ENSIN@ UFMS 2021
ISSN 2525-7056

O TEMA DE EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU COMO ESPAÇO PARA A GENERALIZAÇÃO

THE THEME OF SECOND DEGREE EQUATIONS: A ROOM FOR GENERALIZING

Alexandre Maicher Neto[1]

Túlio Oliveira de Carvalho[2]

RESUMO: Esse artigo apresenta uma proposta de ensino das equações de segundo grau, a ser apresentada a partir do final do ensino fundamental, sugerindo a abordagem da generalização de fórmulas matemáticas utilizadas no período escolar. Para tanto, consultamos a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que é o documento que norteia o ensino da matemática no Brasil, constatando que o mesmo reitera a relevância do tema. Do mesmo modo, consultamos a literatura referente à Educação Matemática para fundamentar a proposta sobre o ensino da álgebra na prática escolar. Abordamos ainda aspectos históricos que de fato foram imprescindíveis para o desenvolvimento desse tema, uma vez que utilizamos a técnica de completar quadrados, empregada desde o século XII por Bháskara, para resolver situações problemas. O método de completar quadrados se constitui como uma técnica indispensável para obter a generalização da fórmula resolutiva de equações de segundo grau. Na sequência relacionamos as equações de segundo grau com certas representações geométricas, a fim de explanar a técnica do completamento de quadrados. Concluímos com sugestões de situações problemas que abordam o tema.

Palavras-chave: Generalização. Equação de segundo grau. Completar quadrados.

ABSTRACT : This article presents a proposal for teaching high school equations, to be presented from the end of elementary school onwards, suggesting the approach of generalizing mathematical formulas used in the school period. To do so, we consulted the Common National Curriculum Base (BNCC), which is the document that guides the teaching of mathematics in Brazil, noting that it reiterates the relevance of the topic. Likewise, we consulted the literature on Mathematics Education to support the proposal on the teaching of algebra in school practice. We also approach historical aspects that were in fact essential for the development of this theme, since we used the technique of completing squares, used since the 12th century by Bhaskara, to solve problem situations. The method of completing squares is an indispensable technique to obtain the generalization of the solving formula of second degree equations. Next, we relate the quadratic equations with certain geometric representations, in order to explain the square completion technique. We conclude with suggestions of problem situations that address the topic.

Keywords: Generalization. Quadratic equations. Completing squares.

Introdução

Uma forma de apreciar o desenvolvimento da humanidade está em acompanhar o desenvolvimento de instrumentos matemáticos: os números, as operações, as

[1] Rede Estadual de Educação do Estado do Paraná. E-mail: alexandremaicherneto@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-8061-3645
[2] Universidade Estadual de Londrina. E-mail: tuliocarvalho@uel.br
https://orcid.org/0000-0002-6344-2418

Informações completas da obra no final do artigo

propriedades, as regras, os conceitos e definições, as fórmulas e os teoremas, construtos que se constituem em respostas a perguntas que vão se tornando mais abrangentes ao longo do tempo. Este artigo toma como fundamento estas características da matemática: abrangência e generalidade, a fim de repensar um tópico bastante conhecido do ensino da mesma.

A matemática é um processo da construção humana. Em particular, a matemática escolar deve expressar essa realidade, ser fundamentada em conceitos, regras, definições e generalizações que posteriormente serão empregadas em situações problemas elementares da vida social.

> As aplicações constituem a principal razão pela qual o ensino da Matemática é tão difundido e necessário, desde os primórdios da civilização até os dias de hoje e certamente cada vez mais no futuro. Como as entendemos, as aplicações do conhecimento matemático incluem a resolução de problemas, essa arte intrigante que, por meio de desafios, desenvolve a criatividade, nutre a auto-estima, estimula a imaginação e recompensa o esforço de aprender. (LIMA, 2007, p. 155)

Com a experiência de alguns anos de magistério, percebemos que as aulas de matemática podem ser resumidas à manipulação numérica e algébrica, sem preocupações em explorar os conceitos algébricos e geométricos que de fato promovem a compreensão da essência do conteúdo. Com isto, a rotina resume-se a aplicar técnicas resolutivas, utilizando procedimentos e fórmulas conectados tão somente ao conjunto de exercícios da subdivisão do currículo que esteja em pauta.

Os fatores que podem contribuir para que essas ações perdurem devem estar no fato de que os materiais orientadores das práticas em sala de aula, o principal deles sendo o livro didático, não fazem referência a conceitos e generalizações como deveriam, bem como a contextualização que tanto se espera. Outra razão pode ser que nós professores não conhecemos os temas com a profundidade que deveríamos.

Neste artigo, propomos abordagens dos conceitos matemáticos relacionados à equação do segundo grau. Oferecer conexões entre aspectos numéricos, algébricos e geométricos com vistas a contribuir para a compreensão deste tópico particular, ressaltando a interligação entre visões como característica essencial da matemática.

Com isso defendemos um ensino que contemple em sua prática o uso de demonstrações algébricas das fórmulas que são empregadas nas atividades de sala de aula, por entender que as demonstrações envolvem conceitos importantes, que serão também ilustrados em situações problemas. Trata-se tornar manifesto que a matemática e os seus problemas se comunicam pelas ferramentas (matemáticas) que os resolvem.

> Acreditamos que as questões relativas à apresentação da demonstração formal de um certo resultado em matemática são importantes e devem ser introduzidas desde a Educação Básica. Acreditamos que o estudante pode perceber que a Matemática é um conjunto bem organizado de resultados, e que uma demonstração é a resposta a um ‘por quê’, o que também traz aproximações, no nosso ponto de vista entre a Matemática Acadêmica e a Matemática Escolar. (MOSCA; CARVALHO; CARVALHO, 2016, p. 328)

A proposta deste artigo é apresentar uma sistematização do desenvolvimento em linguagem algébrica da fórmula de Bháskara, que pode ser apresentado aos estudantes do nível fundamental. Com isto, esta sistematização deverá ter maiores possibilidades de ser efetivamente usada na prática escolar. Partindo da síntese do método resolutivo de Bháskara:

> Completar o quadrado do primeiro membro para transformar o termo que contém a quantidade desconhecida e seu quadrado em um quadrado perfeito. Diminuir o grau da equação extraindo a raiz quadrada dos dois membros, resolver a equação de primeiro grau que daí resulta. (ROQUE; CARVALHO, 2012, p.196)

Apresentaremos situações problemas que envolvem a construção geométrica do completamento de um quadrado. Embora o tema seja recorrente, essa proposta traz consigo o desafio de uma nova abordagem, uma vez que tradicionalmente usa-se diretamente a fórmula resolutiva para determinar as raízes.

Para compreender e realizar a generalização, utilizamos o processo de completar quadrados, técnica essencial que é utilizada para determinar as raízes da equação de grau dois, apresentada e exploradas aqui e recomendada para que sejam utilizadas em sala de aula.

Para o desenvolvimento desse artigo consultamos a BNCC, documento oficial que normatiza os conteúdos de matemática que devem ser contemplados na prática escolar, sobre a relevância do desenvolvimento algébrico das generalizações como proposta de ensino. Do mesmo modo consultamos a literatura, na perspectiva da Educação Matemática, para fundamentar os aspectos acerca do ensino da álgebra na prática escolar, bem como os aspectos históricos que retratam a resolução de uma equação do segundo grau, por meio da técnica de completar quadrados utilizada por Bháskara.

Referendados por essa literatura passamos propriamente à abordagem do tema equação do segundo grau, sendo apresentada no contexto algébrico e geométrico, justamente para fazermos as relações e desenvolver as técnicas de completar quadrados, que fundamenta uma dedução da renomada fórmula. Por fim deixamos como sugestões de aplicação, situações problemas que abordam o tema.

A BNCC e o ensino da álgebra

A Base Nacional Comum Curricular, BNCC, é o mais recente documento normativo, que regulamenta os níveis de aprendizagens essenciais da educação básica no Brasil, que todos os estudantes devem ter assegurados durante o período escolar, compreendendo a educação infantil, o ensino fundamental e o ensino médio.

Esse documento foi elaborado, sob a coordenação do Ministério da Educação (MEC) e teve a participação da comunidade escolar de todos os Estados, do Distrito Federal e dos Municípios, onde cada profissional pôde contribuir com seu parecer sobre os conteúdos que julgava ser adequado manter, ser suprimido ou ser trabalhado em outro ano/série.

Ele segue as determinações do Plano Nacional de Educação (PNE) e a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) que orienta para que os estudantes recebam uma formação integral com vistas para o desenvolvimento do cidadão e de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

> Este documento normativo aplica-se exclusivamente à educação escolar, tal como a define o § 1º do Artigo 1º da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei nº 9.394/1996), e está orientado pelos princípios éticos, políticos e estéticos que visam à formação humana integral e à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, como fundamentado nas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica. (BRASIL, 2018, p. 7)

A BNCC é uma referência nacional para a elaboração dos currículos e das propostas pedagógicas das redes, estaduais, do distrito federal e dos municípios, além de contribuir com políticas e ações para estabelecer normas referentes à formação de professores, à avaliação, à classificação de conteúdos essenciais a serem trabalhados no ano/série e aos investimentos necessários a serem realizados para o desenvolvimento da educação.

Partindo desse princípio normativo, garantido constitucionalmente, a BNCC fundamenta-se pedagogicamente em dois conceitos, o desenvolvimento de competências, e o compromisso com uma educação com formação integral.

O conceito de competências no trabalho pedagógico, consiste em organizar o currículo de forma a possibilitar o aluno a ***saber*** sobre os conteúdos da grade, dominar as técnicas de resolução de uma equação, saber interpretar, representar algebricamente, conhecer o conceito de incógnita, estabelecer uma igualdade, expressar numérica e algebricamente a situação proposta e usar um algoritmo para resolver a equação.

No entanto isso não é tudo, é preciso aplicar esse conhecimento, é importante ***saber fazer***, saber aplicar o que foi apreendido, o aluno precisa conseguir transferir esse conhecimento para situações que possibilitem de alguma forma utilizar essa teoria na resolução de problemas que podem se deparar.

> Por meio da indicação clara do que os alunos devem “saber” (considerando a constituição de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores) e, sobretudo, do que devem “saber fazer” (considerando a mobilização desses conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho). (BRASIL, 2018, p. 13)

Contemplado os aspectos regulamentares e normativos, mas com foco no objeto deste artigo, o uso de generalizações no ensino da matemática, consultamos para verificar se o tema é abordado pela BNCC, e se existe relevância dele no processo de ensino e aprendizagem da matemática no ensino fundamental e médio.

Constatamos que o ensino fundamental é dividido em cinco unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística, que embora separadas, possam ser articuladas e conduzir os alunos a fazer relações entre o conhecimento empírico que trazem, com o conhecimento científico sistematizado por conceitos e propriedades, e utilizem esses conceitos e propriedades para resolver problemas nos contextos de sua necessidade.

A unidade temática Álgebra tem como objetivo o desenvolvimento do pensamento e da escrita algébrica, processo que leva o aluno a perceber uma regularidade em uma sequência numérica e induz o mesmo a generalizá-la, por meio de uma representação que utiliza letras e símbolos no lugar de números, obtendo, um modelo genérico daquela sequência.

Espera-se que ao final dessa etapa os alunos compreendam os significados de variáveis numéricas nas expressões algébricas e nas funções, o conceito de incógnita nas equações, e sejam capazes de resolvê-las. Além disto, tenham capacidade de reconhecer a regularidade de uma sequência numérica e a generalize.

A unidade temática Geometria caracteriza-se por estudar a posição e deslocamento no espaço, formas de figuras planas e espaciais, com a intenção de desenvolver o pensamento geométrico do aluno, para futuras investigações de propriedades geométricas. Para essa fase o estudo da Geometria a congruência e semelhança de figuras planas, especialmente o triângulo com suas relações de medidas de ângulos, que podem ser utilizadas como introdução para realizar generalizações, onde é possível verificar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º, e essa generalização é base para falar dos demais polígonos.

Portanto a Geometria vai além de aplicar fórmulas para resolver exercícios, ela é um campo que, em conjunto com a álgebra, possibilita o desenvolvimento do raciocínio abstrato, fazendo o estudo de questões geométricas, e assim tendo condições de desenvolver o conceito lógico de uma generalização.

> Assim, a Geometria não pode ficar reduzida à mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras. (BRASIL, 2018, p. 272)

Com a unidade temática Grandezas e Medidas, espera-se que os estudantes reconheçam as medidas comprimento, área, volume e ângulo em diferentes contextos, resolvam problemas consolidando assim as expectativas da fase anterior e avancem. “Nessa fase da escolaridade, os alunos devem determinar expressões de cálculo de áreas de quadriláteros, triângulos e círculos, e as de volumes de prismas e de cilindros.” (BRASIL, 2018, p. 273)

Desse modo as unidades temáticas Álgebra, Geometria e Grandezas e Medidas reiteram que a generalização é tema relevante e precisa ser abordado sobretudo a partir do final do ensino fundamental.

Com relação ao Ensino Médio a BNCC também tem a abordagem seguindo o modelo de competências, como descrito no Ensino Fundamental, com o propósito de desenvolver habilidades de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para alcançar essas habilidades, o ***fazer***, o aluno precisa ter a competência, que é o ***saber*** raciocinar, saber representar, saber comunicar, saber argumentar para que ao longo do processo desenvolva o pensamento matemático cada vez mais elaborado.

> Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados. (BRASIL, 2018, p. 529)

A competência de raciocinar é desenvolvida pela interação entre os envolvidos em sala de aula, ao investigar, explicar e justificar as soluções apresentadas para os problemas, com ênfase nos processos de argumentação matemática (BRASIL, 2018).

A competência de representar pressupõe a elaboração de registros diante de um objeto matemático (BRASIL, 2018).

A competência de comunicar é importante para que os estudantes desenvolvam a capacidades de justificar suas conclusões por meio de sustentação oral, não somente por meio de expressões matemáticas (BRASIL, 2018).

A competência de argumentar se apoia nas competências de raciocinar e representar, pois pressupõe a formulação e a verificação de conjecturas, com a apresentação de justificativa matemática (BRASIL, 2018).

Entre todas as competências a serem desenvolvidas, a BNCC sugere a investigação de conceitos e propriedades matemáticas, lançando mão de diferentes recursos como a observação de padrões, experimentações e a tecnologia, com o intuito de uma demonstração formal das conjecturas envolvendo os conceitos e propriedades investigadas. Essa competência está voltada à capacidade de generalização e demonstração matemática, tendo portanto, relevância para a formação dos estudantes, pois permite compreender a matemática como uma ciência viva, apoiada em estudos, interpretações, métodos, procedimentos e verificações.

Assim a BNCC torna explícito que o estudo e o desenvolvimento de generalização no processo de ensino da matemática, sobretudo ao final do ensino fundamental e durante todo o ensino médio é relevante, pois consta como conteúdo, portanto, é conhecimento que deve ser disseminado em sala de aula.

O ensino da álgebra na perspectiva da educação matemática

Pesquisamos outras fontes para conhecer o que autores ligados à Educação Matemática discutem acerca da álgebra e de seu ensino. Cabe advertir que a escolha dos autores jamais teve a intenção de esgotar todas as visões a respeito do assunto.

Pais (2013) traz reflexões sobre as estruturas metodológicas praticadas em sala de aula, confrontando a escola tecnicista com um modelo que coloca o aluno como centro do processo de aprendizagem. No primeiro, o professor propõe as situações problema e o aluno as resolve fazendo uso de algoritmos e fórmulas sem a sua devida compreensão, enquanto no segundo o professor é mediador das situações propostas encaminhando-as por meio da resolução de problemas.

Para o autor, mais importante do que usar os algoritmos e fórmulas são a compreensão do seu funcionamento, entender o conceito de seu desenvolvimento, de como essa generalização foi obtida, e explorar desta forma a matemática é uma oportunidade de oferecer a nossos alunos a compreensão, rica algebricamente, que quase sempre fica sem ser explorada.

Para esse fim, a metodologia empregada no processo de ensino deve oferecer condições para explorar a matemática indo além de se responder uma questão, uma vez que em toda aula há a oportunidade para estimular o aluno a novos desafios, a argumentar, a fazer articulações entre a teoria e prática, destacando conceitos importantes da matemática. Por outro lado, a escolha da metodologia pode levar à não exploração de certos conhecimentos. Trata-se, portanto, de aproveitar o momento para expandir as competências, ampliar a capacidade de compreensão de conceitos, algoritmos e modelos, em vez de usá-los repetidamente.

> Em suma, entre os objetivos da educação matemática está a intenção de contribuir no desenvolvimento da capacidade intelectual do aluno, expressa pelas competências de formular hipóteses, fazer estimativas, realizar cálculos mentais, estabelecer relações, organizar e interpretar dados, resolver e propor problemas, observar regularidades, generalizar ou particularizar afirmações, redigir textos, entre outras. (PAIS, 2013, p. 33)

O autor também aborda a argumentação no livro didático, relatando que esta precisa ser entendida como o processo de generalização, deduções matemáticas que culminam com a validação de teoremas e fórmulas. Sendo a argumentação matemática um processo validado pela comunidade científica, muitas vezes esse método se distancia dos saberes pertencentes à educação escolar, inclusive não estando contemplados no livro didático. O autor aponta que o desafio didático é perceber, *medir*, a proximidade que as demonstrações e generalizações têm com o saber escolar.

Isso não significa que todo o processo de escolarização deva ser pautado pelo raciocínio lógico dedutivo das demonstrações e generalizações, mas excluí-lo nesta fase de aprendizado não se mostra honesto com um ensino que essencialmente deve ser comprometido com a compreensão daquilo que está sendo estudado.

> Como existem conexões e diferenças entre o saber escolar e científico, não se trata de priorizar, no contexto escolar, a utilização das demonstrações típicas de argumentações lógicas da matemática. A atitude extrema consiste em um engano de mesma natureza, ou seja, excluir as demonstrações do ensino seria negar uma parte considerável da especificidade desse saber escolar. (PAIS, 2013, p. 55)

Estudar e ensinar álgebra se mostra um desafio, sobretudo em seu início quando a simbologia é empregada para representar valores numéricos. Para entender esse processo, e ter uma referência como alternativa de proposta de trabalho, destacamos os estudos de Souza, Panossian e Cedro (2014), que fazem a abordagem do tema, partindo do conceito de incógnita, descrevendo a construção que esse conceito teve ao longo da história até chegar à simbologia que empregamos hoje.

Para os autores, umas das dificuldades encontradas no ensino da álgebra é a de que os alunos têm de fazer a relação entre o simbolismo algébrico com o que ele representa. Eles destacam as concepções de álgebra que pesquisadores como Usiskin (1988;1995) (apud SOUZA, 2014) e Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) (apud SOUZA, 2014) puderam identificar por meio de pesquisa com professores e por meio de investigação histórica, que a álgebra é entendida como uma linguagem, como método desenvolvedor do pensamento e como recurso técnico para resolver problemas.

> A análise dessas concepções nos permite entender que a álgebra pode ser compreendida tanto como uma linguagem quanto um mero conjunto de procedimentos que valorizam ora o desenvolvimento do pensamento, ora a compreensão da linguagem algébrica. (SOUZA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014, p. 28)

Na década de 1980, diante das dificuldades apresentadas pelos estudantes com as manipulações algébricas, tem início o desenvolvimento do ensino da álgebra por meio da generalização de padrões, a fim de tornar o processo de aprendizado mais significativo.

A educação matemática defende a postura de oferecer um processo de ensino pautado na compreensão daquilo que está sendo estudado.

Por exemplo, partindo de certo contexto vivenciado pelo educando envolvendo números, medidas e figuras, tem-se um alicerce para que no decorrer da situação problema, à medida que ele atinja um patamar de compreensão, outros saberes possam ser articulados ampliando seu entendimento dentro do que foi proposto. E com isso outros conceitos matemáticos, presentes na situação problema, possam ser desencadeados, como por exemplo um algoritmo, uma generalização ou uma demonstração.

Desse modo, entendemos que a introdução das demonstrações nos livros didáticos a partir das séries finais do ensino fundamental pode garantir um aprendizado mais sólido, em oposição àquele que é baseado na memorização de regras e fórmulas, uma vez que, deste modo, o aluno não possuiria argumentos para explicá-las.

As generalizações são regularidades obtidas por meio da percepção lógica de um padrão, como nas repetições ao longo de uma sequência numérica, bem como com a manipulação algébrica de uma equação obtendo uma fórmula que pode passar a ser utilizada para resolver uma categoria de problemas.

Por essa razão o professor precisa ter a sensibilidade de introduzir o tema de forma mais concreta possível, e pode dar início a esse desenvolvimento a partir do suporte geométrico, preferencialmente contextualizado, que permite certa “materialização” de parte do processo do desenvolvimento da generalização, aumentando com isso a compreensão da demonstração proposta. “Assim sendo, compete ao professor diversificar as atividades. Visto que um momento pedagógico resulta da convergência de vários elementos, o tratamento dessa variabilidade situa-se na essência do trabalho do professor.” (PAIS, 2013, p. 146)

As provas por demonstrações com representações geométricas possuem um certo poder de convencimento, talvez em razão da materialidade da prova, pois ela envolve o sentido da visão, tornando os seus resultados mais aceitáveis.

A proposta de atividade em contexto real pode ser apresentada por meio da metodologia de resolução de problemas, com o propósito de construir o conhecimento matemático alicerçado em práticas onde o estudante é o agente principal do processo, pois ele é por estas vias conduzido a pensar a matemática, o que, aliado às intervenções realizadas pelo professor, proporciona que ele absorva o conceito matemático proposto naquele problema. As propostas para utilizar essa metodologia devem essencialmente ter relevância para quem são dirigidos, uma vez que o fator que mobiliza, que desperta a atenção para um caso problemático é reconhecer que aquilo faz, ou pode vir a ser, parte de sua realidade. “Resolução de Problemas envolve aplicar a matemática ao mundo real, atender a teoria e a prática de ciências atuais e emergentes e resolver questões que ampliam as fronteiras das próprias ciências matemáticas.” (BICUDO *et al.*, 1999, p. 204)

Desta forma, o processo de aprendizagem ganha novo significado, pois ele possibilita ao aluno construir os conceitos, técnicas e generalizações, permitindo que tenha sua compreensão aumentada sobre a matemática, pois vai constatar, por meio da situação problema, que aquilo que generalizou fez parte de um problema, e que por extensão pode ser aplicado em outras situações de contexto semelhante.

> O aprendizado, deste modo, pode ser visto como um movimento do concreto (um problema do mundo real que serve como exemplo do conceito e da técnica operatória) para o abstrato (uma representação simbólica de uma classe de problemas e técnicas para operar com esses símbolos). (BICUDO *et al.*, 1999, p. 207).

Assim a resolução de problemas como metodologia de ensino é uma ótima oportunidade para se fazer matemática, com o objetivo de compreender os conceitos e generalizações matemáticas que estão nos livros didáticos e que são utilizadas, as vezes, sem compreensão do seu processo de construção. Levar o aluno a compreender construções algébricas é preencher lacunas que podem ser traduzidas por perguntas que frequentemente nos são feitas: “De onde saiu isso?” “Para que serve isso?”.

Acerca da história da álgebra e de seu ensino

Certamente precisamos olhar para a história da construção do conhecimento algébrico, sobretudo no que se refere ao estudo da resolução de equações, para constatar como se desenvolveu o processo de resolução das mesmas, a fim de que este estudo proporcione uma melhor compreensão dos conceitos e definições que já temos hoje.

A história da matemática aponta que o grego Diofanto de Alexandria, que viveu por volta do século III d.C. foi o primeiro matemático a representar um valor desconhecido em um problema por um “termo”. Recorta-se esta observação de seu livro chamado Aritmética. Este valor desconhecido recebeu o nome de Arithme, e em registros posteriores, os termos foram substituídos por símbolos.

> Uma das principais contribuições está em ter introduzido uma forma de representar o valor desconhecido em um problema, designando-o como arithme, de onde vem o nome aritmética. Já no livro 1, ele introduz símbolos, que ele chama “designações abreviadas”, para representar diversos tipos de número. (ROQUE; CARVALHO, 2012, p.168)

Embora Diofanto tenha iniciado o processo de simbologia na solução de uma equação, ele não foi difundido no meio matemático naquela época, os estudos nesse sentido ficaram estagnados por aproximadamente seis séculos, e retomados somente a partir do século IX, que teve o persa al-Khawarizmi como matemático mais influente, vivendo entre 790 e 850. Abordaremos a matemática a partir dos trabalhos do persa al-Khawarizmi e dos matemáticos ligados a ele, ou seja, dos árabes que contribuíram para o desenvolvimento da álgebra que temos hoje, sobretudo no que se refere à resolução das equações de segundo grau.

Embora nesse período os problemas não fossem escritos e resolvidos com notação simbólica, já existia uma representação que nos possibilita associar ao conceito de incógnita que temos hoje. Até então, escreviam os termos desconhecidos e as operações que compunha o problema utilizando palavras.

Neste período, as resoluções possuíam justificativas geométricas, mesmo que o problema não tratasse de geometria, sendo reduzidos a representações geométricas. Com esta condição, todos os valores dados no problema, coeficientes, raízes e números dados, eram positivos. Sobretudo para os números dados, esses valores sempre eram maiores que zero, mas os coeficientes poderiam ser zero.

As equações que seguem, reproduzidas de Roque e Carvalho (2012, p. 199), apresentam os seis problemas de equações de segundo grau, juntamente com sua notação atual:

- quadrados iguais a raízes: $ax^2 = bx$;
- quadrados iguais a um número: $ax^2 = c$;
- raízes iguais a um número: $bx = c$;
- quadrados e raízes igual a um número: $ax^2 + b = c$;
- quadrados e um número iguais a raízes:$ax^2 + c = bx$;
- raízes e um número iguais a quadrados: $bx + c = ax^2$.

A necessidade de seis versões de problemas para as equações de segundo grau decorre de que cada coeficiente assume apenas valores positivos.

Quando o problema saía de uma das estruturas, por exemplo, algum termo negativo no problema, eles eram reduzidos a alguma dessas equações, fazendo o que chamavam de “restauração” (al jabr) e “balanceamento” (al muqabala), a fim de que ficassem com uma estrutura cuja solução fosse de seu domínio, a um modelo que pudesse ser justificada usando a representação geométrica, da reta ou do quadrado.

Esta foi também uma estratégia dos gregos, pois quando precisavam resolver problemas, reduziam esses problemas difíceis a problemas mais simples, cuja solução já era conhecida. Desta maneira os Gregos estavam desenvolvendo uma gama de ideias e estruturas que permitiriam argumentos para uma prova por demonstração ou uma generalização.

O indiano Bháskara, viveu no século XII, é conhecido no Brasil, por lhe terem atribuído a (invenção) da fórmula de Bháskara. A história mostra que os indianos, embora dominassem técnicas de resolução e fizessem uso de alguns simbolismos, não dispunham, na época de Bháskara, de uma fórmula para resolver tais problemas, pois eles ainda eram enunciados e resolvidos por meio de palavras. Ele também se valia de argumentos geométricos, adaptando os problemas a quadrados perfeitos, completando o quadrado com a finalidade de reduzi-los a equações de primeiro grau. “O método de resolução consiste em reduzir o problema a uma equação linear. Isto era feito por meio do método que Bháskara denominava de “eliminar o termo médio”, equivalente ao nosso método de completar quadrados.” (ROQUE; CARVALHO, 2012, p.195)

Bháskara de certa forma possuía uma espécie de algoritmo para resolver os problemas, no entanto claramente podemos perceber que são ações que demonstram a intencionalidade de completar quadrados. Fazer com que a quantidade desconhecida tenha uma raiz, a fim de que possa reduzir o problema a uma equação de primeiro grau. “[é] por unidades iguais a quatro vezes o número de quadrados que é preciso multiplicar os dois membros; e é a quantidade igual ao quadrado do número primitivo de quantidades desconhecidas simples que é preciso adicionar.” (ROQUE; CARVALHO, 2012, p.195).

Um problema representado pela equação como $2x^2 + x = 15$ seria resolvido da seguinte forma:

$$4.2.2x^2 + 4.2.x + 1 = 4.2.15 + 1$$

$$16x^2 + 8x + 1 = 121$$

$$(4x + 1)^2 = 11^2$$

$$4x + 1 = 11$$

$$x = \frac{5}{2}$$

Neste exemplo os dois lados da igualdade tornaram-se quadrados, mas o lado das quantidades conhecidas não é necessário que se torne um quadrado perfeito. Em comparação com o que proporemos, o completamento de quadrados acima exposto tem caráter puramente algébrico.

Com o que foi visto até aqui investigando os métodos resolutivos do persa al-Khwarizmi e do indiano Bháskara, podemos notar que eles já dominavam a técnica de resolver uma equação do 2º grau. A explanação dos casos estudados, embora não utilizando a linguagem algébrica atual para representar coeficientes, incógnitas e as próprias operações (de soma, subtração e multiplicação), mostra um entendimento suficientemente geral do problema de resolver equações do segundo grau. O processo resolutivo era enunciado por palavras, porém ainda não se tratava de uma fórmula.

Abordagem de equações de segundo grau no ensino fundamental

Resolver equações de segundo grau é uma atividade que podemos abordar em situações problemas a partir do sétimo e oitavo ano, não falando propriamente sobre equações de segundo grau, mas quando abordamos conteúdos envolvendo cálculo da área do quadrado.

No contexto de área do quadrado, no sétimo e oitavo ano, as situações problemas geralmente envolvem números naturais, em que a área é um quadrado perfeito. Para a obtenção da medida do lado do quadrado, basta determinar a raiz quadrada positiva de um número. Por outro lado, se for conhecida a medida do lado, a multiplicação do número que a representa por ele mesmo resultará na área procurada.

Do ponto de vista algébrico, a determinação da medida do lado do quadrado se traduz na redução de uma equação de grau 2 para uma equação de primeiro grau, na incógnita que representa a medida do lado. Essa era a estratégia que Bháskara utilizava para resolver problemas enunciados por equações de segundo grau, sobretudo equações que apresentavam ambos os termos (de grau dois e de grau um na incógnita), reduzindo a equação para um modelo onde a solução poderia ser encaminhada pela redução de grau.

Na situação problema que será sugerida aqui faremos uso dessa estratégia, partindo do cálculo da área do quadrado $A = l^2$, onde A e l são respectivamente as medidas da área e do lado do quadrado, estabeleceremos a representação geométrica para dar suporte e melhor compreensão dos procedimentos operatórios e algébricos, uma vez que a representação geométrica, favorece o entendimento e a relação entre as medidas algébricas da equação em um contexto de aplicação.

Em uma situação problema onde é perguntado a medida do lado de um quadrado que têm área A, o estudante aplicando a raiz dos dois lados da equação, encontrará a medida do lado do quadrado.

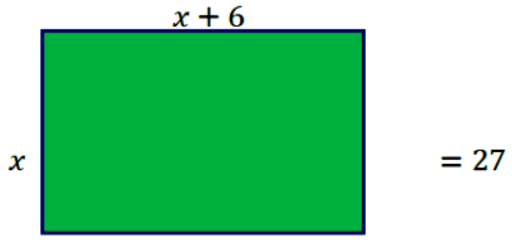
$$A = l^2 \Longrightarrow l = \sqrt{A}$$

Vamos abordar a situação problema a seguir, que se desdobrará em uma equação de segundo grau, determinando suas raízes, utilizando a técnica de completar quadrados.

Uma sala comercial de formato retangular tem comprimento 6 metros maior que a largura e área igual a 27 metros quadrados. Quais são as dimensões da sala comercial?

Geometricamente a situação problema fica representada pela figura 1.

Figura 1. Representação geométrica da situação problema



Fonte: Os autores

Representando agora de forma algébrica, calculando a área do retângulo, multiplicando as dimensões da figura e estabelecendo a igualdade teremos a equação.

$$x.(x+6) = 27$$
$$x^2 + 6x = 27$$

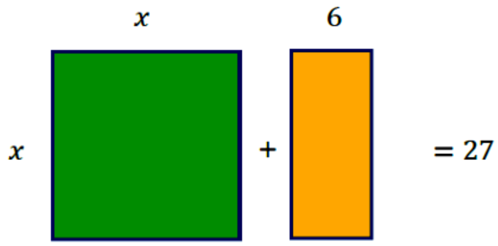
Fazendo agora a representação geométrica dessa última equação, figura 2, podemos notar que ela pode ser representada pela soma de duas figuras, um quadrado de lado x e um retângulo de dimensões x e 6 metros, que continua com a mesma área 27m².

Figura 2. Decompondo o retângulo em duas figuras

Fonte: Os autores

No entanto com essa equação não conseguimos utilizar os conceitos de área do quadrado como ele está, dessa forma precisamos adaptar a figura de modo que seja possível construir um quadrado. Fazendo a interpretação geométrica da equação $x^2 + 6x = 27$ temos do lado esquerdo um quadrado e um retângulo. A figura 3 retrata geometricamente essa equação.

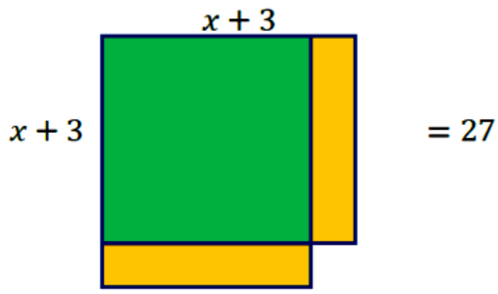
Figura 3. Representação geométrica da equação



Fonte: Os autores

Para formar o quadrado é preciso, a partir do quadrado já existente, incorporar convenientemente a área do retângulo, a figura 4 ilustra essa passagem. Dividindo o retângulo em dois retângulos iguais, com um lado igual a x e outro lado igual a 3, obtemos:

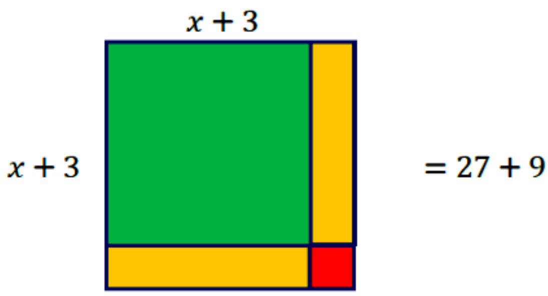
Figura 4. Composição geométrica com a intenção de completar quadrado



Fonte: Os autores

A tarefa final do professor é levar os alunos a compreender que se deve adicionar um quadrado de área 9, para completar a figura, de modo a efetivamente termos um quadrado de lado $x + 3$. Adicionando 9 aos dois membros da equação, poderemos resolver nosso problema utilizando novamente a fórmula para a área do quadrado. A figura 5 ilustra o completar do quadrado.

Figura 5. Fazendo o completamento do quadrado



Fonte: Os autores

Temos então efetivamente um quadrado de lados $x + 3$, que quando elevado ao quadrado oferece-nos a expressão $x^2 + 6x + 9$, comparada com a expressão do problema $x^2 + 6x$, notamos que foi acrescentado nove unidades a ela, correspondendo exatamente ao quadrado de lado 3 encaixado na figura 5.

$$x^2 + 6x = 27$$

$$x^2 + 6x + 9 = 27 + 9$$

Note que a equação está balanceada, uma vez que foi adicionado a mesma área dos dois lados da equação. Como $x^2 + 6x + 9$ representa a área do quadrado, podemos escrever essa expressão na forma de potência $(x+3)^2$ e resolvê-la utilizando o conceito de área do quadrado.

$$(x+3)^2 = 36$$

$$\sqrt{(x+3)^2} = \sqrt{36}$$

$$x+3 = 6$$

$$x = 3$$

Dessa forma as dimensões da sala comercial são 3 metros por 9 metros. Esse processo se repete para solução de outras equações de segundo grau.

Entendemos que essa técnica resolutiva de completar o quadrado proporciona uma melhor compreensão ao estudante, uma vez que até mesmo partindo de uma equação escrita sem contexto, podemos fazer associações de seus termos com figuras geométricas, tornando o processo matematicamente mais abrangente, uma vez que relaciona aspectos operatórios, algébricos, geométricos e pedagogicamente muito mais compreensível. Abordar o conteúdo por esse ponto de vista pode favorecer a compreensão matemática de aspectos que, se abordados somente algebricamente, podem passar despercebidos. O principal deles entendemos ser a relação com a geometria da técnica (algébrica) de completar quadrado.

No oitavo ano é introduzido o assunto de polinômios, estimulando o pensamento, a escrita e os cálculos algébricos, quando são apresentados os produtos notáveis, sobretudo o quadrado da soma e da diferença entre dois termos.

Notamos que a expressão algébrica resultante desse processo é de grau dois com as mesmas características de uma expressão algébrica da forma ax^2+bx+c. A conexão com as interpretações geométricas aqui expostas pode ser realizada.

Dessa forma, se temos uma equação do segundo grau, independente da sua estrutura algébrica, se formarmos parte de um quadrado com os termos que contém a incógnita, poderemos resolver essas equações utilizando o argumento de completar quadrado. No entanto, a restrição ao uso da raiz quadrada positiva deve ser superada neste momento, tornando o argumento de "completar quadrados" mais afeito à álgebra.

Esse procedimento é o empregado para obter a generalização da fórmula resolutiva de uma equação de segundo grau, a fórmula de Bháskara, que é bastante difundida como instrumento para determinar as raízes da equação, e muitas vezes, como o único meio de resolver tais equações.

Algebricamente o processo consiste em isolar a incógnita da equação representada pelo termo desconhecido, fazendo uso dos argumentos geométricos para sustentar e dar suporte às passagens algébricas, exceto pela passagem que considera também a raiz quadrada negativa. Esta deve ter uma justificativa separada.

Por fim, apresentamos a dedução das soluções de uma equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$, onde a, b e c são números reais com a diferente de zero.

Como o objetivo é determinar as raízes da equação, vamos realizar as operações necessárias utilizando os meios já apresentados na solução da situação problema da sala comercial envolvendo medidas numéricas.

Vamos relacionar os termos $ax^2 + bx$ com as figuras do quadrado e do retângulo, sabendo que os coeficientes a, b e c são números reais.

As manipulações algébricas se iniciam da seguinte forma:

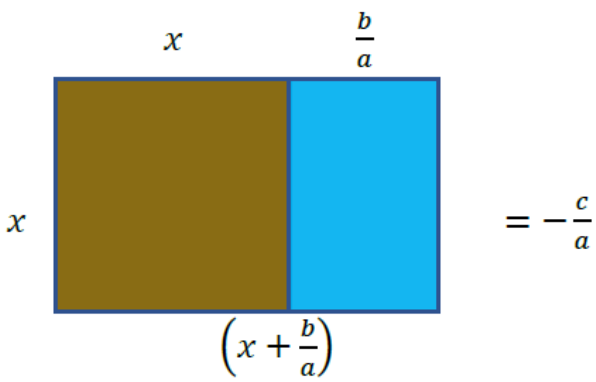
$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 + bx = -c$$

$$x^2 + \frac{bx}{a} = \frac{-c}{a}$$

Depois de isolar os termos que contêm a incógnita e dividir a equação por a, a expressão $x^2 + \frac{bx}{a}$, representa a "soma" das áreas de um quadrado e de um retângulo, pode ser representada por um retângulo de dimensões $\left(x + \frac{b}{a}\right)$ e x. A figura 6 é a representação geométrica da equação supondo $\frac{b}{a}$ e x maiores do que zero.

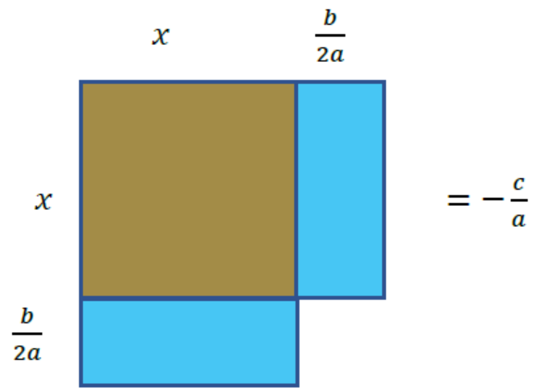
Figura 6. Decompondo o retângulo em duas figuras



Fonte: Os autores

Decompondo o retângulo de dimensões $\left(x+\frac{b}{a}\right)$ e x de modo a reconstruí-lo usando a técnica de completar quadrado, partindo do quadrado existente, devemos dividir ao meio o retângulo de dimensões $\frac{b}{a}$ e x para formar dois retângulos iguais de dimensões $\frac{b}{2a}$ e x e recompor a figura conforme a representação da figura 7.

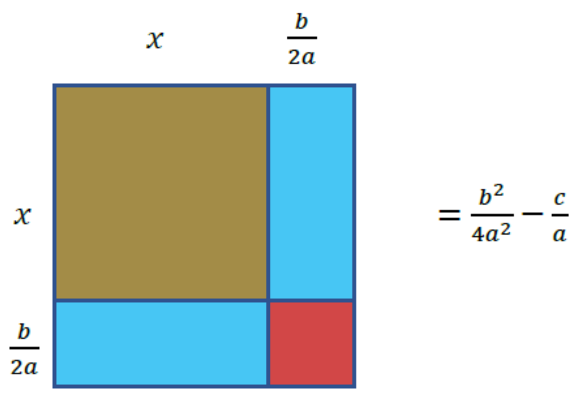
Figura 7. Composição geométrica com a intenção de completar quadrado



Fonte: Os autores

Podemos notar que o polígono formado terá a forma de um quadrado se adicionarmos a ele um quadrado de lado $\frac{b}{2a}$. Estamos imaginando que este valor é positivo, para facilitar a ilustração geométrica, mas se $\frac{b}{2a} < 0$, ainda é possível fazer a ilustração geométrica, com a parte azul se sobrepondo à parte marrom. Entretanto adicionando esse quadrado ao polígono, precisamos adicionar a mesma área do lado direito da igualdade, de modo a mantermos a equação balanceada, assim a equação ganhará a adição de $\frac{b^2}{4a^2}$ dos dois lados da igualdade. A figura 8 indica o balanceamento da equação.

Figura 8. Fazendo o completamento do quadrado



Fonte: Os autores

Portanto agora temos um quadrado de lados medindo $\left(x+\frac{b}{2a}\right)$, cuja área fica expressa por $\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$. Se esse valor é positivo, podemos extrair sua raiz quadrada, obtendo em princípio dois valores possíveis (um positivo e um negativo). Com isto os valores possíveis da incógnita x são:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$x=\frac{-b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Acreditamos que essa proposta vai além do que apenas construir esse instrumento, uma fórmula que é aplicada para encontrar as raízes de uma equação de segundo grau, ela é também a oportunidade de fundamentar e estabelecer relações entre operações aritméticas, algébricas e geométricas com a finalidade de mostrar que a generalização é uma necessidade da ciência de sistematizar situações problemas. Ademais, esta dedução é suficientemente compreensível para o nível básico de ensino.

Formulações de situações problemas

As situações problema que estão neste artigo foram produzidas dentro do contexto de compor ideias nossas com situações problema já publicadas em revistas, provas e concursos, havendo a necessidade de adaptação, para que se pudesse abordar o tema ao qual o presente artigo se refere.

Nosso propósito com essa seção é oferecer aos leitores situações problemas que resultem em equações de segundo grau, a fim de que possam ser exploradas por meio da representação geométrica e resolvidas por meio da técnica de completar quadrados.

1) Considere B o ponto que divide AC de modo que AB<BC.

Figura 9. Segmento de reta AC

Fonte: Os autores

Sabendo que as medidas dos segmentos AB, BC e AC formam uma progressão geométrica, calcule a razão dessa progressão.

A situação problema a seguir foi adaptada da questão 5.14 do livro Matemática Discreta, Morgado e Carvalho 2015 Pág. 97.

2) *Uma loja de departamentos realiza uma promoção e anuncia a venda de um violão sob duas condições de pagamentos:*

a) *à vista com 25% de desconto*

b) *em duas parcelas mensais, iguais e consecutivas sendo o primeiro pagamento um mês após a compra.*

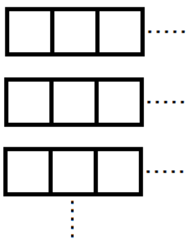
Se o violão custa R$ 800,00 determine a taxa de juros embutida na venda a prazo.

As situações problemas a seguir foram elaboradas pelos autores deste artigo.

3) *A construção de quatro imóveis ocupará uma área total de 112 m². Cada um deles terá o formato retangular de modo que o lado maior terá três metros a mais que o lado menor. Sabendo que os quatro imóveis possuem a mesma área, calcule as dimensões de cada um.*

4) *Em um salão de festas, as mesas para os eventos são montadas usando mesas de formato quadrado, onde cada lado desta mesa acomoda exatamente uma pessoa. Para os eventos, o proprietário encosta as mesas uma na outra de modo a formar mesas retangulares, possibilitando que os convidados se acomodem ao redor das mesas retangulares.*

Figura 10. Possível organização das mesas



Fonte: Os autores

Ele sempre organizou o salão de modo que o número de mesas quadradas em cada mesa retangular seja igual ao número de mesas retangulares. Entretanto, na sua última festa ele precisou colocar uma mesa quadrada a mais em cada uma das mesas retangulares. Quantas mesas quadradas foram utilizadas nessa festa, se havia 240 convidados?

Formular situações problemas inéditas se mostrou uma tarefa complexa, envolvendo muita pesquisa. Consequentemente produzimos algumas e adaptamos outras. Para aqueles que não praticam a pesquisa, elaborar uma situação problema pode ser uma atividade ainda mais difícil do que a resolução de tais situações problemas quando apresentadas pela primeira vez.

Conclusão

O presente artigo teve como meta alicerçar, no contexto da equação de segundo grau, a atitude de generalizar, trazer o tema para ser explorado em sala de aula, inclusive por meio de situações problemas.

A proposta foi uma oportunidade de conectar os aspectos algébricos que fundamentalmente são abordados durante a vida escolar, a algoritmos e fórmulas, que são apresentados com a devida construção e participação dos estudantes, bem como de explorar a técnica de completar quadrados como caminho para solução de equações quadráticas.

O desenvolvimento desse trabalho aconteceu em meio à pandemia da Covid-19, o que trouxe dificuldades extras de aplicação com o ensino remoto emergencial.

Embora as condições não tenham sido favoráveis, percebemos que é possível para os estudantes a partir do final do ensino fundamental, sobretudo voltando a sua rotina de estudos, acompanhar e compreender o desenvolvimento da generalização da fórmula resolutiva de uma equação de segundo grau, tendo o suporte do seu professor.

Foi perceptível a compreensão dos alunos no que se refere a solução de uma equação quadrática por meio da técnica de completar quadrados, sobretudo quando representamos geometricamente a equação a ser resolvida, relacionando os termos algébricos da equação com as figuras que os representam, quadrados e retângulos.

A satisfação dos estudantes em participar de uma ação matemática que teve como resultado uma fórmula, que poderá ser empregada para resolver outras situações de mesma natureza, foi visível. Intervenções como essas contribuem para a melhor compreensão da matemática, por aproximar a matemática escolar do método dedutivo.

Desse modo, as perspectivas que se delineiam é que outros temas matemáticos do ensino fundamental e médio possam ser desenvolvidos de maneira semelhante no processo de ensino da matemática, potencializando a característica da generalização.

Referências

BICUDO, M. A. V. *et al.* **Pesquisa em educação matemática:** concepções & perspectivas. São Paulo: Editora Unesp, 1999.

BRASIL. Ministério da Educação**. Base nacional comum curricular:** Brasília: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf Acesso em: 23 mar. 2021.

FIORENTINI, D; LORENZATO, S. **Investigações em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos: 3º ed. Campinas: Autores Associados, 2012.

LIMA, E. L. **Matemática e ensino:** coleção do professor de matemática. 3º ed. Rio de Janeiro: SBM 2007

MORGADO, A. C; CARVALHO, P. C. P. **Matemática discreta:** coleção profmat. 2º ed. Rio de Janeiro: DRQ gráfica e editora, 2015.

MOSCA, M. A; CARVALHO, T. O; CARVALHO, A. M. F. T. **Acerca da circularidade no estudo inicial dos números irracionais:** uma proposta para a educação básica. Acta Scientiae, Canoas v.18, n.2 p.319-334, maio/ago 2016.

PAIS, L. C. **Ensinar e apreender matemática:** 2º ed. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2013.

ROQUE, T; CARVALHO, J. B. P. **Tópicos de história da matemática:** 1º ed. Rio de Janeiro: Editora Mangava, 2012.

SOUZA, M. C; PANOSSIAN, M. L; CEDRO, W. L. **Do movimento lógico e histórico à organização do ensino:** o percurso dos conceitos algébricos. 1º ed. Campinas: Editora Mercado das Letras, 2014.

NOTAS

IDENTIFICAÇÃO DO TEXTO
O presente texto é resultado da Dissertação de Mestrado do primeiro autor apresentada na Universidade Estadual de Londrina (UEL), em 2021, sob a orientação do Professor Dr. Túlio de Oliveira Carvalho.

IDENTIFICAÇÃO DE AUTORIA
Alexandre Maicher Neto. Mestre em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Professor do quadro próprio do magistério da Rede Estadual de Educação do Estado do Paraná, PR, Brasil.
E-mail: alexandremaicherneto@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-8061-3645

Túlio Oliveira de Carvalho. Doutorado em Física pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Professor Associado. Universidade Estadual de Londrina (UEL), Londrina, PR**,** Brasil.
E-mail: tuliocarvalho@uel.br
https://orcid.org/0000-0002-6344-2418

AGRADECIMENTOS
Não se aplica.

FINANCIAMENTO
O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Não se aplica.

EDITORES
Patricia Helena Mirandola Garcia, Eugenia Brunilda Opazo Uribe, Gerson dos Santos Farias.

HISTÓRICO
Recebido em: 09/09/2021 – Aprovado em: 21/11/2021 – Publicado em: 15/12/2021.

COMO CITAR
MAICHER NETO, A; CARVALHO, T. O. O Tema de Equações do Segundo Grau como espaço para a Generalização. **Revista ENSIN@ UFMS**, Três Lagoas, v. 2, número especial, p. 186-209. 2021.