de um questionário (Figura 5), o qual foi elaborado pelo Prof. Dr. Fernando Pereira de Souza, docente do curso de Licenciatura em Matemática da UFMS Campus Três Lagoas. Pretendeu-se com isso, uma avaliação da capacidade de visualização dos sólidos nas suas três dimensões.

Na semana seguinte, posterior à aplicação do pré-teste, foram apresentados os Sólidos de Platão com os recursos do origami para um grupo de dez alunos.

Dando continuidade à pesquisa, na semana posterior, foram apresentados os Sólidos de Platão com os recursos do software GeoGebra para o restante do grupo, ou seja, os demais dez alunos.

Para a conclusão do trabalho, reuniu-se o grupo de vinte alunos para que respondessem a um questionário final com a finalidade de avaliar as contribuições dos dois recursos utilizados (origami e GeoGebra).

Resultados Preliminares e Construções com Origami

Os vinte alunos do Ensino Médio selecionados realizaram um pré-teste(Figura 5) para a identificação de seus conhecimentos sobre os Sólidos de Platão.

ISSN 2525-7056

Figura 5: Identificação dos sólidos de Platão

Questionário sobre Geometria Espacial

Nome: ____

1) O que é um Sólido de Platão?
2) Escreva o nome dos seguintes Sólidos

--------------- -------------- -------------- --------------- ---------------

3) Preencha a seguinte tabela:

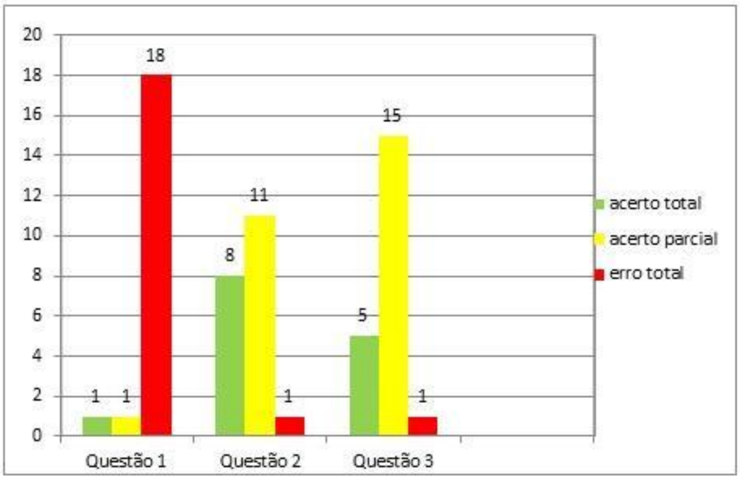
Nome do Sólido	Número de Faces	Número de Vértices	Número de Arestas
Tetraedro			
Hexaedro			
Octaedro			
Dodecaedro			
Icosaedro			

Fonte: Fernando Pereira de Souza (Prof. Dr do curso de Matemática - UFMS/Campus Três Lagoas).

Alguns deles não se lembravam de quais eram os sólidos em questão e confundiram polígono com poliedro. Alegaram que esse conteúdo tinha sido visto no Ensino Fundamental e que não se lembravam mais. Outros disseram nunca ter visto poliedro e polígonos. A maioria dos alunos não soube definir Sólidos de Platão e nenhum deles conhecia a relação de Euler. Alguns achavam que os sólidos eram figuras planas. A figura 6 dada abaixo é apresentado a tabulação com os resultados obtidos.

ISSN 2525-7056

FIGURA 6 – Acertos do Questionário



Fonte: Elaborada pelos autores

Após a realização do questionário foi feito a etapa de construções dos poliedros de Platão utilizando o origami. Nessa etapa, dez alunos tiveram contato com os Sólidos de Platão utilizando os recursos do origami.

Foram mostrados aos alunos os módulos quadrangulares, triangulares e pentagonais já montados, e o módulo de encaixe utilizado para os módulos triangulares. Os módulos quadrangulares e pentagonais não necessitam do módulo de encaixe, uma vez que apresentam duas abas para encaixe.

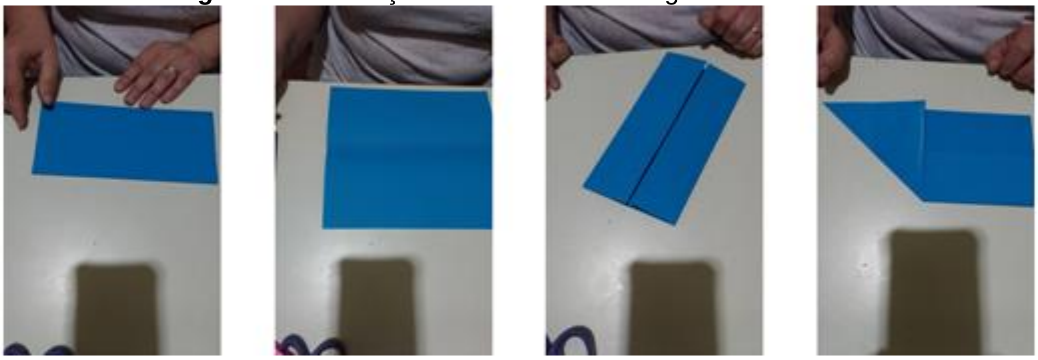
Durante a apresentação dos sólidos falou-se das faces, arestas e vértices e respondeu-se a perguntas eventualmente feitas pelos alunos, tais como: “as faces são todas iguais?", “as faces são polígonos ou poliedros?", “que são polígonos?", “que são poliedros?", “por que as faces têm que ser todas iguais?", “duas faces seguidas só têm uma aresta em comum?", “quantas arestas saem de cada vértice?".

A seguir é apresentado as construções de cada sólido de platão começando pelo Hexaedro.

Foram passadas aos alunos as seguintes etapas visuais seguidas de orientações verbais, como mostrado abaixo. Depois de construído o hexaedro, trabalhou-se planificação com os alunos, pedindo que eles desenhem todas as possíveis planificações do hexaedro.

ISSN 2525-7056

Figura 7: Construção do módulo e montagem do Hexaedro

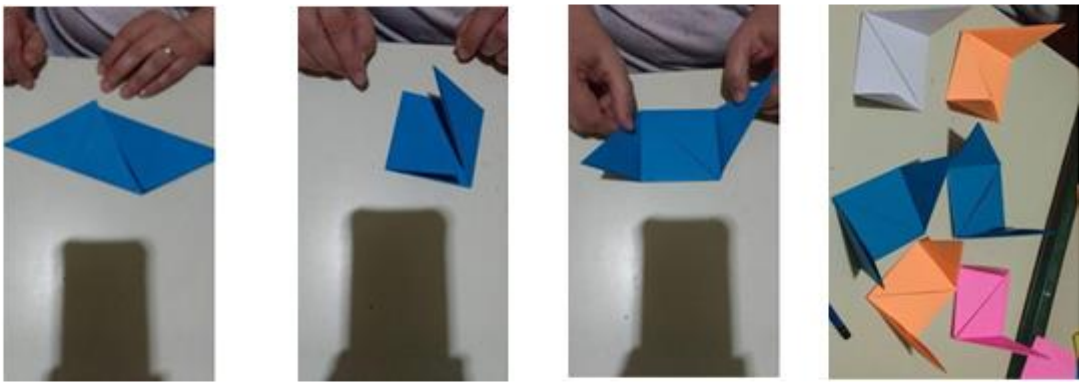


(a) Uma folha quadrada e dobrada ao meio.

(b) Abra-se a folha.

(c) Dobra-se novamente, coincidindo as duas dobras com o vinco inicial.

(d) Dobra-se o canto superior para baixo.



(e) Dobra-se o canto inferior esquerdo para cima. Encaixa-se cada parte dobrada para dentro.

(f) Vincam-se abas de encaixe

(g) Está pronto um dos seis módulos necessários

(h) Os seis módulos para a montagem do hexaedro

Fonte: Elaborada pelos autores.

Após a confecção dos seis módulos, as abas foram encaixadas nos bolsos de modo que não ficasse nenhuma aba sem encaixar e nenhum bolso sem abas. Assim, ficou pronto o hexaedro regular.

Figura 8: Hexaedro finalizado

Fonte: Elaborada pelos autores.

Abaixo segue a construção do módulo triangular para confecção do tetraedro, octaedro e icosaedro:

Figura 9: Montagem do módulo triangular

(a) Dobre uma folha quadrada ao meio.

(b) Dobre novamente, de forma que os vincos quem perpendiculares.

(c) Leve o canto superior direito até um dos vincos

(d) Leve o canto superior esquerdo até o vinco, sobrepassando o vinco anterior.

(e) Dobre o triângulo formado ao meio e para trás.

(f) Vinque bem as dobras.

(g) Prenda a pequena aba, virando- a para o outro lado

(h) Embuta uma das abas num dos bolsos da peça

(i) Encaixe a outra aba no outro bolso

(j) Vinque bem. Está pronto o módulo triangular

Fonte: Elaborada pelos autores.

A peça montada é um triângulo equilátero que representa o módulo dos poliedros de faces triangulares. Observe que o triângulo obtido contém um bolso em cada um dos três lados, onde serão colocados os módulos de encaixe, que irão unir as faces do poliedro. Abaixo é feito a construção do módulo de encaixe. Para a confecção do módulo de encaixe, é necessário utilizar um papel com 1/4 da área do papel utilizado no módulo triangular.

ISSN 2525-7056

Figura 10: Módulos de Encaixe

(a) Corte o papel original em quatro quadrados iguais

(b) Dobre um dos pedaços obtidos ao meio fazendo vinco (mediatriz)

(c) Repita para encontrar a outra mediatriz

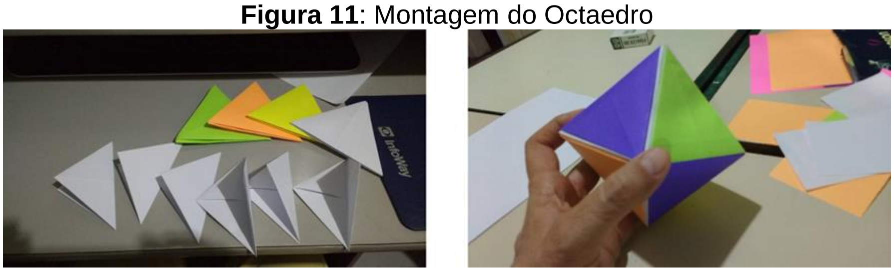
(d) Em seguida, os vértices se encontram no ponto de intersecção obtido

(e) Vire e dobre na diagonal. Está pronto o módulo de encaixe.

Fonte: Elaborada pelos autores.

A seguir é feito a montagem do tetraedro e do octaedro. Para montar o tetraedro são necessários quatro módulos triangulares e seis módulos de encaixe. Encaixe os módulos triangulares introduzindo o módulo de encaixe nos bolsos de encaixe. No caso do Octaedro os módulos de encaixe são arestas do poliedro, assim para a montagem do octaedro serão necessários 12 módulos de conexão e 8 módulos triangulares.

Figura 11: Montagem do Octaedro



(a) Módulos para a montar o Tetraedro (b) Octaedro

Fonte: Elaborada pelos autores.

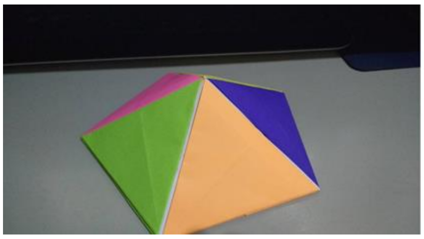
Para montagem do icosaedro que possui 20 faces e 30 arestas, serão necessários 20 módulos triangulares e 30 módulos de conexão.

ISSN 2525-7056

Figura 12: Montagem do Icosaedro

(a) 30 módulos de conexão e 20 módulos triangulares

(b) Encaixe da parte superior do icosaedro



(c) Parte superior do icosaedro já montada

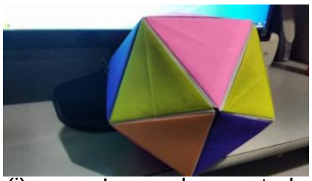
(d) Início da parte lateral do icosaedro

(e) Parte lateral do icosaedro

(f) Parte lateral do icosaedro

(g) Parte superior e lateral já prontas

(h) Parte inferior do icosaedro sendo montada



(i) Icosaedro montado

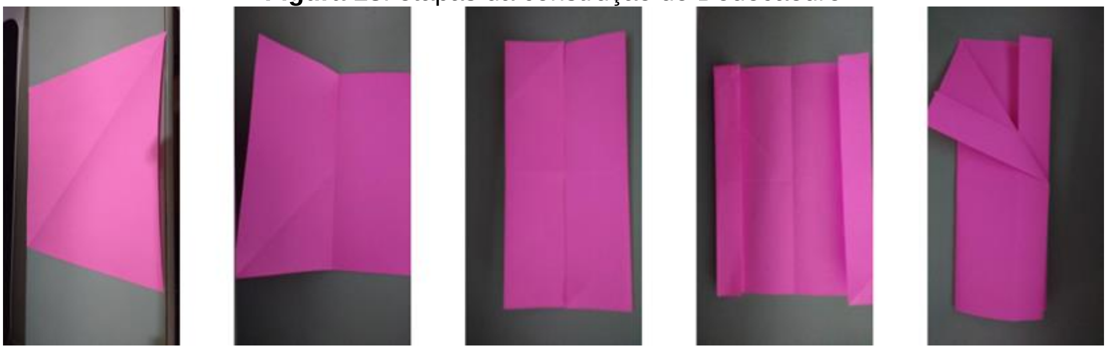
Fonte: Elaborada pelos autores.

A seguir é feito a construção do módulo e montagem do dodecaedro.

Construção do módulo em forma de pentágono: Não são necessários módulos de encaixe, uma vez que os módulos pentagonais já dispõem de duas abas para encaixe.

ISSN 2525-7056

Figura 13: etapas da construção do Dodecaedro



(a) Vinca-se pela diagonal uma folha quadrada

(b) Dobra-se a folha pela mediatriz de um dos lados

(c) Dobra-se a folha novamente, levando os lados paralelos ao vinco até esse vinco

(d) Desdobra-se e leva-se novamente cada lado ao novo vinco

(e) Fecha-se ao meio. Abre-se cada um dos quatro cantos como mostrado

(f) Os quatro cantos dobrados

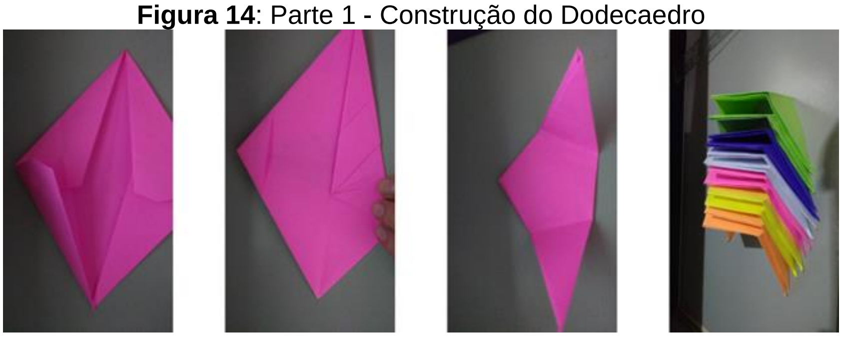
(g) Abre-se toda a folha

(h) Dobram-se os quatro cantos para dentro, seguindo os vincos, como na figura

(i) Dobram-se novamente os cantos para dentro, seguindo os vincos, como na figura

Fonte: Elaborada pelos autores.

Figura 14: Parte 1 - Construção do Dodecaedro



(a) Encaixam-se as abas para dentro umas das outras

(b) Dobram-se novamente duas das abas laterais

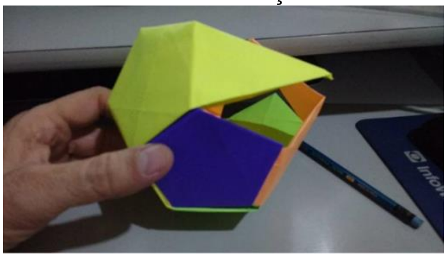
(c) Vinca-se bem. Está pronto um dos 12 módulos pentagonais

(d) Os 12 módulos pentagonais do Dodocaedro

Fonte: Elaborada pelos autores.

ISSN 2525-7056

Figura 15: Parte 2- Construção do Dodecaedro



(e) Vinca-se bem. Está pronto um dos 12 módulos pentagonais

Fonte: Elaborada pelos autores

Figura 16: Montagem completa do Dodecaedro

(f) Os 12 módulos pentagonais do Dodecaedro

Fonte: Elaborada pelos autores.

É importante salientar que a construção dos sólidos não ocorreu em sala de aula. Foram apresentadas orientações verbais e visuais para que os alunos tivessem contato com as etapas percorridas até a confecção final dos sólidos.

No decorrer das apresentações dos sólidos geométricos, discutiram-se as relações matemáticas encontradas e foram respondidos constantes questionamentos efetuados pelos alunos. Ao final, os alunos manusearam os sólidos, identificando seus principais elementos e características.

Ao trabalhar com Origami modular, tem-se mais opções: identificação dos sólidos e seus elementos (arestas, faces, vértices e base); composição e decomposição; planificação; fórmula de Euler dentre outras opções.

Figura 17: Alunos manuseando os sólidos

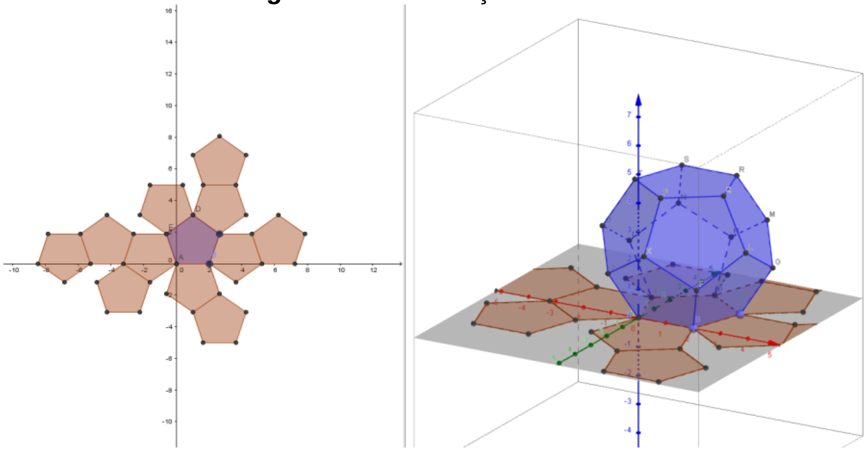
Fonte: Elaborada pelos autores.

Apresentação dos Sólidos de Platão utilizando os Recursos do Geogebra

Nessa etapa, dez alunos tiveram contato com os Sólidos de Platão utilizando os recursos do GeoGebra. Cada um dos sólidos foi construído perante o grupo.

Durante as construções falou-se das faces, arestas e vértices e foram respondidas perguntas eventualmente feitas pelos alunos, muito parecidas com as questões formuladas pelo primeiro grupo. Abaixo segue planificação do dodecaedro elaborada com o uso do Geogebra nesta etapa

Figura 18: Planificação Dodecaedro



Fonte: Elaborada pelos autores.

Figura 19: Alunos respondendo o questionário sobre os sólidos de Platão

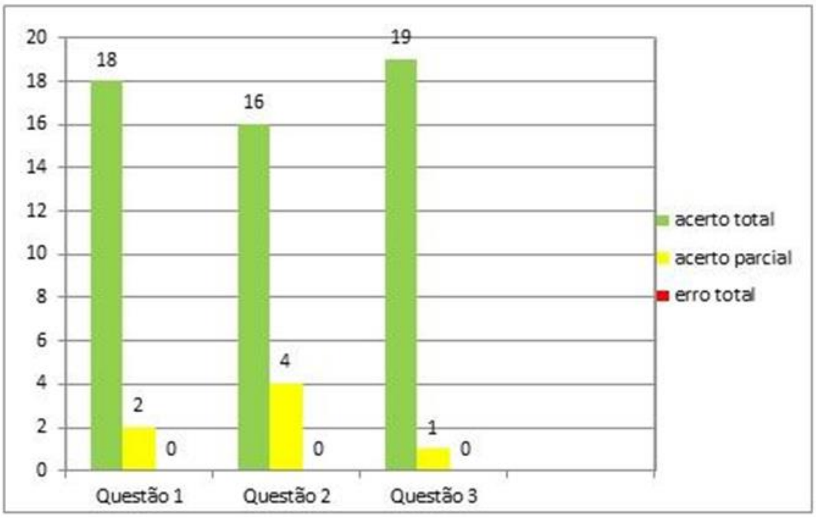
Fonte: Elaborada pelos autores.

Teste Final do Estudo Dirigido em Sala de Aula

Nessa etapa final, os vinte alunos foram reunidos para responderem às mesmas questões apresentadas na primeira etapa. Foi acrescentada uma coluna em que se solicita ao aluno a verificação da validade da relação de

Euler e uma quarta questão em que o aluno discorre sobre a validade ou não dos recursos utilizados no estudo dirigido em sala de aula.

Figura 20: Respostas dos alunos diante das questões



Fonte: Elaborado pelos autores.

Observa-se que os dados do gráfico mostram que a primeira questão foi respondida corretamente por dezoito dos vinte alunos; a segunda questão foi respondida corretamente por dezesseis alunos e teve acerto parcial por parte de quatro alunos; a terceira questão foi respondida corretamente por dezenove alunos e teve acerto parcial por parte de um aluno.

Considerações Finais

A intenção do trabalho apresentado nesse artigo foi abordar um assunto que fosse relevante para os alunos do Ensino Médio da Rede Pública e, de alguma forma, contribuir com a melhora de sua aprendizagem.

Os alunos em geral são constantemente avaliados, tanto com a aplicação de avaliações internas, quanto com a aplicação de avaliações externas como o ENEM e SARESP, sendo que para que possam alcançar bom desempenho, as aulas devem ser bem preparadas e o professor aberto à utilização de recursos tecnológicos. Esse trabalho pretendeu, também, verificar a eficácia, ou não, da utilização desses recursos.

E como a intenção primeira deste trabalho é colaborar com a aprendizagem dos alunos e a verificação da validade da utilização de recursos tecnológicos, optou-se pela inclusão de um estudo dirigido em sala de aula. Com esse estudo foi possível analisar o desempenho dos alunos antes e depois da utilização dos recursos tecnológicos. A técnica do origami e o software GeoGebra foram os recursos utilizados.

O estudo dirigido em sala de aula foi planejado de forma que pudesse apresentar com clareza o desempenho dos alunos antes e depois da utilização dos recursos tecnológicos.

Pode-se afirmar com convicção, com base nos resultados apresentados durante o estudo dirigido, que esse trabalho cumpriu sua finalidade. Tal resultado deve-se ao sério preparo das aulas. Depende, também, e não menos, da capacidade de se despertar o real interesse e a atenção dos alunos. E isso foi obtido com a utilização dos recursos tecnológicos, o origami e o GeoGebra. Pelo desempenho dos alunos nas várias fases do estudo dirigido pode-se afirmar que são recursos válidos e eficientes.

Referências

BICUDO, IRINEU. **Tradução Os Elementos**, Ed. Unesp, São Paulo, 2009.

BOYER, CARL B.; MERZBACH, UTA C. **História da Matemática**, Ed. Edgard Blucher Ltda, Tradução da 3º edição americana, 2018.

BORTOLOSSI, HUMBERTO JOSE. **Os Sólidos Platônicos, Conteúdos Digitais para o ensino e aprendizagem de Matemática e Estatística**, Universidade Federal Fluminense-UFF. Disponível <http://www.cdme.im-uff.mat.br/platonicos/platonicos-html/solidos-platonicos-br.html >. Acesso em 12 de fevereiro de 2016.

BAIRRAL, M. A. **Alguns contributos teóricos para análise da aprendizagem matemática em ambientes virtuais Paradigma**, v. 20, n. 2, p. 197-214, dez. 2005.

CONNOR, JOHN J. O.; ROBERTSON, EDMUND F. **MacTutor History of Mathematics archive**. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/index.html>. Acesso em 6 de fevereiro de 2016.

ELMES, JAMES. **A general and bibliographical dictionary of the fine arts, Geometry**, Wentworth Press, 2016.

FILHO, ZOROASTRO AZAMBUJA. **Demonstração do Teorema de Euler**

para Poliedros convexos, Revista do Professor de Matemática-RPM 3, 1983.

FIORENTINI D.; MIORIM, M. A**. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática**. Boletim da SBEM. SBM: São Paulo, ano 4, n. 7, 1990.

HILBERT, DAVID. **Fundamentos da Geometria**, Editora: Gradiva 1º edição, 2003.

KALLEF, ANA MARIA M.R. **Vendo e entendendo poliedros: do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças e outros materiais concretos**. Niterói- EdUFF,2003.

LIMA, ELON LAGES. **A matemática do Ensino Médio**. Vol. 2, Editora: SBM, 6º edição 2006.

LIMA, ELON LAGES. **Ainda Sobre o Teorema de Euler para Poliedro Convexos**, Revista do Professor de Matemática, RPM-5.

RICHESON, DAVID S. **Euler's gem: The polyhedron formula and the birth of topology**, Princeton Univerisity Press, 2008.

GEOMETRIA FRACTAL: ABORDANDO CONCEITOS A PARTIR DE CONSTRUÇÕES COM SOFTWARE GEOGEBRA

FRACTAL GEOMETRY: ADDRESSING CONCEPTS FROM GEOGEBRA SOFTWARE CONSTRUCTIONS

Vinicius Lopes de Aguilar [1]
Renato César da Silva [2]
Edivaldo Romanini [3]

RESUMO: Diferentemente da Geometria Euclidiana, em que muitos conceitos não são facilmente relacionados com o cotidiano, a Geometria Fractal está presente em nosso dia a dia. Ela é capaz de modelar a irregularidade da natureza, o que a faz ser abordada de uma forma que desperta naturalmente a curiosidade do aluno. O presente trabalho é um estudo sobre Geometria Fractal abordado a partir de construções no software GeoGebra. A partir de suas construções podem ser relembrados conceitos matemáticos, assim como, aplicar novos conceitos. Neste trabalho foram realizadas construções clássicas relacionadas aos fractais, a saber, Árvore Simétrica de Pitágoras, Triângulo de Sierpinski e a Ilha de Koch (Floco de Neve). Foram relembrados conceitos de geometria plana, o conceito de sequencias e progressões geométricas, adicionalmente foram feitos estudos relacionados à área, perímetro e contagem de segmentos.

PALAVRAS-CHAVE: Sólidos de Platão. Origami. GeoGebra. Euler.

ABSTRACT: Unlike Euclidean Geometry, where many concepts are not easily related to everyday life, Fractal Geometry is present in our daily lives. She is able to model the irregularity of nature, which makes her be approached in a way that naturally arouses the curiosity of the student. The present work is a study about Fractal Geometry approached from constructions in GeoGebra software. From their constructions can be remembered mathematical concepts, as well as apply new concepts. In this work, classical constructions related to the fractals were made, namely Pythagoras Symmetrical Tree, Sierpinski Triangle and Koch Island (Snowflake). Concepts of flat geometry, the concept of sequences and geometric progressions were recalled, additionally studies were made related to the area, perimeter and segment count.

KEYWORDS: Fractal Geometry. Contextualization. Euclidean Geometry.

Introdução

A Geometria Fractal, também conhecida como Geometria da Natureza, auxilia a descrição de diversos fenômenos da natureza. Sua atuação se

[1] Bolsista do Grupo PET Conexões de Saberes Matemática, Campus de Três Lagoas da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (CPTL/UFMS). E-mail: vinilooppes97@gmail.com
[2] Doutor em Engenharia Mecânica pela Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo (USP). Professor do Campus de Três Lagoas da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (CPTL/UFMS/CPTL). E-mail: renato.silva@ufms.br
[3] Doutor em Engenharia Mecânica pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Professor do Campus de Três Lagoas da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (CPTL/UFMS). E-mail: edivaldo.romanini@ufms.br

destaca nas áreas em que as geometrias tradicionais não podem ser utilizadas. Por exemplo, na representação de: nuvens, brócolis, couve-flor, mariscos, montanhas, turbulências, o desenvolvimento das árvores, a forma de algumas raízes, a linha da costa marítima, crescimento de populações, vasos sanguíneos e em qualquer estrutura cujas ramificações sejam variações de uma mesma forma básica.

Com o avanço tecnológico a Geometria Fractal passou a se destacar tornando-se muito importante para certos segmentos da comunidade científica e comercial, pois através dela é possível fazer estudos precisos em diversas ciências e campos do conhecimento. Exemplos disso estão na mineralogia, com a medição da densidade de minerais e evolução das rochas, na biologia para análise de corais, fungos, como também na utilização da equação não linear $x_{n+1} = kx_n(1 - x_n)$, que descreve o comportamento populacional de vários tipos de animais, na fabricação de antenas com funcionamento otimizado, na indústria com a detecção automática de falhas em produtos têxteis, na economia para estudos de fenômenos como a oscilação da bolsa de valores e o índice de preços e na medicina com estudo de células cancerígenas e realização dos métodos de diagnóstico quantitativos de patologias. Ainda na medicina, alguns estudos revelaram que um coração saudável bate a um ritmo fractal, já um batimento cardíaco quase periódico é um sintoma de insuficiência cardíaca.

Além de todos os fatores motivacionais expostos anteriormente, trabalhar a Geometria Fractal no ensino fundamental e médio valoriza a interdisciplinaridade do processo de ensino-aprendizagem, o protagonismo juvenil e uso de novas tecnologias, por exemplo, o uso do Software Geogebra. Os jovens inseridos nesta era digital necessitam de uma pedagogia inovadora e eficaz para levá-los a compreender os conceitos matemáticos, assim como, relacioná-los à realidade de seu dia a dia, proporcionando um aprendizado significativo e contextualizado.

A Geometria Fractal pode ser aplicada em qualquer nível de ensino, desde o Ensino Fundamental até o Ensino Superior. Existem diversos conteúdos que podem ser abordados, tais como: contagem, perímetros, áreas, volumes, relações entre figuras geométricas com seus padrões geométricos, conceitos de medidas, sequencias e limites, potências, indução matemática, álgebra, exponenciais, logaritmos, análise de algoritmos, geometria espacial, números complexos, trigonometria e funções. Desta forma, a Geometria Fractal oferece uma oportunidade para o professor trabalhar conhecimentos de geometria, álgebra linear, topologia, teoria dos números, cálculo e modelagem (VIEIRA – 2014).

Sendo assim, o objetivo do presente trabalho é ampliar a formação de um acadêmico de Licenciatura em Matemática; haja visto que Geometria Fractal não é estudado em nenhuma disciplina do curso de graduação de Licenciatura em Matemática do CPTL/UFMS, e apresentar uma proposta para educadores de contextualização de conceitos abordados em sala de aula, a partir da Geometria Fractal com o objetivo de fornecer um aprendizado significativo para alunos do Ensino Básico.

Geometria Fractal

Os fractais são figuras cuja forma é extremamente irregular ou fragmentada e que têm essencialmente a mesma estrutura em todas as escalas. São caracterizados pelas seguintes propriedades: autossimilaridade, complexidade infinita, irregularidades ou fragmentações e dimensão não inteira. Existem alguns fractais que são considerados clássicos, como o Conjunto de Cantor, Curva de Peano, Conjunto de Julia, Conjunto de Mandelbrot, Curva de Koch e Ilha de Koch (Floco de Neve), Triângulo de Sierpinski.

A Teoria Fractal foi criada na década de 70 por Benoit Mandelbrot matemático nascido em Varsóvia (Polônia) em 1924. Mandelbrot buscava modelar as irregularidades e fragmentações encontradas na natureza. A palavra Fractal tem origem do latim fractus (fração, quebrado).

A Geometria Fractal pode ser encontrada em nosso dia-a-dia, nos elementos da natureza, construções civis e corpo humano. As figuras 1, 2 e 3 apresentam alguns exemplos que ilustram essas evidências.

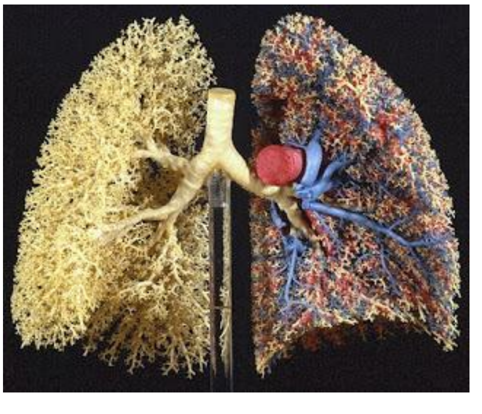
Figura 1. Girassol

Fonte: https://paisagismodigital.com/noticias/?id=plantas-matematicas:-os-fractais-na-natureza-|-paisagismo-digital&in=439, acesso em 06 agosto 2019)

Figura 2. Edifício Fractal em Singapura

Fonte: (http://ultraperiferias2.blogspot.com/2015/11/the-interlace-aldeia-vertical-em.html, acessado em 06 agosto 2019)

Figura 3. Superfície pulmonar humana



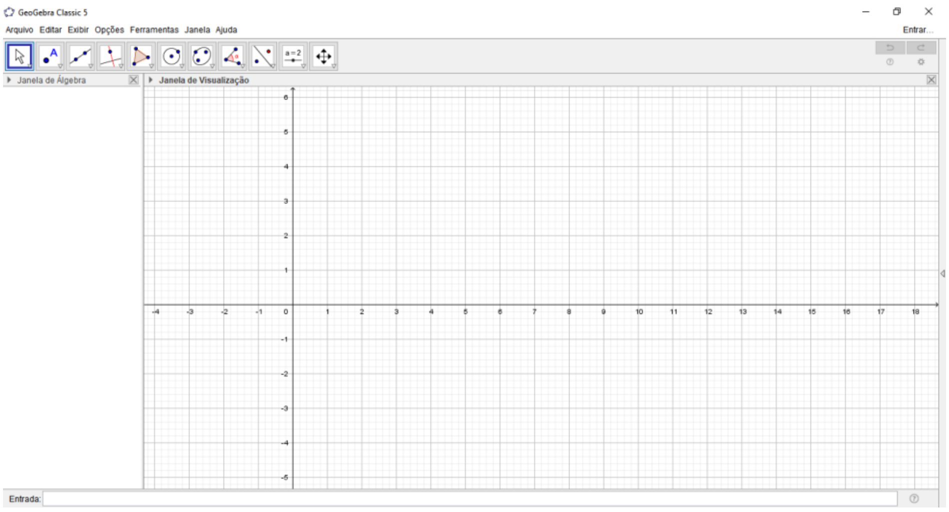
Fonte: (http://grupossv.blogspot.com/2012/06/video-fractales.html, acessado em 06 agosto 2019)

Software GeoGebra

Com o intuito de explorar a contextualização de temas relacionados com a Matemática e a utilização novas tecnologias serão realizadas as construções de fractais utilizando o software GeoGebra.

O Software GeoGebra é um software matemático que usa conceitos de Geometria e Álgebra. Consiste em um software gratuito, que pode ser acessado e instalado gratuitamente a partir do sítio: https://www.geogebra.org/?lang=pt. Sua interface é:

Figura 4. Tela inicial Geogebra



Fonte: (https://www.geogebra.org/?lang=pt)

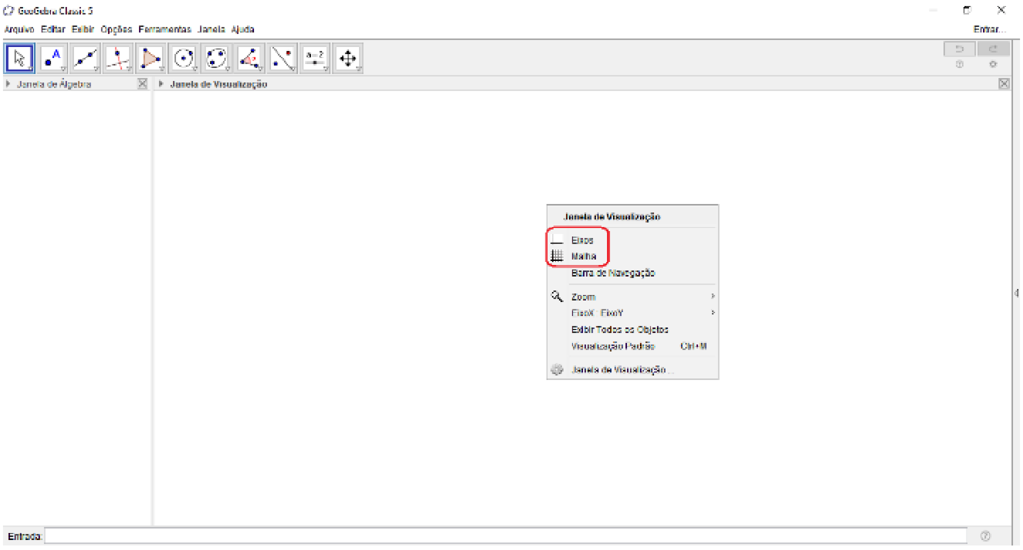
Na figura 4, destacam-se a Janela de Álgebra e a Janela de Visualização. O menu de edição apresenta as abas: Arquivo, Editar, Opções, Ferramentas, Janelas e Ajuda. No menu de Ferramentas Rápidas temos botões: Mover, Ponto, Reta, Reta Perpendicular, Polígono, Círculos Dados Centro e um de Seus Pontos, Elipse, Ângulo, Reflexão em Relação a uma Reta, Controle Deslizante e Mover Janela de Visualização.

A seguir, serão apresentadas algumas construções de fractais utilizando o software GeoGebra.

Árvore Pitagórica Simétrica

Será utilizada a janela do GeoGebra sem os Eixos e sem a Malha quadriculada. Para isso basta clicar com o botão direito do mouse sobre a parte geométrica e clicar em ocultar Malha e Eixo, como ilustra a Figura 5.

Figura 5. Ocultar malha e eixo

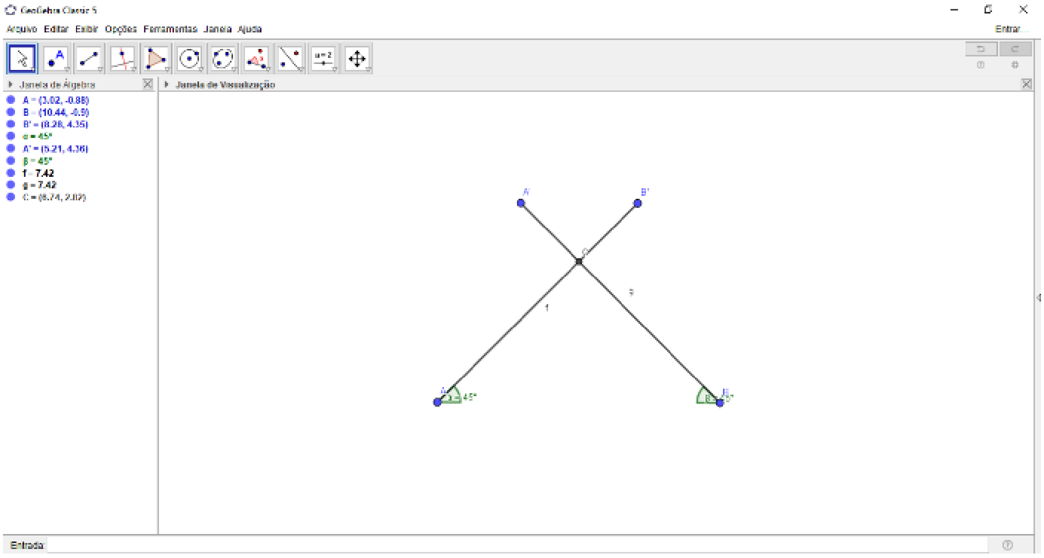


Fonte: (autor)

Inicialmente serão marcados dois pontos (A e B), utilizando a ferramenta Ponto, após isso, utilizando a ferramenta Ângulo com Amplitude Fixa criam-se ângulos encontrando A' e B' de tal forma que $A\hat{B}A'$ e $B\hat{A}B'$ sejam de $45º$. A seguir, constroem-se os segmentos AB' e BA', sendo marcado o ponto C em sua interseção (Figura 6).

ISSN 2525-7056

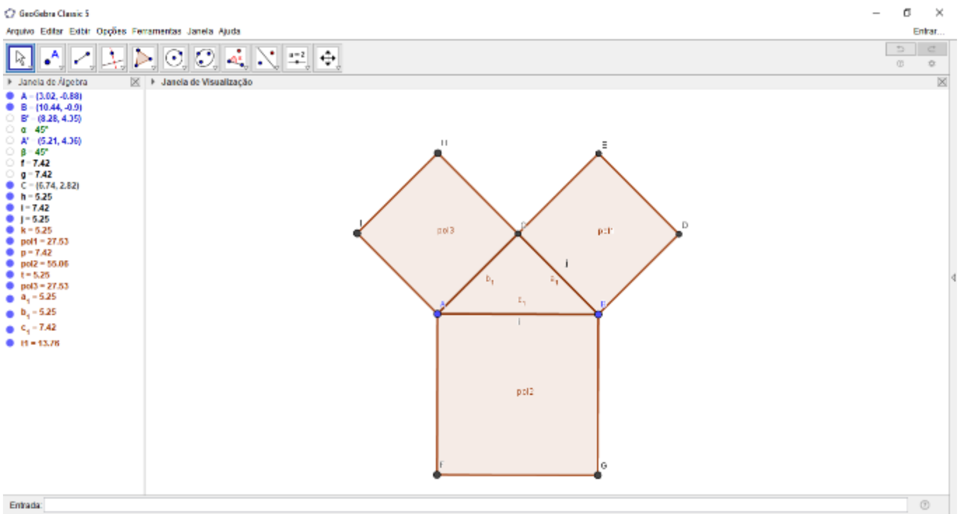
Figura 6. Construção Árvore Pitagórica Simétrica



Fonte: (autor)

O próximo passo consiste em ocultar todos os objetos menos os pontos A, B e C. Com estes pontos será construído um triângulo retângulo isósceles, utilizando a ferramenta Polígonos. Na hipotenusa e nos catetos do triângulo construir quadrados (Figura 7).

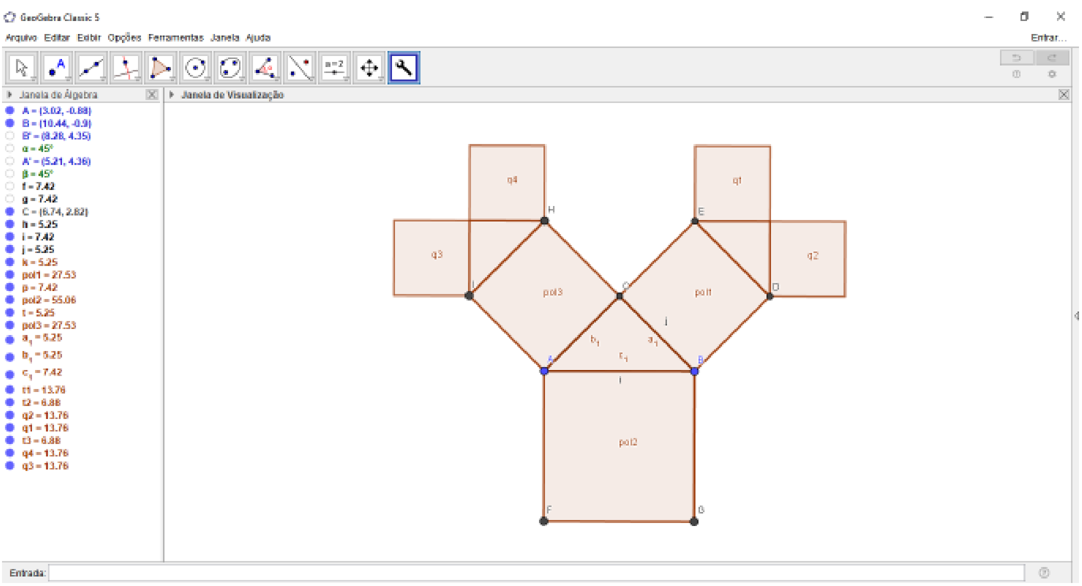
Figura 7. Primeira Iteração Árvore Pitagórica Simétrica



Fonte: (autor)

Neste ponto encerra-se a primeira iteração do processo de construção. Para obter um esboço do fractal, o processo será repetido diversas vezes. Com o intuito de otimizar o processo, na guia ferramenta, deverá ser escolhido o comando Criar uma Nova Ferramenta. Será aberta uma janela em que na guia Objetos Finais deve-se selecionar os quadrados menores e o triângulo, e na guia Objetos Iniciais selecionar os pontos A e B, e por fim nomear a ferramenta. Selecionando a ferramenta que criamos na guia de Ferramentas Rápidas e clicando nos pontos E e D em sentindo horário obtemos uma parte do fractal, igual a parte que havíamos criado (repetir o processo nos pontos I e H), está será sua segunda iteração (Figura 8).

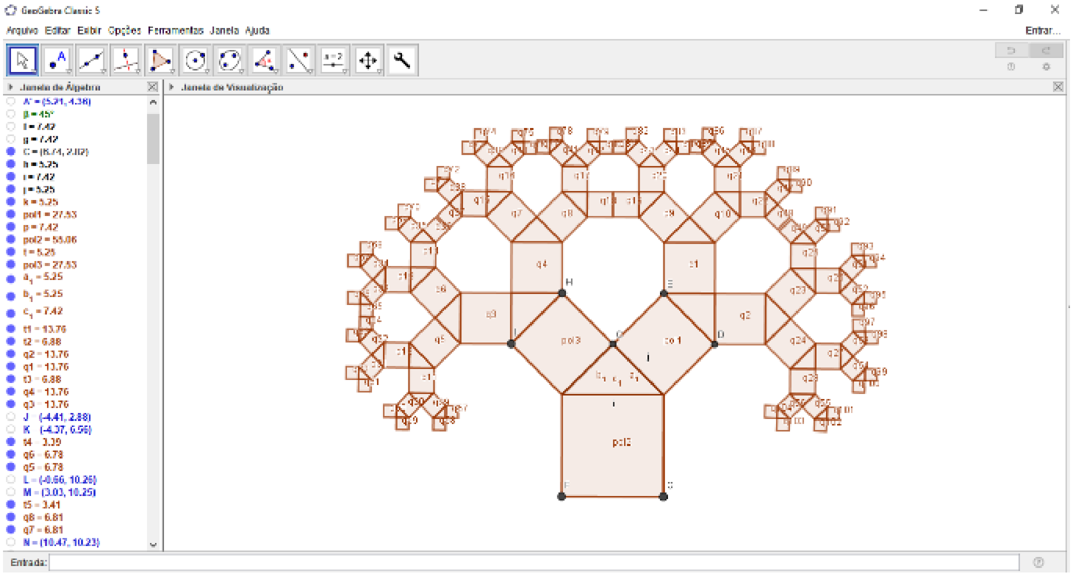
Figura 8. Segunda iteração fractal Árvore Pitagórica Simétrica



Fonte: (autor)

Repetindo o processo diversas vezes, o fractal toma a forma ilustrada na Figura 9.

Figura 9. Árvore Pitagórica Simétrica

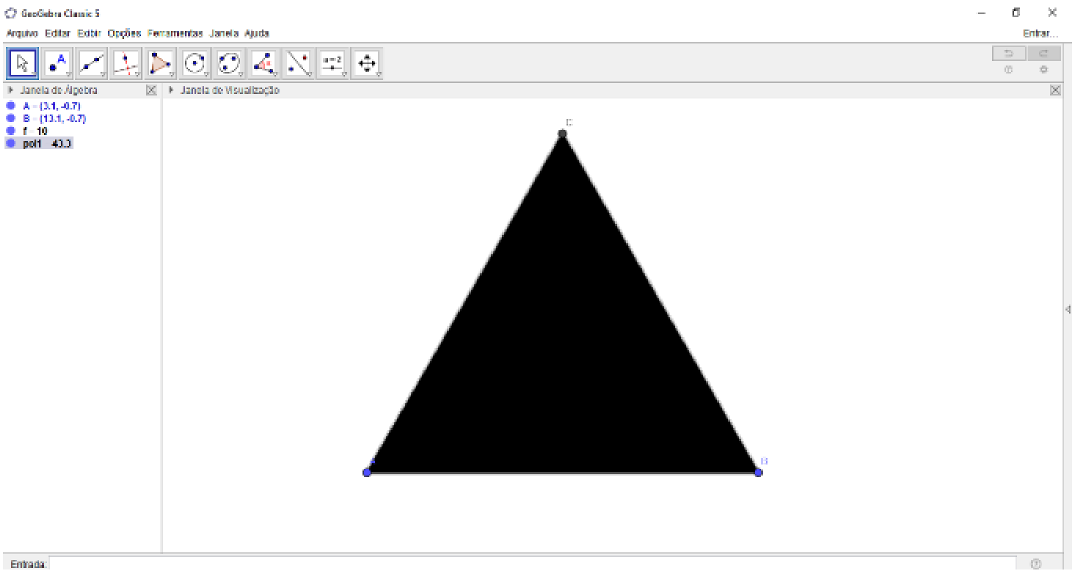


Fonte: (autor)

Triângulo de Sierpinski

Construir um triângulo equilátero utilizando a ferramenta Polígono Regular, alterar sua cor e a transparência clicando no botão direto do mouse, Propriedades e Cor (Figura 10).

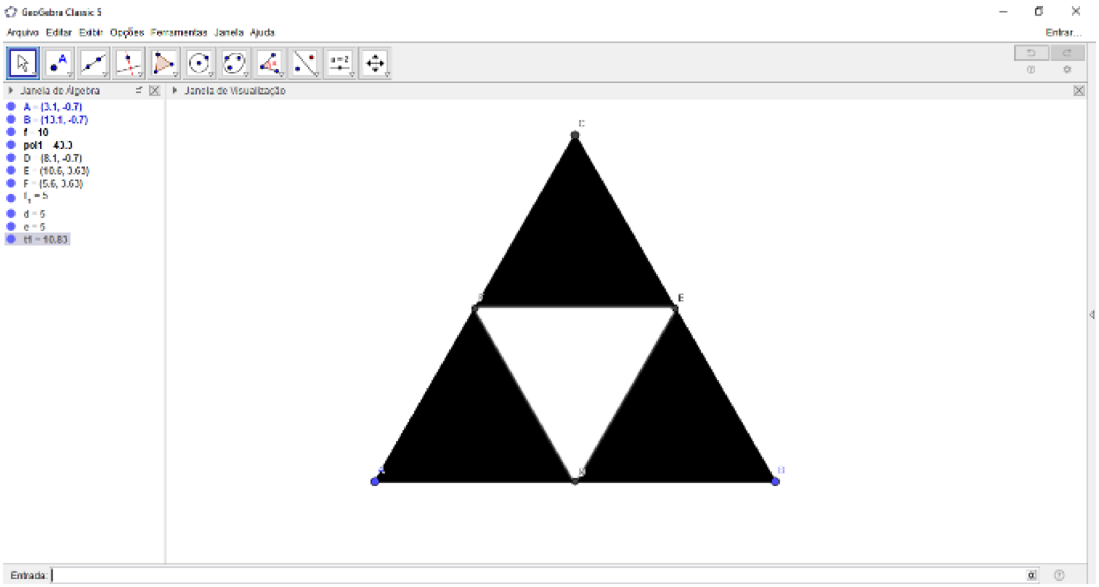
Figura 10. Construção Triângulo de Sierpinski



Fonte: (autor)

Utilizando a ferramenta Ponto Médio, encontrar o ponto médio de cada lado do triângulo. Construir um triângulo utilizando a ferramenta Polígonos com os pontos encontrados, alterar sua Transparência e Cor (Figura 11).

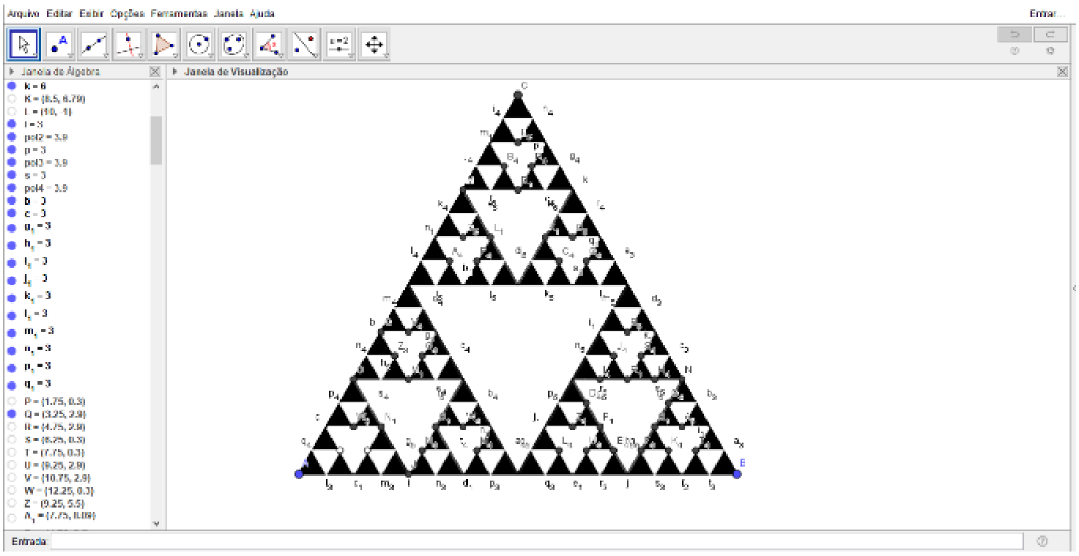
Figura 11. Primeira Iteração Triângulo de Sierpinski.



Fonte: (autor)

Repetindo o processo diversas vezes, o fractal toma a forma ilustrada na Figura 12.

Figura 12. Triângulo de Sierpinski.



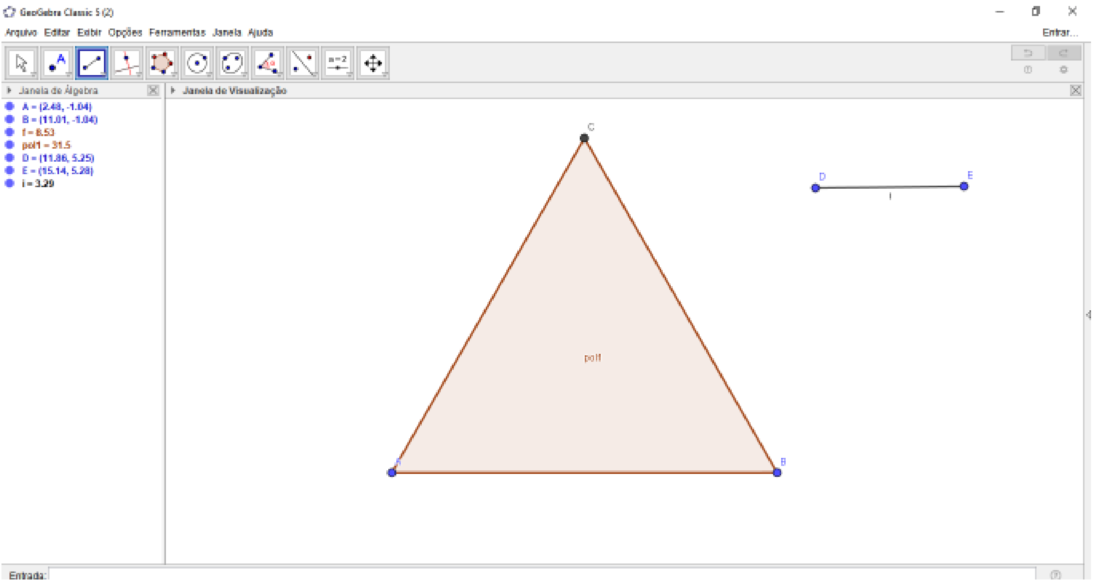
ISSN 2525-7056

Fonte: (autor)

Ilha de Koch (Floco de Neve)

Construir um triângulo equilátero utilizando a ferramenta Polígono Regular. No canto da tela construir um segmento DE (Figura 13).

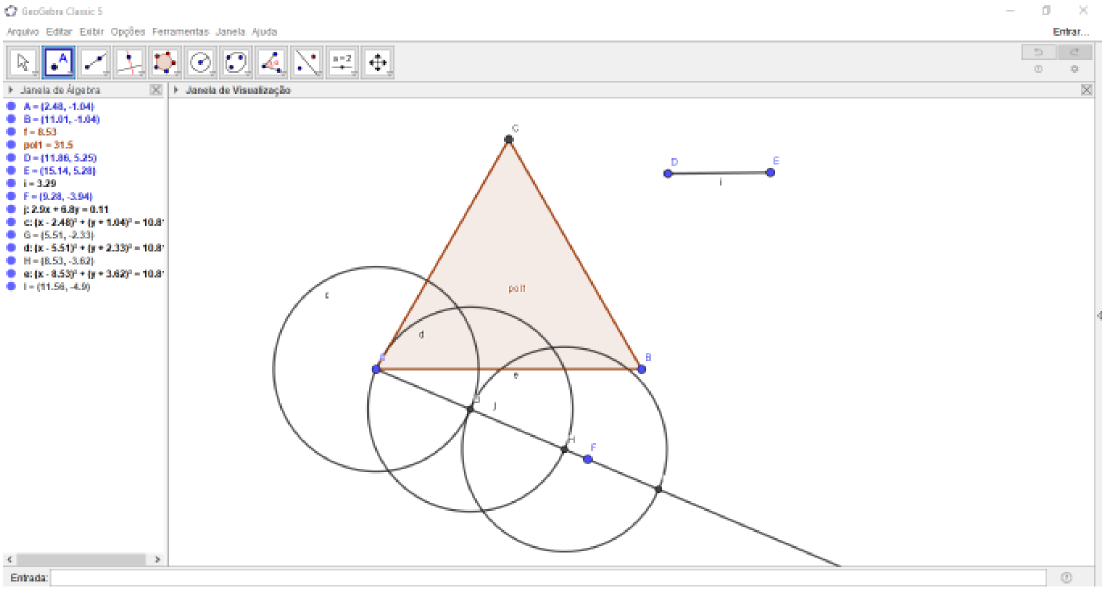
Figura 13. Construção Floco de Neve (1)



Fonte: (autor)

Traçar uma semirreta qualquer com origem no ponto A, marcar na semirreta três segmentos de mesmo tamanho do segmento DE. Para isso, traçar uma circunferência de centro A e raio i utilizando a ferramenta Círculo Dado Centro e Raio, marcar a interseção da semirreta e círculo com o ponto G. Construir da mesma forma uma circunferência de centro G e raio i, e marcar o ponto H, e uma circunferência de centro H e raio i marcando o ponto I (Figura 14).

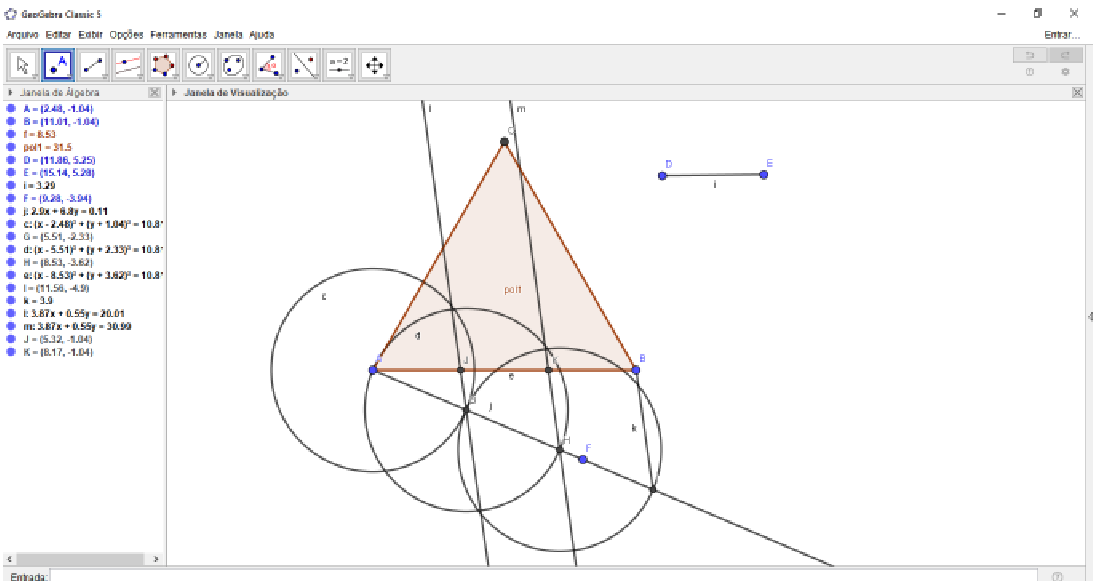
Figura 14. Construção Floco de Neve (2)



Fonte: (autor)

Construir o segmento BI, e traçar retas paralelas a ele passando pelos pontos G e H. Marcar os pontos J e K (Figura 15).

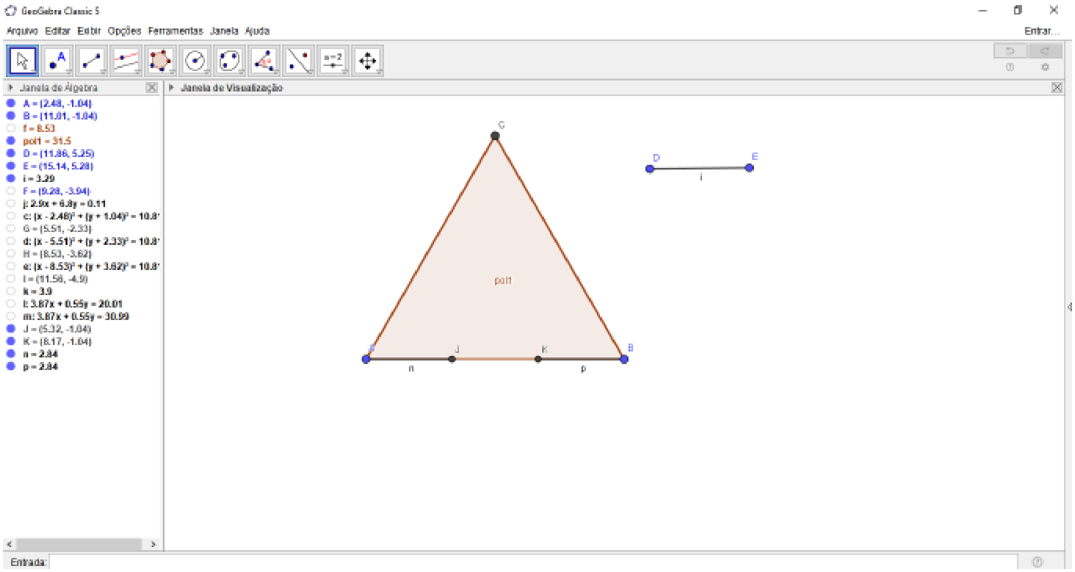
Figura 15. Construção Floco de Neve (3)



Fonte: (autor)

Ocultar todas as construções, menos o triângulo, o segmento DE e os pontos J e K. Construir os segmentos AJ e KB, ocultar o segmento AB (Figura 16).

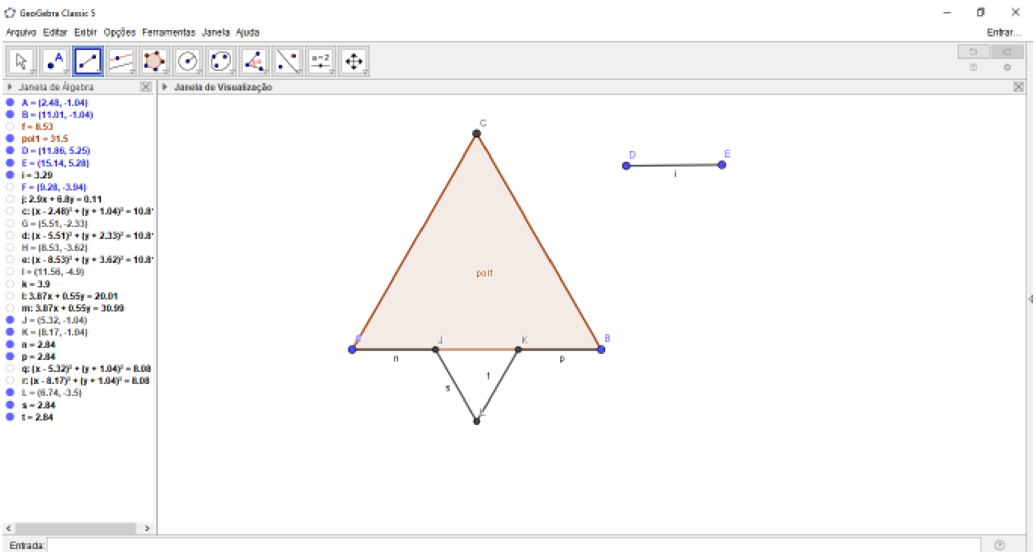
Figura 16. Construção Floco de Neve (4)



Fonte: (autor)

Construir na parte central um triângulo equilátero. Para tal, construir duas circunferências centradas em J e K de raio AJ e marcar o ponto L na interseção. Construir os segmentos JL e KL. Ocultar as circunferências (Figura 17).

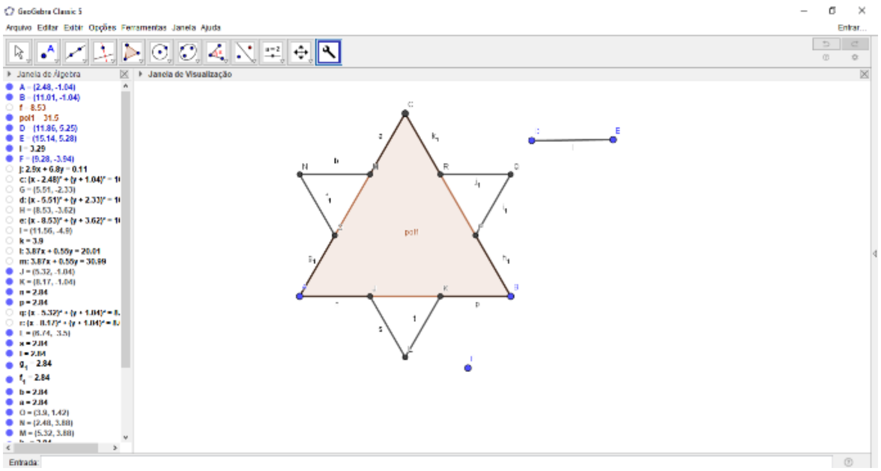
Figura 17. Construção Floco de Neve (4).



Fonte: (autor)

Repetindo o processo nos segmentos AC e BC será obtida a primeira iteração do fractal. Utilizar a ferramenta Criar Nova Ferramenta para facilitar o processo. Na janela que será aberta em Objetos Finais selecionar os pontos J, L e K, e os segmentos n, s, t e p. Em Objetos Iniciais selecionar os pontos A, B, D, E e F. Nomear o item. Para seguir a construção, selecionar a nova ferramenta criada, os pontos A, C, D, E e F e ocultar o segmento AC. Após os pontos C, B, D, E e F. Assim será obtido o final da primeira iteração como ilustra a Figura 18.

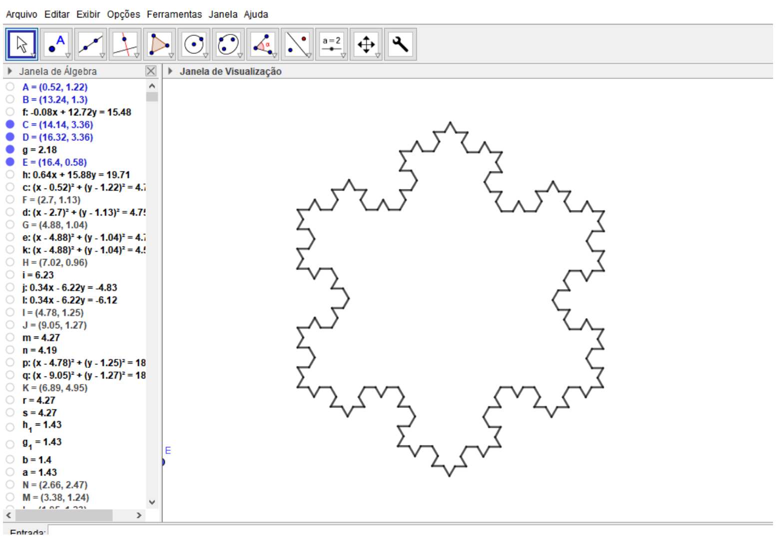
Figura 18. Primeira iteração Floco de Neve.



Fonte: (autor)

Repetindo o processo diversas vezes nos novos segmentos obtemos a Ilha de Koch, como ilustra a Figura 19.

Figura 19. Floco de Neve.



Fonte: (autor)

Aplicações

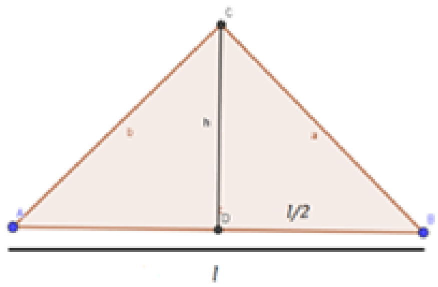
Durante as construções anteriores foram abordados diversos conceitos matemáticos, principalmente conceitos de geometria plana. A seguir serão abordados conceitos como: áreas, progressões, teorema de Pitágoras, perímetro e contagem de segmentos.

Áreas dos Triângulos da Árvore Pitagórica

Para determinar a área de cada um dos triângulos será denominado o lado do quadrado inicial de l.

Como a fórmula da área de um triangulo é dada por: $A = \frac{base\ \times altura}{2}$, e sendo a base l, logo resta saber sua altura.

Figura 20. Triângulo retângulo isósceles.

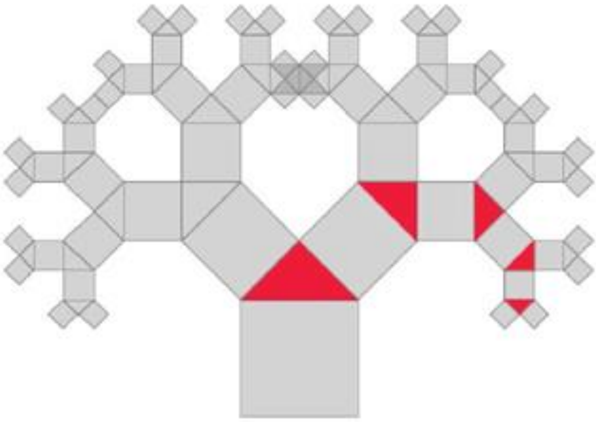


Fonte: (autor)

Por ser um triângulo retângulo isósceles, a altura será exatamente a mesma medida da metade da hipotenusa, pois dividirá em ângulos de $45°$ e os ângulos da base também medem $45°$, ou seja, $h = \frac{l}{2}$. Como ilustra a Figura 20.

Assim, a área do primeiro triângulo será, $A_1 = \frac{l \times \frac{l}{2}}{2} = \frac{1}{4} l^2$.

Figura 21. Árvore Pitagórica Simétrica.



Fonte: (Reis, 2014)

Utilizando o mesmo raciocínio será obtida uma Progressão Geométrica (PG) $(\frac{1}{4}l^2, \frac{1}{8}l^2, \frac{1}{16}l^2, \ldots)$ de razão $\frac{1}{2}$, em que a área do triângulo na n-ésima iteração será $T_n = l^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

Área dos Quadrados da Árvore Pitagórica

Para calcular a área dos quadrados, o processo deve começar pelo quadrado construído a partir do cateto do primeiro triângulo.

Na Figura 20, nos dos triângulos menores, os catetos medem $\frac{l}{2}$, logo segue pelo Teorema de Pitágoras:

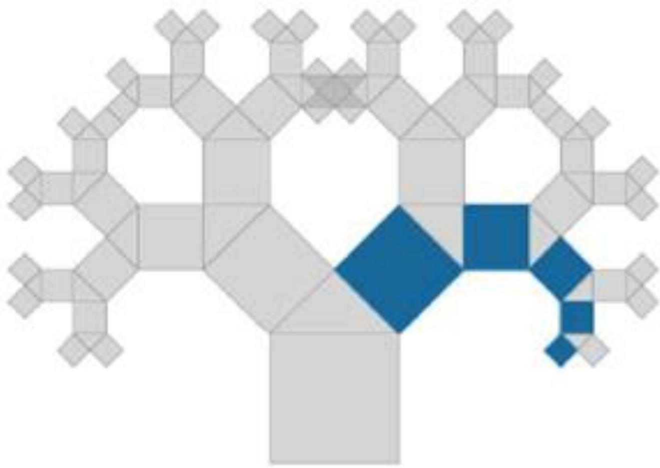
$$\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = H^2 \iff H = \frac{l\sqrt{2}}{2}$$

O lado do quadrado mede $H = \frac{l\sqrt{2}}{2}$, aplicando a fórmula da área de um quadrado, segue:

$$A_1 = lado \times lado = \frac{l\sqrt{2}}{2} \times \frac{l\sqrt{2}}{2} = \frac{l^2}{2}$$

ISSN 2525-7056

Figura 22. Árvore Pitagórica Simétrica.



Fonte: (Reis, 2014)

Utilizando o mesmo raciocínio, será obtida uma Progressão Geométrica (PG), $(\frac{1}{2}l^2, \frac{1}{4}l^2, \frac{1}{8}l^2, \frac{1}{16}l^2 \ldots)$ cuja razão é $\frac{1}{2}$ e a área de um quadrado na n-ésima iteração será $Q_n = l^2\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Explorando o Triângulo de Sierpinski

Seja l a medida do lado do triângulo da etapa inicial da construção do fractal (Figura 10). A tabela a seguir ilustra a área e o perímetro de cada iteração do triângulo.

Tabela 1. Área e Perímetro Triângulo de Sierpinski

Iteração	Área (A) de cada triângulo	Perímetro (P) de cada triângulo
0	A_0	$P_0 = 3l$
1	$A_1 = A_0.\frac{3}{4}$	$P_1 = 3.\frac{3l}{2} = P_0.\frac{3}{2}$
2	$A_2 = A_1.\frac{3}{4} = \left(A_0.\frac{3}{4}\right).\frac{3}{4} = A_0\left(\frac{3}{4}\right)^2$	$P_2 = 9.\frac{3l}{4} = P_0.\left(\frac{3}{2}\right)^2$
3	$A_3 = A_2.\frac{3}{4} = \left(A_0.\left(\frac{3}{4}\right)^2\right).\frac{3}{4} = A_0\left(\frac{3}{4}\right)^3$	$P_3 = 27.\frac{3l}{8} = P_0.\left(\frac{3}{2}\right)^3$

4	$A_4 = A_3.\frac{3}{4} = \left(A_0.\left(\frac{3}{4}\right)^3\right).\frac{3}{4} = A_0\left(\frac{3}{4}\right)^4$	$P_4 = 81.\frac{3l}{16} = P_0.\left(\frac{3}{2}\right)^4$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$A_n = A_0.\left(\frac{3}{4}\right)^n$	$P_n = P_0.\left(\frac{3}{2}\right)^n$

Fonte: (Possetti, 2019)

Como $\frac{3}{4} < 1$, segue que a área do fractal vai diminuindo 75% conforme aumenta a iteração, logo o processo tende a zero. Já, o perímetro tende ao infinito, pois $\frac{3}{2} > 1$ e o perímetro aumenta em cada iteração.

Contagem de Segmentos na Ilha de Koch (Floco de Neve)

Observando a Figura 13, fica evidenciado que o fractal é construído a partir de um triângulo equilátero, em que todos os segmentos são divididos em 3 partes congruentes; sendo substituído o segmento intermediário por um triângulo equilátero sem a base. Assim, os três segmentos são transformados em quatro segmentos, ficando, portanto, com quatro segmentos em cada lado do triângulo. No final da primeira iteração será obtido $3 \times 4 = 12$ segmentos na sua totalidade.

Na segunda iteração, para cada um dos doze segmentos, estes serão novamente divididos em três partes iguais. A parte central será substituída por um triângulo equilátero sem um dos lados, como no passo anterior, obtendo assim quatro segmentos em cada lado. Nesse estágio será obtido no total $(3 \times 4) \times 4 = 48$ segmentos.

Na terceira iteração os 48 segmentos obtidos anteriormente, darão origem a $((3 \times 4) \times 4) \times 4 = 3 \times 4^3 = 192$ segmentos na sua fronteira.

O processo será repetido infinitamente.

Observando a sequência dos segmentos em cada iteração, o número de segmentos do fractal para o nível n, será: $S_n = 3.4^n$.

Perímetros na Ilha de Koch (Floco de Neve)

No triângulo equilátero inicial, seja c o comprimento do lado.

Na segunda iteração cada lado do triângulo apresentará 4 segmentos, pois cada lado foi divido em três segmentos congruentes. No segmento intermediário será construído um triângulo equilátero sem uma das partes. Então cada segmento terá comprimento $c.\frac{1}{3}$.

No terceiro passo será repetido o mesmo processo. Cada lado possui comprimento $c.\frac{1}{3}$ e será dividido em três partes iguais, passará então a medir $(c.\frac{1}{3}).\frac{1}{3}$ ou seja, $c.\left(\frac{1}{3}\right)^2$.

Na *n-ésima* iteração, cada segmento terá medida: $c.\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

A Tabela 2 ilustra melhor o processo em cada iteração.

Tabela 2. Número de segmentos e perímetro Floco de Neve

Iteração	Nº de segmentos na iteração (S_n)	Medida de cada segmento	Perímetro total do Floco de Neve
0	3	c	$3.c$
1	3.4	$c.\left(\frac{1}{3}\right)$	$3.c.\left(\frac{4}{3}\right)$
2	3.4^2	$c.\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$3.c.\left(\frac{4}{3}\right)^2$
3	3.4^3	$c.\left(\frac{1}{3}\right)^3$	$3.c.\left(\frac{4}{3}\right)^3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	3.4^n	$c.\left(\frac{1}{3}\right)^n$	$3.c.\left(\frac{4}{3}\right)^n$

Fonte: (Fillipin, 2009)

Como $\frac{1}{3} < 1$, a medida de cada segmento será menor, conforme o processo iterativo avança. Portanto, a medida de cada segmento tenderá a zero.

O perímetro total de uma dada iteração é $\frac{4}{3}$ do perímetro total da iteração anterior. Como $\frac{4}{3} > 1$ o perímetro total aumenta $\frac{1}{3}$ do perímetro total anterior, logo o perímetro total do fractal tenderá ao infinito.

Considerações Finais

A Geometria Fractal, por ser capaz de modelar fenômenos da natureza, faz com que sua interação com certos conceitos matemáticos torne o processo ensino-aprendizagem mais atraente. Também possibilita a contextualização de vários conceitos matemáticos de uma forma ampla, visando o aprendizado significativo. Além dos benefícios esperados comentados anteriormente, vislumbra-se que seu estudo contribua na melhor formação de um acadêmico de Licenciatura em Matemática; haja vista que se constitui numa ferramenta importante que aguça a curiosidade dos alunos, estimulando a criatividade na busca da compreensão de conceitos estudados. Este trabalho também visa despertar o interesse dos educadores para que façam uso da Geometria Fractal como ferramenta de contextualização de conceitos, que são comumente vistos em sala de aula.

Referências

FILLIPIN, G. G. **Estudo da geometria fractal e aplicações em sala de aula.** UNIFRA Santa Maria - RS 2009.

MINGORANCI, S. **A geometria fractal aliada à contextualização, protagonismo juvenil e tecnologias como proposta de melhoria no processo ensino/aprendizagem da matemática na educação básica.** 121p. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) - UFMS, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Três Lagoas, 2014.

NUNES, R. S. R. **Geometria Fractal e aplicações. Dissertação de mestrado em ensino da Matemática.** Faculdades de Ciência do Porto, Porto, 2006.

POSSETTI, D. **A Geometria Fractal e a Contextualização de conteúdos no ensino fundamental: Uma experiência em sala de aula.** 85p. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) - UFMS, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Três Lagoas, 2019.

REIS, J. N. da C. **Uma Árvore de Pitágoras Explorando os Fractais no Ensino Médio.** Ciência e Natura, v. 37, n. 3, 2015.

Teoria dos Fractais. Disponível em:

ISSN 2525-7056

<https://teoriadacomplexidade.com.br/geometria-fractal/> Acesso em: 07/08/2019.

VIEIRA, P. Gl. **GEOMETRIA FRACTAL E SUAS TENDÊNCIAS PARA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 2014.** Trabalho de Conclusão de Curso do Curso de Matemática. Universidade Federal de Mato Grosso do Sul.

MODELAGEM MATEMÁTICA: UMA POSSIBILIDADE PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA NOS CURSOS DE PEDAGOGIA

MATHEMATICAL MODELLING: A POSSIBILITY FOR THE TEACHING OF MATHEMATICS IN PEDAGOGY COURSES

Debora Coelho de Souza [1]

Alyne Alves Coelho da Silva [2]

Claudia Carreira da Rosa[3]

RESUMO: Esse trabalho teve como objetivo mostrar as possíveis contribuições da modelagem matemática para o ensino de Matemática, na formação inicial de professores que não têm formação específica, utilizando Modelagem, como uma ferramenta de ensino e aprendizagem, com intuito de aprofundar seus conhecimentos, em relação aos conteúdos específicos de matemática o que pode possibilitar trabalhar em sala de aula com desenvoltura e segurança, proporcionando a seus alunos a possibilidade de participação ativa na própria aprendizagem. Para tanto, oferecemos um curso de Modelagem como estratégia de ensino, aos acadêmicos da Universidade Federal do Mato Grosso do Sul de um Câmpus do interior, do curso de Pedagogia. Durante o curso foi possível observar que através das atividades de modelagem os alunos se envolviam e se empenhavam a resolver os problemas mesmo demostrando certa dificuldade em conteúdos matemáticos, consideramos que as discussões, coletadas de dados e resolução foram muito ricas e satisfatórias.

PALAVRAS-CHAVE: Modelagem Matemática. Formação de Professores. Ensino de Matemática. Pedagogia. Anos Iniciais.

ABSTRACT: This work aimed to show the possible contributions of mathematical modeling to the teaching of Mathematics, in the initial training of teachers who have no specific training, using modeling, as a tool for teaching and learning, in order to deepen their knowledge, in relation to the specific contents of mathematics which can allow working in the classroom with ease and safety, providing their students the possibility of active participation in learning itself. For this, we offer a Modeling course as a teaching strategy, to the academics of the Federal University of Mato Grosso do Sul of a Campus in of countryside, of the Pedagogy course. During the course it was possible to observe that through the modeling activities the students got involved and committed themselves to solve the problems even showing some difficulty in mathematical content, we considered that the discussions, data collection and resolution were very rich and satisfactory.

KEYWORDS: Mathematical Modelling. Teacher Training. Teaching of Mathematics. Pedagogy. Initial Years.

[1] Mestranda em Educação Matemática do Programa de Pós Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (PPGEDUMAT/UFMS). E-mail: debora.c.souza@ufms.br

[2] Licenciada em Pedagogia pela Uniderp. Cursando especialização em Educação inclusiva pela Faculdade Campos Elíseos. E-mail: alyne_eli@hotmail.com

[3] Doutora no Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Estadual de Maringá (UEM). Professora do Campus de Ponta Porã da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (CPPP/UFMS) e do Programa de Pós Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (PPGEDUMAT/UFMS). E-mail: claudia.rosa@ufms.br

Introdução

Muitas são as discussões a respeito de ensino e aprendizagem em Matemática em todos os níveis educacionais, em geral os alunos apresentam maiores dificuldades nessa disciplina em comparação com as outras disciplinas, e esse fato se agrava quando falamos nos anos iniciais, uma vez que os cursos de formação de professores dos anos iniciais, em nível superior, geralmente não possuem carga horária suficiente destinada ao ensino de Matemática, considerando que possuem muitas disciplinas, como: Língua Portuguesa, Ciências, História, Geografia, Artes, Educação Física.

Para a disciplina de Matemática, especificamente, nos cursos de Pedagogia é oferecido, geralmente um panorama dos conteúdos, sem um “aprofundamento suficiente para que o futuro professor proponha desafios capazes de favorecer o estabelecimento de relações entre os saberes escolares e a experiência cotidiana dos discentes” (GATTI, NUNES, 2008, p. 232).

Os conceitos de matemática apreendidos, tão necessários para o desenvolvimento social do indivíduo, têm como objetivo contribuir para a formação da cidadania, concepção expressa claramente nas diretrizes norteadoras dos currículos, tanto para Educação Infantil, quanto para o Ensino Fundamental (BRASIL, 1997).

Neste contexto, para cumprir o objetivo de formação, é necessário que, além de conhecer os conteúdos de matemática, o professor tenha também conhecimento de como tratá-los, a fim de que a aprendizagem do aluno se efetive.

Assim, a formação inicial de professores pedagogos necessita de um olhar especial, uma vez que acabará direta e indiretamente influenciando em todos os outros setores da educação. Diante desses desafios, somos levados a buscar uma nova educação, que possa proporcionar mudanças na formação do professor que irá atuar ou que atua nos anos inicias ensinando matemática. Precisamos renovar a prática desse professor, pois esta é consequência de concepções sobre conhecimento, aprendizagem, ensino e educação.

O modo de ensinar sofre influência dos valores e das finalidades que ele atribui ao ensino, e, neste caso, de como concebe o ensino de matemática, além da visão que tem de mundo, da sociedade e do homem. “A forma como vemos/entendemos a Matemática tem fortes implicações no modo como praticamos e entendemos o ensino da Matemática e vice-versa” (FIORENTINI, 2003, p.4). A ação de ensinar deve estar comprometida com diversas atitudes que favorecem a produção e a ressignificação dos saberes da atividade do professor.

Perez (2004) acredita que a falta de interesse dos alunos em estudar matemática pode ser resultante da abstração dos conteúdos, do método de ensino empregado pelo professor, mas nada adianta ensinar diferentes métodos e metodologias ao professor se este tem dificuldade no conteúdo específico.

De acordo com Libâneo (2004), as escolas vêm sendo pressionadas a repensar o seu papel, questionadas sobre o desenvolvimento das competências e habilidades que os alunos alcançam durante sua vida escolar, e isso recai sobre o professor, que ainda é o personagem principal da aprendizagem dos alunos.

Assim, os professores necessitam cada vez mais de instrumentos diferenciados para alcançar seus objetivos de ensino e de qualificação profissional ao longo de sua carreira. Em particular, vamos nos centrar no professor que ensina matemática, sendo esta disciplina apontada historicamente como algo difícil de aprender e evitada por acadêmicos que cursam pedagogia.

É neste contexto que consideramos a Modelagem Matemática uma alternativa pedagógica para o ensino da matemática, que oportuniza desafios tanto metodológicos quanto em relação aos conteúdos propriamente ditos.

Portanto, nosso objetivo neste trabalho é mostrar as possíveis contirubuições da modelagem para o ensino de matemática, na formação inicial de professores que não têm formação específica em matemática. Para tanto, oferecemos um curso de Modelagem como estratégia de ensino, aos acadêmicos da Universidade Federal do Mato Grosso do Sul de um câmpus do interior, do curso de Pedagogia.

Modelagem Matemática na Formação Inicial de Pedagogos: Algumas Considerações

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), encontramos as seguintes informações: “[...] parte dos problemas referentes ao ensino de Matemática estão relacionados ao processo de formação do magistério, tanto em relação à formação inicial como à formação continuada [...]” (1997, p.22), e ainda:

O ensino de Matemática costuma provocar duas sensações contraditórias, tanto por parte de quem ensina como por parte de quem aprende: de um lado, a constatação de que se trata de uma área de conhecimento importante; de outro, a insatisfação diante dos resultados negativos obtidos com muita frequência (1997, p.15).

A significativa taxa de retenção e a frequência de resultados negativos geram discussões a respeito de estratégias que podem contribuir para o ensino e aprendizagem da matemática em sala de aula nos diferentes níveis, e muitas destas que defendem a contextualização de conteúdo, de forma a trabalhar com uma matemática menos abstrata. Estudiosos defendem a importância de se trabalhar de forma que o aluno consiga visualizar a utilização da matemática em situações reais, uma vez que o sucesso em matemática pode estar relacionado com o entendimento da mesma no mundo real.

Mas, para que haja um ensino de matemática que proporcione ao aluno a interface dos conteúdos escolares com sua utilização no mundo real é preciso termos professores capazes de realizar tal interface.

> A qualidade do ensino está diretamente envolvida ou relacionada com a forma de ensinar. Se tivermos professores capacitados, tanto academicamente (em relação ao conteúdo específico) quanto metodologicamente (em relação a formas diferenciadas de ensino), nossos alunos poderão ter melhores oportunidades de aprendizagem, sabendo muito mais que fórmulas e regras, mas tendo consciência da aplicabilidade das mesmas, sabendo utilizá-las em outras áreas do conhecimento e não apenas em exercícios diretos e desconexos da realidade (ROSA, 2013, p.27).

ISSN 2525-7056

Em particular, nos anos iniciais do Ensino Fundamental, o ensino e a aprendizagem de conteúdos matemáticos podem ser comprometidos pela dificuldade que, em geral, os professores que trabalham neste nível de ensino apresentam em relação aos conteúdos matemáticos, e são vários os fatores, seja a forma generalista como são trabalhados os conteúdos, a insegurança, a atitude negativa que se tem em geral da matemática nos cursos de Pedagogia.

Assim, podemos dizer, segundo Tardif (2011), que a formação inicial do professor está relacionada com sua forma de atuação em sala de aula, sendo esta a fase que o professor constrói seu estilo. “O desenvolvimento do saber profissional é associado tanto às suas fontes e lugares de aquisição quanto aos seus momentos e fases de construção” (TARDIF, 2011, p. 68).

Neste sentido, podemos dizer que o professor tende a reproduzir em suas aulas “o que”, e “como”, aprendeu em sua formação. Nacarato *et al* (2009) defendem que os saberes matemáticos do pedagogo precisam ser repensados, uma vez que esses podem ser considerados professores generalistas ou polivalentes, ou seja, que atuarão em diferentes áreas, em particular, na matemática. Para os autores é necessário que seja dada ênfase tanto nos aspectos metodológicos, quanto no conteúdo matemático, pois é importante abordar o “como fazer” tanto quanto o “por que fazer” ou ainda “de onde veio”.

De acordo com a LDB (Lei de Diretrizes e Bases da Educação, de 1996 – Lei 9.394/96) os professores precisam de uma formação que assegure o domínio da ciência, da técnica e dinâmica da prática docente, fazendo com que a formação de seus alunos tenha um caráter crítico e investigativo; e no que tange a matemática Os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 2008) ressaltam a importância de um ensino que possa desenvolver a capacidade de comunicação, a resolução de problemas, tomada de decisões, criação e aperfeiçoamento de conhecimentos, necessários para a construção da cidadania numa sociedade cada vez mais voltada para a tecnologia e o trabalho cooperativo.

Neste sentido, a Modelagem Matemática pode ser uma possibilidade, pois tem sido apontada por diversos estudiosos (Almeida e Silva 2004, Almeida e Brito 2005, Rosa 2013, entre outros) como uma alternativa pedagógica que possibilita o ensino de matemática de forma dinâmica e investigativa, cujo intuito é resolver problemas reais matemáticos ou não, usando conteúdos matemáticos do currículo de tal forma que possa levar professor e aluno a uma aprendizagem conjunta.

Na literatura, hoje, podemos encontrar diferentes concepções para Modelagem Matemática no âmbito da Educação Matemática. Tais concepções diferem, principalmente, em relação à utilização e ao papel da Matemática no contexto das aulas, mas, mesmo existindo diferenças, é consenso entre os estudiosos do assunto que a Modelagem permite uma compreensão mais global acerca da situação investigada, busca uma resposta para um problema cuja origem não está, de modo geral, na própria Matemática.

Neste sentido, espera-se que, durante o processo de Modelagem, aluno e professor adquiram e desenvolvam o senso crítico, ou seja, uma forma de cidadania baseada no entendimento comum.

Neste trabalho usaremos a concepção dada por Almeida e Brito (2005a) que consideram a “Modelagem Matemática em sala de aula como uma alternativa pedagógica na qual fazemos uma abordagem, por meio da Matemática, de um problema não, essencialmente, matemático”. Portanto, consideramos que a Modelagem permite uma compreensão mais global acerca da situação investigada, buscando uma resposta para um problema cuja origem não está, de modo geral, na própria Matemática e que a mesma seja ensinada de forma a produzir significado para o aluno, usando situações que remetem a realidade.

Face ao exposto acreditamos que o professor precisa de uma formação que possibilite tal interface de teoria e prática com siginificado. De acordo com Nóvoa (1992), para que haja ensino e aprendizagem, professores e alunos precisam criar condições favoráveis. Defendemos que o professor seja formado “para sala de aula”, que tenha oportunidades de investigar sua prática constantemente, de forma a ter segurança para propor uma aula que estimule a participação de seu aluno, essas condições são possíveis no contexto da modelagem matemática.

Para Almeida (2004) o processo de Modelagem Matemática na educação matemática tem que ser de forma gradativa, para a familiarização tanto de estudantes como de professores, logo a autora sugere que as atividades de ensino por meio da Modelagem podem atravessar três momentos.

O primeiro momento o professor leva para os alunos uma atividade de Modelagem já estruturada, com todos os dados para resolver, cabe aos alunos a resolução do problema, sendo o professor um mediador/orientador no trabalho de resolução. No segundo momento, o professor leva para a sala de aula um tema, além de um conjunto de informações sobre ela, nesse momento os alunos irão escolher o que, e como investigar a partir das manipulações das informações. No terceiro momento os alunos são incentivados a desenvolverem uma atividade de Modelagem Matemática desde a escolha do problema até a obtenção de uma resposta para o problema.

Em todos estes momentos, o professor é concebido como "colaborador" e "participante" do processo de investigação dos alunos, uma vez que seu papel é dialogar com eles acerca de seus procedimentos e orientá-los quando preciso.

É neste contexto, que defendemos a utilização de Modelagem Matemática na formação de professor, por suas características peculiares que podem possibilitar o desenvolvimento de ações pedagógicas que favoreçam a prática reflexiva no professor, como uma forma de "ver" novos entendimentos no ensino e na aprendizagem de Matemática.

Precisamos estimular a reflexividade do professor, e, para tanto, oportunizar ambientes que possibilitem tal prática. De acordo com Rosa e Kato (2011, p. 219), uma das possibilidades é o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática, uma vez que, "[...] quando utilizam de Modelagem Matemática os professores se sentem motivados e mais seguros para manifestarem reflexões sobre sua prática, apontando caminhos para possíveis mudanças".

Assim, consideramos que o professor pode ser inovador em sala de aula conquistando e estimulando seus alunos e então motivá-los a estudar, a entender matemática.

Metodologia

Essa pesquisa é de cunho qualitativo, o que segundo Bogdan e Biklen (1994) se caracteriza como a tentativa de compreensão detalhada dos significados e características de situações apresentadas por entrevistados ou pesquisados, em lugar da produção de medidas quantitativas de características ou comportamentos.

Para o desenvolvimento desse trabalho foi oferecido um curso de Modelagem Matemática como estratégia de ensino, aos acadêmicos de um curso de Pedagogia de um campus do interior da Universidade Federal do Mato Grosso do Sul. Esse curso ocorreu em uma semana, com duração de quatro horas por dia, totalizando uma carga horária de 20 horas de curso e contou com a participação de 21 acadêmicos.

Na primeira fase do curso, discutimos sobre as diferentes concepções da Modelagem, na segunda fase desenvolvemos atividades de Modelagem, de acordo com os momentos sugeridos por Almeida 2004.

Resultados e Discussões

Durante o curso, realizamos várias atividades, de acordo com os momentos sugerido por Almeida (2004), sendo elas, a relação existente do número do calçado e o tamanho do pé, a epidemia do vírus da dengue na cidade, a forma de transporte mais econômica de se chegar a universidade, a alimentação dos cachorros que ficam no pátio do campus, a taxa de variação do câmbio, a produção de vinho, a pintura da caixa d'água, entre outras.

Apesar de todas as atividades mobilizarem temas interessantes e conteúdos de matemática diversos, neste trabalho iremos relatar apenas duas atividades, sendo uma do primeiro momento da modelagem, que foi a epidemia do vírus da dengue na cidade, por se tratar de uma questão importante para todos, que possibilitou diversas discussões, e a outra atividade desenvolvida no terceiro momento da modelagem sendo, a falta de visibilidade da universidade na cidade.

Ao iniciar a primeira atividade que era sobre a epidemia de dengue, visto que a cidade a qual realizamos a pesquisa, foi a que teve o maior número de mortes por causa da dengue, e a conscientização para o combate à dengue é uma forma de diminuir esses índices.

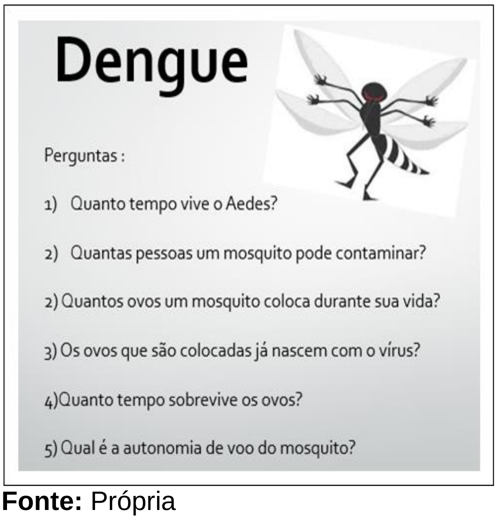
Veio o primeiro questionamento de umas das alunas, "*professora eu achei que o curso era para aprendermos matemática, não vejo sentido falar de dengue, nem tem números".* Após esse questionamento perguntamos o que a turma achava sobre isso, teria ou não matemática envolvida nesse assunto, uns disseram que sim outros disseram que não, foi então que propomos descobrir.

Iniciamos um diálogo em sala, questionando quais sintomas da doença, nesse momento os alunos da sala que já tiveram a doença falaram do que sentiram, falamos da forma de prevenção de não deixar água parada, mostramos alguns dados da secretaria de saúde em que mostrava que a nossa cidade era a que teve maior número de morte pela doença.

Dando continuidade na discussão alguns questionamentos foram feitos com intuito de despertar a curiosidade deles e nisso aprofundar o assunto como mostra a figura 1.

ISSN 2525-7056

Figura 1. Folha de Questionamentos



Fonte: Própria

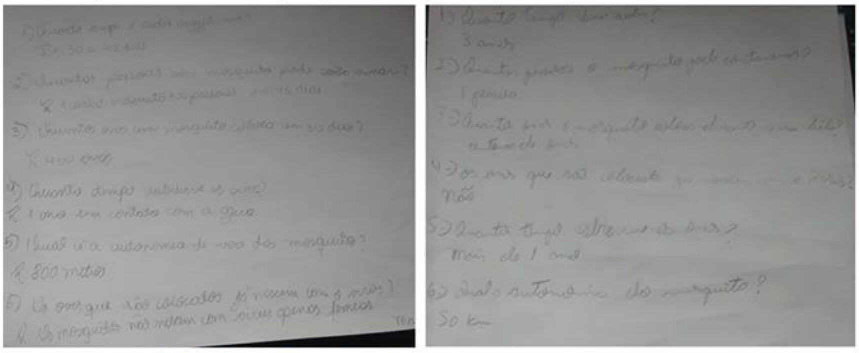
A princípio as perguntas foram feitas sem que eles pudessem pesquisar sobre, só para responderem o que eles achavam que eram, os alunos começaram a ler as perguntas e falar *"não é possível responder essas perguntas sem uma pesquisa, eu mesmo não sei responder nenhuma".*

Após todos darem seus palpites, e anotado as respostas foi então que liberamos um tempo para que todos pudessem pesquisarem em seus celulares, notebook, ir na biblioteca etc... pedimos para que eles anotassem as respostas da internet e comparassem com as que eles tinham respondido como mostra a figura 2, a maioria das respostas da sala em geral antes da pesquisa foi bem distante da realidade fato que deixa evidente que por mais que seja um assunto muito discutido, e apresentados em diferentes meios de comunicação como, televisão, rádio, jornais, ainda falta muita informação para conscientizar as pessoas sobre o combate à dengue. Uma das alunas comentou que achava que a dengue era igual a abelha que quando picam uma pessoa elas morrem em seguida.

ISSN 2525-7056

Figura 2. comparação das respostas antes e depois da pesquisa

Resposta com auxilio da pesquisa | Respostas a partir do conhecimento deles



Quanto tempo vive um aedes?
Resposta com a pesquisa 30 a 45 dias – e sem a pesquisa 3 anos
Quantas pessoas um mosquito pode contaminar ?
Resposta com a pesquisa até 300 pessoas – e sem a pesquisa 1 pessoa
Quantos ovos o mosquito coloca durante sua vida?
Resposta com a pesquisa 450 ovos – e sem a pesquisa centenas de ovos
Os ovos que são colocados já são infectados?
Resposta com a pesquisa só se a Feema estiver infectadas - e sem a pesquisa é não
Quanto tempo sobrevive os ovos
Resposta com a pesquisa em local seco ate 450 dias – e sem a pesquisa mais de um ano
Qual a autonomia de voo dos mosquitos?
Resposta com a pesquisa um raio de 800 metros – sem a pesquisa 50 quilômetros

Fonte: Própria

Após a pesquisa, eles ficaram impressionados com os números obtidos, que por exemplo um único mosquito com o vírus ao longo da sua vida pode contaminar até 300 pessoas, e que esse mesmo mosquito em sua vida pode botar 450 ovos.

Os alunos durante a discussão lembraram que por mais que os 450 ovos estejam infectados apenas a fêmea transmite o vírus. Foi então que começaram a levantar hipóteses e analisar quantos por cento desses ovos, seriam fêmeas, quantos sobreviveriam, por quantos dias, e quantas pessoas poderiam ser contaminadas, cada grupo fez uma porcentagem diferentes, um grupo considerou que um terço dos ovos seriam fêmeas, outro grupo considerou que seria cinquenta por cento fêmea, mais não todas sobreviveram, e algumas por alguns dias apenas.

Um dos grupos levantou a hipótese de ter um foco de dengue na universidade que é um lugar em que circulam muitas pessoas por dia. Na hipótese que fizeram consideraram que dos quatrocentos e cinquentas ovos que uma fêmea infectada pode botar, setenta e cinco por cento dos ovos sobreviveram, ficou no total de trezentos e trinta e seis ovos, desses consideraram cinquenta por cento são fêmeas e dessas fêmeas a metade viveu por vinte e três dias e a outra metade por quarenta e cinco dias, eles levaram em consideração que o horário que o mosquito sai pra se alimentar no período da manhã e final da tarde, chegaram à conclusão que cada mosquito poderia picar cinco pessoas durante cada dia, então os mosquitos que sobreviveram por vinte e três dias infectariam cento e três mil e quinhentas pessoas, já os que sobreviveriam por quarenta e cinco dias infectariam duzentas e dois mil e quinhentas pessoas.

Os alunos ficaram impressionados com o número de pessoas que poderiam ser contaminadas a partir de um foco de dengue, e a partir desse resultado puderam perceber quanta matemática foi usada, eles usaram multiplicação, divisão, estatística, gráficos, porcentagem, e quanto isso foi importante para perceberem a necessidade de como professores podem utilizar a matemática para conscientizar as pessoas, na prevenção contra os focos de dengue. Um dos alunos falou que seria importante que esses resultados que eles chegaram, fossem mostrados nas outras turmas, para que todos tivessem a mesma consciência que eles tiveram.

A outra atividade aqui relatada será no terceiro momento, a turma foi dividida em grupos e cada grupo poderia escolher um tema e o que iriam investigar, esse grupo optou por investigar um problema que estava relacionado com a visibilidade da universidade na cidade, por se tratar de uma localidade meio distante e não ter uma identificação, muitos da cidade sequer sabem que existe uma Universidade Federal naquele local. Como mostra na figura 3 a problemática da situação elaborada pelo grupo.

Figura 3. Problema Levantado pelo Grupo

A UFMS - fundação universidade federal de Mato Grosso do Sul- possui um campus na cidade de [redacted], este campus possui atualmente 4 cursos sendo eles Ciencia da computação, sistema da informação, matemática e pedagogia.

O terreno em que a ufms está localizada é beirando a rodovia BR - 463 é cedido parcialmente para a Uems – universidade estadual de mato grosso do sul, porém é pertencente a ufms, mas como a uems chegou anteriormente na cidade ela é bem mais conhecida pois as placas sinalizam a entrada para a UEMS e o prédio utilizado pela UEMS também tem uma pintura simbolizando a Universidade estadual.

Como o campus está crescendo, recebemos muitos acadêmicos de outras cidades e estados, encontramos um problema... Na cidade de [redacted] poucas pessoas sabem que existe UFMS e quando alguma ou algum acadêmica ou acadêmico chega de fora para se matricular a população passa o endereço do Instituto Federal de Mato Grosso do Sul, que fica á 9,5 km da UFMS e 16,7 km de distancia do centro da cidade, ou seja, muitos se perdem, inclusive temos relatos de acadêmicos que quase perderam o período de matricula por esse motivo.

Sendo assim, observamos que nossa caixa d'agua é visível pela BR, tanto vindo por Dourados ou ainda por quem entra pelo Nova Itamarati, e então para solucionar esses problemas pensamos em pintar a caixa d'agua com as iniciais da universidade.

Fonte: Própria

Foi então que começaram a discutir como poderiam resolver tal situação, ao irem no pátio eles observaram que a caixa d' água era bem grande e dava para ser vista da rodovia que passa pela cidade, então se ali tivesse uma identificação com as letras da universidade poderia ajudar os acadêmicos a se localizar.

Elaborado o problema, eles precisariam de um estudo de quantos custaria para pintar a caixa d'água inteira com as siglas UFMS ou então só as letras, para isso eles foram até a caixa d'água medir a área. Como mostra a figura 4.

Figura 4. medição da caixa d'agua

Fonte: Própria

Ao chegarem no local da caixa d' água, as acadêmicas disseram que seria difícil medir a caixa d' água por ser de uma forma cilíndrica, foi então que uma das integrantes do grupo deu a ideia de pegar um barbante, colocar ao redor da caixa de água, depois medir o comprimento do barbante e foi o que fizeram. Na altura não tiveram dificuldade, apesar da caixa d'agua ser alta e não ter como subir até o topo para o medir. Consideraram fácil medir a altura pois a caixa d'água era dividida em gomos (rodelas) de mesmo tamanho, exceto o primeiro que era menor. Decidiram anotar os dados que tinham, a caixa de água era formada por 30 rodelas, sendo a primeira medindo 31 centímetros, 29 rodelas restante medindo 49 centímetros, ao multiplicar a quantidade de rodelas pelo comprimento chegaram a 1.452 centímetros, ao serem questionadas quanto aquele valor era equivalente em metros as mesmas ficaram com dúvida na conversão de centímetros para metro.

Uma disse que dividia por 100, outra disse que tinha que multiplicar por 100, percebendo essa dificuldade, pegamos umas trena e pedimos para ver quantos centímetros tinha em um metro, observaram que tinha 100 centímetros em um metro, a partir daí conseguiram perceber que o 1452 que tinham encontrado em centímetro para converter em metros precisa dividir por 100, então a altura da caixa d' agua era de 14,52 metros aproximadamente.

Após a coleta dos dados voltaram a sala para estudar qual seria o melhor jeito de colocar as siglas da universidade de forma que a tornar-se visível de longe, na vertical ou na horizontal, depois que ilustraram no quadro e no computador o grupo chegou ao consenso que na vertical, colocado nos dois lados da caixa d'água ficaria mais visível. Como mostra a figura 5.

Figura 5. layout das letras

Fonte: Própria

Decidido isso precisavam calcular quanto seria gasto em tinta para pintar as letras e o fundo. Tiveram um pouco de dificuldade, pois a caixa d'água tem uma forma cilíndrica, e apesar da turma que estava fazendo o curso já tivesse concluído a disciplina de matemática elementar, da grade do curso, demostraram dificuldade e até desconhecimento de alguns conteúdos matemática que surgiram, que foi o caso de calcular a área de uma forma cilíndrica, o grupo então pesquisou a fórmula só que ao invés deles procurarem a fórmula da área lateral que era onde pretendiam pintar, eles usaram a fórmula de volume do cilindro, sem perceberem que naquele cálculo que realizaram, eles estariam calculando quanto de tinta seria necessário para encher a caixa d'água com tinta. Eles só perceberam o erro na hora que foram expor aos colegas.

Notando a dificuldade frente ao problema, retomamos o assunto explicitando os conceitos sobre área e volume de cilindros, realizamos os cálculos juntos, e explicamos que como queriam pintar em volta do cilindro a fórmula que precisavam para chegar a resposta do problema seria da área lateral $A_l = 2\pi r \cdot h$. e foi então que realizaram os cálculos, mas como na fórmula necessita do raio, primeiro eles mostraram para os alunos da sala como chegaram ao valor do raio. Como mostra a figura 6.

Figura 6. formulas do cilindro

D = C/TT	R= D/2	AL= 2TT.RH
D=10,74/ 3,14	R= 3,42/2	AL= 2.TT.1,71.14,52
D= 3,42	R=1,71	AL=155,92M²

Fonte: Própria

Após chegarem no resultado da área total que seria pintado, usaram um aplicativo que calcula a quantidade de tinta necessária, e também fizeram um levantamento de preços de tintas. Chegaram à conclusão que uma lata de 18 litros daria para pintar todo o fundo da caixa de água e o preço sairia 77 reais, e mais duas latas de 3,5 para pintas as letras.

Esse estudo foi levado para o prefeito da cidade mostrando a importância de tornar visível a universidade, uma vez que nem pessoas da própria cidade sabiam da existência da mesma. O projeto então foi executado pela prefeitura com as medidas que as acadêmicas estudaram e sugeriram, apenas com algumas modificações que ao invés de tinta para as letras, usaram letras de metal.

Os alunos ficaram satisfeitos com o resultado, de acordo com eles, puderam ao mesmo tempo contribuir com o campus de um problema do cotidiano deles e aprender conteúdos matemáticos de uma forma prática que possibilitou ver a sua utilidade. Os alunos participaram melhor que esperavam, apesar de ainda considerarem "difícil ensinar matemática".

Também evidenciaram em seus discursos que a discussão sobre "área de cilindro" foi válida para aprendizagem deles próprios, pois "geometria não é nosso forte".

Quando perguntamos como descreveriam o curso, disseram: "muito bom, nunca pensei que falaríamos isso sobre uma aula nossa de matemática".

Considerações Finais

As discussões sobre a formação de professores são em geral complexas e muito discutidos no âmbito da Educação Matemática, esse fato se agrava quando se trata de formação do professor que leciona Matemática nos anos iniciais, pois em geral a matemática oferecida na grade curricular do curso não é suficiente para os mesmos aprofundarem seus conhecimentos relacionados aos conteúdos matemáticos, para trabalhar em sala de aula com desenvoltura e segurança e proporcionando a seus alunos a possibilidade de participação ativa na própria aprendizagem.

Neste sentido o curso de Modelagem Matemática, foi uma oportunidade para aproximarmos os cursos de Pedagogia e Matemática e para refletirmos o pensar e o fazer Matemática nos cursos de Pedagogia.

Defendemos que para ensinar é preciso saber, que não é possível se mostrar entusiasmado com um conteúdo que possui dificuldade. Em sala de aula o professor precisa ter conhecimento seguro dos conteúdos que vai ensinar e também ser criativo, inovador, demonstrar entusiasmo, investigar, ou seja, ser capaz de despertar o interesse de seus alunos pelos conteúdos, neste caso, pelos conteúdos matemáticos. De acordo com Nóvoa (1992), para que haja ensino e aprendizagem, professores e alunos precisam criar condições favoráveis.

Neste contexto é que consideramos o uso da Modelagem Matemática para o ensino de Matemática, como alternativa pedagógica, onde inserimos os acadêmicos em um ambiente de aprendizagem que proporciona estudar conteúdo específico, aprofundando o estudo da Matemática, como também metodologicamente, oportunizando aos futuros professores a vivência de experiências como aluno e professor simultaneamente.

De acordo com os acadêmicos o curso foi importante ampliando o conhecimento e os horizontes profissionais. A maioria dos alunos da graduação, que participaram do curso, disseram possuir dificuldade em Matemática, mas que com o uso da modelagem puderam recordar os conteúdos já vistos e também novos conceitos não estudados antes, que serão fundamentais quando forem atuar na escola, e ainda, uniu teoria e prática. Além disso, muitos alunos disseram que ao compreender o conteúdo mudaram a visão em relação à Matemática.

Ainda de acordo com os alunos, o curso foi importante, pois ajudará a relacionar a Matemática com o mundo à volta, o que torna melhor o entendimento, embora muitos acreditem que precisaria de mais tempo para aprofundar os conteúdos ou mesmo ampliá-los.

De fato concluímos que uso da modelagem matemática, contribui para o ensino de matemática, pois a partir dos problemas que surgiram, foram estudados conceitos que muitos tinham dificuldade ou sequer lembravam como fazia, os que sabiam, serviu para reforçar, assim considerando que mesmo o professor que não é formado em matemática pode se sair bem trabalhando a disciplina, se tiver a oportunidade de estudar, desde a formação inicial, possibilidades diferenciadas para o ensino de matemática articuladas com os conteúdos matemáticos.

Este curso foi uma pequena experiência, na formação de futuros professores, no entanto foi repleta de resultados que permitirão avanços significativos no processo de ensino e aprendizagem da Matemática dos futuros professores de Matemática da educação infantil e dos anos iniciais, o que consequentemente influenciará na aprendizagem de seus alunos.

Referências

ALMEIDA, L. M. W.; BRITO, D. S. **Atividades de Modelagem Matemática: que sentido os alunos podem lhe atribuir?** Ciência e Educação, v.11, n. 3, p. 483- 498, 2005ª.

ALMEIDA, L. M. W.; DIAS, M. R. **Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem**. Bolema, ano 17, n. 22, p.19-35, 2004.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Parâmetros curriculares nacionais: ensino fundamental** – introdução. Rio de janeiro: dp&a, 1997.

BOGDAN, R. C., BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos.** Porto: Porto Editora, 1994.

FIORENTINI, D.; CASTRO, F. C. **Tornando-se professor de Matemática: O Caso de Allan em prática de ensino e estágio supervisionado**. In: FIORENTINI, D. (org) Formação de professores de Matemática: explorando novos caminhos com outros olhares. Campinas: Mercado de Letras, 2003.

GATTI, B. **A. Análise das políticas Públicas da Formação Continuada no Brasil, na última década**. In: Revista Brasileira de Educação, v. 13, n. 37, p.57 – 186, 2008.

GATTI, b.; nunes, m. m. r. (coord.) **Formação de professores para o ensino fundamental: instituições formadoras e seus currículos.** relatório final: pedagogia. são paulo: fundação carlos chagas. 2008.

LIBÂNEO, J. C. **Organização e gestão da escola: teoria e prática**. 5 ed. revista e ampliada. goiânia: alternativa, 2004.

NACARATO, a. m. MENGALI, b. l.s. passos, cármem lúcia b. **A matemática nos anos iniciais do ensino fundamental. tecendo fios do ensinar e do aprender.** belo horizonte: autêntica, 2009 nóvoa, a. os professores e a sua formação. Lisboa, Portugal: dom quixote, 1992. Perez.

NÓVOA, a. **Os professores e a sua formação**. Lisboa, Portugal: dom quixote, 1992.

R0SA. c.c. **A formação do professor reflexivo no contexto da modelagem matemática**. tese de doutorado (programa de pós-graduação em educação para a ciência e a matemática). universidade estadual de Maringá, Maringá, 2013.

PEREZ, G. **Prática reflexiva do professor de matemática**. in: bicudo, m. a. v. borba, m. c. educação matemática: pesquisa em movimento. São Paulo: cortez, 2004, p. 250-263

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional.** 12ª ed. Petrópolis, rj: vozes, 2011.

ISSN 2525-7056

RELATOS DE EXPERIÊNCIA

ENSINO DE CÔNICAS: EXPERIÊNCIAS DE ENSINO COM METODOLOGIAS ALTERNATIVAS

TEACHING OF CONICS: TEACHING EXPERIENCES WITH ALTERNATIVE METHODOLOGIES

Celson André de Lima Júnior[1]

Alessandro Ribeiro da Silva[2]

Gerson dos Santos Farias[3]

Eugenia Brunilda Opazo Uribe[4]

RESUMO: As curvas cônicas compõem diversas aplicações no cotidiano, contudo o ensino de cônicas tem sido abordado de modo ineficiente, por diversos fatores. Pensando nisso, o presente relato de experiência tem como objetivo apresentar uma proposta para o ensino de cônicas por meio de oficinas, utilizando metodologias diferenciadas. Sendo esse, um trabalho resultante da dissertação de mestrado de um dos autores, que realizou algumas experiências na educação básica, em aulas regulares e na forma de projeto. O trabalho foi realizado em parceria com o Grupo PET Conexões de Saberes Matemática do Campus de Três Lagoas (CPTL) da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS). As oficinas foram desenvolvidas com alunos de ensino médio de duas escolas da cidade de Três Lagoas – MS, abordando aspectos teóricos, realizando trabalho prático com materiais manipuláveis para a construção da Hipérbole, bem como trabalho em laboratório de informática utilizando ferramentas de tecnologias, como é o caso do Software SCRATCH e o Software GeoGebra. Assim, os resultados apontam que abordagens que utilizam tecnologias digitais e materiais concretos possibilitam construir um espaço de reflexão, discussão e criação de uma Matemática mais atraente para o aluno, por oferecer conteúdos lúdicos e diferenciados que subsidiem a aprendizagem matemática.

Palavras-chave: Ensino de Cônicas. Metodologias Alternativas. Ensino de Matemática.

ABSTRACT: Conics curves make up several applications in everyday life, however the teaching of conics has been approached inefficiently, due to several factors. With this in mind, the present experience report aims to present a proposal for teaching conics through workshops, using different methodologies. This being a work resulting from a master's thesis by one of the authors, who carried out some experiments in basic education, in regular classes and in the form of a project. The work was carried out in partnership with the PET Connections Group of Mathematical Knowledge of the Três Lagoas Campus (CPTL) of the Federal University of Mato Grosso do Sul (UFMS). The workshops were developed with high school students from two schools in the city of Três Lagoas - MS, addressing theoretical aspects,

[1] Mestre em Matemática (PROFMAT) pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas. Professor na Escola SESI Três Lagoas/MS. Professor convocado da Rede Estadual de Mato Grosso do Sul. E-mail: matematico.celson@yahoo.com.br

[2] Bolsista do Grupo PET Conexões de Saberes Matemática/CPTL, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas. E-mail: silvaalessandror@outlook.com

[3] Bolsista do Grupo PET Conexões de Saberes Matemática/CPTL, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas. E-mail: gersonfarias14@hotmail.com

[4] Doutora em Engenharia Mecânica pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Professora do Campus de Três Lagoas da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (CPTL/UFMS). E-mail: eugenia.cptl.ufms@gmail.com

carrying out practical work with manipulable materials for the construction of the Hyperbola, as well as working in a computer lab using technology tools, as is the case of the SCRATCH Software and the GeoGebra Software. Thus, the results indicate that approaches that use digital technologies and concrete materials make it possible to build a space for reflection, discussion and creation of a attractive Mathematics for the student, by offering playful and differentiated contents that support mathematical learning.

Keywords: Teaching Conics. Alternative Methodologies. Mathematics Teaching.

Introdução

O estudo de cônicas está inserido no currículo de Matemática que deve ser desenvolvido no 3º ano do ensino médio, um tema importante pela quantidade de aplicações em diferentes áreas, abordando exemplos do cotidiano do aluno ou que estão presentes através de notícias de jornais ou documentários, por exemplo. Ao ensinar cônicas pode ser explorada a forma de reflexão da luz nos espelhos parabólicos, hiperbólicos e elípticos, para em seguida explicar os princípios de funcionamento de uma antena parabólica, dos faróis de automóveis, telescópios e dos refletores utilizados por dentistas, entre outras aplicações.

Apesar de ser um tema atraente pelas aplicações diversificadas e necessário para o aluno que termina o ensino médio devido a estar presente nos vestibulares de grandes universidades bem como na lista de conteúdos do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), os professores relatam muitas dificuldades para trabalhar esses conteúdos. Segundo Lima Junior (2019), o fato de aparecer no final do Ensino Médio faz com que o tema não seja abordado de maneira eficaz, incentivando a memorização de fórmulas ou muitas vezes deixando de ser apresentado em sala de aula. Calvoso (2014) afirma que o Currículo do Estado de São Paulo restringe o estudo de cônicas ao final do primeiro bimestre, normalmente nas duas últimas semanas, e aponta ainda outro problema, as aulas que poderiam ser usadas para aprofundamento são dispostas para revisar conceitos de geometria plana relacionados às demonstrações e atividades propostas.

Este relato apresenta uma proposta de ensino de cônicas por meio de oficinas, utilizando metodologias diferenciadas, um trabalho resultante da dissertação de mestrado de um dos autores, que realizou algumas experiências na educação básica, em aulas regulares e na forma de projeto. O trabalho foi realizado em parceria com o Grupo PET Conexões de Saberes Matemática do Campus de Três Lagoas (CPTL) da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS). As oficinas foram desenvolvidas com alunos de ensino médio de duas escolas da cidade de Três Lagoas – MS, abordando aspectos teóricos, realizando trabalho prático com materiais manipuláveis para a construção da Hipérbole, bem como trabalho em laboratório de informática utilizando ferramentas de tecnologias, como é o caso do Software SCRATCH e o Software GeoGebra.

Uso do GeoGebra e Materiais Manipuláveis para Ensino de Cônicas em Aulas Regulares de Matemática do Ensino Médio

O uso de tecnologias pode ser um grande aliado para o professor de Matemática e está cada vez mais presente em sala de aula. Souza (2016) afirma que uso das tecnologias digitais e, em particular de softwares, é uma abordagem que pode auxiliar a prática docente, permitindo possibilitar outras oportunidades de ensino e aprendizagem ao aluno. Da mesma forma, Dias (2014) defende o uso de softwares por permitir realizar investigações de propriedades geométricas que dificilmente seriam observadas sem esse recurso. Afirmando ainda que a maioria das escolas públicas possui um laboratório de informática, assim essa ferramenta gratuita pode ser utilizada para enriquecer as aulas, facilitando o entendimento de alguns conceitos por parte dos estudantes.

Baseados nessas concepções, a experiência realizada utilizou recursos de tecnologia digital, aliados a materiais manipuláveis, para auxiliar o desenvolvimento teórico e facilitar o processo de ensino aprendizagem. Assim, o conteúdo de cônicas foi apresentado aos alunos através de aulas regulares teóricas, com resolução de problemas, além disso, para visualização das curvas, elementos e principais propriedades foram utilizados os Software GeoGebra versão 6.0 e GeoGebra 3D. O uso de metodologias diversas permitiu fazer abordagens diferentes, ajudando o entendimento do aluno, bem

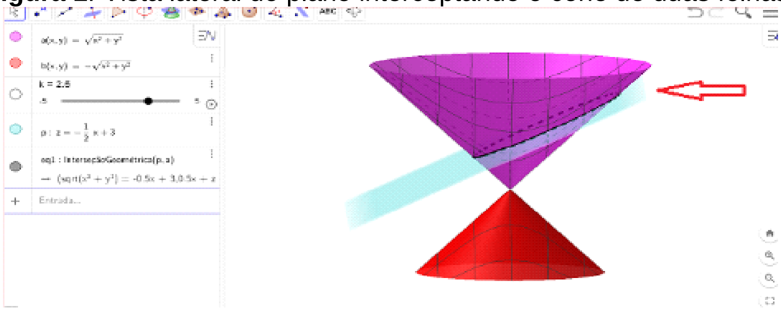
ISSN 2525-7056

como o desenvolvimento da perspicácia dedutiva dos estudantes, conforme afirma Kaleff,

> "[...] é aconselhável que se leve o aluno a vivenciar experiências com diversos tipos de materiais concretos manipulativos, a fim de que ele possa ter a oportunidade de encontrar o meio material que seja mais apropriado à sua percepção sensorial e que mais aguce sua curiosidade (2003, p. 17)."

Inicialmente, foi apresentada a origem das cônicas como interseção de um plano e um cone, para a visualização, foram utilizadas projeções de figuras geradas no software GeoGebra 3D, resultantes de diversos interseções entre um plano e um cone, como mostrado nas figuras 1 e 2 para o caso da elipse.

Figura 1: Vista lateral do plano interceptando o cone de duas folhas.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Figura 2: Vista superior do plano interceptando o cone de duas folhas.

Fonte: Elaborada pelos autores.

Como segunda atividade foi proposta uma Oficina para a construção de elipse utilizando o software GeoGebra para identificar seus principais elementos. A atividade foi desenvolvida no Laboratório de Matemática após aulas expositivas trabalhando o conteúdo da apostila e a resolução de exercícios propostos, utilizando 4 horas aulas de 50 minutos, sendo utilizadas três para o desenvolvimento teórico e uma para a atividade prática. A atividade

ISSN 2525-7056

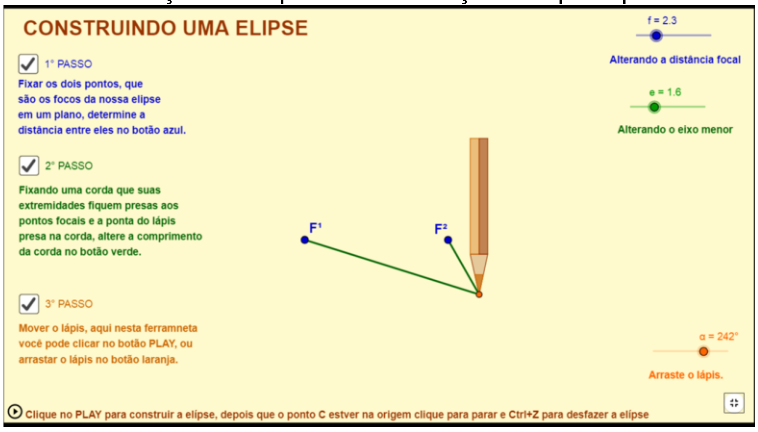
foi proposta em três etapas, descritas abaixo, como ilustrado na figura 3.

Etapa 1. Os estudantes localizaram os pontos focais e determinar a distância focal.

Etapa 2. Os estudantes examinaram a distância das cordas cujas extremidades ficavam fixas em um lápis (ponto P).

Etapa 3. Os estudantes movimentaram o lápis, de maneira a marcar a trajetória do lápis que continua preso à corda, para confirmar a definição.

Figura 3: Construção da Elipse e identificação dos principais elementos.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Após a realização da atividade proposta pelo professor, os estudantes foram divididos em grupo e foi solicitado que eles criassem uma atividade similar no GeoGebra, posteriormente tiveram que apresentar para os demais colegas. Nessa atividade foram utilizadas 4 aulas de 50 minutos, sendo uma para o desenvolvimento teórico e 3 para a atividade prática. Os alunos desenvolveram as atividades com facilidade e se mostraram interessados e participativos durante a sua realização. A avaliação bimestral, realizada através de uma avaliação dissertativa e de múltipla escolha, mostrou bons resultados, sendo que 71,5% obtiveram notas acima de 6,0.

Como terceira atividade foi proposta uma oficina de cunho experimental baseada na proposta da equipe do Laboratório de Ensino de Matemática da UNICAMP "Que Curva é esta chamada Hipérbole? " A Oficina teve por objetivo a construção de uma hipérbole utilizando materiais manipuláveis e utilizou como materiais: papel cartão, papel transparente, massa de modelar, barbante, plástico filme usado para conservação de alimentos, fio dental, caneta de ponta porosa, cola, régua e tesoura.

Inicialmente, foi realizada a construção de um cone de papel, revestido de plástico filme e preenchido com massa de modelar. Na sequência, o cone foi desenformado e seccionado utilizando fio dental esticado de modo perpendicular à base. As duas partes foram posicionadas de maneira a formar um cone de duas folhas e novamente foi cortado com fio dental esticado atingindo as duas seções do cone. Foi inserido o papel cartão no corte, e marcado o contorno da curva com caneta de ponta porosa. Com a folha de papel transparente dobrada ao meio foi inserido o papel cartão com os ramos da hipérbole desenhados e assim foram transferidos para o papel transparente. Por fim, a dobra foi aproveitada para traçar o eixo horizontal, já o eixo vertical foi traçado a partir da simetria entre os dois ramos da curva, ou seja, perpendicular ao eixo horizontal. Após esses procedimentos foi possível observar o processo de obtenção das curvas, conforme mostrado na figura 4 (SOARES *et al*, [s.d]). Assim, com o uso dessa metodologia alternativa os alunos puderam trabalhar a construção geométrica da hipérbole de uma forma lúdica, criativa e divertida por intermédio dos materiais concretos.

Figura 4: Construção da Hipérbole.

Fonte: Os autores.

Para a obtenção dos focos da hipérbole, de acordo com a figura 5, primeiramente deve-se marcar os vértices V_1 e V_2 e o centro da hipérbole determinado pelo ponto O. Em seguida:

a) Trace por V_1 uma perpendicular ao eixo real e marque o ponto A tal que $V_1 = V_1A$, obtendo o segmento OA , de medida $OV_1 \times \sqrt{2}$.
b) Marque no eixo real um ponto B, tal que $OB = OA$. Por B trace uma perpendicular ao eixo real, que interceptará a

hipérbole em P.

c) Marcar em V_1A o ponto C, tal que $V_1\,C = PB$. Com centro em O e raio OC traçar uma circunferência que interceptará o eixo real nos pontos F_1 e F_2 que são os focos da hipérbole (SOARES *et al*, [s,d], p. 7 - 8).

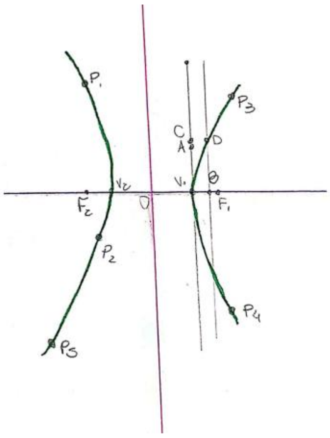
Figura 5: Obtenção dos focos no papel

Fonte: Os autores.

Durante o processo de obtenção dos focos da hipérbole observou-se rapidez na execução das tarefas, que pode ser justificada pelo trabalho em equipe, ou seja, uma constante troca de informações em prol da produção de significados matemáticos.

Assim, os alunos, com o auxílio de um plano cartesiano (eixo horizontal perpendicular ao eixo vertical) desenhado na folha sulfite no momento de transcrição das curvas, puderam notar que os focos e os vértices da hipérbole influenciaram na construção do esboço, em conformidade com a figura 6. Alguns testaram o procedimento com mais de um ponto da mesma hipérbole. E, constataram que a localização do foco e vértice são fixas.

Figura 6. Construção Geométrica do Foco e Vértice da Hipérbole.



Fonte: Os autores.

Por fim os estudantes realizaram um processo de teste de eficiência do procedimento utilizado com o auxílio de um compasso ou barbante, para o qual utilizaram a tabela 1 como modelo. De posse da tabela cada grupo registrou a distância entre os focos e um ponto qualquer da hipérbole, aplicando a definição. No total foram preenchidas 58 tabelas, após a finalização da atividade foi calculado o erro e encontrado que em mais de 80% das tabelas preenchidas o erro foi inferior a 0,5cm e em 12 tabelas o erro foi nulo.

Tabela 1: Modelo

Pontos	PF_1	PF_2	$\lvert PF_1 - PF_2 \rvert$	V_1V_2
P_1				
P_2				
P_3				
P_4				
P_5				

Fonte: Elaborada pelos autores.

Uso do Scratch para Ensino de Cônicas através de Projetos com Alunos do Ensino Fundamental

O Scratch é uma linguagem gráfica de programação, inspirada no Logo e desenvolvida especialmente para uso de crianças. Utilizando essa ferramenta é possível desenvolver diversos tipos de atividade como, por exemplo, criar histórias, animações e jogos. Pinto (2010) afirma que o Scratch é uma forma de promover um maior envolvimento dos alunos nas atividades pedagógicas, salientando que, durante sua investigação foi observada motivação e empenho, quando se recorreu ao Scratch e ao computador, em alunos que habitualmente estão alheios às normais atividades pedagógicas, nomeadamente às atividades Matemáticas.

Zoppo (2016) afirma que o Scratch proporciona a professores e estudantes uma nova possibilidade de aproximar o ensino dos conteúdos curriculares de Matemática com as tecnologias digitais. Afirmando ainda que

> Identificamos no software Scratch, duas possibilidades para a construção do conhecimento matemático. Uma delas é que o ambiente Scratch proporciona ao estudante a criação de projetos de seu interesse como: jogos, cartões animados, histórias interativas, pois é interativo, dinâmico e proporciona uma aprendizagem colaborativa como primeira impressão, possibilita ao estudante uma

> nova maneira de aprender, mais interativa e dinâmica. [...] Pois o estudante precisa elaborar mentalmente estratégias e assim dar comandos ao computador executá-las. [...] Uma segunda possibilidade com o Scratch é de o professor utilizá-lo como um material didático digital. Neste ambiente de programação o professor pode criar um objeto de aprendizagem que possibilite a aprendizagem de conteúdos específicos de Matemática de acordo com o objetivo de sua aula e posteriormente utiliza-o em sala com os estudantes (ZOPPO, 2010, n.p).

Assim, com base nas palavras da autora foi possível compreender duas estratégias didáticas a serem exploradas pelo professor em sala de aula ao trabalhar com o Scratch. Sejam elas: o ensino com base em projetos e a utilização como material didático digital.

Dentro dessa perspectiva, o ensino com base em projetos se encontra imerso no campo das metodologias ativas, que possibilitam compreender o aluno como ser protagonista da aprendizagem. Segundo Lorenzoni (2016) a aprendizagem com base em projetos é estruturada a partir dos seguintes passos: a) pergunta motivadora; b) desafio proposto; c) pesquisa e conteúdo; d) cumprindo o desafio; e) reflexão e feedback; f) responda à pergunta inicial; g) avaliação do aprendizado. Sendo uma estratégia de ensino a ser construída om base em um processo de investigação e elaboração coletiva.

Já o material didático digital pode ser compreendido como uma ramificação da tendência de ensino em Educação Matemática denominada como tecnologias da informação e comunicação (TICs). Para Kenski (2008) o uso das tecnologias para o ensino de matemática gera novas possibilidades de vivenciar e incorporar matemática nas escolas, podendo auxiliar na prática pedagógica do professor.

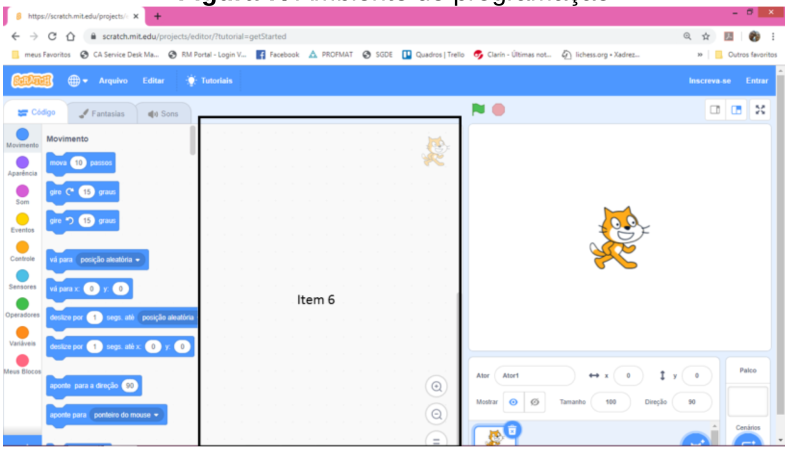
Nessa direção, no decorrer do ano de 2019 foi desenvolvido um projeto extracurricular numa Escola Estadual da cidade de Três Lagoas com alunos das turmas de 6º, 7º e 8º anos do ensino fundamental II, com encontros realizados duas vezes por semana durante os meses de abril a outubro. O grupo foi composto por 19 estudantes, sendo: 13 estudantes dos oitavos anos, 2 estudantes dos sétimos anos e 4 estudantes dos sextos anos. Uma das atividades realizadas nesse projeto foi a utilização do Scratch, um projeto do grupo Lifelong Kindergarten do MIT Media Lab, criado pelo Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT) nos Estados Unidos. A escolha do Scratch foi feita por utilizar uma linguagem de programação simples e dinâmica, possibilitando sua utilização para diversos projetos.

A ferramenta está disponível de três modos diferentes: Aplicativo, Software para instalação versão 2.0 e on-line 2. No desenvolvimento do projeto foi utilizada preferencialmente a versão on-line evitando a instalação do software nos computadores.

Ao iniciar a atividade foi apresentada aos alunos a página inicial do Scratch e foi definido que em todos os encontros os estudantes deveriam fazer login e acessar com o celular o QrCode que estaria impresso na porta, no qual estava um link da descrição da atividade do dia, com texto, vídeo e imagens, materiais disponibilizados gratuitamente na página do Scratch.

Na primeira aula foram apresentados os pré-requisitos básicos para os estudantes sobre a página com sua comunidade, estúdio, aulas e disponibilidade da ferramenta. Para a utilização da ferramenta os alunos precisaram fazer um cadastro com e-mail e dados pessoais, para a realização desse cadastro a escola exigiu uma autorização assinada dos pais ou responsáveis, com registro de assinatura na secretaria da Escola. Feito o cadastro, os estudantes exploraram os diversos ambientes da versão online de maneira a conhecer o funcionamento e possibilidades da ferramenta que iriam utilizar: como explorar a barra de ferramentas da página inicial idiomas, arquivo, editor, tutorial, como salvar documento na nuvem, fazer download, como restaurar um documento, código (onde fica toda construção do projeto com os blocos de movimento), inserir som, escolher fantasia (personagem que pode ser inserido: gato, rato, carro, homem, estrela, entre outros). Na figura 7 pode ser observado o ambiente onde é construída a programação, no qual devem ser colocados todos os blocos ordenadamente. Para cada fantasia selecionada pode ser realizado uma sequência de programação diferente e que colaborem uma com a outra. No canto superior direto está uma figura de um gato laranja, fantasia selecionada pelos estudantes para a produção do código.

Figura 7. Ambiente de programação



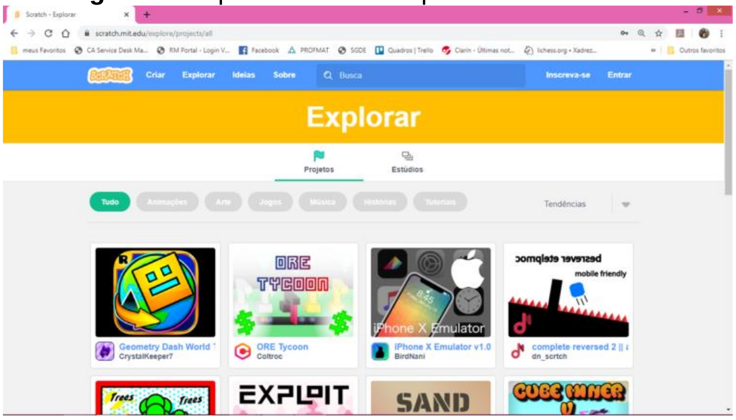
Fonte: https://scratch.mit.edu/projects/editor/?tutorial=getStarted

Na sequência os estudantes aprenderam a verificar o avanço da programação, arrumar a localização das fantasias selecionadas e preparar o melhor plano de fundo, inseriram nomes para cada fantasia utilizada e selecionaram o tamanho dos objetos.

Os estudantes aprenderam a explorar a comunidade do Scratch, com o objetivo de conhecer projetos de outras pessoas, estudar a programação produzida por eles, testar os projetos e, se for o caso, sugerir mudanças. Através da interação com a comunidade vários discentes participantes do projeto conseguiram produzir quiz, jogos e animações de maneira individual e coletiva. A figura 8 mostra uma captura de tela da comunidade do Scracth. Vários estudantes relataram que estudaram para outras disciplinas (ciência, geografia, história...) utilizando quiz e jogos disponíveis na comunidade[1].

[1] Aqui no Brasil existe a comunidade Scratch Brasil, http://www.scratchbrasil.net.br/. Esse site foi criado por fãs e educadores brasileiros para disseminar o uso da ferramenta.

Figura 8. Captura de tela - Explorar e Comunidade



Fonte: https://scratch.mit.edu/projects/editor/?tutorial=getStarted

Uma vez conhecida a ferramenta e suas funcionalidades, os participantes do projeto trabalharam na construção de um jogo cujo objetivo é destruir bandeiras com tiros de canhão da Primeira Guerra Mundial. Para a construção e aperfeiçoamento do jogo a equipe trabalhou de julho a dezembro de 2019. O jogo foi batizado de Projétil Balístico e está compartilhado na comunidade do Scratch pelo Prof_Lima. A utilização do jogo é feita em etapas, sendo que a primeira é a do contexto histórico da Primeira Guerra Mundial. A segunda etapa é do jogo propriamente dito, na qual o jogador deve utilizar o canhão para destruir as bandeiras verdes (figura 9).

Figura 9. Captura de tela - Jogo Projétil Balístico

Fonte: Elaborada pelos autores.

A terceira etapa do jogo é um quiz com perguntas sobre a parábola. Para chegar até o final do jogo o jogador precisa passar sem erros pelas três etapas, caso contrário, o jogo é reiniciado na etapa em que houve falha.

ISSN 2525-7056

Durante o processo de elaboração do projeto os estudantes trabalharam coletivamente para a produção do material (figura 10). A troca de experiências foi uma motivação especial para aprender e criar novos comandos em blocos.

Figura 10. Elaboração do Jogo

Fonte: Os autores.

Para melhoria da atividade os estudantes convidaram professores e alunos da escola para testarem e criticarem o desenvolvimento do projeto (figura 11).

Figura 11. Processo de teste do Jogo

Fonte: Os autores.

Considerações Finais

Giz, caderno, lousa e livros são recursos didáticos da escola, e para, além disso, é preciso considerar as tecnologias digitais, como ferramentas para a utilização no processo de ensino e aprendizagem da matemática, pois as tecnologias digitais estão inseridas no contexto social de professores e alunos. Basta um click, uma simples mensagem ou até mesmo uma rápida pesquisa na internet para ter acesso a informação, assim segundo Lévy (1998, p. 28) "a informática para o ensino pode ser considerada como sendo mais do que uma simples ferramenta de transmissão e gestão da informação". Ou seja, ela deve ser articulada como um espaço que possibilite conexões em prol da produção de conhecimentos matemáticos.

Dentro dessa perspectiva, sobre o uso do Software GeoGebra e do Software Scracth foi possível constatar sua efetividade nas práticas matemáticas, sendo eles abordagens pedagógicas que proporcionam a criação de um ambiente favorável para a aprendizagem matemática. Visto que por meio deles os estudantes conseguiram facilmente desenvolver as atividades propostas e com a avaliação bimestral constatou-se a evolução dos estudantes. No que diz respeito às escolas, foi constatado que as atividades foram bem recebidas, tanto por alunos, professores e coordenação da escola. Assim, o uso de tecnologias digitais nas aulas de matemática desperta no aluno o desejo por conhecer uma matemática em movimento.

Já a abordagem da oficina – Que curva é essa chamada Hipérbole? - se mostrou eficiente em conseguir a atenção e participação dos alunos, que relataram uma aula diferente, divertida na qual não viram a hora passar. Vale ressaltar que as coordenações das escolas foram procuradas e fizeram avaliações das atividades realizadas, a escola em que a atividade da massinha fora apresentada solicitou para cadastrar o experimento como um relato de Boas Práticas na imersão pedagógica da escola.

A resposta dos alunos em relação às atividades desenvolvidas mostra que o uso de materiais alternativos contribui para aproximar os alunos da disciplina e o docente, minimizando o preconceito existente de que Matemática é uma disciplina difícil ou para poucos. Assim, abordagens diferenciadas utilizando tecnologias digitais e materiais concretos, seja em aulas regulares ou por meio de projetos, possibilitam construir um espaço de reflexão, discussão e criação de uma Matemática atraente para o aluno, por oferecer conteúdos lúdicos e diferenciados que subsidiem a aprendizagem matemática.

Referências

Brasil. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Secretaria da Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997. Acessado em 10 de maio de 2020. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>

CALVOSO, J. C. **Estudo das Cônicas com Aplicações e o Software Geogebra como Ferramenta de Apoio Didático**. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Três Lagoas.

CURRÍCULO do Estado de São Paulo - Matemática e suas Tecnologias. Disponível em: <http://www.educacao.sp.gov.br/a2sitebox/arquivos/documentos/783.pdf>. Acesso em 10 de jun. de 2020.

DELMANTO, D. et al. **Prova Brasil na escola**: material para professores coordenadores pedagógicos e diretores de escola de ensino fundamental. 2007.

DIAS, E. R. Cônicas: **Atividades Aplicáveis no Ensino Médio com Auxílio de Geometria Dinâmica e Dobraduras**. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Campo Grande.

GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO. SECRETARIA DA EDUCAÇÃO. Material de Apoio ao Currículo do Estado de São Paulo: Caderno do professor. Matemática. 3ª série. Volume 1. São Paulo: SE, 2014.

KALEFF, A. M. **Tomando o ensino da Geometria em nossas mãos**... A Educação Matemática em Revista. SBEM, n. 2, p. 19-25, 1994.

KENSKI, V. M.; **Memória, vivências e tecnologias**. In: ENCONTRO NACIONAL DE PRÁTICA DIDÁTICA E PRÁTICA DE ENSINO, 14, 2008, Porto Alegre. Anais... Porto Alegre, RS: EDIPUCRS, 2008. p. 751 – 768.

LEVY, P. A máquina universo: criação, cognição e cultura informática. Tradução Bruno Charles Magne. Porto Alegre: Editora ArtMed, 1998.

LIMA JUNIOR, C. A. **Cônicas no Ensino Médio: Experiências com o Uso de Materiais Manipuláveis e Novas Tecnologias**. 2019. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Três Lagoas.

LORENZONI, M. Aprendizagem Baseada em Projetos (PBL) em 7 passos. **InfoGeeks**. 2016. Disponível em: <https://www.geekie.com.br/blog/aprendizagem-baseada-em-projetos/>. Acesso em: 10 jun. 2020.

OLIVEIRA, M. A. C. de M. **O estudo da cônica elipse com atividades extraclasse**. 2018. 66 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) - UFMS, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Três Lagoas, 2018.

PINTO, A. S. **Scratch na aprendizagem da Matemática no 1. º Ciclo do Ensino Básico: estudo de caso na resolução de problemas. 2010. 119 f**. 2010. Tese de Doutorado. Dissertação (Mestrado em Área de Especialização em Estudos da Criança Tecnologias de Informação e Comunicação) - Universidade do Minho, Braga.

REIS, G. M. **HIPÉRBOLE: Construção do conceito no processo ensino-aprendizagem.** 2018. 116 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) - UFMS, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Três Lagoas, 2018.

SOARES, M.Z.M.C.; SANTINHO, M.S.; MACHADO, R.M.; RODRIGUEZ, W.R. Que curva é esta chamada hipérbole? [s,d]. Disponível em: <https://www.ime.unicamp.br/~lem/>. Acesso em: 10 de jun. de 2020.

SOUZA, L. B.; OESCHLER, V. **Uma Abordagem para o Ensino de Cônicas por Meio de Tecnologias Digitais**. In: XII ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática. São Paulo, SP. 2016.

ZOPPO, Beatriz Maria. O uso do Scratch no ensino da matemática. **XX EBRAPEM – Encontro Brasileiro do Estudante de Pós-Graduação em Educação Matemática.** Anais, Curitiba, PR, 2016.

A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO FERRAMENTA DESMISTIFICADORA E PROPULSORA DO PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM

THE HISTORY OF MATHEMATICS AS A DEMYSTIFYING AND PROPELLING TOOL FOR THE TEACHING-LEARNING PROCESS

José Paulo Rodrigues da Silveira[1]

Fernando Pereira de Souza[2]

RESUMO: Este artigo trata-se de um relato de experiência com alunos do Ensino Fundamental, Médio e Educação de Jovens e Adultos (EJA) de uma escola estadual situada na cidade de Três Lagoas / MS, as atividades e dados deste artigo foram compilados entre os anos de 2016 e 2018. O objetivo do trabalho foi o estudo da História da Matemática com rodas de conversa, formação de grupos de pesquisa entre os alunos e confecção de materiais didáticos. O artigo retrata algumas ideias de atividades que envolvem a História da Matemática e que podem ser utilizadas em sala de aula de forma prazerosa, lúdica e que podem despertar o espírito investigativo e disposto dos alunos.

PALAVRAS-CHAVE: História da Matemática. Desmistificação. Didática.

ABSTRACT: This article is an experience report with students from Elementary, High School and Youth and Adult Education (EJA) from a state school located in the city of Três Lagoas / MS, the activities and data of this article were compiled between the years 2016 and 2018. The objective of the work was to study the History of Mathematics with conversation circles, formation of research groups among students and preparation of teaching materials. The article portrays some ideas of activities that involve History of Mathematics and that can be used in the classroom in a pleasant, playful way that can awaken the investigative and willing spirit of students.

KEYWORDS: History of Mathematics. Demystification. Didactics.

Introdução

O que nos leva a ter uma relação de amizade com alguém? Com certeza o tempo que passamos juntos, as conversas que iniciamos e as ideologias que defendemos são fatores cruciais para uma relação interpessoal sólida, consistente e duradoura. Cada pessoa carrega uma bagagem de conhecimento, de cultura e de história por onde quer que vá. A Matemática

[1] Mestre em Matemática (PROFMAT) pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas. Professor da Escola SESI MS – Três Lagoas. E-mail: josepapt@gmail.com

[2] Doutor em Matemática pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Professor do Campus de Três Lagoas da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (CPTL/UFMS). E-mail: fermatmel@gmail.com

também leva consigo um riquíssimo e amplo mundo de encantamentos e histórias que fascinam.

Quando utilizamos a História da Matemática como objeto propulsor no aprendizado dos nossos alunos, estamos na verdade fazendo dos mesmos, estudantes críticos, intuitivos, curiosos e preparados para o mundo. Trabalhar história significa explorar o mundo onde se vive, expandir os horizontes e observar novos caminhos.

Este artigo está dividido em três etapas: “Contextualização Histórica”, onde será apresentado um breve resumo sobre o conceito teórico que os alunos pesquisaram, compreenderam e exploraram durante as atividades propostas; “A História da Matemática como Ferramenta Metodológica de Ensino”, sobre a importância da inovação no ensino, principalmente da Matemática; “Atividades desenvolvidas dentro e fora da sala de aula” com propostas de atividades envolvendo História da Matemática.

Resultados

A época em que vivemos tem se mostrado um período marcado por diversas transformações de cunho político, econômico e social. A escola, inserida neste meio e com sua função social, também vem sofrendo uma série de transformações a fim de acompanhar o progresso tecnológico e o seu avanço expansivo cada vez mais abrangente na sociedade global. Tanto é que, recentemente, se fez necessário um estudo da proposta para uma Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e também de um novo Ensino Médio para atender as demandas exigidas e melhorar a qualidade do ensino.

Conforme definido na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei nº 9.394/1996):

> A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) estabelece conhecimentos, competências e habilidades que se espera que todos os estudantes desenvolvam ao longo da escolaridade básica. Orientada pelos princípios éticos, políticos e estéticos traçados pelas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica, a Base soma-se aos propósitos que direcionam a educação brasileira para a formação humana integral e para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

Quando o assunto é educação, o Brasil ainda se encontra em posição muito baixa quando comparado com os outros países e um dos fatores que contribui de forma significativa para isso é a maneira que a escola vem transmitindo conteúdo, conhecimentos e ideias (PINTO, 2019). Essa transmissão de conhecimento é muitas vezes dividida em disciplinas totalmente isoladas umas das outras e exposta de maneira tradicional, quase sempre sem nexo com a realidade dos alunos.

Segundo Camila Nicola Boeri e Márcio Tadeu Vione (2009), dentre as defasagens no ensino e na aprendizagem, destaca-se o ensino de Matemática que muitas vezes é realizado de forma isolada, desestimulante e longe do cotidiano dos discentes, contribuindo assim para uma mistificação da mesma como matéria e como ciência. Sendo assim, cabe o seguinte questionamento: “Como tem sido a formação dos professores de matemática?”.

Sobre a formação dos professores de Matemática, devemos nos perguntar: “Qual a formação acadêmica que esses professores recebem? Será que saem preparados da universidade? ”. Segundo Goldemberg (1993) universidade é uma preparação fundamental, mas que nem sempre supre todas as necessidades de um bom profissional. Desta forma, aquele que deseja ser destaque e desempenhar um bom papel deve estar sempre inovando suas técnicas e principalmente sua didática em ensinar. Para isso, o professor deve estar sempre em constante busca pelo saber, se capacitando e estudando.

Muitos cursos de Licenciatura em Matemática já possuem a disciplina de História da Matemática como disciplina obrigatória ou como eletiva. Esta disciplina proporciona um conhecimento essencial sobre a relação entre a história por trás do progresso tecnológico e científico desta ciência, explicando como se originaram determinados problemas e como alguns estudiosos avançaram seus conhecimentos para solucioná-los. O professor que cursa essa disciplina também passa a conhecer um pouco mais sobre os principais nomes dos matemáticos envolvidos e as suas contribuições, proporcionando assim uma melhor atuação profissional.

Foi através da necessidade e da curiosidade humana de desbravar e conhecer o mundo que a Matemática avançou como ciência e foi cada vez mais aperfeiçoada. Analogamente, é papel do professor ter respostas que sanem as indagações e curiosidades de seus alunos, fazendo com que estes vejam a dependência que têm diariamente da Matemática, que é um pilar essencial na vida cotidiana, por exemplo: o despertador para se acordar no horário, as informações que chegam em nossos smartphones, computadores, o troco do lanche entre outras. Segundo (FILHO, 2003, p 44) “As necessidades do homem, com os mais variados propósitos, fizeram dele, através dos tempos, um estudioso dos problemas naturais, bem como de suas causas e efeitos”.

Segundo Stein (2008), as teorias matemáticas são de extrema utilidade para se explicar os fenômenos do mundo em que vivemos, para alicerçar a sobrevivência humana e para garantir o progresso técnico-cientifico. Como exemplo disso, temos o sistema de contagem que se utiliza hoje, essencial para as funções mais simples da nossa vida. Este sistema não foi algo fabricado com o intuito de ser utilizado posteriormente. Ele foi aperfeiçoado ao passar dos séculos, na medida que supria as necessidades do homem em cada época. Os animais, as pedras, as frutas coletadas e até mesmo os próprios dedos das mãos fizeram com que fossem surgindo tal sistema.

Quando os alunos conhecem um pouco sobre o contexto histórico por trás de um conteúdo proposto, desenvolverão um maior interesse e uma percepção mais aguçada sobre a realidade da Matemática, vendo que está ciência está em constante desenvolvimento. Perceberão também que ela não é tida como imutável e que tudo que conhecemos hoje pode ter sido desenvolvido, moldado e aperfeiçoado através de problemas e situações variadas, com erros e acertos. Podemos perceber esse desenvolvimento da matemática, por exemplo, através da necessidade de criação do conjunto dos números irracionais através de um problema geométrico: calcular a medida da diagonal de um quadrado de lados 1 centímetro. Tudo isso fez com que o homem tornasse a Matemática uma ferramenta crucial para se entender e dominar o mundo em que vive.

ISSN 2525-7056

Segundo Santos (2009), é importante olhar para o passado para estudar matemática, pois perceber as evoluções das ideias matemáticas observando somente o estado atual dessa ciência não nos dá toda a dimensão das mudanças.

Realmente, assim como conhecer a história de vida de uma pessoa nos leva a entender como ela chegou onde está hoje e a compreender um pouco sobre as características, qualidades e peculiaridades dela, conhecer a trajetória da Matemática como ciência motiva e ajuda a compreender as respostas a muitos porquês.

Quando um docente se entrega à profissão, ele assume o compromisso inerente à profissão de responder a todos os porquês dos alunos. Quando não se utiliza o contexto histórico, fica muito difícil explicar para os alunos o “Pra que serve a Matemática? Onde vou utilizar isso? Quem inventou essas coisas difíceis?”. Todavia, não basta apenas utilizar o contexto, o mesmo deve ser explorado e amarrado ao conteúdo para que realmente cumpra com o objetivo desejado. Em nenhum momento deve-se utilizar a história apenas como uma simples ilustração ou como algo disperso do conteúdo, apenas para ressaltar datas e fatos isolados. O papel do professor, intermediador do conhecimento, é ensinar e despertar o interesse do aprender matemático.

Ao compreender que o avanço técnico, científico e social da sociedade humana está associado ao progresso da Matemática, os alunos passarão a entender melhor o porquê de estudar essa disciplina, bem como perceber sua importância para a sociedade e para as outras ciências existentes. Sendo assim, com certeza o ensino de Matemática será diferenciado e cumprirá com o seu verdadeiro propósito. A aula de Matemática deve sanar todas as curiosidades e porquês dos estudantes. É nesse ponto que se insere a contextualização e aplicação da História da Matemática como instrumento auxiliador, mostrando que a Matemática está profundamente ligada às atividades humanas.

É importante salientar também que a Matemática é uma ciência viva. Existem Teoremas e Provas que não foram desvendados até hoje. Existem outros que levaram séculos para serem até mesmo formulados. O último Teorema de Fermat, por exemplo, ficou mais de 300 anos sem solução, mesmo após inúmeras tentativas dos maiores matemáticos das últimas décadas em solucioná-lo. Embora seja um problema de entendimento fácil, sua demonstração só pôde ser realizada na década de 1990. O site Hypescience publicou em 2014 uma matéria de Stephanie D'Ornelas, chamada "Os problemas de matemática que valem 1 milhão de dólares" que falam sobre problemas matemáticos que ainda estão em aberto e que são bem interessantes para serem trabalhados com os alunos como fatos curiosos. Obviamente, professores não cobrar que todos os alunos, em um primeiro momento, compreendam em sua totalidade todas as nossas aulas. A calma é uma virtude para qualquer profissional, principalmente para um educador. O conhecimento é construído degrau por degrau e mais importante ainda é o resultado da assimilação, muitas vezes demorado para ser conquistado. Dessa maneira, é fundamental que os alunos entendam a História da Matemática como ferramenta capaz de abrir novos horizontes, que fomentem a absorção de conhecimentos de vida e de mundo, uma vez que foi construída pelas mais diversas civilizações ao longo do tempo.

Uma boa preparação docente unida com o suporte necessário fará com que a História da Matemática estimule e motive o processo de ensino-aprendizagem, contribuindo assim para melhorias nos indicadores e índices educacionais, para a permanência da escola e diminuição da evasão escolar, para a promoção anual e principalmente quebrando paradigmas e lendas de que a Matemática é uma disciplina muito difícil e mística, ideia essa que se carrega já há tempos.

Não se pode negar que o mundo em que vivemos pode ser denominado como o "mundo dos números", pois nossa sociedade é totalmente dependente da Matemática e ela está presente em tudo à nossa volta, embora a maior parte das pessoas não perceba. Todavia, é óbvio que as sociedades antigas tiveram noção sobre quantidade (animais que caçavam, as fases da lua que observavam para contar o tempo, os objetos que confeccionavam). É imediato

ISSN 2525-7056

associar a história dos números com a necessidade de contagem. Um exemplo muito comum é o de pastores de ovelhas que teriam de controlar o rebanho, associando cada animal a uma pedra. Posteriormente, graças à praticidade, associava-se marcas escritas na argila. Os primeiros registros de escrita originam-se da Baixa Mesopotâmia (atual Iraque). O surgimento da escrita e o avanço da matemática estão relacionados nessa região. Nesta época, registrava-se não apenas os rebanhos, mas também a quantidade de insumos e mantimentos relacionados à sobrevivência e organização da sociedade. Tudo isso acarretou um considerável crescimento populacional, onde passaram a surgir cidades e técnicas de administração da vida comum. Por fim, após muitos anos (séculos) de descobertas e aperfeiçoamentos chegamos à forma atual em que escrevemos os números.

Muitos desses povos deixaram seus registros e símbolos de acordo com o que faziam na época, de como eram as suas reais necessidades e também porque precisavam registrar essas informações. Eles utilizaram marcas em ossos e madeiras, nós em cordas, lascas de pedras, gravetos e muitas outras formas. Por exemplo, temos o famoso Papiro de Rhind, conforme a figura 1 abaixo. Segundo a história, o advogado escocês A. H. Rhind (1833 – 1863) viajou para o Egito e começou a estudar objetos da antiguidade. Em 1858 adquiriu um papiro com textos matemáticos com dimensões de 5,5 m por 0,32 m, datado aproximadamente em 1650 a. C. Este papiro é escrito em forma de um manual prático com 85 problemas matemáticos copiados em escrita hierática pelo escriba Ahmes.

Figura 1 – Foto do Papiro de Rhind (Ahmes).

Fonte: educ.fc.ul.pt/icm/icm2002/icm202/Papiro.htm
(acesso em 20 de Jun. 2018)

Embora muitas fontes para o estudo das civilizações muito antigas estejam fragmentadas e sejam escassas, podemos dizer que várias atividades como o pastoreio e, posteriormente, o comércio foram fatores cruciais para que o homem registrasse cada vez maiores quantidades de informações, levando-o a uma maneira aperfeiçoada de fazer contagem e representar esses números. Um livro recomendado para o estudo da Matemática e muito utilizado na formação de docente da área é o (BOYER, 1974). Este livro apresenta tópicos como o último teorema de Fermat e a conjectura de Poincaré, além de diversos avanços na área dos conjuntos finitos e demonstrações feitas através do computador. O mais interessante é a diversidade que o livro transmite. Pode-se encontrar diversos assuntos, como por exemplo, ideias de Platão e Aristóteles, bem como o Teorema de Pitágoras e a Lei Áurea. O livro explora a história incrível daqueles que ajudaram a criar a matemática que temos hoje.

Atividades Realizadas em Sala de Aula

Durante os anos de 2016 e 2018 foram realizadas diversas atividades, pesquisas, jogos e trabalhos com alunos do Ensino Fundamental, Médio e EJA de uma escola estadual situada na cidade de Três Lagoas. Essas atividades foram vinculadas à disciplina de Matemática com objetivo de ressaltar a importância da História, dessa ciência como ferramenta propulsora e desmistificadora do processo de Ensino-Aprendizagem.

- Roda de conversa

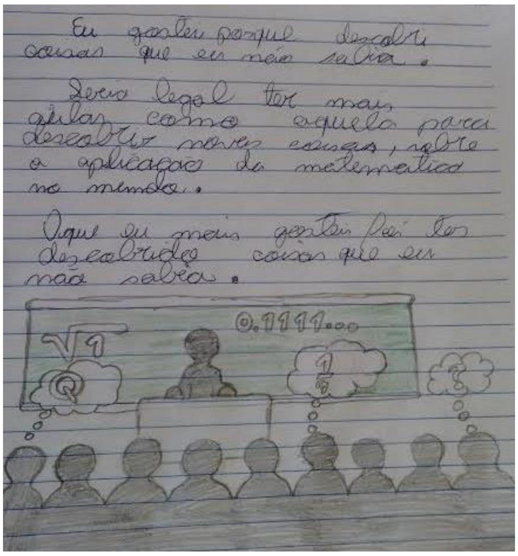
Os alunos foram divididos em grupos, onde cada grupo ficou responsável de pesquisar sobre um tema (Matemática no Egito, Matemática na Babilônia, "Origem" da Matemática e Aplicações da Matemática), onde dada uma referência bibliográfica, eles prepararam uma apresentação oral para a futura roda de conversa. A ideia seria expor pontos que eles acharam interessantes, curiosos e que agregassem conhecimentos sobre a história, cultura e matemática da época envolvida. Foi dado então um prazo (cerca de um mês) para que os alunos preparassem a pesquisa e também

ISSN 2525-7056

consolidassem as informações para que as expusessem oralmente aos demais colegas. Foi pedido também que eles levassem desenhos que retratassem a época e os sistemas de numerações.

Durante a roda de conversa, os alunos montaram um círculo (na área interna da classe ou externa – pátio, biblioteca, jardim) onde tiveram uma conversa informal sobre suas descobertas e dúvidas encontradas. O professor foi apenas mediador do processo e tomava a frente somente quando surgissem dúvidas. A atividade final incentivou o trabalho em equipe, a solidariedade e o espirito coletivo dos alunos, uma vez que cada grupo se encarregou de levar um alimento e compartilhar com os demais, fazendo assim um piquenique da turma.

Figura 2: Relato de aluno do 8º ano sobre a atividade de roda de conversa.



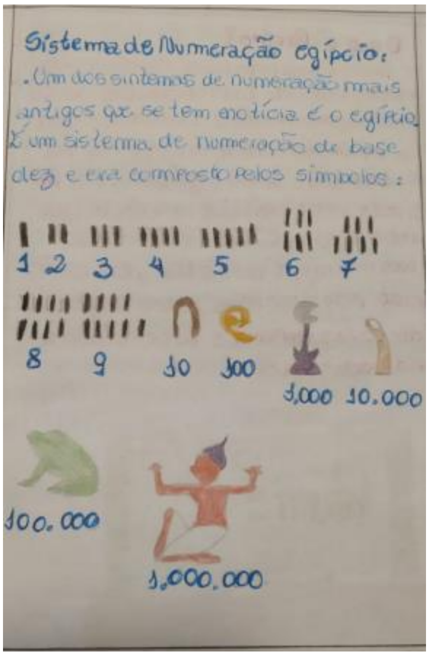
Fonte: O autor.

- Confecção de livros interdisciplinares

Ao trabalhar matemática com as turmas iniciais do Fundamental II (Principalmente 7º ano), notamos que seria interessante a confecção de um material interdisciplinar sobre a história da Matemática, que despertasse o espírito investigativo e curioso quanto aos avanços técnicos, científicos e culturais da Matemática como ciência. Foram confeccionados livros sobre o contexto da Matemática no Egito. A ideia era de que o livro fosse totalmente ilustrado e que as imagens explicassem de forma visual aquilo que os alunos compreenderam realmente.

A turma foi dividida em grupos de dois a três alunos e cada equipe era encarregada de dobrar 3 sulfites ao meio e grampeá-las, formando um livro de 12 páginas. Logo após, eles deveriam confeccionar as margens, uma capa ilustrada e um índice do conteúdo abordado. As demais páginas possuíam o título e a ilustração do que deveria ser representado. Por exemplo, o livro retratava os temas: localização geográfica, cultura local, moeda, divisão da sociedade, as magníficas pirâmides, a relação entre o papiro e a Matemática, o processo de mumificação, a importância do Rio Nilo, o sistema de numeração Egípcio, dentre outros assuntos.

Figura 3: Página de um livro de uma aluna do 7º ano retratando o sistema de numeração Egípcio.



Fonte: O autor.

Cada um desses assuntos era pesquisado na sala de informática da escola (ou local de preferência do aluno), com auxílio da PROGETEC ou do professor. Os alunos também tinham livre arbítrio para fazer as pesquisas em casa ou em outro lugar de sua preferência. Logo após um prazo de três semanas, os alunos entregaram os livros ilustrados que seriam utilizados em uma aula futura da seguinte forma: haveria a formação de uma roda de leitura na parte externa da sala de aula, na qual compartilhariam os livros confeccionados, fazendo assim um intercâmbio de conhecimento, experiências e vivências. Em seguida, compartilham um lanche coletivo, transformando assim a aula de Matemática em uma aula contextualizada, enriquecedora, formativa e interdisciplinar.

- Construção de grupos de estudos e projeto de pesquisa

Durante o ano letivo de 2017, em trabalho com as turmas do Ensino Médio, foi desenvolvido um projeto de pesquisa com estes alunos. Esse projeto foi realizado na Escola, com participação de 3 turmas de Ensino Médio (cerca de 110 alunos, porém com liderança de mais ou menos 20 estudantes). As pesquisas foram feitas em parceria com as disciplinas de Projeto de Vida e Pesquisa, com total aprovação da coordenação pedagógica e direção. Durante a etapa de planejamento fez-se reuniões quinzenais registradas em ata sobre os temas a serem pesquisados (tais como: Matemática no Egito, Matemática na Babilônia e Aplicações da Matemática). Os alunos faziam as tabulações dos resultados obtidos e dividiam com o grupo as suas descobertas e curiosidades. Durante as reuniões os alunos também confeccionaram manualmente alguns jogos que seriam utilizados como aprendizado matemático.

O objetivo final das pesquisas individuais e coletivas era desenvolver um projeto que fosse apresentado na feira de ciências da escola, que aconteceria no final do ano letivo. Todavia, os resultados foram melhores que o esperado. Pela primeira vez, esses alunos tiveram a oportunidade de escrever um projeto científico e apresentá-lo em um evento externo, uma oportunidade ímpar até então. O evento foi o FACITEL, oferecido pelo Instituto Federal de Mato Grosso do Sul, que ocorreu no final do ano de 2017, na cidade de Três Lagoas. Os alunos tiveram a oportunidade de levar o seu trabalho e dividir com a comunidade acadêmica as atividades que vinham desenvolvendo.

Durante o evento, os alunos tiveram a ideia de trabalhar um túnel histórico da matemática. A ideia do túnel era apresentar as características da Matemática da época em que ela era retratada, como por exemplo: o sistema de numeração utilizado, as problemáticas envolvidas naquele determinado período, as características, a cultura e a vestimenta da sociedade ali apresentados. Os temas abordados na apresentação foram os seguintes: A Matemática na Pré-História, A Matemática no Egito, A Matemática na Babilônia e a Matemática na Grécia Antiga. No final, eles apresentavam o avanço técnico-cientifico que temos hoje em contraste com as épocas anteriores.

No dia da apresentação do túnel histórico, ao entrar na sala em grupos de no máximo 10 pessoas, os alunos eram conduzidos com a ajuda de duas alunas vestidas de mágicas ("Mate-MÁGICA"). Os alunos eram levados em um cenário por vez, onde recebiam as instruções e passavam para o próximo. A apresentação também teve uma grande ajuda dos alunos do Ensino Fundamental, que cederam todo o material que construíram, como por exemplo, os livros ilustrados e cartazes.

Além disso, foram de grande ajuda na construção e decoração dos cenários trabalhados.

Segue agora alguns relatos dos alunos envolvidos nas atividades:

"Algo que chamou muito a atenção foi que logo após as atividades era pedido para que os alunos do fundamental fizessem um breve relatório avaliando a aula, com pontos que gostaram, o porquê de terem gostado e o que aprenderam os resultados obtidos com esses relatórios sempre eram muito bons, porque ajudavam a melhorar alguns pontos e aperfeiçoar aqueles que já estavam bons". Foi incrível ver que mesmo aqueles alunos tímidos, com dificuldades em se expressar, se saiam tão bem com as palavras.

Esses relatórios também podem ser utilizados como critérios avaliativos contínuos, além de ajudar na escrita dos alunos. Através das palavras, ilustrações e expressões pode-se notar que o aluno observou, entendeu, assimilou e o que esse conhecimento pode modificar no seu cotidiano. Segue alguns exemplos feitos por alunos dos oitavos anos:

" Eu gostei (da aula) porque eu descobri coisas que eu não sabia. Seria legal ter mais aulas como aquela para descobrir novas coisas sobre aplicação da matemática no mundo. O que eu mais gostei foi ter descoberto coisas que eu não sabia.”.

“Eu gostei porque me ajudou a aprender mais a matéria, gostei das coisas que comemos durante a roda de conversa. Foi muito legal e nos divertimos muito. Gostei. Foi uma das melhores aulas da minha vida”.

“Foi uma das melhores aulas da minha vida!.” Essa frase foi um marco na avaliação das atividades, muito gratificante saber que se pode minimizar estereótipos, preconceitos da Matemática e despertar o interesse e curiosidade dos nossos alunos

“Eu gostei da matemática no Egito porque o professor nos ensinou como contar na forma egípcia e porque deu para gente aprender a gostar da matemática. As (apresentações) dos outros grupos foi legal também e ensinou a gente que nós usamos tudo da matemática no nosso dia-a-dia”. Novamente aqui uma frase que inspira qualquer profissional em educação: “Deu pra gente aprender a gostar de matemática!”.

Considerações Finais

Sabe-se que a disciplina de Matemática é riquíssima e está interligada a outros níveis de conhecimento que se interagem constantemente, possibilitando assim a utilização de pesquisas extraclasses, leituras, atividades práticas, lúdicas e brincadeiras, além do uso de recursos tecnológicos. O mundo contemporâneo e tecnológico é composto pela troca de informações, onde se tem acesso rápido a qualquer tipo de fonte de conhecimento, exigindo assim tamanha destreza e habilidade do educador. Este deve estar envolvido completamente no processo educativo, fazendo as intervenções necessárias frente ao processo ensino-aprendizado.

Por meio de um estudo sobre as aplicações e História da Matemática, pode-se perceber o longo percurso que esta percorreu durante toda a história da humanidade, passando por várias fases a fim de desvendar os problemas da sociedade, solucionando suas preocupações em relação a vários aspectos (sociais, filosóficos, culturais, religiosos, territoriais, dentre outros).

Pode-se dizer também que em um primeiro momento alguns alunos talvez não gostem muito de história, pois acham cansativo (principalmente no ensino médio). Já outros, que possuem maior dificuldade em cálculos, prefiram as atividades diferenciadas. Sendo assim, cabe ao professor buscar um meio termo de unir as duas coisas e despertar o interesse do saber em seus alunos.

Justamente para trabalhar o aspecto interdisciplinar tão indispensável e em alta no momento em que vivemos na educação, este trabalho constituiu-se em desenvolver e detalhar atividades diferenciadas de pesquisas, apresentações, leituras, discussões, construções e reconstruções de conhecimentos e conceitos, análises críticas do contexto matemático ao longo da história humana. Verificou-se assim que todas as atividades propostas durante o percurso possibilitaram maior integração e familiarização às demais áreas do conhecimento, tornando as aulas de matemática mais criativas, enriquecedoras, agradáveis e motivacionais.

Pode-se notar isso nos depoimentos dos alunos, já citados neste relato de experiência e nos resultados obtidos ao longo do percurso, uma vez que os alunos passaram a se esforçar ainda mais na disciplina possibilitando assim um aumento de conhecimento e consequentemente, melhorias no rendimento escolar e médias da turma.

Referências

BECK, V.C. **A Matemática no Egito Antigo.** Anais Erematsul, PUCRS, 2010. Disponível em: http://www.pucrs.br/edipucrs/erematsul/comunicacoes/38VINICIUSCARVALHOBECK.pdf. Acesso em: 20 jun. 2018.

BOERI, C. N. **Abordagens em Educação Matemática.** Disponível em http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/ea000661.pdf. Acesso em 01 junho 2020.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgar Blücher, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular.** Brasília: MEC/SEB, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br Acesso em: 19 jun. 2018

D'ORNELAS, S. **Os problemas de matemática que valem 1 milhão de**

ISSN 2525-7056

dólares, 18 mar. 2014. Disponível em https://hypescience.com/problemas-matematica/. Acesso em 08 junho 2020.

FILHO, B. B.; SILVA, C.X. **A matemática aula por aula**. São Paulo: FTD, 2003.

GOLDEMBERG, J. **O repensar da educação no Brasil**, São Paulo: Universidade de São Paulo, 1993.

PINTO, D.O. **PISA - Ranking de educação mundial: entenda os dados do Brasil.** [*S. l.*], 26 jul. 2019. Disponível em: https://blog.lyceum.com.br/ranking-de-educacao-mundial-posicao-do-brasil/. Acesso em: 29 maio 2020.

SANTOS, L.M. **Metodologia do ensino de Matemática e Física: Tópicos de história da física e da matemática.** Curitiba: Ibpex, 2009.

STEIN, J. D. **Como a Matemática Explica o Mundo**, editora Elsevier, Universidade Federal Fluminense – Rio