ISSN 2525-7056

ARTE E TECNOLOGIA: ALIADAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

ART AND TECHNOLOGY: ALLIES IN MATHEMATICS TEACHING

Emília de Mendonça Rosa Marques[1]

Euro Marques Júnior[2]

Aguinaldo Robinson de Souza[3]

RESUMO: Este artigo visa ampliar as possibilidades de abordagens metodológicas para o ensino e aprendizagem de números complexos e suas funções através da apresentação do software F(C): Funções Complexas, o qual tem possibilitado a representação gráfica colorida dos números complexos e suas funções, através do Método dos Domínios Coloridos. A combinação dos softwares educativos F(C): Funções Complexas e GeoGebra, é uma abordagem metodológica que tem se mostrado facilitadora do processo de ensino e aprendizagem do tema. O software F(C): Funções Complexas foi desenvolvido como pesquisa do mestrado acadêmico do curso de pós-graduação em Educação para a Ciência da Unesp/FC/Bauru, em 2003, e desde então tem sido utilizado em diversas áreas, no ensino de matemática, em pesquisas de dinâmica de fluidos e campos eletromagnéticos e nas artes visuais, dentre outras. Um princípio importante na utilização desse software é a distinção entre exibição e visualização, sendo esta última capaz de permitir que o espectador realize uma construção mental do objeto a ser estudado. Após a aplicação de uma função, as imagens coloridas geram um "quadro", o qual é denominado "Domínio Colorido" (domain coloring) e deve ser visto como a combinação de uma impressão visual com a compreensão dos conteúdos matemáticos considerados.

PALAVRAS-CHAVE: Números Complexos. Método dos Domínios Coloridos. Software F(C): Funções Complexas.

ABSTRACT: This article aims to expand the possibilities of methodological approaches for teaching and learning complex numbers and their functions through the presentation of the F(C): Complex Functions software, which has enabled the colorful graphic representation of complex numbers and their functions, through the Colored Domains Method. The combination of educational software F(C): Complex Functions and GeoGebra, is a methodological approach that has been shown to facilitate the process of teaching and learning the theme. The F(C): Complex Functions software was developed as a research for the postgraduate course in Education for Science at Unesp/FC/Bauru, in 2003, and since then it has been used in several areas, in the teaching of mathematics, in research on fluid dynamics and electromagnetic fields and in the visual arts, among others. An important principle in the use of this software is the distinction between display and visualization, the latter being able to allow the viewer to make a mental construction of the object to be studied. After the application of a function, the colored images generate a "frame", which is called domain coloring and must be seen as the combination of a visual impression with an understanding of the mathematical contents considered.

KEYWORDS: Complex numbers. Colored Domains Method. Software F(C): Complex Function.

[1] Universidade Estadual Paulista. E-mail: emilia.marques@unesp.br.
http://orcid.org/0000-0002-7609-0351
[2] Faculdade de Agudos. E-mail: euro.marques@faag.com.br
http://orcid.org/0000-0001-5498-7128
[3] Universidade Estadual Paulista. E-mail: aguinaldo.robinson@unesp.br
https://orcid.org/0000-0003-2373-267X

● Informações completas da obra no final do artigo

Introdução

O estudo dos Números Complexos evoluiu de forma importante nos últimos séculos, desde sua formalização nos séculos XVI a XVIII. O Frei Luca Pacioli, em 1494, afirmou não existir uma regra para resolver uma equação *depress* do tipo $x^3 - px = q$. Graças ao advento da prensa móvel de Gutemberg, esse fato foi amplamente divulgado e se tornou um grande desafio para os matemáticos da época. Alguns algebristas italianos, como Cardano, Del Ferro e Tartaglia, trouxeram caminhos importantes para essa formalização, através do feito matemático mais extraordinário do século XVI, que foi a descoberta da solução algébrica das equações cúbica e do quarto grau.

Atualmente os números complexos e suas funções estão presentes em praticamente todos os ramos da Matemática, como a Álgebra, Topologia, Geometria (Analítica, Diferencial e Algébrica), Análise, e outros. Utilizando as equações da Análise Complexa pode-se construir muitas aplicações em áreas como Dinâmica dos Fluidos, Mecânica Quântica e Eletromagnetismo, as quais exemplificam, e explicam, fenômenos físicos e químicos de modo mais adequado que aqueles tratados apenas com ferramentas da Análise Real.

Neste artigo, usando funções complexas de forma associada à Computação Gráfica, contexto que favoreceu a produção de imagens a partir da composição de cores pré-determinadas no Plano Complexo Colorido, denominado “Mapa de Cores”, objetiva-se apresentar a Arte Generativa dos Domínios Coloridos de Funções Complexas de diversas funções complexas, auxiliando no ensino da Matemática. Acredita-se que através da apresentação e discussão dessa arte, pode-se despertar em estudantes, professores e comunidade em geral, interesse relevante pela Matemática e tópicos importantes dela, bem como obter a possibilidade de produção de inferências a partir da abordagem geométrica das representações das funções. Os quadros são produzidos utilizando-se o software F(C): Funções Complexas, desenvolvido em 2003, por um ex-aluno da Licenciatura em Matemática, durante seu mestrado na Pós-Graduação da Faculdade de Ciências. Os quadros são atualmente denominados Domínios Coloridos.

A Arte Generativa, que segundo Philip Galanter (2003), refere-se a qualquer prática artística em que o artista usa um sistema, como um conjunto de regras, um programa de computador, uma máquina ou outra invenção processual, que é acionada com algum grau de autonomia e contribui ou resulta em uma obra de arte concluída. No contexto deste trabalho, a Arte foi produzida a partir de um programa de computador, batizado como F(C): Funções Complexas. Neste artigo visa-se a apresentação do referido software educativo, disponibilizado gratuitamente no site https://www2.fc.unesp.br/ matematicaearte/index.php, que tem apresentado grande potencial para o ensino e a pesquisa.

Pretende-se apresentar, ainda, uma sequência pedagógica voltada ao público do Ensino Médio, seus professores e graduandos no início da formação inicial, quando se deparam com os números complexos e as funções complexas elementares. A sequência prevê o estudo de propriedades algébricas através da abordagem geométrica dinâmica da alteração de parâmetros nas funções, as quais muitas vezes alteram as cores e as tonalidades.

Objetivo Geral

O principal objetivo deste artigo é apresentar os números complexos, suas funções e as possíveis aplicações nas Ciências Exatas num novo contexto, associado à Computação Gráfica e à Arte Generativa. Objetiva-se também apresentar parte do estudo realizado da Arte Generativa e sua conexão com a arte visual produzida pela mediação das funções complexas. Pretende-se ainda apresentar uma metodologia de ensino e aprendizagem desse tópico matemático que combina o uso dinâmico de softwares educativos, partindo da abordagem geométrica para motivar e possibilitar a inferência de propriedades algébricas, bem como caminhos para a confirmação, ou não, dessas proposições.

Arte Generativa

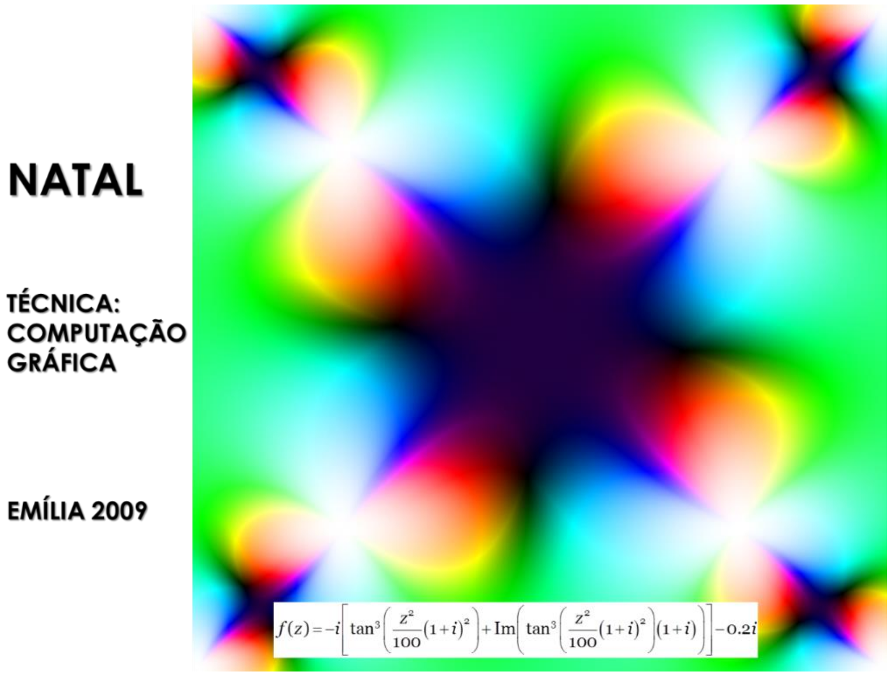
De acordo com Philip Galanter (2003), a Arte Generativa se refere à práticas artísticas em que o protagonista utiliza um sistema, ou um conjunto de regras, ou ainda um programa de computador, uma máquina ou outra invenção processual, que é acionada preservando um grau de autonomia que contribui ou resulta em uma obra de arte concluída. Pode-se dizer que o elemento chave na Arte Generativa é, portanto, o sistema ao qual o artista cede o controle parcial ou total de sua obra. Nesse artigo, tal elemento está representado pelo software F(C): Funções Complexas. O estudo cuidadoso das

ISSN 2525-7056

propriedades algébricas das famílias de funções complexas, obtidas através de parâmetros aditivos, multiplicativos e de potência, dá ao artista a possibilidade de criação ao alterar de modo consciente e adequado tais parâmetros.

O termo “Arte Generativa” pode ser visto simplesmente como uma referência ao modo como a arte é feita, não fazendo afirmações sobre o porquê da arte estar sendo produzida dessa forma, ou qual é seu conteúdo. A Arte Generativa é desacoplada de qualquer tecnologia específica, podendo ser de alta complexidade ou não. Ressalta-se, portanto, que um sistema que move uma prática artística para o campo da arte generativa deve ser bem definido e completo o suficiente para operar de forma autônoma (COLABELLA & SODDU, 2013). É desta forma, como um sistema bem definido e completo, que o software se apresenta, visto que, inseridos os parâmetros a arte produzida será sempre a mesma, e o fato de alterá-los, pode transformar totalmente a arte anteriormente produzida.

Figura 1 – Quadro produzido utilizando o software F(C): Funções Complexas



Fonte: Acervo de arte visual dos Autores.

A abordagem generativa ajuda a criatividade humana e proporciona ao artista a possibilidade de representar a sua ideia de forma aberta. Quando um artista produz uma ideia, normalmente ele tenta representá-la em algumas obras de arte, mas cada resultado não é uma representação completa de sua ideia, sendo apenas um dos possíveis trabalhos artísticos de execução parcial. Quando o artista cria uma obra de Arte Generativa dinâmica capaz de gerar variações, ele também é capaz de criar em progresso, algoritmo por algoritmo, uma representação de sua própria ideia capaz de comunicar sua visão de vida. Segundo pesquisadores da área, isso é Arte Generativa.

O Software F(C): Funções Complexas

O software educativo F(C): Funções Complexas foi desenvolvido no grupo de pesquisa “Ensino de Ciências e Tecnologia Educacional” por Silva e Souza (2003), e permite o estudo de funções de uma variável complexa, exibindo o comportamento de pontos notáveis, como raízes reais ou complexas, e as singularidades da função. Também permite o estudo de propriedades algébricas importantes, como continuidade, periodicidade, limitação, comportamento no infinito, dentre outras. Esses estudos envolvem a técnica dos domínios coloridos (SILVA, et.all., 2008 e 2009), a qual utiliza uma paleta pré-definida de cores associada ao plano complexo de Argand-Gauss. Esse plano colorido é denominado Mapa de Cores.

Nesse método, considerando uma determinada função complexa de variável complexa, seu domínio é colorido conforme as cores associadas às imagens de cada um de seus elementos. A distribuição de cores e tonalidades proposta no Mapa de Cores produz uma relação biunívoca entre posição no plano e cores (e/ou tonalidade), em que cada número complexo é identificado por uma cor e tonalidade característica únicas. Assim cores, ou tonalidades diferentes da mesma cor, representam diferentes números complexos (NEEDHAM, 2002). Na figura 2 apresenta-se a escolha do Mapa de Cores associado ao plano Argand-Gauss.

A leitura do Mapa de Cores deve ser realizada da seguinte forma: ao se referir ao complexo número $1 + 0i$, correspondente à posição $(1,0)$, usamos a cor vermelha em sua forma pura (cor primária). Os outros números reais positivos são tonalidades dessa cor vermelha, sendo que seu tom fica mais claro (mistura com a cor branca) quando seu módulo aumenta e mais escuro (mistura com a cor preta) quando ele tende a zero. Assim o número complexo $0 + 0i$, ou seja, a posição $(0,0)$, será representado pela cor preta (o tom mais escuro de todas as cores no mapa).

ISSN 2525-7056

Figura 2 – Mapa de Cores

Fonte: Os autores.

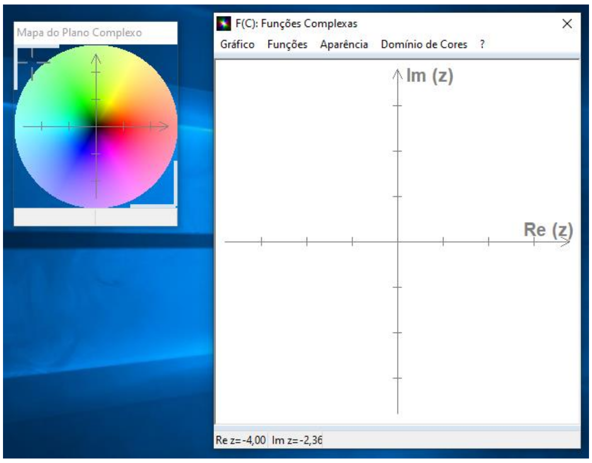
O procedimento de leitura é o mesmo considerando as outras cores que estão associadas às diferentes semirretas afins, ou seja, para cada semirreta uma cor diferente, em cada semirreta tons *dégradés* dessa cor, desde o preto até o branco. Essa associação é adequada para que se possa representar a função usando apenas o plano do domínio e as cores e tonalidades do contradomínio. Após a ação da função, o plano cartesiano utilizado como domínio da função fica colorido gerando um quadro associado à função considerada. Esse método de coloração dos domínios de funções complexas é conhecido como **Método dos Domínios Coloridos** [MARQUES, et.all., 2012].

Esse é o método utilizado pelo software F(C): Funções Complexas para gerar os quadros apresentados como Arte Generativa. Na Figura 3, apresenta-se a interface do software.

Observa-se que são apresentados dois planos, o Mapa de Cores que representa o contradomínio das funções complexas, e outro em branco, que é o domínio das funções.

ISSN 2525-7056

Figura 3 – Interface do Software F(C): Funções Complexas



Fonte: Os autores.

O conjunto dos números complexos

A definição algébrica do conjunto dos complexos é a seguinte:

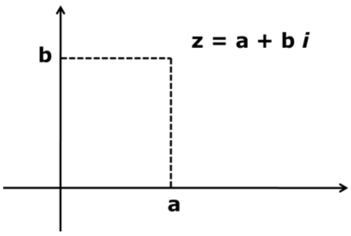
$$\mathbb{C} = \{z = a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

Um número complexo é dado por uma soma de duas parcelas, sendo a primeira chamada de parte real, que é dada por um número real puro e a segunda parcela é dada pela multiplicação entre um número real (parte imaginária) e o número imaginário i, lembrando que $i^2 = -1$.

Alguns exemplos de números complexos: $z = 2 + 3i$, $z = \sqrt{3} + \frac{1}{2}i$ e $z = 1 - 2\pi i$.

O conjunto dos números complexos pode ser associado ao plano através da representação cartesiana (Fig.4) de cada um dos elementos desse conjunto, que é uma extensão do conjunto dos números reais.

Figura 4 - Representação Cartesiana

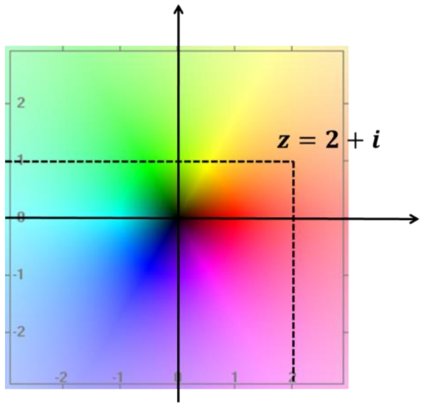


Fonte: Os autores.

ISSN 2525-7056

Na representação cartesiana de um número complexo, a parte real é marcada no eixo-x, neste contexto chamado de eixo real, e a parte imaginária, no eixo-y, denominado eixo imaginário. Assim cada número complexo $z = a + bi$ fica relacionado, de modo unívoco, ao par ordenado $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

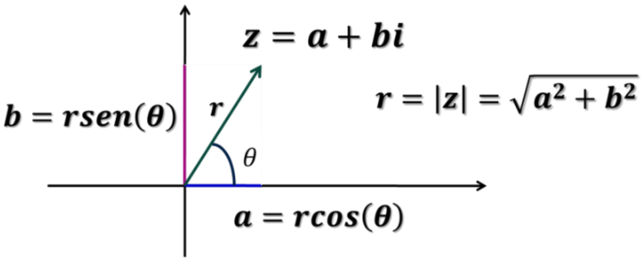
Figura 5 – Apresentação colorida do número complexo $z = 2 + i$.



Fonte: Os autores.

Uma outra representação útil dos números complexos é a polar, ou trigonométrica. Essa representação está apresentada na Figura 6.

Figura 6 – Representação polar do número complexo $z = a + bi,\ a, b \in \mathbb{R}$.



$$\boxed{z = a + bi = r(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta))}$$

Fonte: Os autores.

O conjunto dos números complexos é um espaço vetorial real com as operações de adição e multiplicação por escalar, e é um corpo completo considerando a adição e multiplicação de números complexos (GARCIA & LEQUAIN, 2012).

ISSN 2525-7056

Considerando os números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$, onde $k, a, b, c, d \in \mathbb{R}$, pode-se definir as seguintes operações:

Adição: $z + k = (a + k) + bi$ e $z + w = (a + c) + (b + d)i$.

Multiplicação por escalar real: $kz = ka + kbi$.

Multiplicação de números complexos: $zw = (ab - cd) + (bc + ad)i$.

Potência natural: $z^n = \begin{cases} z^1 = z \\ z^n = z^{n-1}\,z \end{cases}, n \in \mathbb{N}$.

Funções Complexas de Variável Complexa

Funções complexas de variável complexa são relações cujo domínio e contradomínio são o conjunto dos complexos, $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dada por $f(z) = w$. As funções reais de variável complexa, são dadas por relações em que o contradomínio fica restrito ao conjunto dos números reais, $f: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$. Neste texto, o domínio das funções será sempre o conjunto dos números complexos.

Sendo as variáveis z e w complexas, cada uma delas possui duas parcelas, a primeira dada por um número real (parte real) e a outra dada pela multiplicação de um número real (parte imaginária) pelo número imaginário i. Assim, de modo geral, para se construir um gráfico das funções complexas é necessário um espaço vetorial com 4 dimensões. A partir dessa impossibilidade surgiu a ideia de “diminuir” dimensões utilizando uma associação de cores e/ou tonalidades aos pontos do contradomínio da função, possibilitando uma representação da função em um espaço bidimensional. Essa associação é biunívoca apesar de que, no software, utilizou-se o espectro visível de cores. A formulação matemática foi desenvolvida usando sempre as funções bijetoras, implicando que para cada número complexo temos uma única cor e tonalidade, e para cada cor e tonalidade temos um único número complexo associado (considerando os números complexos a menos de suas “voltas”, com argumentos que estão entre 0 e 2π).

Desta forma, o modelo proposto de representação para as funções complexas, assume que a variável $z \in \mathbb{C}$ deve ser representada pelas coordenadas posicionais x e y, sendo, a variável $w \in \mathbb{C}$, representada por uma cor e tonalidade obtidas no Mapa de Cores (Figura 2). Como exemplo, considerando a função conjugação, $f(z) = \bar{z}$, mostra-se na Tabela 1 alguns pontos e algumas características destes para a função considerada.

Tabela 1 – Pontos, e suas características, associados à Função $f(z) = \bar{z}$

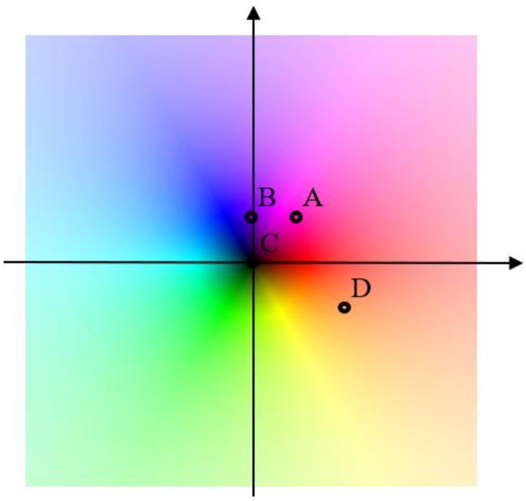
Ponto	Posição no Plano (Domínio)	Posição no Mapa de Cores (Imagem)	Cor da imagem associada ao ponto no domínio
A	$1 + i$	$1 - i$	Rosa
B	i	$-i$	Violeta
C	0	0	Preto
D	$2 - i$	$2 + i$	Laranja Claro

Fonte: Os Autores.

O domínio colorido da função conjugação $f(z) = \bar{z}$ foi obtido considerando a posição de cada número complexo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ "pintado" com a cor e tonalidade de seu conjugado $w = \bar{z} = x - yi$ obtida no Mapa de Cores.

Na Figura 7, pode-se ver o domínio colorido da função $f(z) = \bar{z}$ e os pontos A, B, C e D referenciados na Tabela 1.

Figura 7 – Domínio Colorido da Função Conjugação



Fonte: Os autores.

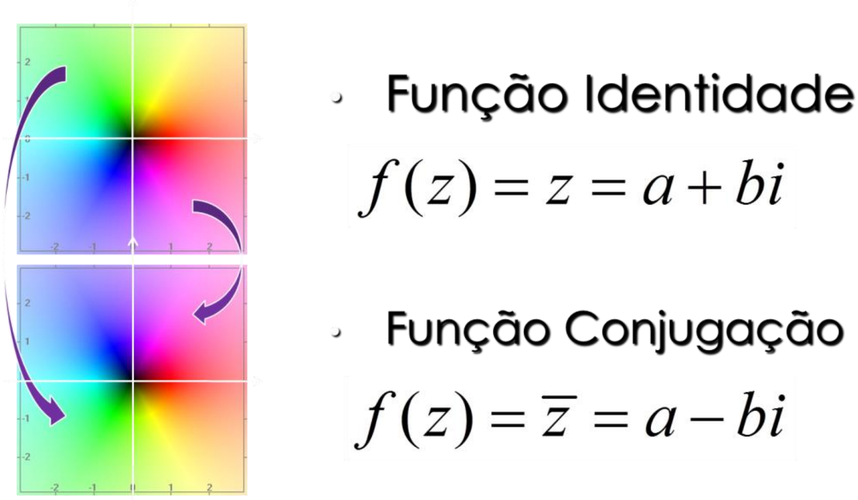
Seja $z = a + bi$, $(a, b) \in \mathbb{R}$. A função mais natural possível é a chamada **Função Identidade**, onde $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é dada por $f(z) = z = a + bi$. Do ponto de vista algébrico, através de uma simples troca de sinal da parte imaginária dos números complexos, pode-

ISSN 2525-7056

se definir a **Função Conjugação**, onde $f\colon \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é dada por $f(z) = \bar{z} = a - bi$. Através da representação colorida da função, observa-se uma ação interessante da função no plano complexo, considerando a abordagem geométrica dessa função.

Na Figura 8, apresenta-se os domínios coloridos das duas funções, através dos quais, por comparação, pode-se fazer inferências a respeito delas. Observa-se que a função identidade replica o Mapa de Cores e a Função Conjugação age fazendo uma reflexão dos hemisférios do plano com relação ao eixo-x (ou eixo real).

Figura 8 – Domínios Coloridos das Funções Identidade e Conjugação



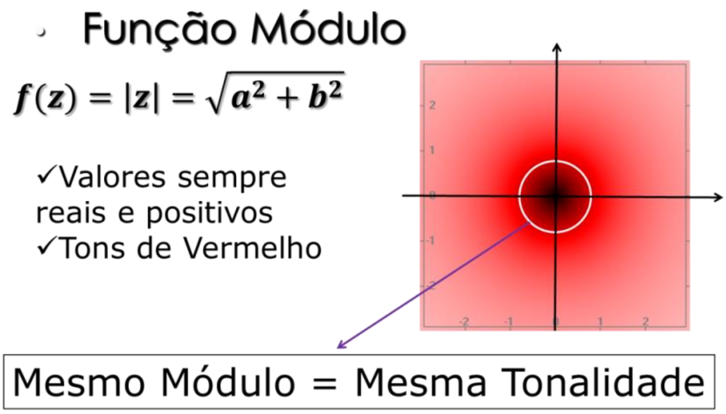
Fonte: Os autores.

Existem algumas funções reais de variáveis complexas interessantes e importantes, as quais envolvem conceitos que são tratados no Ensino Médio.

O módulo de um número complexo $z = a + bi$, representado no plano complexo por (a, b), é dado pela distância entre ele e a origem do plano cartesiano, logo percebe-se que será sempre um valor positivo, dado pela expressão $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (Teorema de Pitágoras). Dessa forma, definindo-se a Função Módulo $f(z) = |z|$ tem-se que o domínio colorido dessa função será pintado em tons de vermelho, visto que essa é a cor associada aos números reais positivos. Números complexos de mesmo módulo naturalmente terão a mesma tonalidade de vermelho e estão posicionados sob a mesma circunferência centrada na origem do plano cartesiano. A Figura 9 apresenta o domínio colorido da referida função, bem como sua definição e características importantes.

ISSN 2525-7056

Figura 9 – Definição e Domínio Colorido da Função Módulo



Fonte: Os Autores.

Outras duas funções reais que queremos tratar são:

- Função Parte Real: $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ dada por $f(z) = \mathrm{Re}(z) = a$.
- Função Parte Imaginária: $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ dada por $f(z) = \mathrm{Im}(z) = b$.

Como são funções reais, as cores dos seus domínios coloridos são: vermelho (real positivo), ciano (real negativo) e preto (nulo). Observa-se que, em cada reta vertical ($x = a$) do domínio colorido da função $\mathrm{Re}(z)$, a tonalidade é a mesma. O mesmo ocorre com as retas verticais ($y = b$), no domínio colorido da função $\mathrm{Im}(z)$ (ver Figura 10).

Observa-se ainda, na Figura 10, que as tonalidades são mais claras à medida que as retas estão mais afastadas da origem, fato já tratado no estudo da Função Módulo. Desta forma, tem-se uma visualização do limite dessas funções quando $a = Re(z)$ tende ao infinito para a primeira função, e respectivamente para $b = Im(z)$ na segunda função.

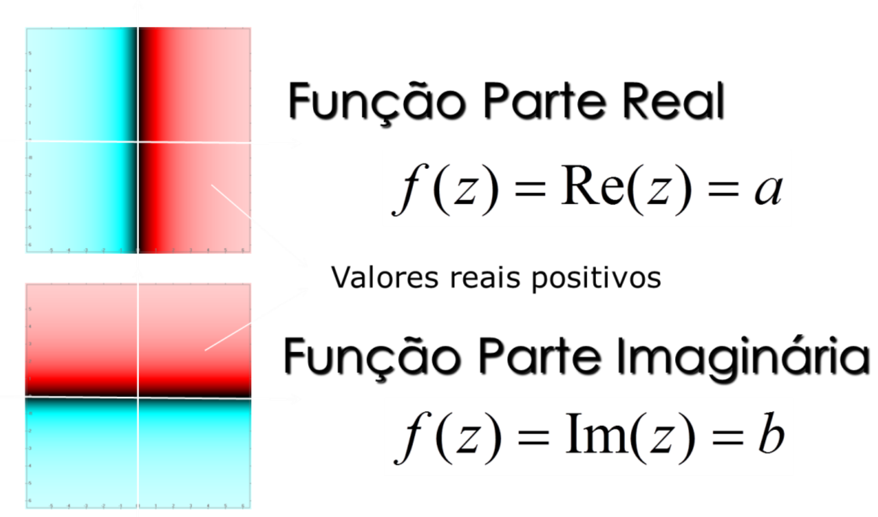
A partir deste momento, a proposta é desenvolver o conceito da expansão das funções reais, tópico matemático proposto para o Ensino Superior.

No Ensino Médio são trabalhados a definição, o gráfico e algumas propriedades algébricas (domínio de existência da função, raízes, periodicidade, continuidade e limitação) das funções, exponencial e trigonométricas, reais, dentre outras. Para esse estudo sugerimos fortemente um trabalho com o software GeoGebra. Recomenda-se que esse estudo seja desenvolvido a partir de conceitos anteriormente trabalhados nos tópicos: potenciação na base neperiana[4] (ou número de Euler) e Círculo Trigonométrico.

[4] A constante de Neper, conhecida como **número de Euler**, é um número irracional e transcendente. A fórmula de Euler relaciona de modo elegante esse número ao número π, também irracional.

ISSN 2525-7056

Figura 10 – Domínio Colorido da Função Módulo



Fonte: Os autores.

O estudo das funções trabalhadas, nesta proposta, até o momento, certamente promove familiaridade com o software e os novos conceitos desenvolvidos. Pesquisas preliminares desenvolvidas em nosso grupo, apontam que o trabalho proposto com essa tecnologia e com as cores proporcionam aos estudantes aprendizado significativo, tornando-os aptos ao estudo das demais funções complexas, propostas como expansão das funções reais desenvolvidas. Esse conjunto é denominado **Funções Complexas Elementares**. No software essas funções estão pré-definidas, facilitando seu estudo.

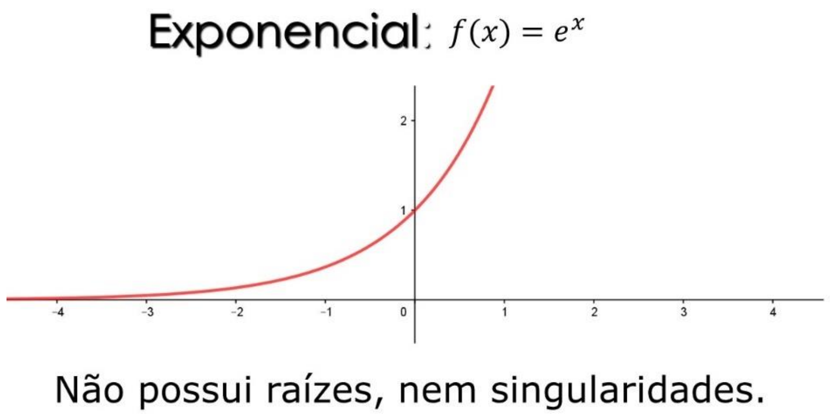
Neste artigo, propõem-se o estudo de algumas delas, a saber, a exponencial e as trigonométricas circulares: seno, cosseno e tangente.

Na Figura 11 apresenta-se o gráfico da função exponencial real, onde se vê algumas de suas propriedades algébricas: não periódica, não possui raízes reais nem pontos de indefinição da função (singularidades) crescente, ilimitada, injetora e não sobrejetora.

A Função Exponencial Complexa é definida de tal forma que se caracterize como expansão da função real, isto é, $\forall z \in \mathbb{R}, z = x + 0i$ tem-se que $e^z = e^x$. Esse é um procedimento comum na Análise Complexa, pois deseja-se ampliar os domínios e contradomínios (caso possível) das funções, sem fazer alteração nas relações já obtidas pela função real.

ISSN 2525-7056

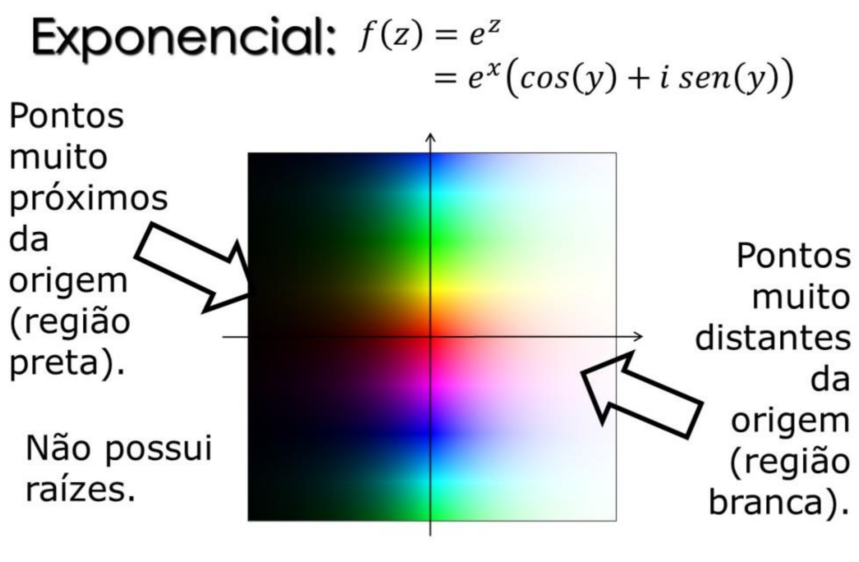
Figura 11 – Definição e Gráfico da Função Exponencial Real.



Fonte: Os autores.

Na Figura 12, apresenta-se a definição da Função Exponencial Complexa, definida a partir de funções reais considerando as variáveis posicionais reais para $z = x + yi$.

Figura 12 – Definição e Domínio Colorido da Função Exponencial Complexa.



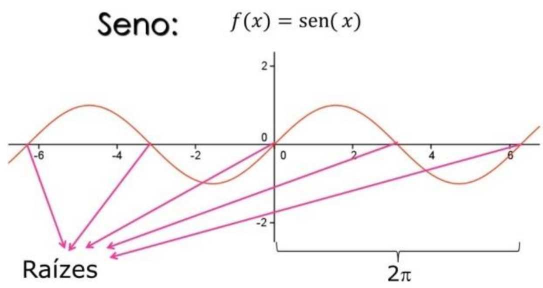
Fonte: Os autores..

Observa-se no domínio colorido (Figura 12) a similaridade existente no comportamento da função complexa, quando comparada à função exponencial real. Apresenta uma região à esquerda do eixo imaginário bastante escura, tendendo ao preto, o que não representa raízes para a função, mas sim, números complexos muito próximos da origem do plano de Argand-Gauss. Apresenta ainda uma região mais clara (à direita) onde observa-se pontos do plano possuem imagens muito distantes da origem. Mais uma característica interessante que se pode observar na Figura 12, é que apresenta todas as cores do Mapa de Cores, isso mostra que a função Exponencial Complexa é sobrejetora, diferentemente da função real.

As expansões das funções reais mais conhecidas, são chamadas de Funções Complexas Elementares.

Aqui propomos a análise das Funções Trigonométricas Circulares. Iniciaremos pela Função Seno. A Figura 13 apresenta a definição e gráfico da Função Seno Real.

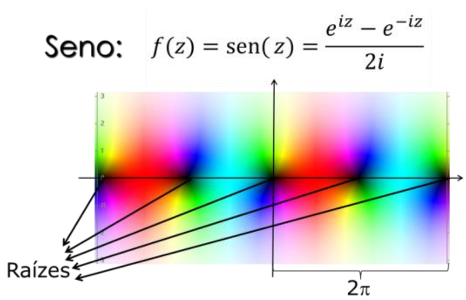
Figura 13 – Definição e Gráfico da Função Seno Real.



Fonte: Os autores.

A expansão dessa função para o conjunto dos números complexos está apresentada na Figura 14. Observa-se que as raízes são as mesmas da função seno real e o período não se altera, entretanto não existe mais a limitação que o seno real possui, com imagens no intervalo fechado $[-1,1] \subset \mathbb{R}$. Essa afirmação está baseada no fato do domínio colorido apresentar todas as cores do Mapa de Cores, sugerindo ser uma função sobrejetora.

Figura 14 – Definição e Domínio Colorido da Função Complexa Seno.

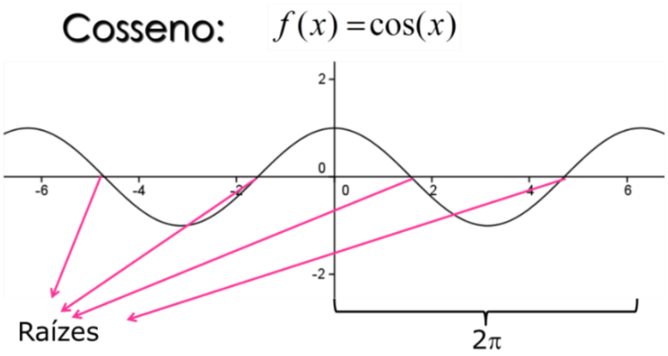


Fonte: Os autores.

ISSN 2525-7056

Para as funções cosseno e tangente reais, as Figuras de 15 e 17 apresentam os gráficos e propriedades: raízes e período de repetição.

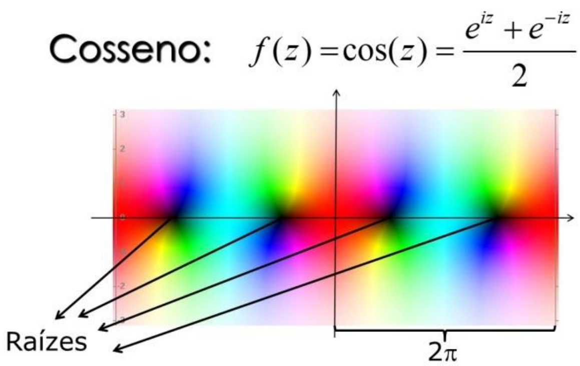
Figura 15 – Definição e Gráfico da Função Cosseno Real.



Fonte: Os autores.

As Figuras 16 e 18 apresentam os domínios coloridos das funções Cosseno e Tangente Complexas, respectivamente. Observa-se nelas, a definição e propriedades algébricas importantes dessas funções trigonométricas. Ressalta-se que as raízes e período de repetição da função Cosseno são preservados. Mesmo ampliando o domínio da função, não acrescenta-se raízes a ela.

Figura 16 – Definição e Domínio Colorido da Função Complexa Cosseno.

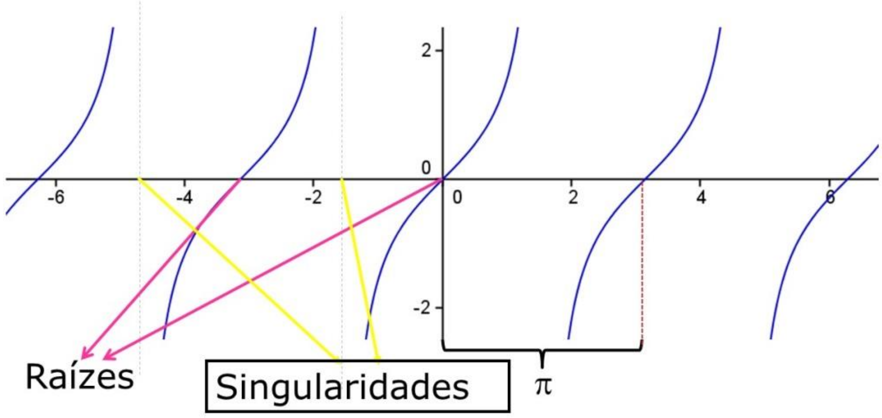


Fonte: Os autores.

Note que o domínio colorido da função Cosseno é uma translação à esquerda daquele associado da função Seno. A translação é na horizontal e de um intervalo $\frac{\pi}{2}$. Novamente observa-se que a expansão da função a tornou sobrejetora, diferindo nesse quesito, da sua restrição real.

Figura 17 – Definição e Gráfico da Função Tangente Real.

$$\textbf{Tangente:}\quad f(x) = \tan(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$$

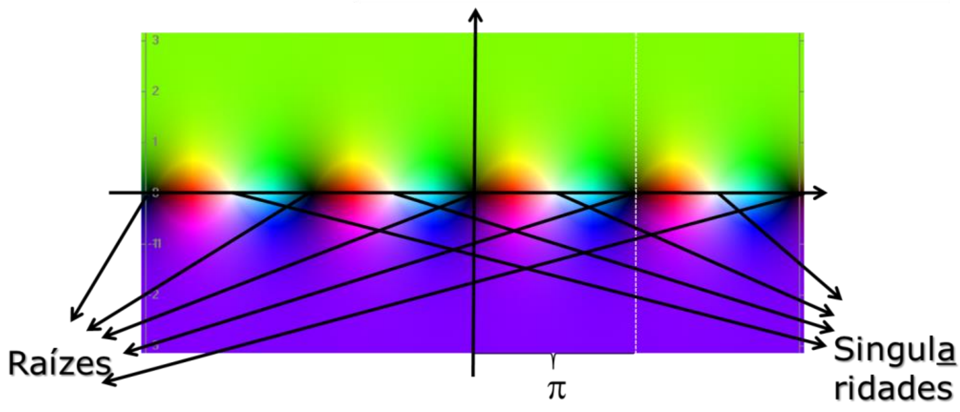


Fonte: Os autores.

Analisando a definição da Função Tangente, observa-se que as raízes da função Cosseno são as suas singularidades. Isso está apresentado no domínio colorido (Figura 18) através das regiões brancas no eixo real. Esse fato representa a visão geométrica do limite infinito de uma função complexa.

Figura 18 – Definição e Domínio Colorido da Função Complexa Tangente

$$\textbf{Tangente:}\quad \tan(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{\cos(z)} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}$$



Fonte: Os autores.

Ressalta-se também, a visão geométrica do limite da função quando a parcela e^{-iz} que está sendo subtraída no numerador, e adicionada no denominador, tende a um número complexo muito próximo do $(0,0)$. Nesse caso, a função tende a uma constante. Ao calcular a imagem de um número complexo cujo valor da parte imaginária é positivo e maior que um certo valor $M \in \mathbb{R}$, ela tende ao número imaginário i (cor verde), fato comprovado pela grande região verde nos quadrantes 2 e 3. Caso o número complexo esteja em retas horizontais nos demais quadrantes (parte imaginária negativa) e se afastando do eixo real, então a imagem pela função tende para a constante $-i$ (cor violeta). Algebricamente, o cálculo desse limite comprova esse fato de modo simples, visto que a parcela e^{-iz} se torna tão pequena que a diferença entre esses dois membros da razão desaparece, exceto pela constante i e o sinal dela, fazendo com a imagem dos pontos das retas horizontais afastadas do eixo real sejam iguais em cada hemisfério.

Considerações Finais

O estudo dos números complexos e suas funções elementares utilizando o software F(C): Funções Complexas amplia as possibilidades de um aprendizado significativo desse tópico, que é apontado pela literatura da área, como “de difícil aprendizagem”. Observa-se que a metodologia proposta desenvolve outras percepções, visuais e cognitivas, dos estudantes.

Acredita-se que despertar o interesse da comunidade acadêmica e científica, bem como do público em geral, através de exposições artísticas dos quadros produzidos pelos autores com a utilização do software, auxiliará na desmistificação da Matemática, ampliando seu estudo e desenvolvimento de pesquisas, materiais e metodologias abrangendo outros tópicos matemáticos.

Ressalta-se também a combinação dos softwares educativos F(C): Funções Complexos e GeoGebra, como abordagem metodológica que tem se mostrado facilitadora do processo de ensino e aprendizagem do tema, especialmente para os subtópicos “transformações de regiões no plano complexo” e “curvas de nível das funções parte real e parte imaginária”.

O objetivo principal do software F(C): Funções Complexas, que é a representação visual colorida das imagens dos números complexos associados ao plano complexo obtidas como resultado da ação de uma função complexa de variável complexa, resultando em uma

ISSN 2525-7056

representação plana das funções complexas, foi plenamente alcançado. Um princípio importante desenvolvido quando se utiliza esse software é a distinção entre exibição e visualização, sendo esta última, capaz de permitir que o espectador realize uma construção mental do objeto a ser estudado. O Domínio Colorido das funções complexas deve ser visto como a combinação de uma impressão visual com a compreensão dos conteúdos matemáticos considerados.

Referências

COLABELLA, E. e SODDU, C. Why Generative Art? 2013. 2f. GA2013 – 16th. Generative Art Conference. 2013.

GARCIA, A.; LEQUAIN, Y. A. Elementos de álgebra. 6. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

GALANTER, P. What is Generative Art? Complexity theory as a context for art theory. 2003. 21f. GA2003 – 6th Generative Art Conference. 2003.

MARQUES, E.M.R.; SOUZA, A. R.; BREDA, A. M. D. MATEMÁTICA E ARTE: INCURSÕES NA INTERDICIPLINARIDADE. REMATEC. Revista de Matemática, Ensino e Cultura (UFRN). , v.7, p.73 - 88, 2012.

NEEDHAM, T. Visual Complex Analysis. Oxford: Oxford University Press, 2002.

SILVA, E.L.; SOUZA, A.R.; MARQUES, E.M.R. Alguns estudos de fluxo de fluídos utilizando software gráfico. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 31, n. 3, 2009, 3502-3509.

SILVA, E. L.; SOUZA, A. R.; MARQUES, E.M.R. Números e Funções Complexas: Representação e Interpretação Gráfica. São Paulo - SP: Editora Cultura Acadêmica, 2008, v.1. p.48.

SILVA, E. L.; de SOUZA, A. R. F(C): Funções Complexas. In: XIV Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, 2003, Rio de Janeiro. Anais do XIV SBIE. Rio de Janeiro: NCE-IM/UFRJ, 2003. v. 1. p. 795-796.

NOTAS

IDENTIFICAÇÃO DE AUTORIA

Emília de Mendonça Rosa Marques. Doutora em Engenharia Elétrica pela UNICAMP. Professora Assistente Doutora no Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da UNESP, Campus de Bauru-SP.
E-mail: emilia.marques@unesp.br
http://orcid.org/0000-0002-7609-0351

Euro Marques Júnior. Doutor em Engenharia de Produção pela USP. Professor da Faculdade de Agudos-SP.
E-mail: euro.marques@faag.com.br
http://orcid.org/0000-0001-5498-7128

Aguinaldo Robinson De Souza. Doutor em Química pela USP. Professor Adjunto no Departamento de Química da Faculdade de Ciências da UNESP, Campus de Bauru-SP.
E-mail: aguinaldo.robinson@unesp.br
https://orcid.org/0000-0003-2373-267X

AGRADECIMENTOS
Não se aplica

FINANCIAMENTO
Não se aplica

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Não se aplica

EDITORES
Eugenia Brunilda Opazo Uribe, Gerson dos Santos Farias.

HISTÓRICO
Recebido em: 18/12/2020 – Aprovado em: 26/12/2020 – Publicado em: 29/12/2020.

COMO CITAR
MARQUES, E. M. R.; MARQUES JÚNIOR, E.; SOUZA, A. R. Arte e Tecnologia: Aliadas no Ensino de Matemática. Revista ENSIN@ UFMS, Três Lagoas, v. 1, n. 5, p. 11-30. 2020.