ENSIN@ UFMS

Três Lagoas, V. 2, Número Especial, 2021.
ISSN: 2525 - 7056

"Ensinar é ação intencional, que na tensão entre a realidade e o mundo que sonhamos, mobiliza professores e estudantes a reiventarem a escola." Valdeci Luiz Fontoura dos Santos

UFMS

ISSN: 2525-7056

ENSIN@ UFMS

REVISTA ENSIN@ UFMS - ISSN 2525-7056

REVISTA ENSIN@ UFMS - ISSN 2525-7056

Três Lagoas/MS, v. 2, Número Especial, Dezembro 2021

Profmat: Contribuições para o Ensino de Matemática

Edição Temática

ORGANIZADORES

Fernando Pereira de Souza
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Brasil.

Rinaldo Vieira da Silva Júnior
Universidade Federal de Alagoas, Brasil.

André Vicente
Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Brasil.

Os autores são responsáveis pelo texto final, quanto ao conteúdo e quanto à correção da linguagem.

REVISTA ENSIN@ UFMS - ISSN 2525-7056

A Revista ENSIN@ UFMS é uma publicação anual vinculada ao Grupo de Pesquisa Laboratório de Ensino e Pesquisa Multidisciplinar (LEA UFMS) e ao Grupo de Estudos e Pesquisas em Formação de Professores (GForP). Ambos os grupos são formados por professores que atuam na graduação e Pós Graduação na Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), Campus de Três Lagoas (CPTL). A revista está vinculada aos Programas de Pós-Graduação em Educação (PPGE), Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do CPTL/ UFMS, bem como ao Programa de Pós-Graduação Mestrado e Doutorado em Geografia (PPGGeo), Mestrado Profissional em Letras (PROFLETRAS).

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

Reitor
Marcelo Augusto Santos Turine

Vice-Reitora
Camila Celeste Brandão Ferreira Ítavo

Diretor do Campus de Três Lagoas
Osmar Jesus Macedo

Endereço para correspondência:
UFMS - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Av. Ranulpho Marques Leal, 3484
Caixa Postal 210 – CEP: 79620-080

E-mail: revista.ensinaufms@gmail.com
Site: https://periodicos.ufms.br/index.php/anacptl/index

SUMÁRIO

EDITORIAL

Há um mundo secreto lá fora.
Um universo paralelo oculto de beleza e elegância,
entrelaçado intrinsicamente com o nosso.
É o mundo da matemática.
E ele é invisível para a maioria de nós.

Edward Frenkel

Apresentamos um número especial da Revista ENSIN@ UFMS, a Edição Temática Profmat: Contribuições para o Ensino de Matemática, organizado pelos professores Fernando Pereira de Souza (Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas), Rinaldo Vieira da Silva Júnior (Universidade Federal de Alagoas, Campus de Arapiraca) e André Vicente (Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Campus de Cascavel).

O Conselho Editorial agradece e parabeniza os organizadores pelo trabalho de divulgação, avaliação, convite a autores e indicação de avaliadores, gerando uma resposta positiva da comunidade acadêmica vinculada ao Profmat, garantindo assim que a publicação deste número especial seja possível.

Ao publicar a Edição Temática, lembramos do Professor Elon Lages Lima que foi Coordenador Geral do Profmat e, ao falar sobre os professores e o ensino de Matemática, destacava três condições importantes:

> [...] quanto ao ensino, não há mistério nem milagre. O bom professor é aquele que vibra com a matéria que ensina, conhece muito bem o assunto e tem um desejo autêntico de transmitir esse conhecimento, portanto se interessa pelas dificuldades de seus alunos e procura colocar-se no lugar deles, entender seus problemas e ajudar a resolvê-los. Não há fórmulas mágicas para ensinar Matemática. Não há caminhos reais, como Euclides já dizia a Ptolomeu. A única saída é o esforço honesto e o trabalho persistente (LIMA, 2007, p. 5).

Dedicamos essa edição temática aos professores de Matemática da Educação Básica, que não mediram esforços durante o ano de 2021 para ensinar por meio da modalidade do Ensino Remoto Emergencial, devido ao contexto da pandemia da covid-19.

Em particular, dedicamos aos professores que vibram com a Matemática e que fazem toda a diferença. Esperamos que os textos publicados nesta edição possam contribuir e inspirar o trabalho em sala de aula.

Boa leitura!

Eugenia Brunilda Opazo Uribe
Gerson dos Santos Farias
Editores Adjuntos

REFERÊNCIAS

FRENKEL, E. **Amor e Matemática**: o coração da realidade escondida; tradução Carlos Szlak. 1 ed. Rio de Janeiro: Casa da Palavra, 2014.

LIMA, E. L. Matemática e Ensino. **Coleção do Professor de Matemática**. Sociedade Brasileira de Matemática, 2007.

APRESENTAÇÃO EDIÇÃO TEMÁTICA

Temos a satisfação de apresentar a edição especial da Revista ENSIN@ UFMS com o tema PROFMAT: Contribuições para o Ensino de Matemática. A Edição Temática comemora os dez anos do Programa no CPTL/UFMS e busca reunir artigos e relatos desenvolvidos por alunos, professores e egressos do PROFMAT sobre tema específico pertinente ao currículo de Matemática do Ensino Básico e que tenha impacto na prática didática em sala de aula. Este número especial é composto por 20 trabalhos científicos, sendo 13 artigos, 5 relatos de experiência e 2 notas de pesquisas.

Iniciamos a seção de artigos com o texto *Profmat: Um Programa Pioneiro* de autoria de Vanderlei Horita, autor convidado pelos organizadores da Edição Temática. O autor apresenta a história do Profmat e da estrutura que inspirou outras áreas a criarem programas para qualificação de professores do ensino básico. O autor também aborda os impactos do programa e seus desafios.

Os autores Eugenia Brunilda Opazo Uribe, Fernando Pereira de Souza e Antonio Carlos Tamarozzi apresentam o artigo *O Profmat no Campus de Três Lagoas da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul no Período de 2012 a 2021: Entre Diálogos, Aspectos e Impactos*. No texto são relatados resultados do programa desde sua implantação no Campus de Três Lagoas (CPTL) da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), o artigo visa identificar alguns aspectos importantes sobre o perfil do aluno que procura o Profmat no campus, bem como evidenciar impactos na vida profissional dos egressos do programa.

O artigo *Uma Proposta Didática para o Ensino do Teorema de Pitágoras,* de autoria de Cecília de Souza Fernandez e Weverton M. Ferreira de Castro apresenta uma proposta do uso da história da Matemática para motivar os alunos ao estudo do teorema de Pitágoras. Os autores trazem no artigo a importância de demonstrar os resultados e não só a memorização das fórmulas.

Os autores Adalgisa Loureiro de Mello e Janecler A. Amorin Colombo apresentam no artigo *Ensino de Função Afim através da Resolução de Problemas: uma intervenção* *no Ensino Médio* uma pesquisa com alunos do primeiro ano com cunho qualitativo, a pesquisa busca verificar a percepção dos alunos frente ao encaminhamento diferenciado das aulas em relação ao conteúdo de função afim. O artigo também traz os resultados positivos como mudança de postura da pesquisadora e dos alunos.

Já o artigo *Educação Financeira a Serviço da Cidadania,* de autoria de João Paulo Attie, Nilson Setsuo Ozawa e Nadir Santos Freitas apresenta uma pesquisa com alunos do ensino médio e identifica o conhecimento dos mesmos a respeito da Educação Financeira. A pesquisa de cunho qualitativo, teve como instrumento de coleta de dados um questionário, cujas perguntas foram elaboradas com base na contextualização e na modelagem.

O artigo *Percepções de Professores sobre Objeto de Aprendizagem COMBESQ,* de autoria de Dayvid Evandro da Silva Lós e Rinaldo Vieira da Silva Júnior trata do ensino e aprendizagem de análise combinatória na educação básica utilizando a ferramenta CombEsq.

O artigo *Pontos Notáveis do Triângulo: Um Estudo através da Resolução de Problemas,* de autoria de Sandra Iris Naveiro Galera e Paulo César Oliveira promove o estudo do circuncentro através da resolução de problemas. Os autores apontam pontos positivos e melhoria na escrita dos alunos do nono ano do ensino fundamental.

Os autores Gustavo Rosas Rodrigues, José Carlos Pinto Leivas e Lidiane Buligon apresentam no artigo *Investigação com o Problema do Mapa do Tesouro* uma pesquisa de cunho qualitativo, com objetivo de analisar como estudantes do Ensino Médio realizam uma atividade investigativa na resolução do problema clássico, a “Caça ao Teosouro”.

O artigo *Modelo Didático-Praxeológico para Ensino de Vetores no Ensino Médio: Possibilidades de Trabalhos na Transição para o Ensino Superior,* de autoria de, Pedro José Defensor Menezes, Edmo Fernandes Carvalho e Lauriclecio Figueredo Lopes apresenta um modelo didático-praxeológico - MPD, para o trabalho com um objeto da Geometria Analítica sob a lente da Teoria Antropológica do Didático – TAD. Os autores concluem que o MDP pode colocar o estudante em atividade, com praxeologias mais econômicas do ponto de vista cognitivo, nesse nível de escolaridade, mas principalmente no superior.

O artigo *O Tema de Equações do Segundo Grau Como Espaço para a Generalização,* de autoria de, Alexandre Maicher Neto e Túlio Oliveira de Carvalho apresenta uma proposta de ensino das equações de segundo grau sugerindo a abordagem da generalização de fórmulas matemáticas utilizadas no período escolar. Os autores utilizam a técnica de completar quadrados para resolver situações problemas e relacionam as equações de segundo grau com representações geométricas.

Os autores Francisco Alves dos Santos e Alexandre Ramalho Silva apresentam o artigo *Aplicação de Vetores à Computação Gráfica: Um estudo de caso*. Os autores investigam a satisfação e o desempenho dos discentes durante a aplicação de uma oficina sobre vetores aplicados à computação gráfica e verificam a melhoria no aprendizado dos mesmos, no estudo da geometria analítica. Os autores afirmam que que a contextualização dos conteúdos matemáticos e sua aplicação, favorecem o processo ensino-aprendizagem.

O artigo *Formação Continuada de Professores: Parceria entre Profmat, Educação Infantil e Anos Iniciais do Ensino Fundamental,* de autoria de Ana Maria Porto Nascimento, Arthur do Amaral Rocha, Fabiana Alves dos Santos e Priscila Santos Ramos identifica as contribuições para a formação continuada dos professores da Educação Infantil e Anos Iniciais do Ensino Fundamental que ocorreu por meio da parceria entre a Pós-Graduação e a Educação Básica. A pesquisa configurou-se como atividade de formação continuada para as professoras e uniu a Universidade e a escola de Educação Básica.

Já o artigo *O Ensino de Coordenadas Polares fora dos Números Complexos: Uma Experiência usando o Winplot* sob a autoria de Bruno Gomes de Freitas e Vilmar Pereira de Jesus relata a construção e a aplicação de uma atividade sobre o ensino de coordenadas polares, alheio ao contexto dos números complexos. Os autores utilizaram o Winplot como ferramenta tecnológica e assim contemplaram uma visão real da transição dos sistemas de coordenadas cartesianas para polares.

Iniciamos a Seção Notas de Pesquisa com o texto de autoria de Renata Furtado Horta e Marcelo Ferreira, intitulado *A Influência da Autoestima no Desempenho Escolar*. Os autores afirmam que foi possível observar as definições de autoestima, dimensionar ações que impactam na autoestima dos alunos e conhecer teorias que apontam a importância da autoestima no ambiente escolar. A nota ainda conclui que é essencial o incentivo familiar e escolar para o desenvolvimento eficaz e significativo da aprendizagem.

A segunda nota de pesquisa sob o título *História da Matemática e Práticas Experimentais no Estudo de uma Relação entre as Medidas dos Lados do Triângulo Retângulo* é de autoria de Anderson Silva e Christine Sertã Costa. Os autores apresentam uma atividade experimental fundamentada na história da matemática, problematizando um conteúdo ensinado no 9º ano do ensino fundamental da educação básica, com base nos seus processos históricos de produção provocando o diálogo entre duas abordagens: a história da matemática e o ensino por atividades experimentais.

O primeiro relato de experiência intitulado *Condição de Existência de um Triângulo Via Fluxograma: Um Relato de Experiência,* de autoria de Juliano da Cunha da Silva e Carmen Vieira Mathias apresenta uma investigação realizada durante a aplicação de uma sequência didática que versa sobre a condição de existência de um triângulo, com enfoque em fluxogramas. Os autores também utilizam material concreto para a compreensão da condição de existência de um triângulo.

Os autores Luís Fernando A. de Falqui e Fernando Pereira de Souza apresentam no relato de experiência *Soma 15: O Jogo da Escopa como Ferramenta para o Ensino da Matemática* a utilização de um jogo de cartas, a escopa, enquanto instrumento de ensino de matemática, em sala de aula. Os autores buscam uma abordagem atrativa e de fácil absorção, despertando curiosidades e construindo pensamentos estratégicos intuitivos.

O relato de experiência *O Uso do Geogebra para o Ensino do Cálculo da Área de Polígonos no Ensino Fundamental,* de autoria de Lilian da Silva Gonçalves e Joelma Ananias de Oliveira apresenta resultados de um estudo realizado para a elaboração de uma coleção de atividades interativas no GeoGebra. O texto traz algumas funcionalidades do GeoGebra, como: o uso do aplicativo para representação gráfica de função, discussão sobre resolução de sistemas lineares e o desenvolvimento colaborativo disponível pelo software.

Os autores Thiago Lessa dos Santos Melo, Isnaldo Isaac Barbosa e Arlyson Alves do Nascimento apresentam no relato de experiência *Construindo uma Lousa Digital de Baixo Custo* um procedimento e um programa de código aberto para a construção de uma lousa digital de baixo custo com os recursos disponíveis no mercado brasileiro.

Encerramos esse número temático com o relato *A Matemática do QR Code,* de autoria de Alberto Renan Dias da Silva e Silas Fantin, que relatam a possibilidade de utilização dos códigos nas aulas de matemática básica com a finalidade de manter os alunos interessados na disciplina. Os autores mostram as características dos códigos QR e como eles podem ser relacionados com conteúdos matemáticos apresentando algumas propostas de atividades.

Os trabalhos foram submetidos a avaliação por pares, adotando o processo editorial de avaliação duplo-cego anônima (double-blind peer review), na qual o avaliador não conhece o nome dos autores e os autores não conhecem o nome dos avaliadores, o que garante maior idoneidade ao processo de avaliação e publicação.

Esperamos que a publicação dessa Edição Temática contribua com o debate sobre ensino da matemática e a elaboração de novos trabalhos do Profmat com impacto na prática em sala de aula.

Boa leitura!

Fernando Pereira de Souza, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Brasil

Rinaldo Vieira da Silva Júnior, Universidade Federal de Alagoas, Brasil

André Vicente, Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Brasil

Organizadores

ARTIGOS

ENSIN@ UFMS 2021
ISSN 2525-7056

PROFMAT: UM PROGRAMA PIONEIRO

PROFMAT: A PIONEER PROGRAM

Vanderlei Horita[1]

RESUMO: O Profmat é o maior programa de pós-graduação do Brasil. A rede possui mais de 80 instituições associadas ofertando vagas em cerca de 100 de suas unidades acadêmicas, e está presente em todas as unidades federativas do país. Até meados de 2021, o Programa formou mais de 6 mil mestres. Nas próximas páginas apresentamos um pouco da sua história e da estrutura do Programa que inspirou mais de uma dezena de outras áreas a criarem programas para qualificação de professores do ensino básico.

PALAVRAS-CHAVE: Pioneirismo. Qualificação de professores. Educação básica.

ABSTRACT: Profmat is the largest graduate program in Brazil. The network has more than 80 institutions offering places in around 100 of its academic units, and is present in all federative units in the country. By mid-2021, the Program had graduated more than 6,000 Master's degrees. We present a piece of its history and the structure of the program that inspired more than a dozen other areas to create similar programs for qualification of primary and secondary teachers.

KEYWORDS: Pioneering. Teacher qualification. Primary and secondary education.

Introdução

Neste momento em que o país retoma as atividades e a convivência social interrompidas pela pandemia causada pelo SARS-CoV-2, apresenta-se um enorme desafio em todos os níveis da educação. Durante a pandemia, o professor, tão desvalorizado ao longo das últimas décadas, teve o valor do seu trabalho trazido à luz. Todo progresso da revolução digital mostrou-se insuficiente no processo ensino-aprendizagem sem as escolas e seus professores e funcionários. Em que pese todo o aprendizado e experiências adquiridas pelo professor neste período, devemos nos render à constatação de que as melhores ferramentas tecnológicas de ensino remoto não alcançam os resultados de um bom professor na sala de aula. Ressaltou-se ainda mais o papel central do professor na educação. Muitas das práticas desenvolvidas nesse período deverão ser incorporadas na volta presencial. É preciso valorizar esses profissionais.

Sem uma comunicação transparente com a sociedade e sem planejamento, o Brasil foi um dos países que ficou mais tempo com as escolas fechadas. A educação não foi

[1] Universidade Estadual Paulista. E-mail: vhorita@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-9304-0655

Informações completas da obra no final do artigo

tratada como prioridade e sentiremos os efeitos por décadas, por gerações. É inadiável investir maciçamente na educação, e aqui defenderei que o investimento na matemática deve ser tratado com especial atenção.

Note que foi utilizada a palavra investimento e não gasto. Segundo um estudo de 2010 no Reino Unido, encomendado pela agência EPSRC (Engineering and Physical Sciences Research Council), a matemática gera diretamente 10% do total de empregos e 16% do PIB dos países. Além disso, trabalhadores bem capacitados em matemática contribuem para o desenvolvimento de processos e produtos de ponta em todas as áreas. Um agricultor, um pecuarista ou um médico com bons conhecimentos de matemática pode ter um ganho de eficiência enorme ao conectar mais conhecimentos utilizando raciocínios lógico e dedutivos.

Em 2007, a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes) recebeu a missão de formular políticas públicas para qualificação de professores de ensino básico. Até então, em seus 56 anos de existência, a Capes alcançou um alto grau de reconhecimento pelo sistema de pós-graduação ter alcançado os níveis de excelência na formação de pesquisadores e professores do ensino superior.

Nesse contexto, o Presidente da Capes em 2010, Prof. Jorge Almeida Guimarães, provocou a comunidade matemática, por meio da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) sob a liderança de Hilário Alencar e Marcelo Viana, um programa de mestrado voltado à qualificação do professor de matemática do ensino básico. Eles idealizaram e lideraram a criação desse mestrado, com denominação Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat), cuja sua aula inaugural teve lugar na sede do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), no Rio de Janeiro, em pleno sábado, no dia 2 de abril de 2011, às 11h. Essa aula inaugural contou com as presenças dos professores Jorge Almeida Guimarães (Presidente da Capes), Elon Lages Lima (Coordenador do Profmat), Cesar Camacho (Diretor do IMPA), Celso Costa (Diretor de Educação a Distância da Capes), Hilário Alencar (Presidente da SBM), Marcelo Viana (Presidente do Conselho Gestor do Profmat e Vice-presidente da SBM), Jacob Palis (Presidente da Academia Brasileira de Ciências), e foi transmitida ao vivo via internet para todas as instituições associadas.

O Profmat é o maior programa de pós-graduação do país e um dos maiores, se não o maior, do mundo. A rede conta com mais de 80 instituições associadas ofertando vagas em cerca de 100 de suas unidades acadêmicas, alcançando todos os Estados e o Distrito Federal. Até meados de 2021, o Programa formou mais de 6 mil mestres.

Convidamos o leitor a conhecer nas próximas páginas um pouco da história e da estrutura do programa que inspirou mais de uma dezena de outras áreas a criarem programas para qualificação de professores do ensino básico.

Contextualização

Uma questão natural é: *Por que uma sociedade científica, a SBM, foi o meio que a Capes utilizou para induzir um programa de pós-graduação para melhoria da formação do professor?* A pesquisa em Matemática do Brasil, a partir de 2015, foi responsável por cerca de 2,37% do total da produção científica mundial na área. A população brasileira em 2020 representava cerca de 2,71% da população global. Numericamente, a comunidade científica Matemática brasileira produz aproximadamente à proporção da população do país.

Qual é a qualidade dessa produção científica? Um bom indicador para responder a essa pergunta é a estratificação em grupos dos países da União Internacional de Matemática (IMU – sigla em inglês), que congrega os países representativos na área. O Brasil em 2018 ascendeu ao Grupo V, que representa o grupo dos países em estágios mais avançados no desenvolvimento na área de Matemática. Formam esse grupo: Alemanha, Brasil, Canadá, China, Estados Unidos, França, Israel, Itália, Japão, Reino Unido e Rússia. O país está no grupo de 11 países no topo dos melhores da IMU, que conta com 87 países membros.

E sobre o ensino de matemática no país? Como parâmetro de comparação entre países, o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa) realizado pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) é um dos principais referenciais internacionais de desempenho de estudantes, ele é realizado a cada três anos. São avaliados do desempenho dos estudantes de 15 anos de idade em três domínios: Leitura, Matemática e Ciências. Os resultados permitem que os países avaliem os conhecimentos e habilidades de seus estudantes em comparação com os de outros países. O Brasil participa do Pisa desde sua primeira edição em 2000. Na última edição, em 2018, entre os 79 países e regiões que participaram do Pisa, o país ficou entre os 10 últimos em desempenho em Matemática.

Muitas perguntas passam pela nossa cabeça quando olhamos o abismo entre a pesquisa científica e o ensino de Matemática. *Mas, por onde começar?* A nossa resposta é qualificando e valorizando os professores.

Essa resposta nos leva a outras perguntas e que levam a outras mais. A transformação e melhoria da educação depende de várias ações como maior domínio do conteúdo pelo professor do que será ensinado, melhores práticas didáticas conectadas com a realidade dos estudantes, condições de trabalho adequadas, salários compatíveis, por exemplo. Cada indivíduo, grupo, e comunidade pode dar a sua contribuição. O Profmat é uma das ações abraçadas pela comunidade matemática.

O que os matemáticos mais gostam de fazer, é resolver problemas, quanto mais difíceis, mais desafiadores são. A melhoria da educação básica do Brasil, particularmente do Ensino de Matemática, certamente é um dos problemas mais complexos que a comunidade matemática vem buscando soluções. O Profmat não é a primeira iniciativa da comunidade nesta direção. Somente para citar duas das mais recentes, temos as Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) e o Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio (PAPMEM), este último inspirador do Profmat. Ademais, há uma farta e profícua produção de material didático na área de Matemática, a maioria disponibilizada gratuitamente aos interessados.

O Profmat

O Profmat é um programa pioneiro na qualificação de professores do ensino básico em nível de mestrado. O objetivo principal do Profmat é proporcionar formação matemática aprofundada relevante ao exercício da docência no Ensino Básico, visando dar ao egresso qualificação certificada para o exercício da profissão de professor de Matemática. Para atingi-lo, o programa fundamenta-se nas seguintes diretrizes:

i) Executar um processo de formação complementar em matemática, baseado na estrutura curricular da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que promova o domínio dos conteúdos apropriados, da forma de pensar e das estratégias de resolução de problemas característicos da matemática.

ii) Promover uma articulação eficaz entre conhecimentos e práticas das ciências matemáticas e do ensino básico, direcionada aos objetivos da educação básica.

iii) Estimular e promover a independência do professor, fornecendo-lhe instrumentos para busca por conhecimento e desenvolvimento profissional de forma autônoma, crítica e permanente.
iv) Incentivar a pesquisa e produção de materiais (artigos, livros, produtos técnico-tecnológicos, etc.) e práticas pedagógicas inovadoras para o enriquecimento do processo de ensino e aprendizagem de Matemática na escola.

Espera-se que o egresso do Profmat tenha um pleno domínio do conteúdo específico de Matemática, inclusive de suas aplicações mais imediatas, bem como uma noção da evolução histórica dos principais temas que constam na BNCC da Educação Básica.

São verificados impactos relevantes nas práticas em sala de aula e nas escolas em que egressos do Profmat atuam como criação de laboratórios de ensino e ambientes de aprendizagem; maior estruturação dos conteúdos ministrados; ampliação do uso de ferramentas pedagógicas e tecnológicas, muitas delas desconhecidas antes de ingressar Programa, tais como GeoGebra e outros softwares matemáticos, jogos educacionais (gameficação), dobraduras e robótica; formação de turmas para treinamento para olimpíadas de matemática e outras olimpíadas científicas; uso maior de contextualizações concretas dos conteúdos, com focagem na compreensão no lugar da memorização dos conteúdos; maior autonomia em sala de aula, transformando livros-textos e apostilas como fio norteador das atividades no lugar de fontes exclusivas de conhecimento; egressos atuam como multiplicadores junto a professores do ensino básico; desenvolvimento de ações voltadas à portadores de necessidade especiais no ensino de matemática; melhoria na prática pedagógica, tanto no campo cognitivo quanto no metodológico, entre outros.

O Profmat propiciou a professores das instituições associadas a possibilidade de atuar na qualificação do professor da educação básica, utilizando recursos humanos altamente qualificados em prol da melhoria do ensino de matemática. A formação do corpo docente do programa é nas áreas de Matemática, Educação Matemática, Educação e áreas afins, com experiência em matemática. Vários professores e egressos do Profmat participam ativamente na produção de materiais didáticos. Um exemplo é o projeto “Livro Aberto de Matemática”[2], uma iniciativa da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). O projeto é um

[2] Disponível em: https://umlivroaberto.org/

esforço de professores para produzir coleções de livros didáticos de Matemática para a Educação Básica de forma colaborativa e com licença aberta (Creative Commons). O conteúdo de cada livro é determinado pela BNCC e complementado com tópicos extras.

1. Um programa em rede

O Profmat é um programa em rede formando mestres em todo país. Para assegurar que os alunos de todas as partes recebam uma formação de qualidade e com um padrão mínimo de excelência, levando-se em conta as regionalidades, a rede está articulada pelo:
a) *Exame Nacional de Acesso (ENA)*, processo seletivo com oferta unificada, elaborado por comissão designada pela Comissão Acadêmica Nacional com aplicação e correção sob responsabilidade das coordenações institucionais.
b) *Exame Nacional de Qualificação (ENQ)*, constituído por uma prova discursiva sobre os conteúdos das disciplinas básicas, elaborada e corrigida por comissões designadas pela Coordenação Nacional e aplicada pelas coordenações das instituições associadas. A aprovação no ENQ é requisito obrigatório para obtenção do título de mestre.
c) *Livros-textos da Coleção PROFMAT*, utilizados nas disciplinas do Programa. A coleção foi criada pela SBM para o Programa. Atualmente, a coleção conta com 18 títulos.
d) *Reuniões de coordenadores*, pelo menos uma vez ao ano, oportunidades em que são debatidas questões acadêmicas e administrativas do programa.
e) *Sistema de Controle Acadêmico (SCA)*, sistema nacional informatizado que permite o gerenciamento acadêmico do Profmat.

O ENQ e a Coleção PROFMAT asseguram uma formação básica uniforme do conteúdo das disciplinas em toda a rede. A Coleção PROFMAT da SBM conta com 18 títulos que compõe a bibliografia básica de disciplinas. Foram produzidas videoaulas de 8 disciplinas, que abrangem os conteúdos de todas as disciplinas básicas. Os livros e as videoaulas são produzidos especificamente para o Programa, dando uniformidade dos conteúdos das disciplinas e maior autonomia aos discentes.

2. Trabalho de Conclusão

Para a obtenção do título, é necessária a apresentação de um trabalho de conclusão, com temas específicos pertinentes ao currículo de Matemática da Educação Básica e impacto na prática didática em sala de aula, atendendo aos objetivos do Programa, que pode ser apresentado em diferentes formatos, tais como dissertação, revisão sistemática e aprofundada da literatura, artigo, patente, registros de propriedade intelectual, projetos técnicos, publicações tecnológicas; desenvolvimento de aplicativos, de materiais didáticos e instrucionais e de produtos, processos e técnicas; produção de programas de mídia, editoria, relatórios finais de pesquisa, softwares, projeto de aplicação ou adequação tecnológica, protótipos para desenvolvimento ou produção de instrumentos, equipamentos e kits, projetos de inovação tecnológica, sem prejuízo de outros formatos. Independente do formato apresentado, é obrigatório que o trabalho de conclusão final do Profmat tenha um texto formalmente redigido. Os trabalhos de conclusão de curso estão disponíveis em http://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes.

3. A formação não acaba na titulação

A evolução e inovação dos conhecimentos e das práticas pedagógicas estão em permanente avanço. Para complementar a formação e estreitar a relação entre os egressos do Profmat, e criar um espaço para discussões sobre a educação básica, a SBM organizou em 2013 o Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática. Nesta ocasião, foi criada a Associação Nacional de Professores de Matemática – ANPMat, associação com ampla participação de egressos do Profmat em sua diretoria, e vem dando continuidade à organização dos simpósios, nacionais e regionais, que até o final de 2021 totalizarão 17 edições.

Os simpósios são eventos acadêmicos organizados por professores da Educação Básica para professores da Educação Básica. Além dos egressos e discentes do Profmat, eles contam com a participação de professores de educação básica, de institutos federais, formadores de professores, licenciandos em Matemática e alunos do Ensino Médio, oriundos de todas as regiões do país. As programações consistem de palestras, minicursos, oficinas, grupos de trabalho, mesas redondas e sessão de pôsteres. As palestras versam sobre formação e qualificação profissional e temas relacionados ao ensino de Matemática. Os minicursos e oficinas tem por objetivo difundir pesquisas sobre diversos temas relacionados à Matemática e apresentam novas propostas para seu ensino, contribuindo para a qualificação de professores e demais profissionais da área.

As atividades da ANPMat vão muito além dos simpósios. Vale a pena visitar a página da associação http://anpmat.sbm.org.br e se associar.

Um pouco da história

O Profmat é oferecido por Instituições de Ensino Superior associadas em uma Rede Nacional, no âmbito do Sistema Universidade Aberta do Brasil (UAB). É coordenado pela Comissão Acadêmica Nacional, que opera sob a égide da Diretoria da SBM, com apoio do IMPA.

O Profmat foi recomendado pelo Conselho Técnico-Científico da Educação Superior da Capes (CTC-ES) em 08/11/2010, tendo sido homologado pela Portaria nº 1325 do Ministério da Educação de 22/09/2011. A aula inaugural ocorreu no dia 02/04/2011 com a presença de várias autoridades. A Capes financia o Profmat através do Programas de Mestrado Profissional para Qualificação de Professores da Rede Pública de Educação Básica (ProEB).

Para enfrentar o desafio que se apresentava, era necessário um programa que, desde sua criação, tivesse grande abrangência nacional ofertando um grande número de vagas, compatível com o tamanho do desafio. Na criação, a rede contava com 48 instituições associadas ofertando vagas em 54 de seus *campi*. Desde 2012, o Profmat está presente em todos os 26 Estados e no Distrito Federal, possuindo alunos matriculados em mais de 100 campi das instituições associadas. Até 2021, foram ofertadas 15.505 vagas, veja tabela abaixo. Em 2020, em razão do cancelamento determinado pela Diretoria de Educação à Distância (DED) da Capes do edital do processo seletivo autorizado pela Diretoria em julho de 2019, da política da DED de início das turmas dos programas financiados pelo ProEB em agosto de cada ano e do posterior recrudescimento da pandemia da COVID-19, não houve ingresso no programa nesse ano.

Tabela 1. Vagas ofertadas

Ano	Instituições Associadas	Campi	Vagas ofertadas
2011	48	54	1.192
2012	57	67	1.575
2013	58	71	1.570
2014	57	69	1.500
2015	65	80	1.575
2016	61	75	1.470
2017	69	79	1.595
2018	74	79	1.795
2019	75	96	1.833
2021	73	91	1.400

Fonte: Sistema de Controle Acadêmico do Profmat.

Para o Profmat foi criada uma coleção de livros-textos, a Coleção PROFMAT da SBM, relevantes para a formação do professor da Escola Básica, em todos os temas da Matemática, sua prática de ensino, sua história e suas aplicações.

Em 2020, em uma ação da Secretaria de Educação do Estado do Ceará para qualificação do seu corpo docente, foi firmado um Termo de Cooperação Técnica entre a Secretaria, a SBM e as instituições associadas do Estado - Universidade Federal do Ceará (UFC), Universidade Estadual do Ceará (UECE), Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB), Universidade Regional do Cariri (URCA) e Universidade Federal do Cariri (UFCA), para o oferecimento de vagas do Profmat para os professores em exercício da docência de Matemática da rede púbica estadual. Esta cooperação constitui uma etapa das ações do Programa Cientista-Chefe em Educação, que conta com apoio da Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (FUNCAP).

Impactos

Como consequência da formação recebida, os egressos do Profmat relatam com satisfação os conhecimentos adquiridos e o impacto que o curso teve em suas práticas didáticas na sala de aula. Esses relatos são reforçados pelos diretores de escolas onde esses egressos atuam através de enquete em Spineti Consultoria, Ensino e Pesquisa (2017). Os relatos mais frequentes são:

a) melhoria na capacidade de argumentação e de raciocínio lógico dedutivo;

b) maior segurança, motivação e desenvoltura em sala de aula;

c) uso de exemplos mais práticos e concretos nas aulas;

d) as abordagens dos conteúdos ficaram facilitadas e conectadas ao dia a dia, com linguagem mais acessível aos alunos.

Muitos dos materiais produzidos por egressos são de forma pouco estruturada, em canais de Youtube, blogs, grupos de redes sociais e troca de experiências entre professores, cadernos de atividades, livros paradidáticos, livros digitais, jogos computacionais, apostilas e aplicativos.

Vários egressos colaboram na preparação dos alunos interessados em participar de olimpíadas como a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) e a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) e de outras olimpíadas matemáticas e de outras áreas. Há participação ativa de egressos em programas da OBMEP, tais como PIC-OBMEP, OBMEP na escola e POTI (Polo Olímpico de Treinamento Intensivo) em conjunto com professores universitário. As olimpíadas são exemplos de abertura de espaços de maior interação entre a escola básica e a universidade propiciado pelo Profmat.

1. O Profmat e o PNE

O Profmat vem ao encontro do Plano Nacional de Educação – PNE, Lei Nº 13.005, de 25/06/2014, que coloca em sua Meta 16: formar, em nível de pós-graduação, 50% (cinquenta por cento) dos professores da Educação Básica, até o último ano de vigência deste PNE, e garantir a todos(as) os(as) profissionais da Educação Básica formação continuada em sua área de atuação, considerando as necessidades, demandas e contextualizações dos sistemas de ensino. Além disso, o Profmat também atende as metas 14, 17 e 18 do PNE, que tratam respectivamente, elevar o número de matrículas na pós-graduação stricto sensu; valorização do professor; e plano de carreira.

2. Mais impactos

São organizados vários eventos pelas instituições associadas voltados aos alunos e professores do Profmat e da licenciatura que são abertos ao público geral, como encontros, seminários, ciclos de debate, semanas de curso, seminários e webinários. Como mencionado anteriormente, a ANPMat conta com egressos e professor do Profmat em sua diretoria e nas secretarias regionais.

Há melhoria no índice IDEB das escolas onde professores formados pelo Profmat atuam, aumento nas notas dos alunos no ENEM, aumento no número de alunos medalhistas em olimpíadas de matemática. Muitos egressos levam seus alunos para visitas às universidades tendo como consequência o incentivo ao ingresso no ensino superior.

Com relação à carreira docente, verifica-se melhorias como progressão funcional e salarial, aprovação em concursos em outras escolas públicas, participação em conselhos escolares, organização da área de Matemática na escola que trabalham.

Os discentes titulados no Profmat tem assumido cargos nas Secretarias Regionais de Educação, ocupando espaços nas representações da categoria profissional, assumido cargos públicos (incluindo o de vereador) em suas cidades, além de reproduzirem eventos, feiras e palestras sobre a matemática, aumentando e melhorando a participação deles no ambiente escolar.

Desafios

O longo período de fechamento das escolas causado pela pandemia prejudicou enormemente o ensino de crianças e adolescentes, que já não apresentava boas avaliações. O primeiro grande desafio que se apresenta é diagnosticar a etapa de aprendizagem em que os alunos estão no retorno às escolas e traçar estratégias para mitigar o problema. A principal contribuição do Profmat será na qualificação dos professores de Matemática dentro dos objetivos do Programa. Neste cenário, os principais desafios são:

- Estruturar e fomentar a geração de produtos oriundos dos trabalhos de conclusão que contribuam para atividades em sala de aula.
- Aumentar o compartilhamento dos conhecimentos e das inovações pedagógicas e tecnológicas para o ensino de Matemática advindos do programa.
- Interiorizar a oferta de vagas para que professores de regiões distantes de grandes centros possam ter acesso ao programa.
- Dar continuidade e aperfeiçoamento do monitoramento dos indicadores do Sistema de Avaliação da Educação Básica através do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB) e da Prova Brasil das escolas públicas.
- A ampliação e atualização do quantitativo de videoaulas e de textos para Coleção PROFMAT, com atenção especial para a nova BNCC.
- Utilizar o potencial dos titulados em formações e cursos de níveis intermediários entre a graduação e o mestrado – especialização, aperfeiçoamento e extensão. A formação recebida no Profmat e a experiência prática em sala de aula, torna o egresso altamente capacitado em multiplicar suas competências, seja aos que não almejam cursar um mestrado, seja para preparação para ingressar no Profmat.
- Oferecer formação mais avançada seguindo o perfil do Profmat. Com mais de 6 mil titulados, formou-se um grupo numeroso de professores capacitados e interessados em novos conhecimentos. É natural canalizar esse anseio na estruturação de um programa de doutorado.

Referências

CAPES. Avaliação Suplementar Externa do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), 2013.

CAPES. Relatórios Coleta/Capes 2013 a 2020.

OMNI3 SOLUÇÕES EM EDUCAÇÃO E COMUNICÃO LTDA. Quem é o Professor de Matemática da Escola Básica? Uma análise quali-quantitativa de perfis de candidatos ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), 2013.

SPINETI CONSULTORIA, ENSINO E PESQUISA. PROFMAT: Uma reflexão e alguns resultados, 2017.

SPINETI CONSULTORIA, ENSINO E PESQUISA. PROFMAT: Avaliação de Possíveis Impactos, 2018.

NOTAS

IDENTIFICAÇÃO DE AUTORIA
Vanderlei Horita. Doutorado em Matemática pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Pós-Doutorado pela Universidade de Toronto e IMPA (2007) e Universidade de Orsay (2015). Foi Primeiro-secretario (2011-2013), Vice-presidente (2013-2015) da Sociedade Brasileira de Matemática e Coordenador da Comissão Acadêmica Nacional do Profmat (11/2017 - 08/2021). Atualmente é professor associado da Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, Departamento de Matemática, São José do Rio Preto, SP, Brasil.
E-mail: vhorita@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-9304-0655

AGRADECIMENTOS
Não se aplica.

FINANCIAMENTO
Não se aplica.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Não se aplica.

EDITORES
Patricia Helena Mirandola Garcia, Eugenia Brunilda Opazo Uribe, Gerson dos Santos Farias.

HISTÓRICO
Recebido em: 12/10/2021 – Aprovado em: 30/10/2021 – Publicado em: 15/12/2021.

COMO CITAR
HORITA, V. Profmat: Um Programa Pioneiro. **Revista ENSIN@ UFMS**, Três Lagoas, v. 2, número especial, p. 16-28. 2021.

ENSIN@ UFMS
ISSN 2525-7056

O PROFMAT NO CAMPUS DE TRÊS LAGOAS DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL NO PERÍODO DE 2012 A 2021: ENTRE DIÁLOGOS, ASPECTOS E IMPACTOS

THE PROFMAT AT THE TRÊS LAGOAS CAMPUS OF THE FEDERAL UNIVERSITY OF MATO GROSSO DO SUL FROM 2012 TO 2021: BETWEEN DIALOGS, ASPECTS AND IMPACTS

Eugenia Brunilda Opazo Uribe[1]

Fernando Pereira de Souza[2]

Antonio Carlos Tamarozzi[3]

RESUMO: O presente trabalho apresenta resultados de uma pesquisa sobre o oferecimento do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat), no *campus* de Três Lagoas da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul no período de 2012 a 2021, visando identificar alguns aspectos importantes sobre o perfil do aluno que procura o Profmat no *campus*, bem como evidenciar impactos na vida profissional dos egressos do programa. A pesquisa foi iniciada por uma análise de documentos, considerando os dados disponíveis sobre o programa, registros da coordenação de curso e informações disponíveis na Plataforma Sucupira. A continuidade do trabalho foi feita por meio da aplicação de um questionário on-line aos egressos do curso, com perguntas objetivas e abertas, utilizando metodologia descritiva. Foram obtidas 43 respostas, que indicaram um grau de satisfação importante com o curso realizado, bem como um aumento de oportunidades para os participantes que, além de se manterem na docência na educação básica, passaram a ocupar outros espaços, atuando tanto no ensino técnico quanto no ensino superior.

PALAVRAS-CHAVE: Mestrado Profissional. Matemática. Egressos.

ABSTRACT: The present paper presents the results of a research on the offering of the National Networked Professional Master's Degree in Mathematics (Profmat), at the Três Lagoas campus of the Federal University of Mato Grosso do Sul from 2012 to 2021, aiming to identify some important aspects about the profile of the student who seeks Profmat on campus, as well as to highlight impacts on the professional of the program's graduates. The research was initiated by an analysis of documents. Considering the available data on the program, course coordination records and information available on the Sucupira Platform. The continuity of the work was done by applying an online questionnaire to the course graduates, with objective and open questions, using a descriptive methodology. Forty-three responses were obtained, indicating an important degree of satisfaction with the course taken, as well as an increase in opportunities for the participants who, besides continuing to teach in basic education, began to occupy other spaces, working in both technical and higher education.

KEYWORDS: Professional Master's Degree. Mathematics. Graduates.

[1] Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. E-mail: eugenia.uribe@ufms.br
http://orcid.org/0000-0002-9517-0007
[2] Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. E-mail: fernando.pereira@ufms.br
https://orcid.org/0000-0001-6441-0103
[3] Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. E-mail: antonio.tamarozzi@ufms.br
https://orcid.org/0000-0001-7612-6302

Informações completas da obra no final do artigo

Introdução

O Campus de Três Lagoas (CPTL) da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), inserido na região leste do Estado, nasceu como um Centro Pedagógico em janeiro de 1970, pela Lei Estadual no 2.972, com o oferecimento dos cursos de Licenciatura Plena em Geografia, História, Letras, Matemática e Pedagogia (UFMS, 2019, p. 5).

A experiência de trabalho em formação inicial de professores, no Curso de Licenciatura em Matemática, levou à aproximação da universidade com a escola de educação básica, por meio do oferecimento de cursos de especialização e projetos de extensão, dentre os quais pode-se destacar o oferecimento do Programa de Aperfeiçoamento de Professores do Ensino Médio (PAPMEM), considerado por Viana (2018) como o principal predecessor do Profmat.

> O principal predecessor foi o PAPMEM (Programa de Aperfeiçoamento de Professores do Ensino Médio), programa que oferece atividades de formação continuada a professores do Ensino Médio, por meio de dois encontros com uma duração de uma semana, todo ano, em janeiro e em julho. Lançado em 1990 por iniciativa do diretor do IMPA, professor Elon Lages Lima, o PAPMEM vem funcionando ininterruptamente desde então e, mais recentemente, adquiriu uma dimensão nacional por meio de transmissão à distância, para cerca de 50 polos em todos os estados, das aulas produzidas no IMPA (VIANA, 2018, p. 135).

Essa aproximação permitiu conhecer a realidade dos professores de Matemática da Educação Básica da cidade de Três Lagoas e de algumas cidades da região. Cientes dos anseios desses professores por aperfeiçoamento tanto na área da Matemática, como na área do Ensino de Matemática, os professores de Matemática da UFMS/CPTL decidiram pela participação no projeto do Mestrado Profissional em Rede Nacional (Profmat). A UFMS já estava credenciada na rede de oferecimento do Profmat, desde seu início, em 2011, com a coordenação e oferecimento do curso no *campus* de Campo Grande. Considerando os aspectos relatados e a forte procura, houve uma mobilização dos professores do curso de Matemática da UFMS/CPTL junto a Pró-Reitoria de Pós Graduação da Universidade e à coordenação do Profmat para a implantação do Programa no *campus* local, conforme ofício da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) informando a composição da Rede de Instituições do Profmat ao Diretor de Avaliação da Coordenação de Aperfeiçoamento de

Pessoal de Nível Superior (CAPES), em 12 de dezembro de 2011 (SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 2011a).

E assim o primeiro edital de chamada para o processo seletivo de ingresso no Profmat/UFMS/CPTL foi publicado, disponibilizando 15 vagas para início das aulas em 2012. A valorização da comunidade local, aliada à credibilidade da UFMS e à organização e prestígio da SBM, faz com que o interesse pelo curso continue alto até os dias de hoje.

A partir da turma de 2020, a SBM fez o desmembramento dos polos formados por *campi* da mesma instituição e, dessa maneira, Três Lagoas passou a ser um polo independente entre as instituições associadas nacionalmente para o oferecimento do Profmat.

O objetivo deste artigo é apresentar resultados sobre o oferecimento do Profmat na UFMS/CPTL no período 2012 a 2021, visando identificar alguns aspectos importantes sobre o perfil do aluno que procura o Profmat na UFMS/CPTL, bem como evidenciar impactos na vida profissional e laboral dos egressos do programa.

METODOLOGIA

Para atingir o objetivo proposto, foi realizada inicialmente uma análise documental, considerando dados disponíveis na página do programa (PROFMAT, 2021), bem como alguns registros da coordenação do curso da UFMS/CPTL e informações disponibilizadas na plataforma Sucupira.[4]

Numa segunda etapa foi realizada uma coleta de dados com egressos do programa no polo da UFMS/CPTL, que foram convidados para participar desse levantamento, via e-mail ou telefone, sendo que 43 egressos aceitaram o convite. Considerando o contexto da pandemia da covid-19 o levantamento de dados foi realizado on-line utilizando como instrumento um questionário com 10 questões objetivas e 4 questões abertas. O uso de questionários apresenta uma série de vantagens como por exemplo, alcance, economia de tempo e o preenchimento obrigatório de perguntas, entre outras. Em contrapartida,

[4] Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/ 9. Acesso em: 19 nov. 2021.

apresenta algumas desvantagens dentre as quais se destaca a baixa taxa de resposta. Segundo Takai (2017) a média de devolução de respostas de questionário é de 25%.

Para todos os entrevistados foi apresentado o contexto da pesquisa descrito no Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), por meio do qual os participantes manifestaram sua concordância em relação à participação na pesquisa e autorizaram que os resultados fossem publicados, preservando o sigilo dos entrevistados e suas instituições de trabalho.

Assim, trata-se de um estudo de cunho quantitativo que, por esse motivo, foi conduzido de uma maneira descritiva, visando apresentar características e estabelecer conexões a partir dos dados discutidos.

> A pesquisa descritiva observa, registra, analisa e correlaciona fatos ou fenômenos (variáveis) sem manipulá-los. Procura descobrir, com precisão possível, a frequência com que um fenômeno ocorre, sua relação e conexão com outros, sua natureza e características (MANZATO; SANTOS, p. 4).

De acordo com essa descrição os autores do presente trabalho concentraram esforços em coletar dados e informações, que apresentam as características, dificuldades e desafios que afetam o trabalho realizado, bem como permitem conhecer melhor a comunidade atendida pelo programa na UFMS/CPTL.

O PROFMAT NA UFMS/CPTL

O Profmat é o primeiro mestrado profissional oferecido em rede nacional que, de acordo com a apresentação que pode ser encontrada na página oficial do programa (PROFMAT, 2021), visa atender prioritariamente professores de Matemática em exercício na educação básica, especialmente de escolas públicas, que busquem aprimoramento em sua formação profissional, com ênfase no domínio aprofundado de conteúdo matemático relevante para sua docência, conforme estabelece o regimento do Programa, no seu artigo primeiro.

> O Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) tem como objetivo proporcionar formação matemática aprofundada relevante ao exercício da docência no Ensino Básico, visando dar ao egresso qualificação certificada para o exercício da profissão de professor de Matemática (SBM, 2011, p. 1)

O oferecimento do Profmat representou uma mudança no acesso aos programas de pós-graduação que, até então era muito restrito. Takai (2017) em sua tese de doutorado analisa o processo de criação do Profmat, descrevendo inclusive as mudanças legais que foram implementadas para que o oferecimento de um mestrado profissional em rede nacional fosse possível. A autora destaca que

> O surgimento de um programa nos moldes do PROFMAT somente foi possível devido às mudanças estruturais e culturais na concepção de programas de pós-graduação stricto sensu, numa ação induzida pelo Estado, representado pela CAPES. De cursos elitizados e para a minoria, em sua gênese, com os mestrados profissionais em rede para professores, como o PROFMAT, o acesso à pós-graduação ampliou-se vertiginosamente para um público diverso [...] (TAKAI, 2017, p. 26).

A experiência do campus de Três Lagoas reforça essa afirmação, visto que, desde o início o curso, houve uma boa procura por professores que manifestavam interesse em realizar cursos de aperfeiçoamento e para os quais a realização de um mestrado era um sonho distante. O polo não atende apenas a cidade de Três Lagoas, mas toda a região, composta pelo leste do Estado Mato Grosso do Sul e o Noroeste do Estado de São Paulo, tendo atendido diversas cidades conforme apresentado no mapa da Figura 1.

Figura 1. Cidades atendidas pelo Profmat em Três Lagoas

Fonte. Os autores, 2021.

Ao analisar as matrículas, pode-se verificar que o programa já atendeu 148 alunos, provenientes de 7 cidades de Mato Grosso do Sul, 24 cidades de São Paulo e 1 cidade de Minas Gerais. A maioria dos alunos matriculados são oriundos de cidades do interior do estado de São Paulo, representando 60,81% das matrículas, seguido dos alunos procedentes de cidades de Mato Grosso do Sul que representam 37,83% das matrículas e por último matriculados com origem em uma cidade de Minas Gerais que representam 1,35% das matrículas. A margem entre paulistas e sul-mato-grossenses diminui quando são analisados os números sobre os titulados, já que neste caso, os alunos titulados oriundos do estado de São Paulo representam um 59,25% dos titulados, enquanto os procedentes de Mato Grosso do Sul representam 40,74% dos titulados.

Cabe destacar que a maioria dos professores continuaram trabalhando enquanto realizavam o mestrado; desse modo, a matrícula no Profmat na UFMS/CPTL levava os professores a percorrer semanalmente grandes distâncias para participar de aulas e atividades em Três Lagoas. Na Tabela 1 são destacadas algumas cidades, sua distância a Três Lagoas e o número de titulados da cidade.

Tabela 1. Cidades, distâncias e número de titulados.

Cidade	Distância de Três Lagoas	Titulados
Américo de Campos	262,4 km	1
Anastácio	463,6 km	1
Aparecida do Taboado	128,6 km	5
Araçatuba	149,5 km	9
Birigui	167,0 km	5
Penápolis	199,8 km	2

Fonte: Dados da Coordenação de Curso.

A Tabela 1 destaca algumas cidades distantes de Três Lagoas que foram atendidas pelo Curso do Profmat/CPTL, mostrando que a distância percorrida semanalmente por alguns professores superava os 120 km para participar das atividades presenciais.

O *campus* de Três Lagoas da UFMS conta com um corpo de professores reduzido na área de Matemática, assim, para evitar um aumento inesperado da carga horária, os professores responsáveis pela iniciativa organizaram inicialmente uma parceria com professores do Campus de Paranaíba (CPAR). Inicialmente, a responsabilidade pelas disciplinas foi dividida com 10 professores, que ministravam as aulas em regime de revezamento ou divisão de carga-horária. Atualmente, considerando disciplinas obrigatórias e optativas, cada uma está sob a responsabilidade de um professor fixo, vinculado ao *campus* CPTL, totalizando sete professores participantes. Esse quadro docente também é responsável pela orientação dos trabalhos de conclusão de curso (dissertações).

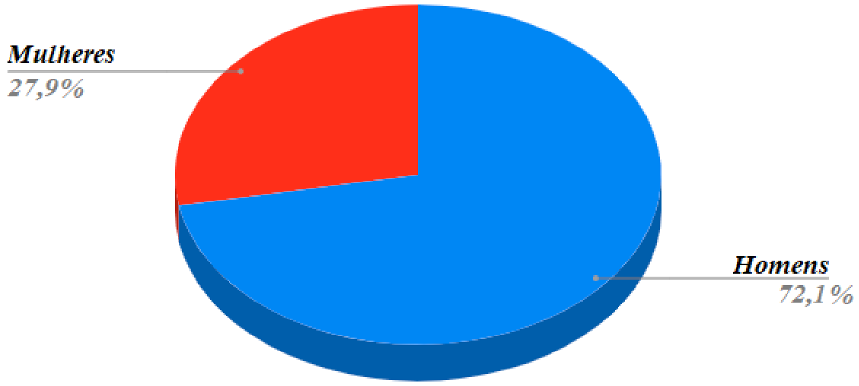
Atendendo o oferecimento semipresencial previsto no regimento do Programa as disciplinas, obrigatórias e optativas, foram oferecidas por meio de aulas presenciais aos sábados até 2019. Em 2020 e em 2021, devido ao contexto da pandemia da covid-19, as aulas foram oferecidas de forma on-line, valendo-se do uso de plataformas como o *Google Meet* e o Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) da UFMS.

RESPOSTAS DOS EGRESSOS DO PROFMAT POLO UFMS/CPTL

A coleta de dados com egressos do Profmat da UFMS/CPTL foi realizada mediante a aplicação de um formulário on-line, com a apresentação da pesquisa e Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE). Os entrevistados foram questionados quanto à formação inicial e o tipo de Instituição de Ensino Superior em que se formaram como professores. Além disso, informaram sua ocupação principal antes e depois da conclusão do curso; avaliaram a experiência de terem participado no Profmat, o impacto do Programa na formação profissional; mudança salarial após a conclusão; os entrevistados foram questionados também sobre alguma disciplina ou tópico diferente que considerassem interessante de ser explorado nas disciplinas optativas e também foi aberto um espaço para que deixassem comentários sobre questões que não tivessem sido abordados pelas questões apresentadas. De 54 titulados, foram obtidas 43 respostas, o que representa 79,63% do total e podemos considerar uma boa taxa de resposta, uma vez que está bem acima da média descrita por Takai (2017).

A amostra trabalhada também demonstrou a predominância masculina entre os entrevistados, já que 72,1% dos egressos que responderam à pesquisa são homens e 27,9% são mulheres. Trata-se de um resultado comparável ao obtido em nível nacional, apresentado pela Sociedade Brasileira de Matemática, que verificou que “A distribuição dos egressos quanto ao gênero demostra que há grande predominância do sexo masculino (80%) e apenas 20% dos egressos são do sexo feminino.” (2017, p. 22).

Figura 1. Representação de gênero

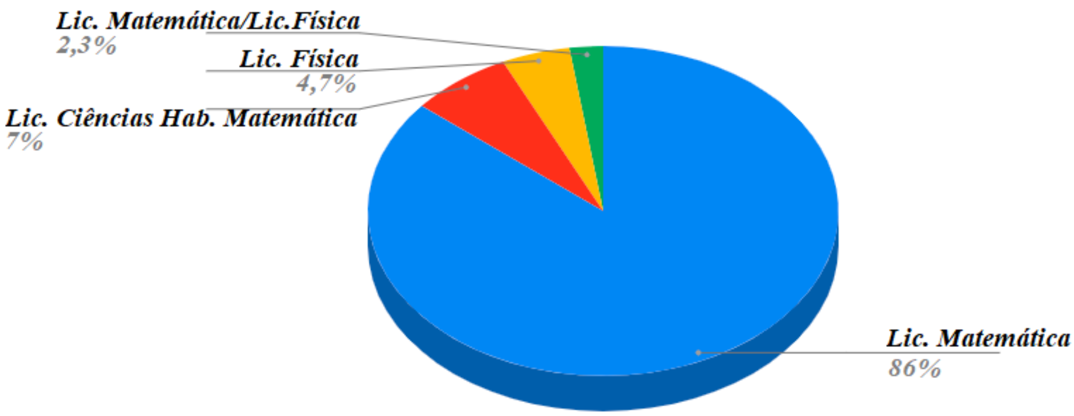


Fonte: Os autores, 2021.

É importante destacar que os resultados apresentados por Brech (2018, p. 1) já indicavam esse desequilíbrio "Em quase todos os recortes da comunidade matemática no mundo, a participação feminina fica abaixo de 50% e diminui nos estágios mais avançados da carreira". A pesquisadora apresenta dados referentes à Pós-Graduação de 2014 e conclui "Na pós-graduação, as mulheres perfizeram em 2014 em torno de 27% entre os egressos de cursos de mestrado e 24% entre os de doutorado. As séries históricas [...] indicam que esses percentuais não estão aumentando." Brech (2018, p. 2).

Sobre a formação inicial, foi possível identificar que todos os entrevistados têm formação em Licenciatura, vinculada à área de Ciências Exatas, sendo que a maioria é formado em Licenciatura em Matemática, tendo como outras possibilidades a Licenciatura em Ciências com habilitação em Matemática e a Licenciatura em Física.

Figura 2. Formação Inicial dos entrevistados

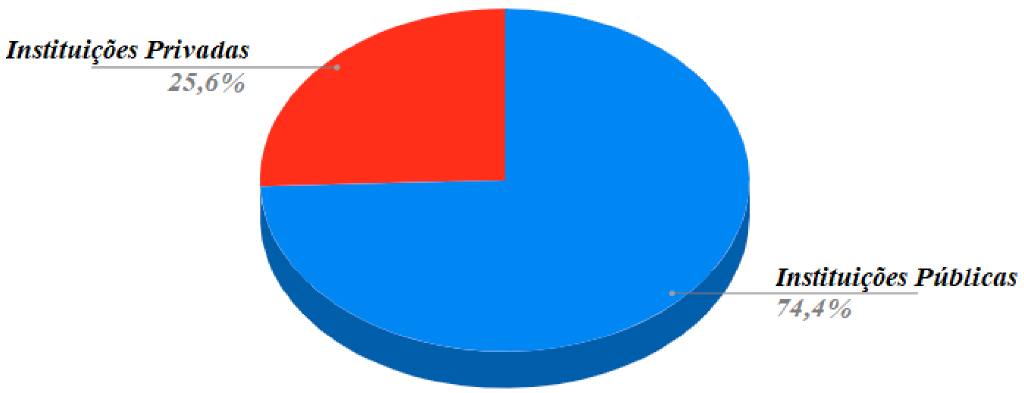


Fonte: Os autores, 2021.

.

Ainda em relação à formação inicial, as Instituições de Ensino Superior em que os entrevistados concluíram a graduação são variadas e localizadas no leste do Estado de Mato Grosso do Sul e Noroeste Paulista, com predominância de instituições públicas, conforme apresentado na Figura 3.

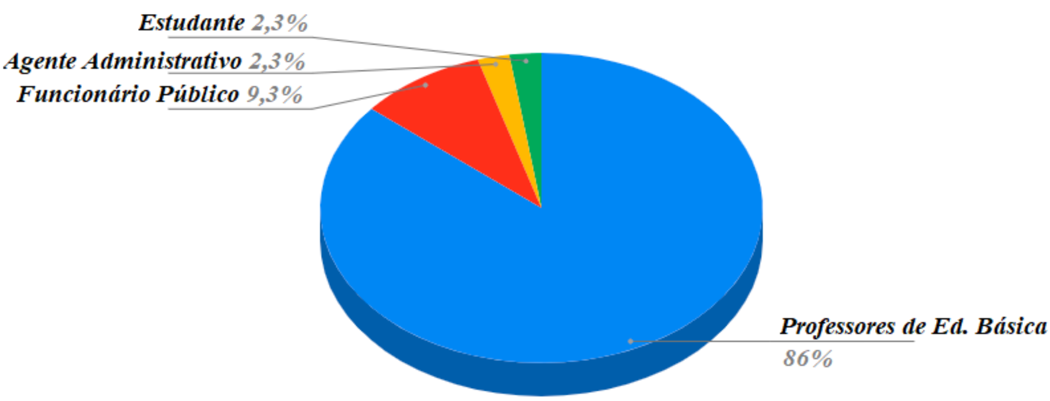
Figura 3. Instituições de Formação dos entrevistados



Fonte: Os autores, 2021.

Os entrevistados foram consultados também sobre sua ocupação principal antes de realizar o Profmat, como esperado, a maioria deles atuava como professor de educação básica, conforme indicado na Figura 4; mais especificamente 86% atuavam como professores de Educação Básica, enquanto 14% não atuavam como professores de educação básica.

Figura 4. Ocupação principal dos entrevistados antes do PROFMAT

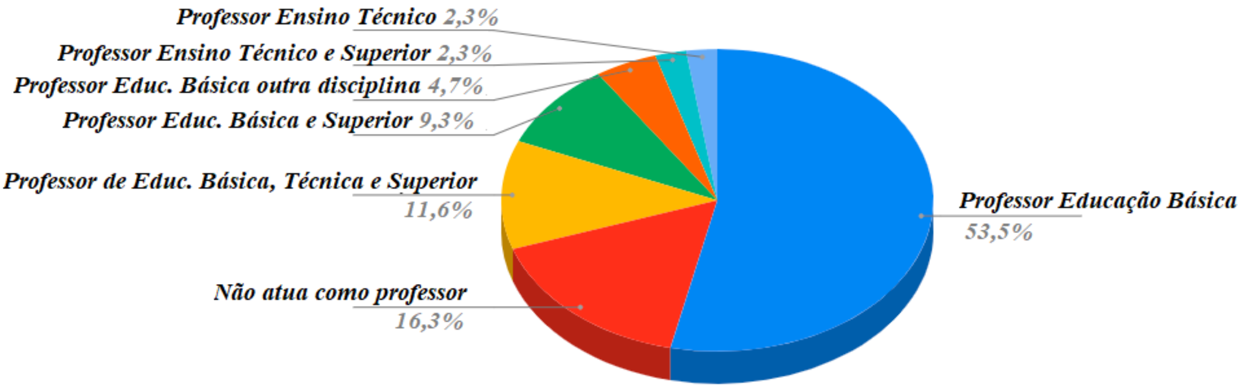


Fonte: Os autores, 2021.

Buscando estabelecer se houve mudanças em relação à ocupação principal e, principalmente, se os entrevistados continuavam atuando na docência, eles foram questionados quanto à função exercida após a realização do Profmat. Os resultados são apresentados na Figura 5 e eles indicam que 83,7% dos entrevistados continua trabalhando na docência, enquanto 16,3% não exerce essa atividade.

Foi possível verificar que, após a realização do Profmat, os entrevistados passaram a ocupar espaços em outros níveis do ensino, incluindo ensino técnico e superior.

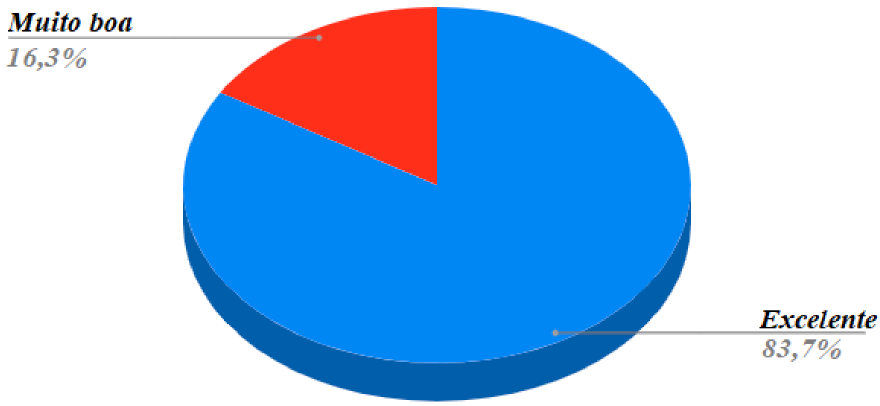
Figura 5. Ocupação principal dos entrevistados após a realização do PROFMAT



Fonte: Os autores, 2021.

Quanto à experiência de terem participado do curso e obtido o diploma de mestrado do Profmat, os entrevistados são unânimes na avaliação positiva, conforme ilustrado na figura 5, destacando que a vivêbncia foi excelente ou muito boa.

Figura 5. Avaliação da participação no Profmat



Fonte: Os autores, 2021.

Nas questões abertas, os egressos foram perguntados sobre o impacto da realização do curso na formação profissional e a situação laboral. Ademais, informaram quais disciplinas ou conteúdos que gostariam que fossem explorados e o que poderia ser melhorado no curso. Apesar das questões serem abertas houve coincidência em algumas respostas, assim, elas podem ser sistematizadas sistematizadas conforme disposto no Quadro 1:

Quadro 1. Na sua visão, o que poderia ser melhorado na oferta do Curso?
➢ Aumento do número de vagas. ➢ Aumento do Número de bolsas. ➢ Aumento do número de disciplinas optativas. ➢ Inclusão do uso de Tecnologias. ➢ Incentivo à pesquisa e escrita científica. ➢ Inclusão de aspectos pedagógicos e didáticos do dia a dia do professor. ➢ Oferta de doutorado.
Fonte: Os autores, 2021.

Cabe observar que algumas destas questões aparecem em relatórios nacionais, como por exemplo a solicitação de oferta de doutorado, “[...] que recebeu 118 sugestões, correspondente a 18% dos respondentes”, o que “[...] ajuda a reforçar o sucesso e reconhecimento do Profmat entre os discentes e deve ser avaliada” (SBM, 2017, p. 46). A questão de inclusão de aspectos pedagógicos e didáticos do dia a dia do professor e sua prática em sala de aula também foi destaque no relatório nacional, sendo que 84% dos que mencionam o assunto “[...] faz referência apenas à inclusão desse tipo de disciplina, o que pode ser avaliado se complementa ou não os objetivos do Profmat” (SBM, 2017, p. 46).

Em relação ao impacto na vida profissional e laboral, os egressos são unânimes em destacar o impacto positivo da realização do Profmat e os resultados podem ser observados no Quadro 2. A resposta “Conhecimentos mais sólidos, maior embasamento teórico, melhor visão em relação à aplicações da Matemática” foi a mais lembrada pelos respondentes da pesquisa, o que indica que o objetivo do Profmat de atender professores da Educação Básica que busquem aprimoramento em sua formação profissional, com ênfase no domínio aprofundado de conteúdo matemático relevante para sua docência está sendo atingido.

Quadro 2. Impacto do Pofmat na vida profissional e laboral do egresso
➢ Conhecimentos mais sólidos, maior embasamento teórico, melhor visão em relação à aplicações da Matemática. ➢ Aumento de oportunidades de trabalhos, aprovação em concursos, melhor pontuação na atribuição de aulas. ➢ Melhoria salarial. ➢ Satisfação pessoal.
Fonte: Os autores, 2021.

Em relação aos conteúdos não abordados pelo programa e que gostariam que fossem mais explorados, as respostas foram sistematizadas e são apresentadas no Quadro 3. O resultado mais lembrado pelos respondentes foi “não acrescentaria outros tópicos” mostrando que existe um grau de satisfação com o curso realizado.

Quadro 3. Disciplinas ou conteúdos que gostaria de ver mais explorados
➢ Não acrescentaria outros tópicos. ➢ Matemática Aplicada e Computacional. ➢ Matemática Financeira. ➢ Tópicos de Ensino de Matemática e parte pedagógica. ➢ Modelagem Matemática e Equações Diferenciais. ➢ Escrita científica.
Fonte: Os autores, 2021.

A última questão aberta apresentou a possibilidade de que os egressos tecessem algum comentário ou dessem alguma sugestão quanto a algum tópico não contemplado nos questionamentos anteriores. Neste espaço novamente foi colocada a possibilidade da oferta de um doutorado e também foram recebidos muitos elogios e agradecimentos ao corpo de professores do Profmat do Polo da UFMS/CPTL, reforçando a avaliação positiva do curso e da atuação dos professores do programa.

Considerações Finais

O trabalho de pesquisa buscou fazer um levantamento de dados sobre os 10 anos do Profmat no Campus de Três Lagoas da UFMS, mediante a revisão de documentos da coordenação, da Plataforma Sucupira e das respostas obtidas através da aplicação de um questionário on-line enviado aos egressos, que obteve 43 respostas, representando 79,63% do total de alunos titulados. A análise das respostas permitiu identificar alguns aspectos importantes sobre o perfil do aluno que procura o curso, bem como evidenciar impactos na vida profissional e laboral dos egressos do programa.

Analisando o recorte de gênero, os dados indicam a predominância masculina entre os entrevistados, obtendo-se que 72,1% dos egressos que responderam à pesquisa são homens e 27,9% são mulheres. Estes resultados são compatíveis com dados disponíveis na literatura, como os apresentados por Brech (2018) e que reforçam a compreensão de que iniciativas que evidenciem a desigualdade de gênero na área de Matemática são importantes e devem ser apoiadas, visando potencializar a participação feminina na área de Matemática e Ciências Exatas em geral.

A partir dos dados disponibilizados pela coordenação de curso foi possível perceber que o polo de Três Lagoas/MS, localizado na fronteira entra São Paulo e Mato Grosso do Sul, conta com um posicionamento estratégico que permite atender professores de diversas cidades localizadas numa região composta pelo leste de Mato Grosso do Sul e o Noroeste Paulista. Os dados mostram ainda que entre os alunos titulados existem vários casos em que as distâncias percorridas entre a cidade de origem e Três Lagoas, local de realização do curso, superavam os 120 km.

Sobre a ocupação principal dos egressos que responderam o questionário, foi possível verificar que 86% atuavam como professores de Educação Básica antes da realização do Profmat e após a conclusão do curso, 83,7% continuava trabalhando na docência, porém após a realização do Profmat, parte dos entrevistados passaram a ocupar espaços também em outros níveis do ensino, incluindo ensino técnico e superior.

A abertura de oportunidades no exercício da profissão, bem como a maior segurança em relação aos próprios conhecimentos, devido a apropriação de um maior embasamento teórico motivou respostas positivas em relação à experiência de ter realizado o mestrado, levando os participantes a considerá-la como excelente e muito proveitosa.

Nesse sentido, os resultados do trabalho mostram que o Profmat atinge seu objetivo de proporcionar aos professores uma formação matemática aprofundada relevante ao exercício da docência no Ensino Básico, mas também apontam a existência de espaço para discussão e crescimento. As respostas dos egressos do CPTL permitem destacar três questões importantes para discussões futuras sobre o Profmat: a inclusão do dia a dia do professor e sua prática pedagógica; o incentivo à leitura e escrita de artigos que aproximem o mestrando da pesquisa acadêmica e a possibilidade de oferecimento de doutorado.

Por fim, espera-se que o presente estudo possa contribuir para que a coordenação do curso conheça com mais profundidade o perfil dos egressos, permitindo avaliar a necessidade de implementação de intervenções curriculares. É importante destacar também que durante o desenvolvimento do trabalho surgiram outras questões para serem analisadas, o que justifica, no futuro, a continuidade do estudo.

Referências

BRECH, C. O 'dilema Tostines' das mulheres na matemática**. Revista Matemática Universitária** No. 54. 2018. Disponível em: https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2018/08/kika_final.pdf. Acesso em: 15 nov. 2021.

MANZATO, A. J; SANTOS, A. B. **A Elaboração de Questionários na Pesquisa Quantitativa. Minicurso**. 2002. Disponível em: http://www.inf.ufsc.br/~vera.carmo/Ensino_2012_1/. Acesso em: 30 nov. 2021.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. **PROMAT:** Uma Reflexão e alguns Resultados. Rio de Janeiro: SBM, 2017. Disponível em: https://profmat-sbm.org.br/documentos/. Acesso em: 30 nov. 2021.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. **Regimento do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.** Rio de Janeiro: SBM, 2011a. Disponível em: https://profmat-sbm.org.br/documentos/. Acesso em: 15 nov. 2021.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. **Ofício 003/2011 - PROFMAT/SBM**. Rio de Janeiro, 2011b. Disponível em: https://profmat-sbm.org.br/documentos/. Acesso em: 20 nov. 2021.

TAKAI, A. M. **Perspectivas do Profmat**: Política Pública em construção. 175f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências: Química da Vida e da Saúde) – Instituto de Ciências Básicas da Saúde, Universidade Federal de Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, 2017. Disponível em: https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/159502. Acesso em: 14 nov. 2021.

VIANA, M. Matemática no Ensino Médio: Desafios e Iniciativas. *In*: FOGUEL, D.; SCHEUENSTUHL, M. C. B. (Org.). **Desafios da Educação Técnico-Científica no Ensino Médio**. Rio de Janeiro: Academia Brasileira de Ciências, 2018, cap. 2, p. 130-140. Disponível em: http://www.abc.org.br/evento/desafios-da-educacao-tecnico-cientifica-no-ensino-medio/. Acesso em: 12 out. 2021.

NOTAS

IDENTIFICAÇÃO DE AUTORIA

Eugenia Brunilda Opazo Uribe. Doutora em Engenharia Mecânica pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Professora Associada da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), Campus de Três Lagoas (CPTL). Três Lagoas, MS, Brasil.
E-mail: eugenia.uribe@ufms.br
http://orcid.org/0000-0002-9517-0007

Fernando Pereira de Souza. Doutor em Matemática pela Universidade Estadual de Campinas. Professor Adjunto da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), Campus de Três Lagoas (CPTL). Coordenador do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional/CPTL (Profmat) Três Lagoas, MS, Brasil.
E-mail: fernando.pereira@ufms.br
https://orcid.org/0000-0001-6441-0103

Antonio Carlos Tamarozzi.
Doutor em Matemática pela Universidade de Brasília (UnB). Professor Associado da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), Campus de Três Lagoas (CPTL). Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional/CPTL (Profmat), Três Lagoas, MS, Brasil.
E-mail: antonio.tamarozzi@ufms.br
https://orcid.org/0000-0001-7612-6302

AGRADECIMENTOS
Os autores agradecem à Universidade Federal de Mato Grosso do Sul.

FINANCIAMENTO
Não se aplica.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Não se aplica.

HISTÓRICO
Recebido em: 20/11/2021 - Aprovado em: 12/12/2021 – Publicado em: 15/12/2021.

COMO CITAR
URIBE, E. B. O; SOUZA, F. P; TAMAROZZI, A. C. Título do Artigo. **Revista ENSIN@ UFMS**, Três Lagoas, v. 2, número especial, p. 29-43. 2021.

ENSIN@ UFMS 2021
ISSN 2525-7056

UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DO TEOREMA DE PITÁGORAS

A DIDACTIC PROPOSAL FOR TEACHING THE PYTHAGORAS' THEOREM

Cecília de Souza Fernandez[1]

Weverton Magno Ferreira de Castro[2]

RESUMO: O teorema de Pitágoras é um resultado matemático muito lembrado por aqueles que o estudaram na escola básica. Contudo, poucos conhecem a história desse teorema e a história de Pitágoras de Samos, assim como algumas demonstrações desse resultado. Nossa proposta se baseia no uso da história da Matemática para motivar os alunos ao estudo do tema. De fato, segundo a MAA (Mathematical Association of America), o conhecimento da história da Matemática mostra aos alunos que ela é uma importante conquista humana, geralmente desenvolvida de forma intuitiva e experimental a partir da necessidade de se resolver problemas nas mais diversas áreas do saber. Por acreditar que também é relevante mostrar aos alunos que em Matemática é importante se demonstrar os resultados, já que a Matemática não deve ser vista como uma coleção de fórmulas que devem ser memorizadas, apresentamos algumas demonstrações que podem ser feitas com os alunos.

PALAVRAS-CHAVE: Teorema de Pitágoras, História da Matemática, Demonstração, Ensino.

ABSTRACT: Pythagoras' theorem is a mathematical result that is well remembered by those who studied it in elementary school. However, few remember the history of this theorem and the history of Pythagoras of Samos, as well as some known demonstrations of this result. Our proposal is based on the use of the history of Mathematics to motivate students to study the subject. In fact, according to the MAA (Mathematical Association of America), the knowledgement of the history of Mathematics shows students that it is an important human achievement, usually developed in an intuitive and experimental way from the need to solve problems in different areas. Because of the belief that it is also important to show students that in Mathematics it is important to demonstrate results, since Mathematics should not be seen as a collection of formulas that should be memorized, we present some demonstrations that can be done with students.

KEYWORDS: Pythagoras Theorem, History of Mathematics, Proof, Teaching.

Introdução

Toda pessoa que já passou por alguma escola e concluiu o ensino fundamental, certamente já ouviu falar de Pitágoras. O teorema que leva seu nome também é bastante conhecido, assim como suas aplicações no mundo real.

[1] Universidade Federal Fluminense. E-mail: ceciliafernandez@id.uff.br
https://orcid.org/0000-0001-6410-5117
[2] Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro. E-mail: weverton.castro@ifrj.edu.br
https://orcid.org/0000-0002-5849-9305

Informações completas da obra no final do artigo

No presente trabalho apresentar-se-á um pouco sobre a história do teorema de Pitágoras e sobre o próprio Pitágoras, considerado por muitos especialistas em História da Matemática como o primeiro matemático. Onde ele nasceu, como conheceu a Matemática e, finalmente, como fundou o que se conhece como “escola pitagórica” ou “irmandade pitagórica”.

Enuncia-se o teorema de Pitágoras e apresenta-se um pouco sobre sua história. Cinco demonstrações distintas deste teorema são desenvolvidas, propiciando um contato direto com diferentes maneiras de se conhecer tal teorema. Uma parte importante deste trabalho é a proposta didática para o desenvolvimento do tema nos ensinos fundamental e médio é também apresentada.

Por fim, neste trabalho, denota-se $\overline{AB}$ como segmento que possui extremidades nos pontos A e B. E a medida do segmento $\overline{AB}$ como AB.

Pitágoras e a escola pitagórica

Considerado o primeiro matemático, Pitágoras nasceu no século VI a.C. em Samos, uma das ilhas do Dodecaneso (um grupo de ilhas gregas na extremidade leste do Mar Egeu, junto à costa sudoeste da Turquia), próximo a Mileto, lugar de nascimento de Tales. Não há como precisar o ano de nascimento de Pitágoras. Algumas fontes afirmam que foi por volta de 550 a.C. ou 569 a.C..

Com idade próxima a 18 ou 19 anos, Pitágoras partiu de Samos para conhecer o mundo, pois, em sua época, isto era um costume para adquirir conhecimento através do contato com outros povos. Nestas viagens, Pitágoras visitou e viveu alguns anos no Egito e Babilônia e é muito provável que ele tenha ido também a Índia. Contemporâneo de Confúcio, Lao-Tse e Buda, há quem diga que Pitágoras teve contato com Buda e seus ensinamentos em sua provável passagem pela Índia.

> Pitágoras adquiriu suas habilidades matemáticas em suas viagens pelo mundo antigo. Algumas histórias tentam nos fazer crer que Pitágoras teria ido até a Índia e a Inglaterra, mas o mais certo é que ele aprendeu muitas técnicas matemáticas com os egípcios e os babilônicos. Esses povos antigos tinham ido além da simples contagem e eram capazes de cálculos complexos que lhes permitiam criar sistemas de contabilidade sofisticados e construir prédios elaborados. De fato, os dois povos viam a matemática como uma ferramenta para resolver problemas práticos. A motivação que conduziu à descoberta de algumas das leis básicas da geometria era a necessidade de refazer a demarcação dos campos, perdida durante as enchentes anuais do Nilo. A palavra geometria significa “a medida da terra” (SINGH, 2008, p. 29).

É desta situação gerada pelas enchentes anuais do rio Nilo que os antigos egípcios desenvolveram métodos usando cordas para refazerem na terra as marcações apagadas pelo rio. Um desses métodos, que é bastante interessante, era utilizar uma corda aberta com 13 nós, igualmente espaçados, para construir um triângulo com lados medindo 3, 4 e 5. Os egípcios perceberam que com tal triângulo era possível construir um ângulo reto entre os lados que mediam 3 e 4. Ou seja, eles conheciam pelo menos um terno de números ditos pitagóricos, que com certeza não eram ainda conhecidos desta forma. Mas, mesmo sem qualquer documento que comprove isto, o mais importante é que estas situações devem ter sido vividas de alguma forma por Pitágoras nestas viagens.

Voltando à Grécia, Pitágoras tinha o objetivo de fundar uma escola para estudar a filosofia e a matemática que aprendeu durante suas viagens por estes diferentes povos. Porém, em Samos, Pitágoras enfrentou um problema político. Durante suas viagens, um tirano persa, chamado Polícrates, teria transformado Samos em uma cidade conservadora, um lugar de intolerância. Convidado por Polícrates para compor a equipe de sua corte, Pitágoras percebeu que esta era a maneira encontrada para fiscalizá-lo, impedindo que ele difundisse a ideia do estudo filosófico e matemático. A princípio, a solução encontrada por Pitágoras foi se refugiar em uma caverna localizada em uma região remota da ilha, a fim de continuar seus estudos.

> Pitágoras não apreciava o isolamento e acabou subornando um menino para ser seu primeiro aluno. A identidade do garoto é incerta, mas alguns historiadores sugerem que ele também se chamaria Pitágoras [...] Pitágoras, o mestre, pagava ao seu aluno três ébolos para cada aula a que ele comparecia. Logo percebeu que, à medida que as semanas se passavam, a relutância inicial do menino em aprender se transformava em entusiasmo pelo conhecimento. Para testar seu pupilo, Pitágoras fingiu que não podia mais pagar o estudante e que teria de interromper as aulas. Então o menino se ofereceu para pagar por sua educação. O pupilo tornara-se discípulo. Infelizmente este foi o único adepto que Pitágoras conquistou em Samos. Ele chegou a estabelecer temporariamente uma escola conhecida como o Semicírculo de Pitágoras, mas suas ideias de reforma social eram inaceitáveis e o filósofo foi obrigado a fugir com sua mãe e seu único discípulo (SINGH, 2008, p. 30).

Foi neste momento que Pitágoras chega a Crotona, uma antiga cidade-estado da Magna Grécia, onde hoje é o sul da Itália. Por lá, Pitágoras encontrou o apoio de Milo, que era o homem mais rico e forte da cidade. Além de influente politicamente, Milo era forte fisicamente, já que era um atleta olímpico, cinco vezes campeão de luta livre nos jogos olímpicos da antiguidade. Este homem já tinha ouvido sobre a fama de Pitágoras, que ecoava na Grécia, e lhe cedeu parte de sua casa para que Pitágoras fundasse a sua escola, tendo inclusive a filha de Milo, uma bela mulher chamada Teano, como uma de suas alunas. Futuramente, apesar da diferença de idade, Pitágoras e Teano acabaram se casando.

É então que nasce a famosa "escola pitagórica", conhecida também como "irmandade pitagórica", já que esta escola possuía também um caráter religioso e era cercada de mistérios e lendas.

> Talvez Pitágoras, influenciado pelas tradições budistas, desenvolveu a ideia de comunidade fraternal (sangha – comunidade dos budistas que têm os mesmos objetivos). Com características monásticas, instituiu ritos de abstinência, pureza e o vegetarianismo, que era imposto ou aceito pelos que queriam participar da escola (CYRINO, 2006, p. 38).

Estes são relatos de algumas histórias que cercavam a escola pitagórica. O fato é que tal escola contava com cerca de seiscentos seguidores que estudavam e desenvolviam a matemática proposta por Pitágoras. O interesse deles era de ir além da utilização dos números. Eles queriam entendê-los profundamente, tanto que o lema da escola pitagórica é que "tudo é número".

> Pitágoras desenvolveu a idéia da lógica numérica e foi responsável pela primeira idade de ouro da matemática. Graças ao seu gênio, os números deixaram de ser apenas coisas usadas meramente para contar e calcular e passaram a ser apreciados por suas próprias características. Ele estudou as propriedades de certos números, o relacionamento entre eles e os padrões que formavam. Ele percebeu que os números existem independentemente do mundo palpável e, portanto, seu estudo não é prejudicado pelas incertezas da percepção (SINGH, 2008, p. 28).

Além de entender completamente o que cada número significava e de estudar a relação entre eles, a irmandade pitagórica cercava os números de imenso misticismo. A partir deste raciocínio, os pitagóricos chegaram a listar as características místicas dos primeiros números naturais. O número "um" é o gerador dos números, o primeiro número masculino. O "dois" que é o primeiro dos números femininos, o número da opinião. "Três" é o número da harmonia ou número da forma, por causa das dimensões: comprimento, largura e altura. O número "quatro" se corresponde ao tetraedro onde as faces seriam os elementos ar, terra, fogo e água. A soma do primeiro número feminino com o primeiro número masculino verdadeiro, respectivamente 2 e 3, chegaria ao "cinco" que, por isso, é o número do casamento. O "seis" é o número da criação. "Sete" é a junção da harmonia, simbolizada pelo 3, com os elementos, que é o 4. Sendo o dobro do número que representa os elementos, o "oito" é o número das formas perfeitas. Já o número "nove" é a caracterização numérica da indestrutibilidade, pois a soma dos algarismos de seus múltiplos é ele próprio; exemplos: 18, 27 e 36. E o "dez" é o número sagrado.

Mas a escola formada por Pitágoras descobriu propriedades interessantes em alguns números. Para Pitágoras, a perfeição de um número era demonstrada utilizando de seus divisores próprios. Quando um número inteiro possuía divisores próprios cuja soma era menor que o próprio número ele, o chamava de "número deficiente". Um exemplo é o 10. Seus divisores próprios (1, 2 e 5) possuem soma igual a 8 que é menor que o 10. Já quando a soma dos divisores próprios de um número era maior que o mesmo, ele recebia o nome de "número abundante" ou "número excessivo". O número 20 é um exemplo. Seus divisores próprios (1, 2, 4, 5 e 10) possuem soma igual a 22 que é maior do que o 20. Porém, quando a soma dos divisores próprios de um número é exatamente igual ao mesmo, ele é chamado de "número perfeito". O primeiro número perfeito é o 6, pois seus divisores próprios são 1, 2 e 3 cuja soma é 6. Um fato curioso é que a irmandade pitagórica acreditava que Deus criou o mundo em seis dias, porque este é o número perfeito. E que se Deus não tivesse feito desta forma, o seis continuaria a ser perfeito.

Os primeiros números perfeitos são 6, 28, 496 e 8128. Note que fica cada vez mais difícil encontrá-los usando este método dos divisores. Foi desta dificuldade que Pitágoras tentou desenvolver outro método para encontrá-los. A sua crença era que o número 2 estava ligado a perfeição dos números. Foi quando ele descobriu que as potências de 2 que podem ser escritas como 2^n, com n natural, chegavam próximas a perfeição. Isto porque, dado um n_0 natural, a soma dos divisores próprios de 2^{n_0} é sempre $2^{n_0} - 1$. Por exemplo,

a) $2^2 = 4$ e seus divisores próprios (1 e 2) possuem soma igual a 3;
b) $2^3 = 8$ e seus divisores próprios (1, 2 e 4) possuem soma igual a 7;
c) $2^4 = 16$ e seus divisores próprios (1, 2, 4 e 8) possuem soma igual a 15.

Pitágoras não estava totalmente errado em sua suspeita. Algum tempo depois Euclides descobriria, provavelmente baseado no raciocínio de Pitágoras, que os números da forma $2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$, para algum n natural, são perfeitos. Por exemplo,

a) Para $n = 2$, $2^1 \cdot (2^2 - 1) = 2 \cdot 3 = 6$;
b) Para $n = 3$, $2^2 \cdot (2^3 - 1) = 4 \cdot 7 = 28$;

c) Para $n = 5$, $2^4 \cdot (2^5 - 1) = 16 \cdot 31 = 496$;
d) Para $n = 7$, $2^6 \cdot (2^7 - 1) = 64 \cdot 127 = 8128$.

Para que o número da forma $2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$ seja perfeito, se faz necessário que o número $2^n - 1$ seja um número primo de Mersenne. Como, até a data de publicação deste trabalho, eram conhecidos 51 números primos de Mersenne. Então, existem 51 números perfeitos, sendo o maior deles o número $2^{82589932}(2^{82589933} - 1)$ descoberto em janeiro de 2019 no GIMPS (Great Internet Mersenne Prime Search). A grande curiosidade é sobre a existência de números perfeitos ímpares, pois dentre os 51 números perfeitos descobertos até agora não há nenhum ímpar. Basta notar que todos são múltiplos de uma potência de 2.

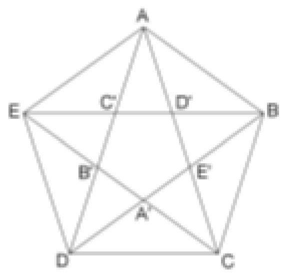
> Pitágoras era fascinado pelos ricos padrões e as propriedades dos números perfeitos e respeitava sua sutileza. À primeira vista, o conceito de perfeição é relativamente simples de entender, no entanto os antigos gregos foram incapazes de sondar alguns aspectos fundamentais deste assunto. Por exemplo, embora exista uma grande quantidade de números cujos divisores somados são uma unidade a menos do que o próprio número, ou seja, são ligeiramente deficientes, parecem não existir números ligeiramente excessivos. Os gregos foram incapazes de descobrir quaisquer números cujos divisores somados excedem em uma unidade o número original e não conseguem entender por que isso acontece. E para aumentar sua frustração também não conseguiram provar que tais números não existiam. É compreensível que a aparente falta de números levemente excessivos não tivesse nenhuma utilidade prática, entretanto era um problema que poderia revelar a natureza dos números e, portanto, valeria a pena estudar. Tais enigmas intrigaram a Irmandade Pitagórica, e dois mil e quinhentos anos depois os matemáticos ainda são incapazes de provar que não existem números ligeiramente excessivos (SINGH, 2008, p. 34).

Outros números de grande importância para a teoria dos números e aritmética, que Pitágoras junto a sua escola descobriu, foram os “números primos”, que são os números que possuem apenas dois divisores: o próprio número e a unidade. O único número primo par é o 2 e há uma infinidade de números primos ímpares. Os “números amigos” são outra descoberta de Pitágoras. Números amigos são dois números cuja soma dos divisores próprios de um deles é igual ao outro. O exemplo encontrado por Pitágoras foi o par 220 e 284. Note que os divisores próprios de 220 são 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 e 110, que apresentam soma igual a 284. O mesmo acontece com 284 cujos divisores próprios são 1, 2, 4, 71 e 142, que apresentam soma igual a 220. Outros pares de números amigos foram descobertos por Pierre Fermat em 1636 e por Leonard Euler em 1747.

A descoberta dos números irracionais também é creditada a irmandade pitagórica. Um de seus membros, ao analisar um triângulo retângulo com catetos congruentes medindo uma unidade, notou que não havia nenhum número racional que fornecesse a medida da hipotenusa, pois $x^2 = 1^2 + 1^2$, ou seja, $x^2 = 2$ e não existe número racional que elevado ao quadrado resulte no inteiro 2. Logo existiria pelo menos um número que não se encaixava na crença dos pitagóricos de que tudo poderia ser resolvido com os números inteiros ou com a divisão de inteiros. Logo este problema, que era considerado por Pitágoras como um erro, foi encoberto, sendo revelado muito tempo depois. Há uma lenda de que Pitágoras teria condenado o descobridor deste fato à morte por afogamento, forçando todos a manterem o segredo.

A irmandade pitagórica tinha um símbolo que era o pentágono regular estrelado, simplesmente chamado de pentagrama, que nada mais é do que o pentágono regular com suas cinco diagonais como mostra a figura abaixo:

Figura 1. Pentágono regular estrelado



Fonte: Os autores.

O símbolo da escola pitagórica é uma figura intrigante, justamente porque ela é formada por muitas curiosidades. A primeira delas é que suas diagonais se intersectam formando outro pentágono regular. De acordo com a Figura 1, o pentágono A'B'C'D'E'. Outra curiosidade é que cada um dos pontos A', B', C', D' e E' dividem suas diagonais em segmentos com medidas diferentes de tal modo que "a razão da medida de toda a diagonal para a medida do maior segmento gerado é igual à razão da medida deste para a medida do menor segmento gerado". Tomando a diagonal $\overline{AD}$ como exemplo, temos que $\frac{AD}{C'D} = \frac{C'D}{AC'}$. Os gregos conheciam esta divisão como "divisão de um segmento em média e extrema razão". Atualmente ela é conhecida como "secção áurea" de um segmento, denominação criada por Kepler (1571 – 1630).

Pitágoras também foi o responsável pela formalização da escala musical que usamos hoje.

> O instrumento mais importante da antiga música helênica era o tetracórdio, ou lira de quatro cordas. Antes de Pitágoras, os músicos tinham percebido que certas notas, quando soavam juntas, criavam um efeito agradável e afinavam suas liras de modo que ao tocarem duas cordas pudessem produzir tal harmonia. Contudo, os antigos músicos não compreendiam por que certas notas, em especial, eram harmônicas e não tinham nenhum meio preciso de afinar seus instrumentos. Eles afinavam suas liras pelo ouvido, até conseguirem um estado de harmonia – um processo que Platão chamava de torturar as cravelhas (SINGH, 2008, p. 35).

Pitágoras observou que quando os comprimentos das cordas estavam em algumas proporções, elas soavam de forma harmônica. Ele notou que se uma corda produzia uma nota qualquer, outra corda com o dobro do tamanho produziria a mesma nota em uma oitava abaixo. Este mesmo princípio é utilizado hoje em harpas e pianos. Pitágoras formalizou as notas musicais que conhecemos da seguinte forma: dada uma corda que produzia um Dó, uma corda com o dobro do comprimento levaria a um Dó uma oitava abaixo e de forma ascendente, uma corda com 16:9 de seu tamanho produziria um Ré, 8:5 para Mi, 3:2 para Fá, 4:3 para Sol, 6:5 para Lá e 16:15 para Si.

Todas estas descobertas fizeram com que a escola pitagórica ganhasse notoriedade na Grécia antiga, porém junto com este prestígio muita inveja também era atraída.

> Da mesma maneira que os pitagóricos conseguiram ascensão política, os inimigos surgiram. Um dos senhores mais ricos de Crotona, chamado Cilon, empreendeu um ataque a uma casa onde se reuniam os pitagóricos e muitos foram assassinados. Pitágoras foi para Tarento e daí, para Metaponto, onde perdeu a vida, aproximadamente, em 500 a.C. (CYRINO, 2006, p. 52).

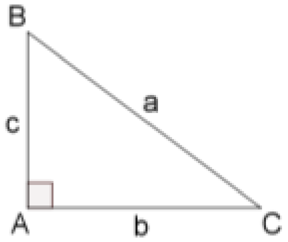
Pitágoras e os pitagóricos foram pessoas que deixaram um legado matemático e filosófico muito grande, porém esta história importante da Matemática é envolta em muitas lendas, pelo fato de muitas de suas descobertas ficarem em segredo, além da perda da maioria dos documentos. Há uma lenda que diz que, neste ataque aos pitagóricos, toda a casa foi incendiada, queimando os registros de Pitágoras e sua escola.

O teorema de Pitágoras

Um triângulo retângulo é um triângulo que possui um de seus ângulos internos medindo 90º. O maior lado de um triângulo retângulo, chamado de hipotenusa (palavra que tem origem no grego “hypoteínousa”, cujo significado é “contrário a ...”), é justamente o lado oposto ao ângulo reto e os outros dois lados que formam o ângulo reto são chamados de catetos (palavra que tem origem no grego “Kathetos” cujo significado é “que cai perpendicular”).

O teorema de Pitágoras é uma relação entre os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo, e pode ser enunciado da seguinte forma: *“Dado um triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos”.*

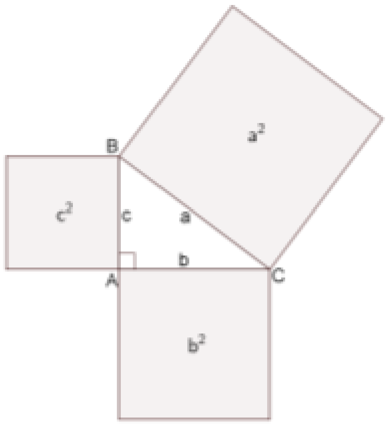
Figura 2: Triângulo retângulo



Fonte: Os autores.

Com a notação dada na figura acima, temos a seguinte identidade: $a^2 = b^2 + c^2$. Note que o teorema de Pitágoras relaciona os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo, porém esta identidade também pode ser utilizada para relacionar as áreas dos quadrados gerados a partir dos lados do mesmo triângulo retângulo. Ou seja, as áreas dos quadrados gerados pela hipotenusa e catetos são respectivamente a^2, b^2 e c^2.

Figura 3: O teorema de Pitágoras por comparação de áreas



Fonte: Os autores.

Esta relação, identificada como teorema de Pitágoras, era conhecida por muitos povos anteriores ao Pitágoras. Ela tem este nome, pois é muito provável que Pitágoras ou seus discípulos da escola pitagórica a tenham demonstrado pela primeira vez. Como já dito anteriormente, os egípcios usavam um triângulo retângulo para refazerem as marcações de ângulos retos na terra. Porém os povos antigos, que tiveram algum contato com o triângulo retângulo e com a relação entre seus lados, não tinham o interesse de saber o porquê dessa relação, assim como de outras que provavelmente conheciam. Para eles, era suficiente o benefício que as relações os traziam, ou seja, o interesse era único e exclusivo nas aplicações e não nas demonstrações.

O fato é que esta relação entre o comprimento dos três lados do triângulo retângulo gera um trio de números, que é chamado de “terno pitagórico”. Muitos desses ternos eram conhecidos pelos povos anteriores a Pitágoras, como mostram alguns documentos. Um deles é o “Plimpton 322”, que é uma tábua babilônica feita com argila e de escrita cuneiforme (tipo de escrita feita com um instrumento em forma de cunha) datada de 1800 a.C.. Esta tábua está localizada hoje na coleção da Universidade de Columbia, e contém uma tabela com quinze linhas de ternos pitagóricos.

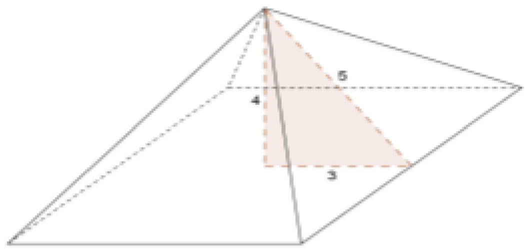
> A tábua era evidentemente uma tabela trigonométrica ou um auxílio didático para a regra de calcular hipotenusas de triângulos retângulos. Ela não contém variáveis, e parece que sua intenção era divulgar a regra por meio de uma lista de exemplos (CREASE, 2011, p. 18).

Na Índia antiga, a regra provada por Pitágoras também era conhecida e utilizada. Algumas aplicações estão registradas nos “Sulbasutras”, documentos que fazem parte do maior corpo de textos do período védico (1500 a.C. – 500 a.C.). Eles são as únicas fontes de conhecimento da matemática indiana. O “Zhou Bi Suan”, nome que significa “a clássica aritmética da Gnomon e os caminhos do céu circular” (Gnomon é a lâmina triangular do relógio de sol), é o texto chinês de Astronomia e Matemática mais antigo, provavelmente feito no I século a.C., que apresenta o conhecimento gerado no período da dinastia Zhou (1046 a.C. – 256 a.C). Neste texto há uma gravura que pode ser considerada parte do que seria a primeira prova geométrica do que viria a ser o teorema de Pitágoras. Em todos estes textos, há a aparição de ternos pitagóricos ou gravuras com triângulos retângulos, porém em nenhum deles se apresenta uma demonstração algébrica ou geométrica completa do teorema.

> A tábua babilônica, os Sulbasutras indianos e o Zhou Bi chinês exibem o conhecimento da regra aplicada a algum outro propósito: educação, no caso da Plimpton 322; religião, no caso dos Sulbasutras; astronomia, no caso do Zhou Bi. Nestes e em outros textos antigos, a regra é apresentada sem uma justificativa explícita, mas como um meio para descobrir distâncias e conferir resultados, algumas vezes com certo grau de formalismo (CREASE, 2011, p. 19).

Outro acontecimento curioso é do terno pitagórico mais conhecido (3, 4 e 5) aparecer na proporção da grande pirâmide do Egito. Normalmente este terno de números era utilizado para encontrar ângulos retos e deve ter sido esse mesmo o intuito, com o objetivo de posicionar o vértice da pirâmide conforme a figura abaixo.

Figura 4: Pirâmide e o terno pitagórico 3, 4 e 5



Fonte: Os autores.

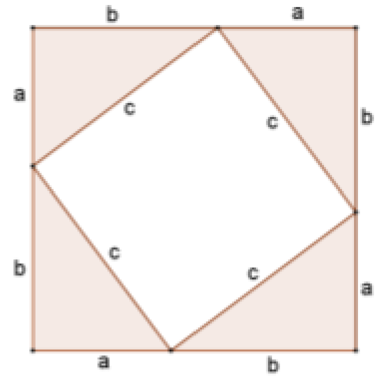
> Provar uma regra é muito diferente de apenas conhecê-la. Uma prova demonstra a validade geral de um resultado baseada em princípios fundamentais – ela é sua própria motivação, não visa a nenhum resultado prático e está menos preocupada com o resultado em si do que com o método utilizado para atingí-lo; mais preocupada com o processo pelo qual passamos a confiar nela. Uma prova reconta a jornada pela qual passamos a conhecer uma equação. Fornecer a prova de uma regra requer uma perspectiva matemática diferente de apenas enunciar a regra (CREASE, 2011, p. 20).

Provavelmente Pitágoras foi o primeiro a demonstrar este teorema, que era tão utilizado pelos povos antigos, na Índia, China, Egito e Babilônia. Não se sabe qual é exatamente a demonstração feita por Pitágoras. Acredita-se que tenha sido uma demonstração geométrica, usando comparação de áreas. Então vamos à provável demonstração feita por Pitágoras.

Dado um triângulo retângulo com catetos medindo “a” e “b”; e hipotenusa medindo “c”, deseja-se mostrar que $c^2 = a^2 + b^2$.

Seja um quadrado com lados medindo “$a + b$”. Constrói-se um quadrado de lados medindo “c” conforme a figura abaixo:

Figura 5: Primeiro quadrado com lado medindo "$a + b$"

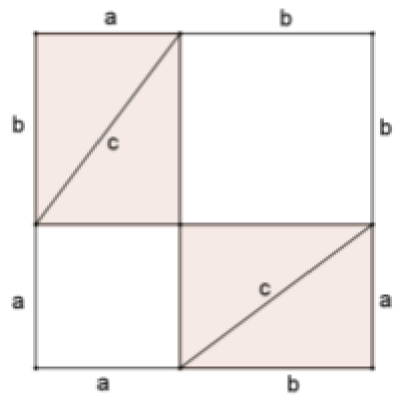


Fonte: Os autores.

Sabe-se que o quadrilátero de lado medindo "c" é um quadrado, pois os ângulos agudos de cada triângulo retângulo são complementares.

Agora, pode-se desmembrar o quadrado acima em quatro triângulos retângulos congruentes e um quadrado. Utilizando os quatro triângulos congruentes é possível remontar o quadrado com lado medindo "$a + b$" com outra configuração, conforme a figura abaixo:

Figura 6: Segundo quadrado com lado medindo "$a + b$"



Fonte: Os autores.

Note que nesta nova figura, o quadrado de lados medindo "$a + b$" é composto por seis polígonos: os mesmos quatro triângulos congruentes, um quadrado com lados medindo "a" e um quadrado com lados medindo "b". Desta forma, fazendo uma comparação entre as duas figuras, temos que a área original não foi alterada pela nova composição. Isto indica que a área do quadrado de lado medindo "c" da primeira figura é igual à soma das áreas dos quadrados com lados medindo "a" e "b" da segunda figura. Ou seja, $c^2 = a^2 + b^2$.

Demonstrações do teorema de Pitágoras

O teorema de Pitágoras é um dos mais famosos teoremas da história da Matemática, pois, além de toda a lenda que o envolve, ele possui muitas demonstrações distintas. Comparado aos outros tantos teoremas da Matemática, sem dúvida, o teorema de Pitágoras é o que possui o maior número de demonstrações. Estas demonstrações são, em sua grande maioria, geométricas, mas também existem demonstrações de caráter algébrico.

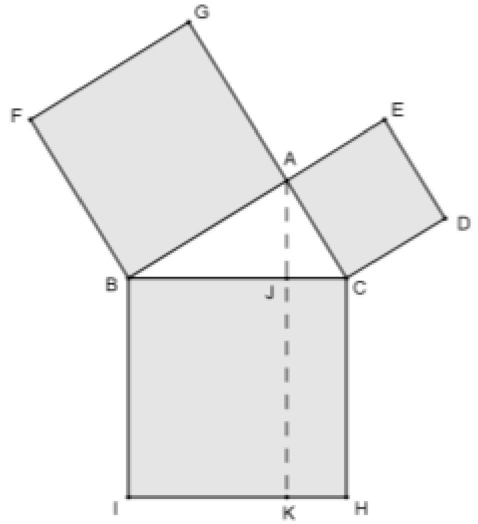
> Em 1927 (quando já era professor universitário), Loomis publicou *A proposição pitagórica*, livro contendo 230 provas; em 1940, então aos 87 anos, Loomis publicou uma segunda edição, com 370 provas. [...] A última frase de sua segunda edição é: "E ainda não chegamos ao fim".
> Loomis estava certo; não era o fim. O site *Guinness World Records*, sob o título "Maior quantidade de provas do teorema de Pitágoras", recentemente apontou um grego que diz ter descoberto 520 provas distintas. (CREASE, 2011, p. 24 e 25).

Apresentamos cinco demonstrações distintas do teorema de Pitágoras, sendo duas delas feitas por pessoas de grande reconhecimento científico e na sociedade, uma de amplo conhecimento acadêmico, uma de caráter geométrico, mas com propriedades aritméticas em seu desenvolvimento e a última que é bastante curiosa.

I) Demonstração de Euclides: Em "Os elementos" de Euclides, livro I, a proposição 47 é o teorema de Pitágoras acompanhado de sua demonstração. Observe como o teorema é enunciado: *Em um triângulo retângulo, o quadrado sobre o lado oposto ao ângulo reto é igual à soma dos quadrados sobre os lados que formam o ângulo reto.*

Demonstração: Euclides iniciou sua demonstração construindo três quadrados, a partir dos lados de um triângulo ABC, reto em A e construindo um segmento de reta perpendicular a hipotenusa com extremidades em A e K, conforme a figura abaixo:

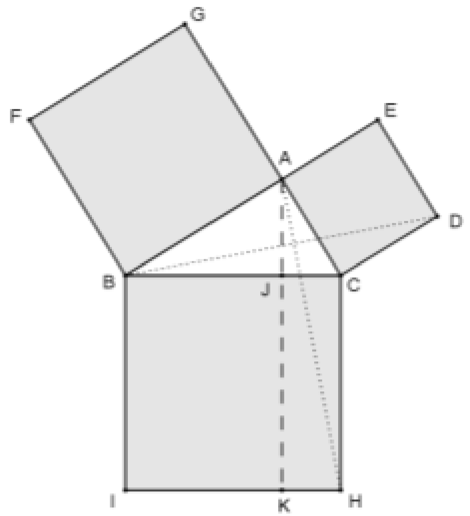
Figura 7: Demonstração de Euclides



Fonte: Os autores.

O objetivo de Euclides era mostrar que a soma das áreas dos quadrados menores é igual à área do quadrado maior. Para isso, Euclides traçou os segmentos $\overline{AH}$ e $\overline{BD}$ (Figura 11), construindo os triângulos ACH e DCB que são congruentes; pois $\overline{AC} \equiv \overline{DC}$, $A\hat{C}H \equiv D\hat{C}B$ (já que ambos são iguais a $med\left(A\hat{C}B\right) + 90°$) e $\overline{CH} \equiv \overline{CB}$, o que nos leva ao caso L.A.L. de congruência entre triângulos, que Euclides havia demonstrado na proposição 4 do mesmo livro. Observe a figura a seguir:

Figura 8: Congruência na demonstração de Euclides



Fonte: Os autores.

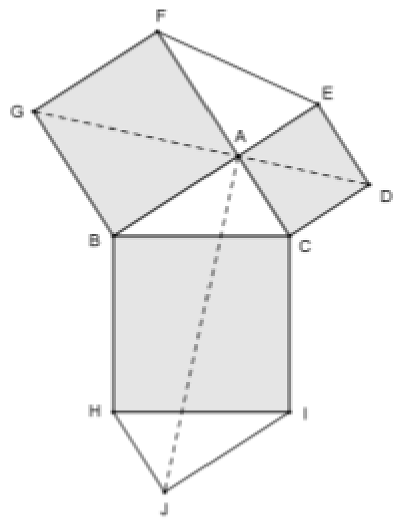
Porém, o triângulo ACH e o retângulo $JKHC$ possuem a mesma base $\overline{CH}$ e a mesma altura $\overline{CJ}$ (observe que os dois polígonos estão entre as paralelas $\acute{A}K$ e $\acute{C}H$). Na proposição 41, também do livro I, Euclides já demonstrara que um triângulo com a mesma base e altura de um quadrilátero, também possui metade de sua área. Assim, a área do triângulo ACH é a metade da área do retângulo $JKHC$. Da mesma forma, a área do triângulo DCB é metade da área do quadrado $ACDE$, pois ambos possuem base $\overline{CD}$ e altura $\overline{CA}$ (observe que os dois polígonos estão entre as paralelas $\acute{B}E$ e $\acute{C}D$).

Como os triângulos ACH e DCB possuem a mesma área, pois são congruentes, os quadriláteros $JKCH$ e $ACDE$ também possuem áreas iguais, já que suas áreas são o dobro da área dos triângulos ACH e DCB, respectivamente.

Analogamente, os quadriláteros $JKIB$ e $ABFG$ têm áreas iguais. Mas, a área do quadrado $BCHI$ é a soma das áreas dos quadriláteros $JKIB$ e $JKHC$. Ou seja, a área do quadrado maior é igual à soma das áreas dos quadrados menores.

II) Demonstração de Leonardo da Vinci: Dado um triângulo retângulo ABC, reto em A, a ideia de Leonardo da Vinci foi construir um quadrado a partir de cada lado do triângulo e mostrar que a soma das áreas dos quadrados menores é igual à área do quadrado maior, assim como fez Euclides. Para isso, além dos quadrados, Leonardo utilizou dois triângulos retângulos congruentes ao triângulo original, conforme a figura abaixo:

Figura 9: Demonstração de Leonardo da Vinci



Fonte: Os autores.

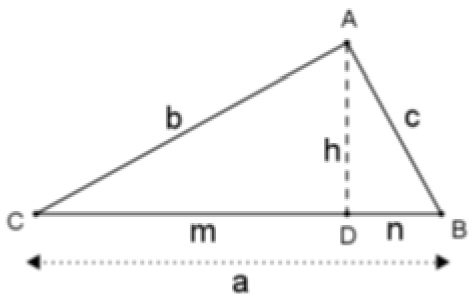
Note que o segmento $\overline{DG}$ particiona o hexágono $BCDEFG$ em dois quadriláteros congruentes, pois $GBCD$ é o simétrico do quadrilátero $GFED$ em relação ao próprio segmento $\overline{DG}$. Já o hexágono $ABHJIC$ é dividido em dois quadriláteros congruentes pelo segmento $\overline{AJ}$, observe que o quadrilátero $ABHJ$ é a rotação em 180º do quadrilátero $JICA$. Porém estes quatro quadriláteros são todos congruentes entre si. Para isso basta perceber a congruência entre os quadriláteros ABHJ e GBCD, pois $\overline{AB} \equiv \overline{GB}$, $A\hat{B}H \equiv G\hat{B}C$ (já que ambos são iguais a $med(A\hat{B}C) + 90°$), $\overline{BH} \equiv \overline{BC}$, B$\hat{H}J \equiv B\hat{C}D$ (já que ambos são iguais a $med(B\hat{C}A) + 90°$) e $\overline{HJ} \equiv \overline{CD}$.

Como os quatro quadriláteros são congruentes, então suas áreas são iguais. Assim como as áreas dos hexágonos $BCDEFG$ e $ABHJIC$. Mas o primeiro hexágono é composto por dois triângulos retângulos congruentes ao ABC e pelos quadrados menores. Já o segundo hexágono, é composto por dois triângulos retângulos congruentes ao ABC e pelo quadrado maior. Estas duas afirmações garantem que a soma das áreas dos quadrados menores é igual à área do quadrado maior.

III) Demonstração por semelhança de triângulos: Esta é a demonstração mais difundida nos livros didáticos, por isso a mais conhecida nos dias de hoje. Esta demonstração é a mais utilizada, porque usa um conteúdo de grande importância, que é a semelhança de triângulos.

Dado um triângulo retângulo ABC, reto em A, constrói-se a altura relativa à hipotenusa, que a divide em dois segmentos que são as projeções dos catetos sobre a hipotenusa, denotadas na figura abaixo como “m” e “n”.

Figura 10: Demonstração por semelhança de triângulos



Fonte: Os autores.

Observe que os triângulos DBA e DAC, retos em D, são semelhantes ao triângulo ABC, reto em A. Utilizando a semelhança entre DBA e ABC, tem-se que $\frac{c}{n} = \frac{a}{c}$. Aplicando a propriedade fundamental da proporção tem-se que $c^2 = n \cdot a$. Com a semelhança entre os triângulos DAC e ABC, tem-se que $\frac{b}{m} = \frac{a}{b}$, que leva a relação $b^2 = m \cdot a$. Somando as relações obtidas das duas semelhanças, chega-se a $b^2 + c^2 = m \cdot a + n \cdot a = (m + n) \cdot a = a \cdot a = a^2$, que é a relação do teorema de Pitágoras.

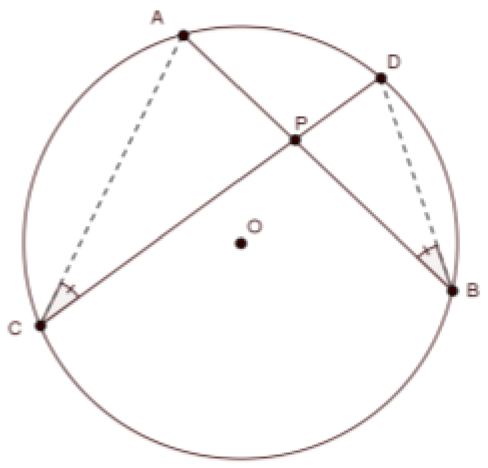
IV) Demonstração utilizando o teorema das cordas: Para esta demonstração do teorema de Pitágoras, precisaremos do teorema das cordas. Segue abaixo a definição de uma corda e uma demonstração do teorema das cordas.

Corda: É um segmento de reta cujas extremidades pertencem a uma mesma circunferência. Um exemplo é o *"diâmetro da circunferência"*, nome dado a uma corda que passe pelo centro da circunferência.

Teorema das cordas: Se duas cordas se encontram, então o produto das medidas dos dois segmentos determinados em uma delas é igual ao produto das medidas dos segmentos determinados na outra.

Sejam $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ cordas que se encontram em um ponto P no círculo, conforme a figura abaixo:

Figura 11: Demonstração do teorema das cordas



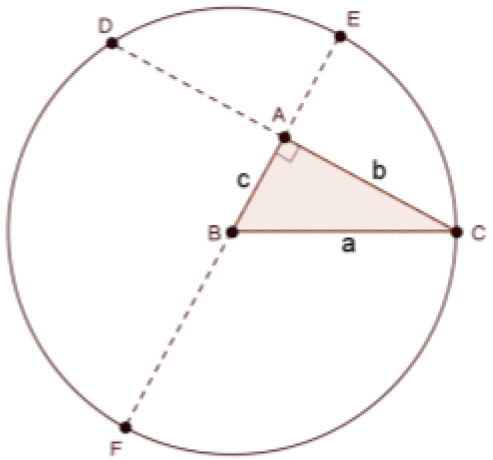
Fonte: Os autores.

Construindo os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, nota-se que os triângulos ACP e DBP são semelhantes pelo caso A.A.A., pois $A\hat{C}D \equiv A\hat{B}D$ (já que ambos são ângulos inscritos no mesmo arco $\widehat{AD}$) e $A\hat{P}C \equiv B\hat{P}D$ (ângulos opostos pelo vértice). Por semelhança, tem-se $\frac{AP}{PD} = \frac{CP}{PB}$.

Com este resultado vamos demonstrar o teorema de Pitágoras da seguinte forma:

Dado um triângulo ABC, reto em A, constrói-se uma circunferência com centro em B e raio $\overline{BC}$, conforme a figura abaixo:

Figura 12: Demonstração utilizando o teorema das cordas

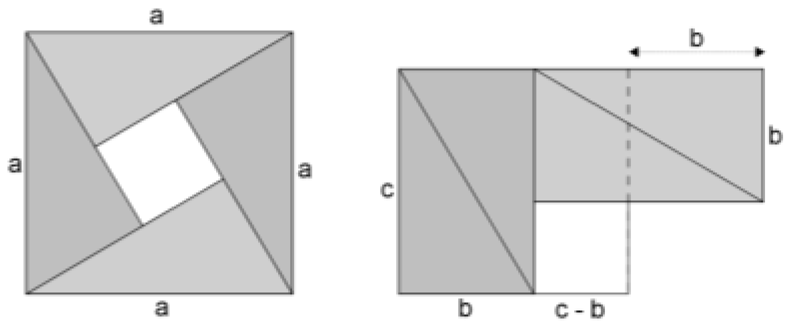


Fonte: Os autores.

Observe que ao prolongarem-se os catetos $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ obtemos as cordas $\overline{EF}$ e $\overline{CD}$, que se intersectam perpendicularmente no ponto A, sendo $\overline{EF}$ o diâmetro da circunferência. Desta forma a corda $\overline{CD}$ é intersectada em seu ponto médio, sendo $AD = b$. Basta observar que o triângulo BCD é isósceles de base $\overline{CD}$ e que $\overline{BA}$ é sua altura. Note que $BF = a$ (raio da circunferência) e $AE = a - c$. Utilizando o teorema das cordas, tem-se $AC \cdot AD = AE \cdot AF$, ou seja $b \cdot b = (a - c) \cdot (a + c)$. Resolvendo o produto notável, encontra-se $b^2 = a^2 - c^2$. Ou equivalentemente, $a^2 = b^2 + c^2$, que é a identidade do teorema de Pitágoras, pois "a" é a medida da hipotenusa e, "b" e "c" são as medidas dos catetos do triângulo ABC.

V) demonstração de Bhaskara: O matemático indiano Bhaskara (1114 – 1185) foi um que encontrou uma demonstração do teorema de Pitágoras baseada apenas na observação de duas figuras. Diz a lenda, que Bhaskara desenhou as duas figuras abaixo e escreveu somente uma pequena palavra em sua argumentação: Olha!

Figura 13: Desenho feito por Bhaskara



Fonte: Os autores.

A intenção de Bhaskara foi construir uma figura com área medindo a^2 e outra figura com área medindo $b^2 + c^2$, onde a, b e c são, respectivamente, a hipotenusa e os catetos dos triângulos retângulos.

Proposta didática de abordagem do tema "teorema de Pitágoras"

Neste trabalho, pode-se conhecer parte da história sobre Pitágoras, a escola pitagórica e o teorema de Pitágoras. Este fragmento da história da Matemática é riquíssimo em lendas e curiosidades que podem encantar qualquer aluno. Por isso, seria importante que os professores de Matemática dessem devida atenção à abordagem histórica deste tema nas salas de aula. Ou seja, quando forem ensinar o teorema de Pitágoras, que a abordagem seja mais rica em conteúdo histórico.

> A História da Matemática pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento. Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento (PCN´s Ensino Fundamental – Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias – MEC, 1998, p. 42).

A proposta feita por este trabalho é que ao se ensinar o teorema de Pitágoras, a abordagem mais eficaz, mais profícua, mais interessante seja a da descoberta. Que o aluno ao ser iniciado nesta viagem no tempo, seja instigado a desenvolver uma curiosidade para buscar novas informações históricas. Isto facilita o aprendizado e incentiva o compartilhamento de conhecimento entre os alunos da turma.

Outro fator de grande importância é que o teorema de Pitágoras possui um número muito grande de demonstrações distintas. Então, é interessante que o professor e o livro didático apresentem diferentes demonstrações e, mais do que isso, incentive seus alunos a demonstrar o teorema de Pitágoras de diferentes formas. Crie uma conjectura e peça a seus alunos que trabalhem no tema, forneça algumas ferramentas e incentive o aluno a busca pela elaboração da prova formal. Isto já pode ser feito no 9º ano do ensino fundamental, como diz o fragmento dos “Parâmetros Curriculares Nacionais” abaixo:

> Apesar da força de convencimento para os alunos que possam ter esses experimentos com material concreto ou com a medição de um desenho, eles não se constituem provas matemáticas. Ainda que essas experiências possam ser aceitas como provas no terceiro ciclo, é necessário, no quarto ciclo, que as observações do material concreto sejam elementos desencadeadores de conjecturas e processos que levem às justificativas mais formais (PCN´s Ensino fundamental – Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias – MEC, 1998, p. 127).

O que normalmente acontece é que as demonstrações aparecem timidamente nos livros didáticos do ensino fundamental e, praticamente, desaparecem nos livros do ensino médio. E, se o professor não apresentar as demonstrações aos alunos nesta fase da vida acadêmica, os que ingressarem em carreiras da área de Ciências Exatas, serão apresentados às provas e demonstrações na universidade. Isto pode ser traumático para o aluno, pois parece que a Matemática estudada na educação básica é completamente diferente da Matemática da educação superior. Se no ensino fundamental o aluno já pode ser apresentado às demonstrações e provas, no ensino médio existe a oportunidade de aprofundamento dos alunos nestas mesmas demonstrações apresentadas no ensino fundamental. Apresentamos a seguir a orientação dada pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino médio:

> O ensino de Geometria no ensino fundamental está estruturado para propiciar uma primeira reflexão dos alunos através da experimentação e de deduções informais sobre as propriedades relativas a lados, ângulos e diagonais de polígonos, bem como o estudo de congruência e semelhança de figuras planas. Para alcançar um maior desenvolvimento do raciocínio lógico, é necessário que no ensino médio haja um aprofundamento dessas idéias no sentido de que o aluno possa conhecer um sistema dedutivo, analisando o significado de postulados e teoremas e o valor de uma demonstração para fatos que lhe são familiares (PCN+ Ensino médio – Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias – MEC, 2007, p. 123 e 124).

A última proposta deste trabalho é que o ensino do teorema de Pitágoras seja aplicado em situações reais. Os alunos podem ser convocados a verificarem a perpendicularidade das paredes da sala de aula usando o teorema de Pitágoras, mais especificamente o triângulo com lados medindo 30 cm e 40 cm. Caso o terceiro lado deste triângulo meça 50 cm, então as paredes serão perpendiculares. Quando se aplica o saber teórico a uma situação próxima do aluno, ele deixa de ser teórico e passa e ser prático, despertando o interesse do aluno pelo tema. O teorema de Pitágoras é um exemplo de conhecimento que pode ser aplicado a inúmeras situações do cotidiano, basta que os professores, e também os autores de livros didáticos, busquem estas aplicações, a fim de apresentar o conteúdo de maneira mais interessante e agradável.

Considerações finais

Após a apresentação de uma parte histórica e demonstrações, pode-se concluir que o teorema de Pitágoras possui um encanto praticamente inexplicável. Este teorema é o mais demonstrado de toda a Matemática, sendo essas demonstrações de todos os tipos e características. Apesar disso, o teorema tem um enunciado simples que se traduz em uma identidade pequena e direta.

Teorema e história tão fascinantes merecem atenção especial dos livros didáticos de Matemática, que apresentam a parte histórica de maneira muito breve e despretensiosa. A apresentação da parte histórica deve ter a intenção de motivar o leitor a se interessar pelo teorema de Pitágoras, buscando mais fontes e sendo instigado a dissecar o tema (mesmo que esta tarefa seja difícil). Assim, o aluno teria a real dimensão da importância deste teorema para a história da Matemática e para o desenvolvimento da Geometria que temos nos dias de hoje. O desenvolvimento da parte histórica de qualquer conteúdo matemático mostra para os alunos que a Matemática é uma ciência construída pelos homens ao longo de muito tempo, com muito esforço e estudo. Isto, de certa forma, humaniza o conhecimento e traz o aluno para mais próximo da Matemática. Como o teorema de Pitágoras possui uma história bela em detalhes e curiosidades, é um desperdício não utilizá-la para motivar os alunos a gostarem um pouco mais de Matemática.

As demonstrações do teorema são itens que ficam de fora em alguns livros, que apresentam o teorema sem qualquer justificativa formal.

Matemática pode ser brevemente apresentada como sendo composta por conjecturas, histórias, demonstrações e aplicações. Por essa razão, nossa sugestão é que nada disso fique de fora dos livros didáticos e da sala de aula!

Bibliografia

BOYER, C. B. **História da matemática**. 2. ed. São Paulo: Blücher, 1996.

CREASE, R. P. **As grandes equações: a história das fórmulas matemáticas mais importantes e os cientistas que as criaram**. Rio de Janeiro: Zahar, 2011.

CYRINO, H. F. F. **Matemática & Gregos**. São Paulo: Editora Átomo, 2006.

PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS. Ensino Fundamental – Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias – MEC, 1998.

PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS MAIS. Ensino médio – Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias – MEC, 2007.

SINGH, S. **O Último Teorema de Fermat**: a história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos. 13. ed. Rio de Janeiro: Record, 2008.

NOTAS

IDENTIFICAÇÃO DO TEXTO

O presente texto é uma adaptação do trabalho intitulado Sobre o Teorema de Pitágoras, dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, apresentada na Universidade Federal Fluminense em 26 de março de 2013 e elaborado sob a orientação da Professora Dra. Cecília de Souza Fernandez.

IDENTIFICAÇÃO DE AUTORIA

Cecília de Souza Fernandez. PhD em Matemática (Kent State University, Ohio, USA). Professora Titular. Universidade Federal Fluminense (UFF). Instituto de Matemática e Estatística. Departamento de Análise. Niterói, RJ, Brasil.
E-mail: ceciliafernandez@id.uff.br
https://orcid.org/0000-0001-6410-5117

Weverton Magno Ferreira de Castro. Mestre pelo Programa PROFMAT na Universidade Federal Fluminense (UFF). Professor do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro (IFRJ), Niterói, RJ, Brasil.
E-mail: weverton.castro@ifrj.edu.br
https://orcid.org/0000-0002-5849-9305

AGRADECIMENTOS

Agradecemos a Universidade Federal Fluminense por ter abrigado o programa PROFMAT e propiciar uma formação de qualidade para professores do Ensino Básico. Fica nosso agradecimento a Sociedade Brasileira de Matemática pelo projeto desse programa que vem fortalecendo o ensino de Matemática no nosso país.

FINANCIAMENTO
O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Não se aplica.

EDITORES
Patricia Helena Mirandola Garcia, Eugenia Brunilda Opazo Uribe, Gerson dos Santos Farias.

HISTÓRICO
Recebido em: 30/08/2021 – Aprovado em: 06/11/2021 – Publicado em: 15/12/2021.

COMO CITAR
FERNANDEZ, C. S; CASTRO, W. M. F. Uma Proposta Didática para o Ensino do Teorema de Pitágoras. **Revista ENSIN@ UFMS**, Três Lagoas, v. 2, número especial, p. 44-66. 2021.

ENSINO DE FUNÇÃO AFIM ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA INTERVENÇÃO NO ENSINO MÉDIO

TEACHING AFFINE FUNCTION THROUGH PROBLEM SOLVING: AN INTERVENTION PROPOSAL IN HIGH SCHOOL

Adalgisa Loureiro de Mello[1]

Janecler Aparecida Amorin Colombo[2]

RESUMO: O presente artigo é recorte de uma pesquisa, concluída em 2018 e vinculada ao Mestrado Profissional em Rede Nacional (PROFMAT), ofertado pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) - campus Pato Branco, tendo objeto da abordagem uma proposta de ensino de Função Afim com base na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avalição através da Resolução de Problemas. Para tanto, fez-se uma adaptação da proposta de Onuchic e Allevato (2011), compactando as dez etapas das autoras em quatro momentos. Para o desenvolvimento da proposta, elaborou-se um "Problema Gerador" baseado em situações relacionadas ao curso Técnico em Serviços Jurídicos do IFPR - Campus Palmas, no qual a intervenção pedagógica foi realizada, especificamente em uma turma de 1 ano. A pesquisa teve cunho qualitativo e buscou verificar a percepção dos alunos frente ao encaminhamento diferenciado das aulas em relação ao conteúdo trabalhado. Os dados coletados foram analisados conforme a triangulação de métodos (GOMES, 2010). Os resultados revelaram que os alunos aderiram ao trabalho de forma positiva; quanto à aprendizagem, foi tida como satisfatória, considerando uma única exposição da metodologia. Além disso, constatou-se uma mudança de postura da professora pesquisadora e da grande maioria dos alunos diante da proposta aplicada, com quesitos fundamentais para instigar a autonomia e a motivação do educando. Ademais, a proposta desenvolvida é apresentada como um protótipo que pode ser aproveitada e utilizada por outros docentes que demonstrarem interesse em conhecer e aplicar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas.

PALAVRAS-CHAVE: Metodologia de Ensino-Aprendizagem e Avaliação. Resolução de Problemas. Ensino de Função Afim.

ABSTRACT: The present paper is an extract of research completed in 2018 linked to Mestrado Profissional em Rede Nacional em Matemática (PROFMAT), offered by Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)- campus Pato Branco, whose object was a teaching proposal of Affine Function based on Methodology of teaching-learning-assessment through Problem Solving. For this, an adaptation of the proposal by Onuchic e Allevato (2011) was made, compressing the ten steps by the authors in four moments. To develop the proposal, a "Generation Problem" was elaborated based on situations related to the Technical Course in Legal Services at the Instituto Federal do Paraná (IFPR) - campus Palmas, in which the pedagogical intervention was carried, specifically in a first-year class. The research was qualitative and sought to verify the students' perceptions of the differentiated routing of the classes. The data collected was analyzed by triangulation of methods (Gomes, 2010). The results revealed that the students adhered to the work positively. The learning was considered satisfactory. In addition, a change in the attitude of the researcher teacher and the vast majority of students towards the applied proposal was found, with fundamental requirements to instigate the student's autonomy and motivation. Furthermore, the proposal developed is presented as a prototype that can be used by other teachers who show interest in learning about and applying the Problem-Solving Teaching-Learning-Assessment Methodology.

[1] Instituto Federal do Paraná. E-mail: adalgisa.mello@ifpr.edu.br
https://orcid.org/0000-0003-3876-202X
[2] Universidade Tecnológica Federal do Paraná. E-mail: janecler@utfpr.edu.br
https://orcid.org/0000-0002-7729-9501

Informações completas da obra no final do artigo

KEYWORDS: Teaching-Learning-Assessment Methodology. Problem-Solving. Teaching of Affine Function.

Introdução

Este artigo apresenta um recorte de uma pesquisa de mestrado cujo objeto de estudo foi o desenvolvimento de uma proposta de ensino com tema “Função Afim”, a partir da perspectiva teórico-metodológica da Resolução de Problemas (MELLO, 2018). O objetivo da pesquisa era inovar por meio da implementação de uma prática pedagógica viável para as aulas de Matemática, utilizando para isso, especificamente, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas, proposta por Onuchic e Allevato (2011). Partindo desses pressupostos, desenvolveu-se um trabalho de construção e aplicação de uma proposta de aulas baseadas nessa metodologia.

O plano de trabalho desenvolvido foi aplicado em uma turma de 1ª série do Ensino Médio, com alunos do curso Técnico em Assuntos Jurídicos do IFPR Campus-Palmas. Cabe ressaltar que a avaliação nessa instituição é conceitual, o que provocou o interesse na adequação da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas, a esse tipo de processo avaliativo. Desse modo, a avaliação, tema digno de reflexão e que compõe o currículo de Matemática na Educação Básica por impactar diretamente as ações da sala de aula, trouxe grandes contribuições ao desenvolvimento dessa pesquisa, que se propôs a experienciar a inovação metodológica. Porém, devido à relevância do assunto, este será abordado de forma mais específica em um próximo trabalho.

Este artigo foi estruturado em quatro seções, além desta introdução. Na primeira, apresentamos a abordagem da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas proposta por Onuchic e Allevato (2011). Em seguida, tratamos sobre aspectos operacionais dessa abordagem metodológica e na terceira seção trazemos a proposta desenvolvida para o ensino de Função Afim, apresentando as percepções dos alunos quanto às aulas desenvolvidas a partir desta estratégia metodológica. E, por fim, são apresentadas as considerações finais.

A Resolução de Problemas como uma Estratégia Metodológica de Ensino-Aprendizagem e Avaliação de Matemática na Perspectiva de Onuchic e Allevato

Em nível mundial, no que se refere ao ensino de Matemática, nos anos 80 a Resolução de Problemas já se encontrava em alta como Metodologia de ensino. Entretanto, no Brasil foi nesse momento que se deu o início das discussões sobre a temática, sendo que o seu ápice ocorreu apenas em 1997, com a divulgação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), documento que serviu como subsídio para apoiar o projeto curricular da escola e que encara a utilização da resolução de problemas como estratégia de ensino. Com a publicação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), no final de 2017, mais especificamente em 2018, quando é finalizada a etapa do documento que se refere ao Ensino Médio, observa-se que o foco foi a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade. É possível, verificamos em vários pontos do documento a presença de termos como "resolução de problema", "argumentação consistente", "mecanismos criativos para encontrar soluções" entre outras expressões que revelam, mesmo de forma implícita e bem sutil, referências sobre a metodologia de ensino através da resolução de problemas. Vale aqui considerar que em termos de avanços da pesquisa em educação matemática, tem-se um retrocesso, uma vez que os PCNs, traziam maior ênfase as diferentes possibilidades metodológicas para o ensino de matemática.

Em se tratando de iniciativas brasileiras, a partir de 1992 foi criado no Brasil o Grupo de Trabalho e Estudo em Resolução de Problemas - GTERP, na Universidade Estadual Paulista (UNESP), em Rio Claro, sendo o trabalho dos pesquisadores coordenado pela Profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic. Ainda hoje na coordenação, um de seus principais objetivos é o de manter o grupo atualizado quanto às concepções em Educação Matemática, que, atualmente, se apoia no Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, como metodologia de ensino (GTERP, 2017). As pesquisas incessantes na área de Educação Matemática no Brasil e no mundo se devem a crescente necessidade de adequar à matemática aprendida nas escolas às necessidades das diversas áreas de atuação do homem no mundo contemporâneo, já que é uma área do conhecimento indispensável ao desenvolvimento de diversas áreas das ciências.

No que se refere ao ensino de Matemática através da Resolução de Problemas existe uma preocupação com a Matemática e com a Resolução se Problemas no sentido de ambas desenvolverem-se de maneira simultânea ao longo do processo. Visto que as demandas altamente tecnológicas, a economia crescente e competitiva requerem mudanças na forma de aprender Matemática, necessita-se que os educandos desenvolvam habilidades de autonomia, criticidade, sejam “construtores” do seu próprio conhecimento e ainda consigam trabalhar de forma coletiva, sobrevivendo assim, as rápidas e crescentes modificações a que serão expostos, nas mais diversas experiências de trabalho.

Objetivando o desenvolvimento dessas aptidões durante a formação escolar, o grupo GTERP aposta na “Metodologia de Ensino - Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas”, pois conforme Onuchic (2014), nesta metodologia, o ensino e aprendizagem acontecem de forma concomitante durante o processo de construção do conhecimento. Justificando-se assim, o uso pelo GTERP da expressão “ensino-aprendizagem”, relacionando ambas de forma que ocorram integradas nas situações de sala de aula.

Cabe ainda ressaltar que a metodologia em questão integra um conceito atual de avaliação, sendo esta formativa e continuada, construída durante a resolução do problema, incorrendo-se mais ao processo e menos aos resultados finais obtidos, possibilitando também a reorientação da prática docente. Deste modo, a palavra composta ensino-aprendizagem-avaliação expressa à simultaneidade desses três pilares educacionais durante o processo de construção do conhecimento pelo aluno, mediado pelo professor.

A compreensão e o desenvolvimento da metodologia se dão a partir da clareza advinda do conceito do que é um problema. Para o GTERP problema “é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em fazer” (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 81), e é essa perspectiva vislumbrada por este trabalho.

Quanto à resolução do problema, não devem ser prescritos métodos, afinal o problema dependerá diretamente da pessoa que irá resolvê-lo; se esta já conhece ou já sabe os métodos que deverá utilizar para resolver ou ainda, se não apresenta interesse em resolvê-lo, situação que faz com que o problema não seja considerado como tal. Dessa forma, o que é problema para uma pessoa pode não ser problema para outra. Ainda, se um problema é resolvido várias vezes ou se anteriormente algum problema similar já foi resolvido, o caso deixa de se configurar um problema.

Assim, aprendizagem e a construção do conhecimento são dadas a partir da resolução do problema, por meio de um trabalho colaborativo entre professor e alunos:

> Na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas o problema é o ponto de partida e, na sala de aula através da resolução de problemas, os alunos devem fazer conexões entre diferentes ramos da Matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 81).

Para se colocar em prática a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas não existe um "modelo" estanque, porém de acordo com a proposta de Onuchic e Allevato et al. (2014) pode ser trabalhada com uma sugestão de dez etapas:

(1). Preparação do problema (seleção ou elaboração de um problema que possibilite a construção de um novo conceito- problema gerador);

(2). Leitura individual;

(3). Leitura em conjunto (formar grupos de trabalho);

(4). Resolução do problema (em grupo);

(5). Observar e incentivar (professor com papel de mediador, questionador e observador do trabalho coletivo, bem como incentivador da utilização de conhecimentos anteriores e de técnicas matemáticas para a resolução do problema gerador. O auxílio deve ser dado apenas na resolução de problemas secundários que possam aparecer no decorrer da resolução do problema e impeçam a continuação do trabalho);

(6). Registro das resoluções na lousa (representantes do grupo, apresentam a resolução obtida para o problema na lousa);

(7). Plenária (todos os alunos têm a possibilidade de discutir as diferentes resoluções apresentados na lousa);

(8). Busca do consenso (após sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções, o professor tenta juntamente coma a turma chegar a um consenso quanto a resultado mais adequado ao problema);

(9). Formalização do conteúdo (apresentação formal do conteúdo na lousa (conceito, linguagem matemática, princípios etc.) pelo professor);

(10). Proposição e resolução de novos problemas (propor novos problemas que se relacionem ao problema gerador, bem como possibilitem a compreensão do conteúdo matemático introduzido naquela aula, possibilitando a consolidação das aprendizagens).

A sequência das etapas acima tem o objetivo de orientar o trabalho do professor que pretende desenvolver suas aulas a partir desta abordagem metodológica. Uma das etapas principais e que demanda empenho e uma atenção mais detalhada é a “Preparação do problema”, que consiste na busca ou elaboração do problema gerador ideal a ser aplicado. Isso porque o problema gerador é a base de todo o processo que se desenvolverá, e os livros didáticos muitas vezes, não trazem problemas com as características necessárias para isso. Corá (2019) discute sobre isso em sua pesquisa de mestrado, concluindo que nos livros didáticos que ela analisou, praticamente inexistem problemas que podem ser considerados como problemas geradores, sendo este um dos motivos que pode explicar a baixa adesão de professores a esta metodologia.

> Reitere-se que, nessa metodologia, os problemas são propostos aos alunos antes de lhes ter sido apresentado formalmente o conteúdo matemático necessário ou mais apropriado à sua resolução que, de acordo com o programa da disciplina para a série atendida, é pretendido pelo professor. Dessa forma, o ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com um problema que expressa aspectos-chave desse tópico e técnicas matemáticas devem ser desenvolvidas na busca de respostas razoáveis ao problema dado. A avaliação do crescimento dos alunos é feita, continuamente, durante a resolução do problema (ONUCHIC; ALLEVATO, 2009, p. 98).

O problema gerador é, portanto, essencial para o desenvolvimento da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, uma vez que dispensa a necessidade de conhecimento prévio do conteúdo matemático envolvido, não exigindo método especifico para a resolução. Somente após a apresentação da resolução dos alunos (etapas 6 a 8) é que o professor formalizará o conteúdo propriamente dito, conteúdo esse, discutido e pesquisado durante o desenvolvimento do problema até a chegada da solução.

Nesse sentido é natural que professor e alunos apresentem uma postura bem diferente daquela observada em uma aula expositiva tradicional.

O Papel do Professor no Desenvolvimento da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

O docente que pretender aplicar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas deve ter a coragem de inovar, proporcionando ao seu aluno no mínimo, uma proposta diferente da habitual. De certa forma, invertendo o que tradicionalmente se faz em sala, que de modo geral é apresentar as definições e depois exercitar e propor problemas.

Ou seja, o docente precisa compreender que haverá mudanças significativas em seu “papel”, pois deixará de ser o protagonista em suas aulas. Entretanto, a sua importância não diminui, pois é ele o organizador e mediador no desenvolvimento de todas as atividades, tendo como incumbência: i) esclarecer aos alunos a proposta metodológica e a forma de avaliação; ii) propor o problema gerador (considerando os conhecimentos prévios dos alunos e o conteúdo que pretende desenvolver a partir deste problema); iii) organizar a turma em grupos de trabalho e analisar cada um em sua individualidade; iv) orientar os grupos e perceber as principais dificuldades; v) propiciar que a discussão ocorra entre o maior número de componentes do grupo estimulando assim o trabalho colaborativo; vi) avaliar todo o processo de resolução desempenhado pelo aluno; vii) utilizar os erros como fonte de informação para mediar o processo e subsidiar a auto avaliação do aluno; viii) formalizar o conteúdo, utilizando a linguagem matemática e aproveitando as diferentes resoluções e técnicas operatórias propostas pelos alunos.

Da mesma forma é igualmente importante uma mudança significativa na postura do estudante. Para garantir a eficácia da proposta é necessário que os estudantes compreendam e assumam suas responsabilidades frente ao processo, e que, portanto, sejam participativos (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011).

Refletindo sobre o papel do professor ao assumir essa metodologia e pensando em tornar a aplicação viável, diante das situações enfrentadas pelos docentes em sala de aula, tais como: disciplina com carga horária reduzida, número elevado de alunos por turma, quantidade elevada de conteúdo a ser desenvolvida ao longo do ano, entre outras situações, propusemos uma síntese das etapas sugeridas por Onuchic e Allevato (2011, 2014) compactadas em quatro momentos, conforme disposição abaixo:

> 1° Momento - Leitura e Interpretação: Divisão da turma em grupos, seguida da entrega do problema gerador individualmente a cada integrante do grupo. Disponibilização de tempo para que seja feita leitura do problema de forma individual e em grupo. Auxílio do professor nos grupos para interpretação do problema, caso se faça necessário; Resolução do Problema- os alunos a partir da interpretação e entendimento do problema buscam em grupo resolvê-lo.
> 2° Momento - Demonstração da Resolução do Problema em Grupo - Cada grupo utiliza-se de um ou dois representantes para registrar na lousa a resolução e explicar quais as estratégias utilizadas, independentemente de estar certa ou errada. Em seguida, todos os alunos são convidados a discutir as resoluções expostas na lousa, e o professor age como incentivador e mediador das colocações. Esclarecidas as

> dúvidas, o professor procura chegar com todos a um consenso sobre resultado correto.
> 3° Momento - Apresentação Formal do Conteúdo - O professor faz a apresentação formal do conteúdo, organizado e estruturado na linguagem matemática, esse é o momento em que os alunos têm o contato como conteúdo propriamente dito.
> 4° Momento - Proposição de Novos Problemas - Tais problemas tem objetivo de aprofundar e aumentar a compreensão do tal conteúdo matemático, configurando uma forma de construir conhecimento através da resolução de problema (MELLO, 2018, p. 38).

Esta reorganização pode ser facilmente observada no Quadro 1:

Quadro 1. As 10 etapas da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas de Onuchic e Allevatto (2014) em 4 momentos

(1) Preparação do problema	1° Momento Leitura e interpretação
(2) Leitura individual	
(3) Leitura em conjunto	
(4) Resolução do problema	
(5) Observar e incentivar	
(6) Registro das soluções na lousa	2° Momento Demonstração da resolução do problema gerador
(7) Plenária	
(8) Busca do consenso	
(9) Formalização do Conteúdo	3° Momento Apresentação formal do conteúdo
(10) Proposição e resolução de novos problemas	4° Momento Proposição de novos problemas

Fonte: Mello (2018).

Durante o desenvolvimento dos quatro momentos da metodologia transcorre também o processo avaliativo, que em nossa proposta é embasado em uma ficha de avaliação e anotações pertinentes realizadas em diário de campo. Este instrumento foi elaborado em Mello (2018) e será objeto de um outro artigo específico sobre processos avaliativos.

Na próxima seção apresentamos um exemplo de intervenção no Ensino Médio, baseado nestes quatro momentos para aplicação da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Resolução de Problemas como Metodologia para o Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Função Afim

A aplicação da proposta foi realizada em uma turma do 1º Ano de Ensino Médio, do curso Técnico em Serviços Jurídicos, do IFPR Campus Palmas no ano de 2018. Esta turma era composta por 43 alunos, um número expressivo, causando certa preocupação diante de uma metodologia não utilizada até então.

O desenvolvimento da proposta didática se deu a partir do tema Função Afim (definição, construção do gráfico, crescimento e decrescimento, coeficiente angular e linear, zeros da função), logo o problema gerador proposto precisaria englobar ou pelo menos propiciar a discussão sobre o tema e os itens elencados.

O problema gerador foi elaborado considerando as seguintes hipóteses:

i. Alunos possuem conhecimentos básicos de Função Afim e construção de gráficos, adquiridos no 9º ano do Ensino Fundamental;
ii. Alunos possuem conhecimento de funções, conforme descrito em plano de ensino da disciplina de Matemática do 1° ano;
iii. A prática despertaria a vontade de aprender.

Incialmente a ideia era utilizar um problema pronto, entretanto os problemas encontrados não atendiam as especificidades desejadas. Buscando a melhor aplicação da metodologia, partiu-se para a elaboração do problema gerador. Foi escolhido um tema que fizesse parte do contexto dos alunos, não para facilitar a resolução, mas para visualizarem a aplicabilidade do conteúdo que seria posteriormente desenvolvido.

A ideia foi acertada, e o problema foi tomando “corpo”, de maneira que a partir do seu desenvolvimento, foi possível abordar grande parte do conteúdo de Função Afim.

ISSN 2525-7056

Figura 1: Problema Gerador

Problema Gerador

Em nossa cidade há três lojas credenciadas as operadoras de celular: Loja da TCHAU, Loja da ESCURO e Loja da TUM.

Um estudante do IFPR visando diminuir suas despesas com telefone móvel e manter suas necessidades atendidas fez uma pesquisa referente a planos pós-pago, conforme abaixo:

OPERADORA ESCURO

Plano	Valor Mensal	Valor por min Extra
50 min	R$ 42,99	R$ 0,50
100 min	R$ 68,99	R$ 0,50
150 min	R$ 109,99	R$ 0,50

OPERADORA TUM

Plano	Valor Mensal	Valor por min Extra R$
50 min	R$ 40,00	R$ 0,75
100 min	R$ 66,00	R$ 0,75
150 min	R$ 105,00	R$ 0,75

OPERADORA TCHAU

Plano	Valor Mensal	Valor por min Extra R$
50 min	R$ 39,99	R$ 0,89
100 min	R$ 64,99	R$ 0,89
150 min	R$ 100,99	R$ 0,89

Em todas as operadoras são oferecidas as seguintes vantagens:

*2GB de internet;

*Torpedos ilimitado para qualquer operadora;

*Ligações à ilimitadas para celular de mesma operadora;

*Whatsap ilimitado.

Analisando as informações obtidas pelo estudante, responda as questões abaixo:

a) Explique como é feito o cálculo do valor a ser pago de uma fatura de telefonia celular em planos pós-pagos, conforme disposto.

____

b) Se o estudante utilizasse em média 90 minutos por mês, em que operadora e qual o plano seria mais vantajoso a ele? Justifique sua resposta através de cálculos

____

c) Acredita-se que se este aluno fosse do Ensino Médio seu perfil se enquadraria no plano de 50min. Qual a operadora deveria ser escolhida levando em conta fator economia, caso ultrapassasse o tempo da franquia em 13 min? Qual seria o valor pago no mês considerado? Qual a maior economia obtida relativa ao mesmo plano em outra operadora?

____

d) Quando o plano de 150 minutos for excedido, em quanto tempo as faturas da operadora TUM e TCHAU terão praticamente o mesmo valor cobrado no mês? Justifique

____

e) Qual é o modelo matemático que relaciona o valor a ser pago e os minutos extras usados, em qualquer uma das situações dispostas nos planos pós-pagos de qualquer operadora?

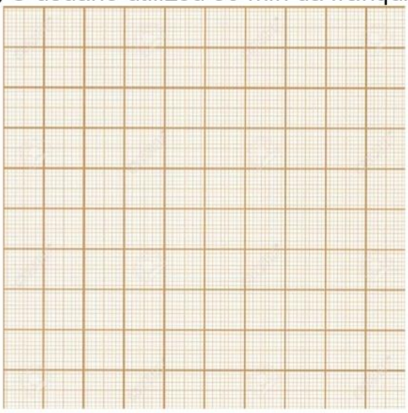
____

Fonte: Mello (2018, p. 108-110)

Figura 2: Continuação Problema Gerador

f) Escolhendo a operadora TUM e um plano de 50 min, construa um gráfico onde seja possível visualizar o valor da conta em reais ao final do mês, considerando as seguintes situações:

I) O usuário não utilizou o telefone,
II) O usuário utilizou 20 min da franquia,
III) O usuário utilizou 33 min da franquia,
IV) O usuário utilizou 50 min,
V) O usuário utilizou 60 min da franquia,
VI) O usuário utilizou 70 min da franquia,
VII) O usuário utilizou 80 min da franquia.



g) Com relação ao gráfico construído no item (f) responda:

g_1) Qual é o de tempo de utilização em minutos em que não há variação do valor da conta?

____

g_2) O que acontece com o valor da conta, quando o estudante passa a consumir mais do que a franquia estabelecida em min?

____

g_3) É possível traçar uma linha por esses pontos obtidos no gráfico? Justifique sua resposta matematicamente

____

g_4) Se é possível ligar esses pontos através de uma linha, é necessário que se faça alguma adequação no enunciado do problema? Justifique

____

g_5) Conforme o gráfico, como pode variar o valor da conta a ser paga ao final de cada mês?

____

Observações quanto a resolução:

____
____

Fonte: Mello (2018, p. 108-110).

A elaboração do problema gerador foi sem dúvida a maior dificuldade encontrada para a aplicação da metodologia. O que não foi possível abordar no problema gerador foi desenvolvido a partir de problemas auxiliares propostos pelo professor no 3° momento da proposta.

Posteriormente, foi possível observar que a elaboração assertiva desse problema foi um dos pontos positivos da proposta, uma vez que possibilitou o bom desenvolvimento da metodologia a partir de um problema que pode servir como um protótipo inicial para possíveis interessados na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas.

A proposta foi planejada para ser desenvolvida em 6 horas/aula de 45 min cada uma, conforme quadro abaixo:

Quadro 2. Planejamento da proposta de aplicação, distribuição tempo para cada momento

1 semana + 2 semana = 6 horas/aula			
1° Momento	**2° Momento**	**3° Momento**	**4° Momento**
2 aulas	**1,5 aula**	**1 aula**	**1,5 aula**

Fonte: Mello (2018, p. 61)

Antes mesmo da intervenção a pesquisadora organizou os grupos de trabalho fazendo uso da lista de chamada para otimizar o tempo da aplicação da proposta. Dividiu a turma em oito grupos (três grupos com seis alunos e cinco grupos com cinco alunos) usando a sistemática de ordem, que também possibilitou a mesclar os alunos de diferentes níveis de aprendizagem.

No **1° Momento:** Leitura e Interpretação - Acompanhando o desenvolvimento dos grupos, percebeu-se que todos conseguiram realizar a proposta sem dificuldade, exceto um dos grupos, que acabou recebendo então, maior apoio para que pudessem superar as dificuldades apresentadas.

O fator tempo foi o grande limitante a todos, houve a necessidade de ampliação para o desenvolvimento das atividades propostas no 1° momento, sendo este expandido dentro das possibilidades consideradas pela professora pesquisadora.

A maioria dos alunos demonstrou interesse sobre o problema gerador, lendo com muita atenção, tentando compreender e contribuir com seu grupo durante a resolução. Tal fato "saltou aos olhos" da professora pesquisadora, pois a postura dos alunos diante da proposta foi muito boa, uma vez que eles assumiram o protagonismo na resolução do problema, apesar de, no início da atividade, terem tentado por várias vezes questionar a professora em busca da resposta. Mas, com a ausência de uma devolutiva nesse sentido, os integrantes da turma se deram conta de que o trabalho “árduo” de entender e formalizar as respostas caberia a eles, e assim fizeram-no. A leitura, interpretação e resolução do problema fazem do 1º Momento etapa fundamental, que atrelada ao exposto, necessitou de uma ampliação no tempo previamente estabelecido no planejamento para sua efetiva conclusão.

Na realização do **2° Momento:** Demonstração da Resolução do Problema em Grupo - a professora organizou os “grupos” de carteiras em forma de meia lua, antes da chegada dos alunos em sala (sempre tentando otimizar o tempo). Tal organização espacial possibilitou que todos os alunos estivessem voltados para o local onde seriam expostas as resoluções, sendo também uma maneira pensada de evitar conversas, preocupação da professora pesquisadora até aquele momento, e reflexo talvez de sua formação mais tradicional, que entende a atividade em grupo como uma preocupação, pois as interferências podem atrapalhar o processo de aprendizagem e afastar a turma do objetivo estabelecido para aula. O relato desse receio revelou também que a postura da professora pesquisadora foi mudando de forma bem gradativa.

Chegada a hora de expor aos colegas e à professora a resolução realizada e a resposta encontrada para a resolução do problema apresentado, pode-se constatar que a organização do procedimento adotado pelos grupos, bem como a escrita matemática foram satisfatórias.

Nesta forma de exposição da resolução do problema por parte dos alunos, a professora pesquisadora não focou o olhar nos erros, uma vez que os utilizou para mostrar alguns apontamentos importantes do processo: onde a leitura deveria ter sido mais efetiva; que todo desenvolvimento estaria correto, porém por falha de cálculo a resposta final ficou errada; ou ainda que todo desenvolvimento estava correto, porém a interpretação foi equivocada. Enfim, todo desenvolvimento estabelecido pelos alunos foi considerado para reflexão e aprendizado, o que de acordo com Pavanello e Nogueira (2006, p. 36) é altamente produtivo:

> “Se os erros forem encarados com naturalidade e racionalmente tratados, terão assim importância pedagógica, deixando de apenas serem assinalados e passando a compor o processo avaliativo, sendo objetos de uma análise específica do professor com o estudante”.

No planejamento do 2° Momento cada grupo deveria escrever a resolução do problema gerador na lousa e, em seguida, explicar aos colegas. Percebendo-se que não haveria tempo hábil se mantido esse formato, houve a necessidade de se pensar em algo viável diante da realidade encontrada. A solução foi a organização das respostas dos grupos utilizando recursos tecnológicos. Dessa forma, a resolução feita na folha pelos grupos, foi fotografada e organizada pela professora, utilizando a projeção em slides, para possibilitar aos participantes de cada grupo, explicação, argumentação e discussão da sua resolução, e ainda a garantia da agilidade no processo.

A participação dos alunos foi bem satisfatória nesse momento, visto que explanavam a interpretação do grupo, diante de cada pergunta do problema, demonstrando o raciocínio usado na resposta apresentada naquele momento. Quando questionados, sendo levados a “defender” a sua resposta, conseguiam argumentar considerando o enunciado e o que os levou a formalizar a resposta da forma construída. Sempre que necessário foram feitas intervenções pela professora pesquisadora.

No **3° Momento** - Apresentação formal do conteúdo - o conteúdo de Função Afim foi explicado pela professora pesquisadora na lousa através de aula expositiva dialogada. Para o professor é um momento confortável, porém a metodologia exige que o problema gerador seja revisitado o tempo todo, sendo retomado para a explicação do conteúdo.

> Na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas o problema é o ponto de partida e, na sala de aula através da resolução de problemas, os alunos devem fazer conexões entre diferentes ramos da Matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 81).

A elaboração do problema gerador possibilitou desenvolver a maior parte do conteúdo de Função Afim, facilitando o desenvolvimento da aula expositiva a partir de sua resolução.

> Reitera-se que nesta metodologia, os problemas são propostos aos alunos antes de lhes ter sido apresentado, formalmente o conteúdo matemático necessário ou mais apropriado à sua resolução que, de acordo com o programa da disciplina para a série atendida, é pretendido pelo professor (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 85).

A aula expositiva dialogada, desenvolvida no 3° momento foi mais uma oportunidade para os alunos compreenderem o problema. Para dar conta de explicar todo conteúdo de Função Afim, a professora utilizou problemas auxiliares, uma vez que o problema gerador havia sido totalmente explorado e ainda restavam tópicos do conteúdo a serem abordados.

E, por fim no **4° Momento:** Proposição de Novos Problemas - da intervenção, houve a proposição das atividades complementares (elaboradas em sua maioria pela professora pesquisadora). Estas se apresentam como mais uma possibilidade de verificar se houve apropriação do conhecimento, aprendizagem em relação à função afim e se houve o reconhecimento da função em diferentes contextos, estabelecendo uma forma de construir conhecimento através da resolução de problemas.

No planejamento, estava prevista a execução das atividades complementares em sala e de forma individual, entretanto, devido as adequações do tempo no desenvolvimento do 1° e 2° momentos, houve a necessidade de se rever o 4° momento, sendo direcionada a resolução individual das atividades complementares para casa e com prazo de entrega agendando para uma data específica, que contara também com o tramite da correção.

A correção das atividades complementares foi mais um dos instrumentos utilizados para verificação de como se deu a aprendizagem dos alunos.

Finalizada mais essa etapa, percebeu-se que mesmo diante de um planejamento bem elaborado, houve necessidade de adequações no formato da proposta planejada em várias situações, sendo este o papel do professor:

> O professor assume o papel de investigador, de esclarecedor, de organizador de experiências significativas da aprendizagem. Seu compromisso é o de agir refletidamente, criando e recriando alternativas pedagógicas adequadas a partir da melhor observação do conhecimento de cada um dos alunos, sem perder a observação do conjunto e promovendo sempre ações interativas (HOFFMANN, 2014, p. 20).

Tal flexibilização se deu principalmente com relação ao tempo necessário para desenvolvimento de cada momento, mas embora tenham acontecido essas adequações da duração de cada momento, não houve extrapolação do tempo total estabelecido (6 horas/aula), evitando o comprometimento da intervenção e o desenvolvimento do planejamento das aulas da turma.

Partindo da análise apresentada, para intervenções futuras sugerimos a adequação do planejamento para a aplicação desse problema gerador da seguinte forma:

Quadro 3. Adequação da distribuição de tempo para cada momento

7 horas/aula			
1° Momento	**2° Momento**	**3° Momento**	**4° Momento**
3 aulas	**2 aulas**	**1 aula**	**1 aula**

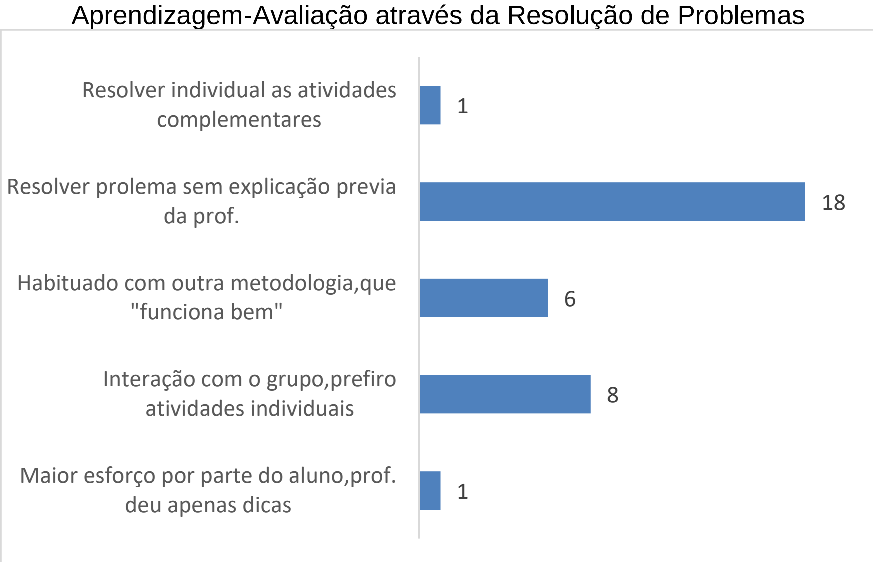
Fonte: A autora (2021).

Permeando esses quatro momentos se deu a avaliação dos alunos, facilitada pela utilização da ficha de avaliação e observações feitas no diário de campo, estabelecendo a concomitância Ensino-Aprendizagem-Avaliação necessária ao desenvolvimento apropriado da metodologia em questão.

Percepção dos Alunos quanto às Aulas de Função Afim a partir da Metodologia de Ensino- Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas

A maioria dos alunos (83%) não haviam tido uma experiência de aula com a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas e, ao serem expostos a essa experiência com o conteúdo de Função Afim, declararam apresentar alguma dificuldade.

Gráfico 1: Tipo de Dificuldade Apresentada pelos Alunos nas aulas com Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas



Fonte: Mello (2018, p. 94)

Foi possível perceber muita dificuldade durante a exposição dos envolvidos no processo a algo novo, uma certa resistência à mudança. Isso ficou evidente, pois em vários instantes do desenvolvimento da proposta com a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas foram destacadas dificuldades que dizem respeito às quebras de rotina, às mudanças no desenvolvimento das aulas:

- Resolução de um problema sem explicação prévia do professor; (1º momento);
- Proposta de um trabalho em grupo (em que o individual é mais comum) e a interação entre seus componentes trará um melhor resultado; (1º, 2º momentos);
- Maior empenho e dedicação por parte dos alunos para desenvolver as atividades propostas. (1º, 2º, 3º e 4º momentos);

- Alguns alunos por sua vez, deixam claro que estão satisfeitos com o método de ensino, que são as aulas expositivas dialogadas, e preferem evitar situações que possibilitem "sair da zona de conforto".

Conforme Mello (2018) a metodologia proposta requer mais esforço do aluno, interação entre os componentes do grupo, modificação de "velhos" hábitos para que a interpretação e a resolução do problema se concretizem. Isso pode causar estranheza e até uma certa resistência por parte dos alunos habituados ao papel protagonista do professor nas aulas.

Onuchic e Allevato (2011) pontuam que a Metodologia de Ensino- Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas exige do professor e dos alunos novas posturas e atitudes nos trabalhos em sala de aula. Aos alunos é transferida a maior responsabilidade pela aprendizagem e eles por sua vez devem assumir essa responsabilidade.

Os apontamentos realizados pelos alunos diante das aulas utilizando a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas confirma as considerações referenciadas:

AL2: *"Esse método é um pouco diferente daquele que a professora usa na sala de aula. Começou um pouco complicado, mas depois fui entendendo".*

AL22: *"As aulas foram legais e diferentes, no começo foi difícil mais depois logo fui aprendendo".*

AL25: *"Pra mim foi legal, mais difícil no começo, depois ficou mais fácil".*

AL28: *"Que foi muito boa, fez com que conseguimos resolver uma avaliação sem sabermos só com o que a gente conhecia e deu super certo".*

AL31: *"Foi um método de aprendizado muito diferente de todos, por isso achei difícil no começo, mas depois fui no embalo".*

Praticamente em todos os comentários, percebe-se que com o desenvolvimento da proposta, a dificuldade inicial vai sendo amenizada, o aluno vai se familiarizando com a metodologia, vão se rompendo as barreiras, o entendimento ganha espaço e o conhecimento vai sendo construído e a nova proposição se torna aceita.

Conforme a metodologia vai se desenvolvendo, o que era inicialmente difícil tornou-se fácil, o complexo passa a ser simples e o diferente se torna atrativo. Isso pode ser evidenciado pelos excertos dos alunos:

AL3: *“Foi boa, pois nos desafiou a fazer algo diferente”.*

AL7: *“Nunca tive uma aula deste gênero, mas achei bem efetiva”.*

AL8: *“Seria algo ativo interação maior que a de costume, em vista de como foi, foi muito divertido em razão de ser algo novo”.*

AL14: *“Criativas, pois é um método novo que quase nunca os professores praticam”.*

AL19: *“Foi uma atividade diferente, mas eu gostei porque aprendemos coisas novas”.*

A metodologia consegue envolver aluno-colega-professor em todo processo, a resolução do problema deixa de ser responsabilidade exclusiva do professor, passando a ser responsabilidade partilhada, um compromisso de todos os envolvidos. Quando há um esforço coletivo, reconhece-se o do valor do trabalho em equipe.

AL12: *“Foi importante e muito interessante, caso fosse sozinho não teria conseguido tudo, mas sendo em grupo foi bom, pois todos se ajudaram”.*

AL16: *“Eu gostei do trabalho em grupo e o modo de resolver os problemas”.*

As motivações proporcionadas pela Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas resultam em uma mudança significativa de postura do professor e do aluno.

AL26: *“Percebi que nos fez pensar mais”.*

AL21: *“Achei a aula muito boa, pois a professora fez com que todos nós participássemos, e dando a explicação sobre cada exercício”.*

Em todo processo, exige-se mais do aluno, pois este precisa assumir o compromisso de sua aprendizagem, passando a ter maior autonomia sobre suas ações. Já os professores habituados a uma determinada metodologia não conseguirão alterá-la, transformando sua postura com cinco ou seis aulas “diferentes”.

Essa mudança é algo muito difícil de ser efetivada, pois quando há o hábito, não é um episódio isolado que promoverá a transformação. O processo é complexo, afinal os envolvidos no processo, professores e alunos, agem como se estivessem mecanicamente programados. Em decorrência disso, há certo estranhamento quando os envolvidos se submetem e são submetidos a uma nova metodologia de Ensino, fazendo com que relutem em alguns casos, até que haja a acomodação e percepção plena de seu funcionamento. No entanto, acredita-se que essa harmonia somente ocorrerá se sua incidência do trabalho for contínua ou até ininterrupta.

AL18: *“Não entendi muita coisa por conta da falta de explicação, porém consegui desenvolver os exercícios muito bem”.*

Se não houvesse entendido, não conseguiria desenvolver os exercícios propostos. O hábito da explicação, fez com que não percebesse que houve aprendizado.

AL27: *“Achei bem bacana, porém ela deveria ter ajudado um pouco mais”.*

Mesmo que a aula tenha sido interessante, tenha conseguido desenvolver o problema proposto, não está satisfeito. Sua referência de aula ainda está muito centrada na figura do professor, revelando-se inseguro por não o ter a sua disposição, auxiliando-o a todo o momento.

> […] *Resolução de Problemas desenvolve poder matemático nos alunos, capacidade de pensar matematicamente, utilizar diferentes e convenientes estratégias em diferentes problemas, permitindo aumentar a compreensão dos conteúdos e conceitos matemáticos.
> *Resolução de problemas desenvolve a crença de que os alunos são capazes de fazer matemática e de que a Matemática faz sentido; a confiança e a autoestima dos estudantes aumentam […] (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 82).

A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas possibilita preparar o aluno para fugir da dependência em relação ao professor, fazendo com que seja confiante, responsável e autônomo quanto a sua aprendizagem.

A responsabilidade do professor diante da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas não é menor, pois recai inicialmente sobre a preparação do problema a ser aplicado, na elaboração do plano de aula e não se esgota concluída essa etapa. É de extrema importância no desenrolar de todo o processo, sendo aquele que, atento a tudo, deve estimular a participação, instigar a curiosidade, aguçar o raciocínio, promovendo o desenvolvimento individual de cada um de seus alunos.

Para os alunos é evidente que o entendimento do conteúdo está relacionado com uma aula expositiva dialogada e, quando ocorre uma aula diferente, logo alegam não entender o conteúdo, mesmo que consigam desenvolver outras atividades semelhantes, ou interpretar situações distintas, como conseguimos perceber através da correção das atividades complementares propostas. Convém destacar, que o formato de aula consagrado que tem o foco no processo expositor e não mediador do conhecimento é ainda algo muito latente no ambiente escolar e tido como um hábito ainda muito forte.

AL37: *“As aulas foram planejadas muito bem, porém faltou tempo e o modo como foi aplicado os exercícios fez com que muitos não entendessem o conteúdo”.*

Como essa foi a primeira intervenção na turma escolhida para o desenvolvimento das atividades tendo por base a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas e pelo fato de que também se configurou em uma das primeiras vezes a que foram submetidos a uma diferente metodologia de ensino nas aulas de matemática considera-se a postura dos alunos bastante positiva, diante de tudo que foi exposto, pois mesmo que ainda estivessem muito presos aos seus hábitos tentaram desenvolver tudo que lhes foi proposto.

Considerações Finais

Tomando como base os dados coletados nessa pesquisa, foi possível analisar as percepções dos educandos quanto às aulas e conteúdo diante da aplicação da proposta de aulas de Matemática baseada na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas, sendo verificado que o desenvolvimento do conteúdo de Função Afim foi efetivo a partir da metodologia aplicada na resolução dos problemas propostos (problema gerador e atividades complementares). Apesar de certa resistência quanto à inserção de novas metodologias, a resposta dos alunos à intervenção, de maneira geral, foi positiva enquanto resultado final.

Apesar das expectativas iniciais da professora pesquisadora (que previa dificuldade dos alunos em desenvolver o conteúdo a partir da Metodologia de Ensino Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas e se apresentava receosa em aplicar uma metodologia diferente da que estava acostumada em uma turma numerosa), o trabalho desenvolveu-se de forma surpreendente, propiciando novos olhares sobre a inclusão de inovação a partir de Metodologias diferenciadas para dentro da sala de aula.

Percebeu-se que o enfrentamento de situações adversas trouxe resultados satisfatórios e animadores, uma vez que o desenvolvimento da proposta se delineou proporcionando uma mudança visível na postura dos alunos e da professora. Os alunos, em sua maioria, se debruçaram sobre o problema gerador para obter respostas e buscaram auxílio necessário com o grupo, conquistando confiança e autonomia jamais imaginadas. Já a professora pesquisadora possibilitou essa mudança, assumindo a postura de não ser a protagonista da aula, mas sim a “condutora” de todo processo, possibilitando a turma alcançar autonomia, criticidade e comprometimento na aprendizagem.

O resultado positivo não significa que todas as aulas devam ser baseadas em metodologias diferenciadas, já que não há tempo hábil para isso com a atual dinâmica de organização curricular, mas é necessário que metodologias de ensino de matemática diferenciadas tenham espaço nas aulas, mesmo que esporadicamente. Cabe aqui ressaltar que a elaboração do “problema gerador” foi também um grande norteador dessa pesquisa, pois este pode servir como uma opção ou um direcionador dos docentes que desejarem aplicar a metodologia, e que muitas vezes por falta de tempo acabam desistindo antes mesmo de começar.

Espera-se que esta pesquisa encoraje professores a introduzir a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas em suas aulas, uma vez que os resultados obtidos foram surpreendentes. Como a metodologia proposta foi aplicada em apenas um conteúdo específico, não há dados suficientes para saber qual seria a percepção dos alunos quando submetidos com maior frequência a essa metodologia ou ainda, que outras metodologias diferentes poderiam ser utilizadas. Esses questionamentos são importantes e podem ser propulsores de novas ações de pesquisa.

Referências

CORÁ, J. R. **Análise da inserção da resolução de problemas identificada em livros didáticos de matemática do ensino fundamental.** 144f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco, 2019.

GOMES, R. *et al.* **Organização, processamento, análise e interpretação de dados o desafio da triangulação.** In: MINAYO, M. C. S.; ASSIS, S. G.; SOUZA, E. R. (org.). Avaliação por Triangulação de Métodos: abordagem de programas sociais. Rio de Janeiro: Fiocruz, 2010.

GRUPO DE TRABALHO E ESTUDOS EM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - GTERP. Disponível em: <http://igce.rc.unesp.br/#!/departamentos/educacao-matematica/gterp/item-2/>. Acesso em: 09 ago. 2021.

HOFFMANN, J. **Avaliar para promover:** as setas no caminho. 15. ed. Porto Alegre: Mediação, 2014.

MELLO, A. L. de. **Resolução de Problemas e Avaliação Conceitual: Uma Experiência no Ensino de Função Afim.** 123f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco, 2018. Disponível em: <http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/3343>.

ONUCHIC, L. R. *et. al.* **Resolução de Problemas:** teoria e prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de problemas: caminhos avanços e novas perspectivas, p. 73-98. In: **Boletim de Educação Matemática (BOLEMA),** v. 25, n. 41, dez., 2011. Universidade Estadual Paulista - Campus de Rio Claro. Ed. Comemorativa 25 anos.

PAVANELLO, R. M.; NOGUEIRA, C. M. I. Avaliação em Matemática: algumas considerações. **Estudos em Avaliação Educacional,** Revista Quadrimestral, Fundação Carlos Chagas, v. 17, n. 33, p. 29-41, jan./abr., 2006.

NOTAS

IDENTIFICAÇÂO DO TEXTO
O presente texto é um recorte de Resolução de problemas e avaliação conceitual: uma experiência no ensino de função afim, dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) apresentado na Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Campus Pato Branco, em 23 de maio de 2018, elaborada sob orientação da Professora Dra. Janecler Aparecida Amorin Colombo.

IDENTIFICAÇÃO DE AUTORIA
Adalgisa Loureiro de Mello. Mestre em Matemática pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Campus Pato Branco. Professora do Instituto Federal do Paraná (IFPR), Campus Palmas, Palmas, PR, Brasil.
E-mail: adalgisa.mello@ifpr.edu.br
https://orcid.org/0000-0003-3876-202X

Janecler Aparecida Amorin Colombo. Doutora em Educação Científica e Tecnológica pela Universidade Federal de Santa Catarina. Professor Associado Nível 3. Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Campus Pato Branco, PR, Brasil.
E-mail: janecler@utfpr.edu.br
https://orcid.org/0000-0002-7729-9501

AGRADECIMENTOS
Não se aplica.

FINANCIAMENTO
Não se aplica.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Não se aplica.

EDITORES
Patricia Helena Mirandola Garcia, Eugenia Brunilda Opazo Uribe, Gerson dos Santos Farias.

HISTÓRICO
Recebido em: 29/08/2021 – Aprovado em: 08/11/2021 – Publicado em: 15/12/2021.

COMO CITAR
MELLO, A. L; COLOMBO, J. A. A. Ensino de Função Afim através da Resolução de Problemas: Uma Intervenção no Ensino Médio. **Revista ENSIN@ UFMS**, Três Lagoas, v. 2, número especial, p. 67-89. 2021.

ENSIN@ UFMS 2021

ISSN 2525-7056

EDUCAÇÃO FINANCEIRA A SERVIÇO DA CIDADANIA

FINANCIAL EDUCATION FOR CITIZENSHIP

João Paulo Attie[1]

Nilson Setsuo Ozawa[2]

Nadir Santos Freitas[3]

RESUMO: Neste artigo, apresentamos os resultados de uma pesquisa realizada com estudantes do ensino médio, que teve como objetivo identificar o conhecimento dos mesmos a respeito da Educação Financeira. O trabalho é fruto da participação de um dos autores no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), e teve como base teórica autores como Kistemann (2011), Skovsmose (2000), Barbosa (2004) e Bassanezi (2012), além de textos institucionais, tais como o relatório da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OECD, 2005), os Parâmetros Curriculares Nacionais, os PCN (BRASIL, 1997; 1999) e a Proposta Curricular estadual (SÃO PAULO, 2008). A pesquisa de cunho qualitativo, do tipo descritiva, de acordo com Gil (2002), teve como instrumento de coleta de dados um questionário, cujas perguntas foram elaboradas com base na contextualização e na modelagem. O instrumento foi aplicado a um grupo de sessenta e dois estudantes do segundo ano do Ensino Médio, de uma escola pública localizada no interior do Estado de São Paulo e os dados foram observados a partir da análise de conteúdo (BARDIN, 1997). Como resultados, podemos apontar a compreensão dos participantes a respeito de conteúdos básicos como juros e operações, mas um desconhecimento temerário em relação aos tipos de financiamento e ao comportamento da função exponencial, nos levando à conclusão da necessidade de maior presença da contextualização, da modelagem e da educação financeira no processo de ensino.

PALAVRAS-CHAVE: Educação Financeira. Modelagem Matemática. Ensino de Matemática.

ABSTRACT: In this article, we present the results of a survey carried out with high school students, which aimed to identify their knowledge about Financial Education. The work results from the participation of one of the authors in the Professional Master's Degree in Mathematics in a National Network (*Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional*, PROFMAT), and was theoretically based on authors such as Kistemann (2011), Skovsmose (2000), Barbosa (2004) and Bassanezi (2012), as well as institutional texts, such as the Organization for Economic Cooperation and Development report's (OECD, 2005), the National Curriculum Parameters, called PCN (BRASIL, 1997; 1999) and a District Curriculum Proposal (SÃO PAULO, 2008). The research, of qualitative nature, a descriptive type, according to Gil (2002), had as a data collection instrument a questionnaire, whose questions were elaborated based on contextualization and on modeling. The instrument was applied to a group of sixty-two second-year high school students from a public school located in the interior of the state of São Paulo, Brazil and the data were observed from the content analysis (BARDIN, 1997). As a result, we can point out the participants' understanding of basic contents such as interest and operations, but a reckless lack of knowledge regarding the types of financing and the behavior of the exponential function, leading us to the conclusion of the need for greater presence of contextualization, of modeling and financial education in the teaching process.

KEYWORDS: Financial Education. Mathematical Modeling. Mathematics Teaching.

---

[1] Universidade Federal de Sergipe. E-mail: jpattie@mat.ufs.br
https://orcid.org/0000-0001-8411-4168
[2] Rede Estadual de São Paulo. E-mail: niljap@yahoo.com.br
https://orcid.org/0000-0002-8343-1775
[3] Rede Estadual de Alagoas. E-mail: nadir.matematica@hotmail.com
https://orcid.org/0000-0001-9505-3356

Informações completas da obra no final do artigo

Introdução

Vivemos em um país com uma das maiores taxas de má distribuição de renda e desigualdade do mundo. Segundo o relatório do PNUD, o Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento Humano, publicado em 2019, o Brasil, entre 189 países, é o 2º país do mundo com maior concentração de renda do planeta, perdendo apenas para o Catar (ONU, 2019).

Consideramos que a superação desse quadro não se dará apenas pelo viés econômico, e depende essencialmente de uma educação voltada para a cidadania. Simultaneamente a esse contexto, o planeta atravessa o real perigo do esgotamento ambiental, devido à velocidade e intensidade do consumo (ONU, 2020). Dessa forma, concordamos que "a sociedade do século XXI não pode prescindir de discutir uma educação financeira, bem como significados em torno de ideias, que se embasam em práticas conscientes de consumo" (KISTEMANN, 2011, p. 30). Além disso, consideramos que alguns outros aspectos são fundamentais, como o planejamento financeiro, a tomada de decisões acerca das ações praticadas pelo indivíduo, enquanto cidadão e enquanto consumidor, quando almeja adquirir um produto no qual deverá ter conhecimento para não ser ludibriado, bem como, desenvolver hábitos que propiciem a arte de manejar criticamente os objetos matemáticos de cunho financeiro-econômicos.

Nesse contexto, o objetivo deste artigo é apresentar os resultados de uma pesquisa que foi realizada como parte no desenvolvimento da dissertação de um dos autores no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), e que teve como finalidade identificar o conhecimento de estudantes a respeito da educação financeira. O trabalho foi desenvolvido com um grupo de 62 estudantes do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública da rede estadual de São Paulo, abordando os conceitos de matemática financeira que estivessem atrelados a alguns aspectos pertinentes para a construção da educação financeira.

Entre os conceitos principais que fundamentaram o trabalho, aparecem, além das noções principais em relação à Educação Financeira, também a necessidade da contextualização no ensino de matemática, com a consequente demanda da utilização da modelagem, em autores como Kistemann (2011), Skovsmose (2000), Barbosa (2004) e

Bassanezi (2012), entre outros. Além dessas fontes, procuramos elementos em alguns textos institucionais, tais como o relatório da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OECD, 2005), os Parâmetros Curriculares Nacionais, os PCN (BRASIL, 1997; 1999) e a Proposta curricular estadual (SÃO PAULO, 2008).

À primeira vista, podemos apontar alguns resultados importantes, tais como a compreensão do conceito básico de juros, aliado ao desconhecimento do tipo de juro aplicado em cada caso, bem como da relação existente entre a taxa de juros e algum tipo de função. O processo de tomada de decisão dos estudantes, ao longo do trabalho, foi sendo refinado e contou com o acréscimo de alguns elementos tais como a análise e a comparação de benefícios e de prejuízos em cada decisão.

O PROFMAT

O Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), foi o primeiro curso de pós-graduação *stricto sensu*, no Brasil, oferecido no formato semipresencial. Além disso, ainda se apresenta como o primeiro curso de mestrado profissional oferecido em rede nacional.

O programa, criado em 2011, surgiu a partir de uma demanda legal, a partir das políticas públicas brasileira, já que o PROFMAT

> Vem ao encontro do Plano Nacional de Educação (PNE), Lei Nº 13.005, de 25 junho de 2014, que coloca em sua Meta 16: formar, em nível de pós-graduação, 50% (cinquenta por cento) dos professores da Educação Básica, até o último ano de vigência deste PNE e garantir a todos (as) os (as) profissionais da Educação Básica formação continuada em sua área de atuação, considerando as necessidades, demandas e contextualizações dos sistemas de ensino. Além disso, o PROFMAT também atende as metas 14, 17 e 18 que tratam, respectivamente, de elevar o número de matrículas na pós-graduação *stricto sensu*, da valorização do professor e do plano de carreira (SBM, 2017, p. 04).

Fazem parte do programa uma gama de Instituições de Ensino Superior, vinculadas entre si pela Universidade Aberta do Brasil (UAB) e pela Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior (CAPES). A coordenação do PROFMAT é exercida pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), contando com o apoio do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA).

O público-alvo específico do programa engloba o conjunto dos professores de Matemática em exercício na Educação Básica, especialmente de escolas públicas, que pretendem aprimorar sua formação profissional, e o destaque maior é dado ao domínio do conteúdo matemático. Dessa forma, o programa tem como objetivo "proporcionar formação matemática aprofundada e relevante para a docência na Educação Básica, visando dar ao egresso qualificação certificada para o exercício da profissão de professor de Matemática" (SBM, 2017, p. 03).

Segundo dados da SBM, de 2017, o Programa foi recomendado pela CAPES, reconhecido pelo Conselho Nacional de Educação (CNE) e validado pelo Ministério da Educação (MEC) com nota 5 (nota máxima para programas de mestrado), tendo, até aquele ano, ofertado mais de 10.000 vagas e apresentando uma quantidade de cerca de 3.000 alunos formados.

Educação financeira, contextualização e modelagem

Consideramos importante ressaltar que as expressões "Educação Financeira" e "Matemática Financeira" não devem ser tratadas como sinônimos, pois, enquanto a primeira expressão deve se pautar pela "compreensão, capacidade, comportamentos, atitudes e valores que permitam aos alunos tomar decisões financeiras seguras e efetivas" (MAUÉS, 2011, p. 03), a segunda pode ser descrita como um dos ramos da Matemática Aplicada que estuda o comportamento das finanças, procurando modelar e quantificar transações que envolvam ou resultem em valor monetário. A despeito de serem conceitos diferentes, é evidente que, em nosso trabalho, ponderamos que "a compreensão de elementos da Matemática Financeira é essencial para que se tenha uma boa Educação Financeira" (OZAWA, 2013, p. 48).

Nesse panorama, poderíamos apontar que a importância da Educação Financeira no processo de ensino de matemática surge na intersecção entre a necessidade de uma tomada de decisão e nos conteúdos pertencentes à matemática financeira.

Nesse contexto, consideramos a necessidade de que a Educação Financeira faça parte da formação de um cidadão crítico, autônomo e consciente de seus deveres e direitos, pois

> a Educação Financeira não consiste somente em aprender a economizar, cortar gastos, poupar e acumular dinheiro, é muito mais que isso. É buscar uma melhor qualidade de vida tanto hoje quanto no futuro, proporcionando a segurança material necessária para obter uma garantia para eventuais imprevistos (TEIXEIRA, 2015, p. 13).

Segundo a Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico:

> A educação financeira é o processo pelo qual consumidores e investidores melhoram sua compreensão sobre conceitos e produtos financeiros e, por meio de informação, instrução e orientação objetiva, desenvolvem habilidades e adquirem confiança para se tornarem mais conscientes das oportunidades e dos riscos financeiros, para fazerem escolhas bem-informadas e saberem onde procurar ajuda ao adotarem outras ações efetivas que melhorem o seu bem-estar e a sua proteção (OECD, 2009, p. 02).

Nossa defesa, portanto, é da inserção da Educação Financeira no processo de ensino, em uma abordagem que não se limite ao estímulo de "poupar para consumir" (OLIVEIRA, 2017, p. 112), mas com o objetivo de proporcionar reflexões aos alunos, de forma que o seu processo de tomada de decisão seja feito de forma consciente. Neste panorama, o presente trabalho buscou oferecer aos participantes uma situação que pudesse fazer parte de seu contexto cotidiano, na qual fosse exigida uma decisão dos mesmos. A partir das respostas obtidas, pudemos reelaborar a situação em sala de aula, buscando um modelo matemático que pudesse responder às eventuais dúvidas~~.~~

Em relação à contextualização, seguimos o conceito apresentado por Skovsmose (2000), segundo o qual existem três tipos de contextos possíveis para as atividades escolares: a Matemática pura, quando a situação pertence integralmente à matemática acadêmica; o contexto da semi-realidade, que ocorre quando a situação envolve elementos do cotidiano ou do mundo físico, mas tratando de situações fictícias e, por fim, a realidade, que acontece quando se descrevem situações que efetivamente ocorrem na vida diária e/ou científica. Assim, existem determinadas situações, no cotidiano do aluno, em que é possível utilizar o conhecimento da Matemática, e esses cálculos matemáticos, quando assim utilizados, na maioria dos casos servem para validar de forma numérica certas situações. Em nosso caso, nos aproveitamos de uma dessas situações reais que precisam de cálculos matemáticos e que, portanto, envolvem de maneira implícita ou explícita algum tipo de conceito matemático.

Ainda que vários autores defendam a utilização da contextualização no ensino de matemática, argumentando pela necessidade daquela ensinada no ambiente escolar incluir situações com referências na realidade, tais como D'Ambrosio (2001), Bassanezi (2012), e Machado (1990), além dos próprios documentos oficias: Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e Base Nacional Comum Curricular (BNCC), consideramos o fato de que a disciplina talvez seja a única que pode prescindir da utilização dos fenômenos do mundo físico, pois:

> Por mais que o desenvolvimento e a utilidade da matemática estejam fortemente vinculados às demandas da realidade, ela é a única disciplina em que o professor

> pode, caso assim o deseje (e essa opção pode ou não ser consciente e intencional), explanar seus conteúdos sem qualquer conexão com o mundo sensível. Nas demais disciplinas, o aluno possui algum entendimento precedente acerca dos assuntos abordados. Na matemática escolar ... esse entendimento não é compulsório ... a disciplina ainda se conserva como sendo a única em que aparece a possibilidade de não vinculação com o mundo (ATTIE, 2013, p. 24-25).

A utilização de contextos reais no ensino demanda a busca de modelos matemáticos que possam explicar quantitativamente aquela situação. Desta forma, concordamos que

> A modelagem matemática é simplesmente uma estratégia utilizada para obtermos alguma compreensão acerca de determinadas situações reais e assim, no processo de reflexão sobre a porção da realidade, devemos selecionar apenas as variáveis consideradas essenciais para, depois disso, procurarmos uma formalização que explique as relações que envolvem essas variáveis (BASSANEZI, 2012, p. 10-11).

Considerando que um modelo matemático é um conjunto consistente de equações ou estruturas matemáticas, elaborado para corresponder a algum fenômeno, que pode ser físico, biológico, social, psicológico ou conceitual, a situação descrita aos alunos na pesquisa envolve a compra de um carro, e o modelo elaborado após aplicação dos questionários buscou apresentar procedimentos possíveis, utilizando equações simples e conceitos básicos de Matemática Financeira.

Documentos públicos: PCN e BNCC

A partir da implementação das Leis de Diretrizes e Bases da Educação, em 1996, foram introduzidos, em 1998, os Parâmetros Curriculares Nacionais, conhecidos como PCN, com o propósito de orientar a introdução de um currículo mínimo comum a todas as escolas. De acordo com o Ministério da Educação, os PCN são

> Um documento introdutório que se propõe a apresentar as linhas norteadoras que constituem uma proposta de reorientação curricular oferecida pelo MEC às secretarias de educação, às escolas, às instituições de formação de professores, aos institutos de pesquisa, editoras e a todas as pessoas interessadas em educação no Brasil (BRASIL, 1998, p. 09).

No caso particular da Matemática, os parâmetros específicos da área (BRASIL, 1997) apresentam uma forte defesa de um ensino em que a Matemática fosse, sempre que possível, contextualizada, incentivando a utilização de atividades em que o conhecimento matemático pudesse ser utilizado de forma a ajudar a resolver problemas do cotidiano.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM - BRASIL, 1999) apresentam competências e habilidades que foram escolhidas para o desenvolvimento deste trabalho, a partir de propostas como ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões e outras), identificar o problema (compreender enunciados, formular questões, entre outras dificuldades), procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema, interpretar e criticar resultados numa situação concreta e aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, entre outras (BRASIL, 1999).

Em relação à Educação Financeira, especificamente, o Decreto-lei executivo 7397 (BRASIL, 2010), sancionado em 22 de dezembro de 2010, passa a considerar esse conteúdo como parte do currículo escolar, tendo como objetivo orientar o aluno a controlar melhor suas finanças no futuro, melhorando seu padrão de qualidade de vida. A necessidade do ensino de Educação Financeira é também atestada por Negri (2010), que mostra essa importância em conformidade tanto com os PCN, quanto com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, a LDB (BRASIL, 1996).

Em relação a outros documentos públicos, consideramos necessário esclarecer que, como a pesquisa foi realizada antes da publicação da BNCC (BRASIL, 2017), esse texto não faz parte da fundamentação teórica. Mesmo assim, incluímos especificamente neste artigo alguns aspectos do documento, pois a BNCC estabelece a Educação Financeira e a Educação para o Consumo como habilidades obrigatórias entre os componentes curriculares. Assim, neste documento normativo, entre as habilidades e competências esperadas, aparece a necessidade de “resolver e elaborar problemas, envolvendo cálculo de porcentagens, incluindo o uso de tecnologias digitais” (BRASIL, 2017. p. 311).

Metodologia

O trabalho foi desenvolvido em três etapas, sendo que o primeiro passo abrangeu a realização das pesquisas bibliográficas para a fundamentação teórica. O segundo passo, foi a realização de uma pesquisa de caráter qualitativo, por meio de um estudo de campo, onde aplicamos um questionário a um grupo de 62 estudantes do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública da rede estadual de São Paulo. A partir desse panorama, a pesquisa pode ser apontada como sendo do tipo descritiva, pois tivemos como "objetivo primordial a descrição das características de determinada população" (GIL, 2002, p. 42).

Pela natureza do fenômeno estudado e pelas particularidades da abordagem realizada, optamos por uma análise qualitativa de dados, a partir do conteúdo, de acordo com Bardin (1977). A análise de conteúdo é, segundo a autora "um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando a obter, por procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens" (BARDIN, 1977, p. 42).

Antes da elaboração do questionário, foram colhidas sugestões dos alunos em relação ao assunto, tendo sido escolhido, a partir daí, o tema “compra de um automóvel”. Procuramos seguir, no modelo matemático desenvolvido e apresentado aos estudantes no questionário, as orientações da Proposta Curricular do Estado de São Paulo para o Ciclo II e para o Ensino Médio, que abordam temas como as sequências numéricas e progressão aritmética (SÃO PAULO, 2008).

Por fim, o terceiro passo consistiu na análise dos dados obtidos na coleta, gerando a produção textual que buscou confrontar a teoria estudada com os dados obtidos. O questionário compreendia apenas duas questões, uma relacionada às possibilidades para a compra de um automóvel e outra solicitando a justificativa para a alternativa escolhida.

Um dado importante a considerar é o de que os alunos não haviam tido contato em nenhum momento, dentro da disciplina curricular de Matemática, o tópico Matemática Financeira, sugerido no primeiro ano do ensino médio. Outro fato observado durante a pesquisa é que a maioria dos alunos utilizavam calculadora, subtraindo o valor do montante pelo capital, mostrando domínio no conhecimento deste material.

Em relação à faixa etária, a maioria dos alunos, 32 deles (51,61%) tinha 16 anos de idade na época da aplicação do questionário, enquanto 22 estudantes (35,48%) tinham 15 anos de idade e 8 alunos (12,91%) tinham 17 anos de idade. A pesquisa foi realizada no ano de 2012, em uma escola no centro da cidade de Mogi das Cruzes, e, em relação à participação dos estudantes, foram apresentados Termos de Consentimento Livre e Esclarecido, que retornaram com a anuência dos responsáveis. Os participantes foram aqueles que mostraram interesse em se aprofundar e ter conhecimento da Matemática Financeira, com o objetivo declarado de planejar e comprar um carro.

Resultados

Em relação ao questionário em si, foram apresentadas algumas opções em relação à compra de um automóvel e, foi solicitado aos estudantes que escolhessem uma alternativa e justificassem sua opção. A situação apresentada era a de que o aluno dispusesse de R$ 10.000,00, e diante da oportunidade da compra de um carro no valor de R$ 30.000,00, qual opção de compra escolheria, entre as seguintes:

> a) R$ 10.000,00 de entrada e saldo em 36 meses com valor da prestação de R$ 761,21;
> b) R$ 10.000,00 de entrada e saldo em 48 meses com valor de prestação de R$ 691,32;
> c) R$ 10.000,00 de entrada e saldo em 60 meses com valor de prestação de R$ 532,79;
> d) Sem entrada, saldo em 60 meses, sem entrada com valor de prestação de R$ 795,50;
> e) Esperar e comprar à vista (OZAWA, 2013, p. 37).

Entre as respostas obtidas, houve um inequívoco predomínio pela opção “e”: esperar e comprar à vista, em um total de 42 respostas (67,74% do total), conforme podemos observar na Tabela 1. Entre as justificativas encontradas, a mais frequente foi a de que teriam um maior desconto em caso de pagamento à vista, desconsiderando, entretanto o tempo necessário para fazer uma economia de aproximadamente R$ 20.000,00.

Tabela 1: Dados envolvendo Financiamento

Opção escolhida	Quantidade de respostas	Porcentagem
Alternativa a	9	(14,52%)
Alternativa b	4	(6,45%)
Alternativa c	2	(1,61%)
Alternativa d	5	(8,06%)
Alternativa e	42	(67,74%)

Fonte: 2021, os autores.

Diante da análise das respostas destacadas na Tabela 1, relacionadas à escolha das alternativas, foi possível perceber uma prevalência por pagar um valor de entrada e com o saldo tendo o menor prazo, ainda que o valor da prestação fosse maior.

A partir dessas respostas, trabalhamos em sala de aula com conteúdo como progressões e funções, com o objetivo específico de modelar a situação apresentada e podermos chegar ao cálculo dos tipos e das taxas de juros cobradas em cada caso, especialmente relacionando as progressões aritméticas e geométricas aos juros simples e compostos. No trabalho em sala, foram feitas várias simulações com as situações apresentadas e foram debatidos aspectos como as vantagens e desvantagens de cada alternativa, sempre a partir da modelagem das opções. Assim, conseguimos utilizar a modelagem matemática como uma estratégia "para obtermos alguma compreensão acerca de determinadas situações reais" (BASSANEZI, 2012, p. 10), para então "procurarmos uma formalização que explique as relações que envolvem essas variáveis" (*idem*, p. 11).

Essa etapa, que durou cerca de um mês, foi caracterizada ao final pela compreensão dos estudantes a respeito da possibilidade de obter mais dados antes de fazer suas escolhas, a partir de afirmações feitas ao pesquisador. Como a alternativa "esperar e comprar à vista" havia sido a mais escolhida pelos estudantes, um dos elementos colocados em evidência nessa fase foi o tempo necessário para a economia do valor requerido, levando-se em conta um pecúlio do mesmo valor que as prestações dos itens a, b e c (já que a alternativa d não apresentava o valor da entrada), depositados em uma caderneta de poupança (OZAWA, 2013). Em todos os casos, ficou evidente que o tempo necessário seria menor que o período do financiamento, com a ressalva de que a retirada do carro só aconteceria após esse intervalo. Consideramos importante como resultado o fato de termos logrado avanços em relação à postura dos participantes, já que um dos objetivos da Educação Financeira é alcançar "compreensão, capacidade, comportamentos, atitudes e valores que permitam aos alunos tomar decisões financeiras seguras e efetivas” (MAUÉS, 2011, p. 03)

Entre os aspectos relevantes que aparecem em nossa análise dos dados, talvez o primeiro deles seja em relação ao processo de tomada de decisão dos participantes, que, em sua maioria, haviam optado por não fazer nenhum tipo de financiamento, admitindo alterar seu procedimento após a intervenção em sala. Em relação aos alunos que escolheram alguma alternativa que envolvesse empréstimo, os mesmos levaram em conta prioritariamente o prazo para o pagamento da dívida, sem considerar outros itens, como o valor da prestação ou com outros aspectos prejudiciais que pudessem surgir, como a depreciação do bem, ou as despesas com a manutenção do carro, por exemplo.

A análise nos permitiu verificar também que, apesar dos estudantes compreenderem o conceito de juros, não os relacionavam a funções e a progressões e, especialmente, não percebiam que o valor do juro aplicado se desenvolvia de forma exponencial, revelando um desconhecimento em relação aos tipos de juros existentes. Depois da intervenção realizada na sala de aula, itens importantes foram registrados pelos alunos, sendo referidos por estes como elementos que passaram a ter importância em sua decisão, como por exemplo, o tipo de juros, o valor das taxas cobradas e os benefícios e as perdas em relação ao tempo de retirada do carro, por exemplo.

Considerações finais

Ao iniciar este trabalho com estudantes do segundo ano do Ensino Médio, pudemos perceber a necessidade da contextualização e, consequentemente, da modelagem em um ensino de matemática voltado para a cidadania. A análise das respostas dos estudantes apontou alguns elementos que consideramos importantes tais como os aspectos aos quais já nos referimos, como o processo de tomada de decisão, a falta de relação entre juros e funções, por parte dos estudantes.

Consideramos, entretanto, que o resultado mais importante obtido com a realização deste trabalho foi exatamente a mudança entre os estudantes a respeito da necessidade de uma análise mais minuciosa antes de uma tomada de decisão como a da compra de um carro.

Por fim, gostaríamos de enfatizar nossa defesa da utilização da Educação Financeira no processo de ensino de matemática, compreendendo a mesma como a necessária intersecção entre dois elementos essenciais, a matemática financeira e o processo de tomada de decisões, configurando a promoção de elementos como a autonomia, a criticidade e, especialmente, a cidadania em nossos estudantes.

Referências

ATTIE, J. P. **Relações de Poder no processo de ensino e aprendizagem**. 162 f. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo. São Paulo, 2013.

BARBOSA, J.C. **A contextualização e a Modelagem na educação matemática do ensino médio**. *In*: Encontro Nacional de Educação Matemática, 8, 2004, Recife. Anais... Recife: SBEM, 2004.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 1977.

BASSANEZI, R. C. **Temas & Modelos**. Campinas: Editora da Unicamp, 2012.

BRASIL. Lei 9394/1996. **Diretrizes e Bases da Educação Nacional**, de 20 de dezembro de 1996. Brasília, MEC, 1996.

_______. Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília, MEC/SEF,1997.

_______. Ministério da Educação. Secretaria de Ensino Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental: Introdução aos PCN**. Brasília - MEC/SEF, 1998.
_______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília, MEC/SEMTEC, 1999.
_______. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasílias, MEC, 2017.

D'AMBROSIO, U. **Educação para uma sociedade em transição**. Campinas: Papirus, 2001.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. São Paulo: Atlas, 2002.

KISTEMANN Jr., M. A. **Sobre a produção de significados e a tomada de decisão de indivíduos-consumidores**. 540 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2011. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/102096/kistemannjunior_ma_dr_rcla.pdf?sequence=1&isAllowed=y Acesso: 15 ago. 2012.

MACHADO, N. J. **Matemática e Língua Materna**: análise de uma impregnação mútua. São Paulo: Cortez, 1990.

MAUÉS, O. C. **A política da OCDE para a educação e a formação docente**: a nova regulação? *In:* Porto Alegre, v. 34, n. 1, p. 75-85, jan./abr. 2011.

NEGRI, A. L. L. **Educação Financeira para o ensino médio da rede pública**: uma proposta inovadora. 73 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Centro Universitário Salesiano de São Paulo. São Paulo, 2010. Disponível em: https://unisal.br/wp-content/uploads/2013/04/Dissertação_Ana-Lucia-Lemes-Negri.pdf Acesso: 18 ago. 2012.

OECD. Organisation for Economic Co-Operation and Development. **Improving Financial Literacy: Analysis of issues and policies**. Paris, 2005.

OLIVEIRA, A. A. **Educação Financeira nos anos iniciais do Ensino Fundamental: como tem ocorrido na sala de aula?** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica). Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2017. Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/bitstream/123456789/32214/1/DISSERTA%c3%87%c3%83O%20Anaelize%20dos%20Anjos%20Oliveira.pdf Acesso: 16 ago. 2021.

ONU. Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento. PNUD. **Human development report 2019**. Nova York: ONU, 2019.

ONU. **A ONU e o meio ambiente**. Nova York: ONU, 2020. Disponível em: https://brasil.un.org/pt-br/91223-onu-e-o-meio-ambiente Acesso 12 set. 2020.

OZAWA, N. S. Modelagem Matemática. **Como vou comprar meu primeiro carro**. 53 f. Dissertação (Mestrado em Matemática). PROFMAT. Universidade Federal do ABC. Santo André, 2013.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Proposta curricular do Estado de São Paulo para o ensino de matemática para o ensino fundamental Ciclo II e Ensino Médio.** São Paulo: SE/SP, 2008.

SBM. **PROFMAT: uma reflexão e alguns resultados**. Rio de Janeiro: SBM (Sociedade Brasileira de Matemática), 2017.

SKOVSMOSE, Ole. **Desafios da Reflexão em Educação Matemática Crítica.** Campinas, SP: Papirus, 2000.

TEIXEIRA, J. **Um estudo diagnóstico sobre a percepção da relação entre educação financeira e matemática financeira**. 160 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica-SP, 2015. Disponível em: http://www.sapientia.pucsp.br/arquivo Acesso: 12 abr. 2021.

NOTAS

IDENTIFICAÇÃO DO TEXTO
O presente texto é baseado no trabalho "Modelagem Matemática: como vou comprar meu primeiro carro", Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat) de Nilson Setsuo Ozawa, apresentado na Universidade Federal do ABC (UFABC), em 30 de setembro de 2013, elaborada sob orientação do Professor Dr. Igor Leite Freire.

IDENTIFICAÇÃO DE AUTORIA
João Paulo Attie. Doutor em Educação pela Universidade de São Paulo (2013). Professor Associado do Departamento de Matemática e Membro do Programa de Pós Graduação em Ensino de **Ciências e Matemática da Universidade Federal de Sergipe. São Cristóvão, SE, Brasil.**
E-mail: jpattie@mat.ufs.br
https://orcid.org/0000-0001-8411-4168

Nilson Setsuo Ozawa. Mestre em Matemática pela Universidade Federal do ABC (2013). Professor da Rede Pública Estadual de São Paulo. Mogi das Cruzes, SP, Brasil.
E-mail: niljap@yahoo.com.br
https://orcid.org/0000-0002-8343-1775

Nadir Santos Freitas. Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Sergipe. Professora da Rede Pública Estadual de Alagoas. São Cristóvão, SE, Brasil.
E-mail: nadir.matematica@hotmail.com
https://orcid.org/0000-0001-9505-3356

AGRADECIMENTOS
Não se aplica.

FINANCIAMENTO
Não se aplica.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Não se aplica.

EDITORES
Patricia Mirandola Garcia, Eugenia Brunilda Opazo Uribe, Gerson dos Santos Farias.

HISTÓRICO
Recebido em: 29/08/2021 – Aprovado em: 15/11/2021 – Publicado em: 15/12/2021.

COMO CITAR
ATTIE, J. P; OZAWA, N. S; FREITAS, N. S. Educação Financeira a Serviço da Cidadania. **Revista ENSIN@ UFMS**, Três Lagoas, v. 2, número especial, p. 90-103. 2021.

PERCEPÇÕES DE PROFESSORES SOBRE OBJETO DE APRENDIZAGEM COMBESQ

TEACHERS 'PERCEPTIONS ABOUT COMBESQ LEARNING OBJECT

Dayvid Evandro da Silva Lós[1]

Rinaldo Vieira da Silva Júnior[2]

RESUMO: O ensino e aprendizagem de análise combinatória na educação básica é tido como uma área problemática por professores e alunos. Nesse contexto, este trabalho apresenta uma validação parcial de um objeto de aprendizagem, chamado CombEsq, que tem como principal objetivo auxiliar discentes e docentes no ensino e aprendizagem de análise combinatória, buscando amenizar os principais problemas de aprendizagem discutidos em diversas pesquisas acadêmicas. Para isso, foram selecionados alguns professores da rede pública de ensino para estudarem a ferramenta e, em seguida, foram realizadas entrevistas para investigar o potencial educativo do CombEsq. Como resultado, os docentes avaliaram o CombEsq de forma satisfatória nos aspectos de conteúdo matemático abordado, usabilidade, interface e recursos interativos, prover auxílio a usuários e foco pedagógico.

PALAVRAS-CHAVE: Objeto de aprendizagem. Análise combinatória. Ensino. Aprendizagem. Matemática.

ABSTRACT: Teaching and learning combinatorial analysis in basic education is considered a problematic area by teachers and students. In this context, this work presents a partial validation of a learning object, called CombEsq, whose main objective is to help students and teachers in teaching and learning of combinatorial analysis, seeking to alleviate the main learning problems discussed in several academic researches. For this, some public school teachers were selected to study the tool, and then interviews were carried out to investigate the educational potential of CombEsq. As a result, the professors satisfactorily evaluated the CombEsq in the aspects of mathematical content addressed, usability, interface and interactive resources, providing assistance to users and pedagogical focus.

KEYWORDS: Learning object. Combinatorial analysis. Teaching. Learning. Matemática.

Introdução

Conforme dados do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), a aprendizagem em análise combinatória vem obtendo índices insatisfatórios (INEP, 2016). Algumas pesquisas vêm sendo realizadas a fim de esclarecer os motivos que estão contribuindo para essa pouca aprendizagem e, de acordo com Sabo (2008), foi observado que os professores de matemática não possuíam conhecimentos de combinatória de forma sólida e significativa e, por esse motivo, evitavam abordar o tema em suas aulas. Quando

[1] Universidade Federal de Alagoas. E-mail: dayvid.faculdade@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-8924-1737
[2] Universidade Federal de Alagoas. E-mail: rinaldovsjr@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-5743-8730

● Informações completas da obra no final do artigo

as aulas aconteciam, o ensino ocorria de forma mecânica, com uso excessivo de fórmulas e exercícios padronizados. Alves e Segadas (2012) e Santos-Wagner, Bortoloti e Ferreira (2013) complementam, ao destacarem que as dificuldades de aprendizagem em análise combinatória também estão presentes nos licenciandos em matemática.

Partindo do princípio de que "conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor construa sua prática" (MEC, 1998, p. 42), abordamos neste trabalho algumas análises realizadas por um grupo de docentes de matemática sobre o objeto de aprendizagem CombEsq – Combinatória Esquematizada, com o objetivo de verificar o seu potencial em auxiliar professores e alunos no ensino e aprendizagem de análise combinatória.

O Ensino e Aprendizagem de Análise Combinatória

O estudo de combinatória no Brasil é recomendado desde os anos iniciais do ensino fundamental ao ensino médio, pois diversos fenômenos na sociedade exigem tratamentos e raciocínios que são estudados em combinatória (MEC, 1997). Com relação aos métodos de ensino, parece comum que o ensino dessa disciplina esteja provocando uma aprendizagem mecânica. Esse tipo de situação pode estar sendo ocasionada pela forma de ensino do professor de matemática, uma vez que, ao não possuir os conceitos de análise combinatória bem construídos e compreendidos, priorizam um ensino em que não se pratica a construção e análise dos problemas e, sim, a excessiva aplicação de fórmulas em questões padronizadas (SABO, 2008).

Talvez pela frequência desse ensino ser mecânico é que as dificuldades dos discentes concentram-se em: não possuir diferentes estratégias de solução conforme o problema; não perceber que, a depender do problema, agrupamentos distintos não produzem novas possibilidades; pouco conhecimento do princípio fundamental da contagem e, quando o conhece, não sabe aplicá-lo de forma correta a depender do problema, e outros (DORNELAS, 2004). A partir disso, a interpretação dos problemas torna-se difícil, pois a partir do momento em que os conceitos chaves não estão bem compreendidos pelo aluno, torna-se difícil para ele utilizar a estratégia correta para a solução do problema (SILVA; PESSOA, 2015).

Fica claro que, apesar de todo um aparato de técnicas estudadas no ensino médio para solucionar problemas de análise combinatória, problemas dessa área de estudo exigem bem mais que a simples aplicação de uma fórmula, pois, "é verdade que a solução de um problema combinatório exige quase sempre engenhosidade e a compreensão da situação descrita pelo problema". (MORGADO et al., 1991, p. 02).

Nota-se, assim, uma complexidade em torno dos problemas no ensino e aprendizagem de análise combinatória. Para amenizar tal situação, algumas práticas de ensino vêm sendo recomendadas, como por exemplo, a promoção de um maior diálogo com os alunos de modo que os erros passem a ser explicitados e tornados conscientes para estudantes e professores.

Outra estratégia bastante discutida e recomendada para melhorar o ensino de combinatória é o uso mais frequente de um panorama ilustrativo, isto é, utilizar recursos visuais que mostrem a construção de agrupamentos, como o diagrama da árvore, listagem e contagem de agrupamentos, usando, inclusive, modelos concretos, pois contribuem para compreensão de conceitos quando na formalização (COUTINHO; BARBOSA, 2016).

Em outras palavras, "quanto mais condições se dêem aos alunos para pensar e testar uma idéia emergente, maior é a chance de essa idéia ser formada corretamente e integrada numa rica teia de idéias e de compreensão relacional." (ONUCHIC; ALLEVATO, 2005 apud LOPES; REZENDE, 2010, p. 664). Torna-se necessário, portanto, novas propostas de formação continuada que abordem diferentes modelos de se trabalhar os tópicos de análise combinatória bem como a utilização de novos recursos didáticos, tais como softwares educacionais, objetos educacionais, jogos, e outros, que possam implementar de maneira positiva nas aulas de matemática.

Objeto de Aprendizagem CombEsq

Os objetos de aprendizagem são entidades digitais obtidos na Internet com principal objetivo de apoiar a aprendizagem (WILEY, 2000). De forma peculiar, destaca a possibilidade de diversas pessoas terem acesso e usar os objetos simultaneamente.

O CombEsq, objeto de estudo deste trabalho, é um objeto de aprendizagem (OA) desenvolvido para auxiliar discentes e docentes no estudo de análise combinatória. Como o próprio nome indica, o CombEsq esquematiza alguns problemas de análise combinatória da educação básica para que o estudante possa compreender os principais conceitos da referida área, a saber: Princípio Fundamental da Contagem, Arranjos, Permutações e

Combinações. Para a construção do CombEsq, foi utilizada a ferramenta de autoria CourseLab – versão gratuita.

O CombEsq foi idealizado e desenvolvido por um dos autores deste trabalho durante a dissertação de mestrado (LÓS, 2019). Contempla a parte teórica e esquematiza alguns problemas de análise combinatória, utilizando recursos da informática para interagir com o aluno ou professor. Para testar o aprendizado, é disponibilizado um simulado. A seguir, algumas telas do CombEsq.

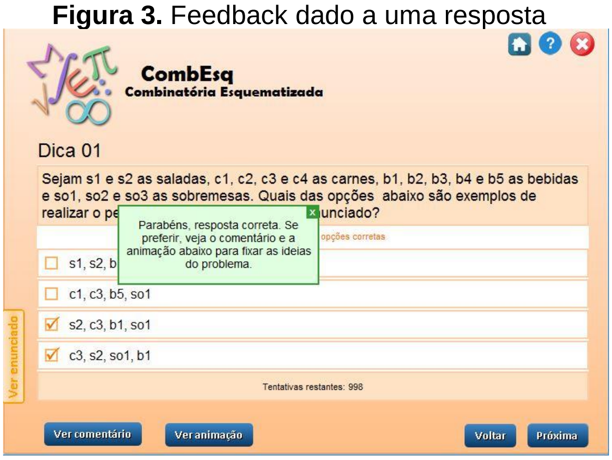
Figura 1. Tela inicial do CombEsq

Fonte: Os autores.

Figura 2. Tela principal do CombEsq

Fonte: Os autores.

Figura 3. Feedback dado a uma resposta



Fonte: Os autores.

Na figura 1, temos acesso à tela inicial do CombEsq. Nela é possível acionar o botão “Sobre”, que disponibiliza as informações sobre a ferramenta, o autor, as orientações técnicas e pedagógicas, e o botão “Iniciar” que, ao ser acionado, apresenta a tela exibida na figura 2, apresentando as boas-vindas ao usuário, disponibilizando as opções de interação: conceitos, atividades e simulado. Na figura 3, podemos observar a interação do usuário com as dicas apresentadas para auxiliá-lo na resolução do problema.

Principal recurso do CombEsq, as questões esquematizadas trazem questionamentos que instigam os sujeitos que estão interagindo com a ferramenta a pensar sobre a interpretação e elaboração de um plano para solução do problema. Além disso, é disponibilizado um recurso de experimentação que oportuniza ao estudante e/ou professor, testar combinações possíveis obtendo feedbacks sobre a sua correção. Para ter acesso ao CombEsq e obter mais informações sobre ele (orientações técnicas e pedagógicas), acessar a página https://combesq.blogspot.com.

Metodologia

Como estamos interessados em interpretar as opiniões dos docentes acerca do CombEsq, adotamos, para esse momento, uma metodologia com abordagem qualitativa, pois “tem como foco entender e interpretar dados e discursos, mesmo quando envolve grupos de participantes” (D’AMBRÓSIO B.; D’AMBRÓSIO U., 2006, p. 78). Como instrumento de coleta de dados, fizemos uso de questionário misto, formulários e de entrevistas semi-estruturadas.

Em um primeiro momento, os questionários foram utilizados para identificarmos os professores que formaram o grupo que fez uso do CombEsq, de acordo com os critérios: ter experiência razoável no ensino de análise combinatória e ser familiarizado com o uso de tecnologias na Educação Matemática. Em seguida, foi aplicado um novo questionário aos docentes selecionados, com intuito de identificar informações objetivas, tais como: formação profissional, tempo de docência, experiência profissional, etc.

Após esse momento, o CombEsq foi disponibilizado para que fosse usado de forma a perceber suas funcionalidades para a prática de ensino. Realizado esse estudo da ferramenta, foram disponibilizados alguns formulários que avaliaram o CombEsq nos aspectos: conteúdo matemático, usabilidade, interface e recursos interativos, prover auxílio a usuários e foco pedagógico. Para cada aspecto, foram realizados alguns questionamentos para que o docente avalie na forma: discorda plenamente (1), discorda (2), nem concorda nem discorda (3), concorda (4) e concorda plenamente (5). A elaboração dos itens foi subsidiada pelos trabalhos de Braga (2006), Leite (2007), Reategui, Boffe Finco (2010) e Silveira e Carneiro (2012).

Após a realização das entrevistas, foram feitas as análises que resultaram nas seguintes categorias, a saber: conteúdo matemático, usabilidade, interface e recursos interativos, prover auxílio a usuários, foco pedagógico e sugestões dos sujeitos pesquisados.

Análise e discussão dos dados

Após algumas visitas em escolas do município de Arapiraca-AL realizadas no período de 18/02/2019 a 02/03/2019, foram selecionados 7 professores, que os identificamos como Professor A, Professor B, Professor C, Professor D, Professor E e Professor F. O perfil do grupo selecionado contempla de forma satisfatória os objetivos da pesquisa tendo em vista a heterogeneidade dos sujeitos, abrangendo docentes com diferenças de experiência de ensino seja em relação ao tempo, ao vínculo de trabalho bem como em relação à formação profissional. A seguir, apresentamos, por categoria, algumas análises tomando por base as entrevistas.

Conteúdo matemático

Sobre o aspecto conteúdo matemático, foram realizados questionamentos relacionados à forma de apresentação dos recursos do CombEsq, isto é, se tais recursos propiciam uma compatibilidade com a aprendizagem do conteúdo de análise combinatória. Por exemplo, o CombEsq demonstra claramente os conceitos matemáticos esperados? Seu conteúdo é relevante para abordar os conceitos matemáticos esperados? Fornece informações precisas? Conforme respostas dos professores, todos concordaram com os itens apresentados e, a maioria, marcou pontuação 5 (a máxima). Nas entrevistas, foi possível perceber a comprovação dessa avaliação, como podemos observar nas falas abaixo:

> Uma abordagem tranquila, simples e objetiva. [...]. Bem direcionada. Com os níveis legais de se trabalhar porque tem questões básicas e tem questões mais avançadas. (Professor A).
> Achei a abordagem muito boa. Ter colocado uma linguagem fácil e atrativa para o aluno. [...]. Os conceitos são bem claros. Dá para o aluno entender bem, diferenciar bem cada conceito. (Professor E).

Podemos notar, portanto, que o CombEsq apresenta-se de forma simples, objetiva e que se torna agradável a sua utilização por parte de estudantes e professores.

Usabilidade

No que se refere à usabilidade do CombEsq, foram apresentados itens, tais como, o CombEsq pode ser facilmente disponibilizado em formatos diferenciados? O objeto é facilmente instalável, dispensando requisitos complexos para sua execução? Pode ser executado sem a necessidade de conexão com a Internet? Entre outras. Em relação às respostas, houve também concordância total dos professores com ampla maioria optando pela pontuação 5. Nas falas abaixo, podemos observar comentários dos docentes sobre a usabilidade do CombEsq:

> […] a possibilidade de eu trabalhar ele ou ceder para o aluno levar, baixe em casa, traga um pendrive, instale e você também usar em casa e não precisar da internet, já diferencia ele de outros que a gente vai encontrar talvez, por aí, se procurar. (Professor C).
> […] Como ele pode ser utilizado com celulares e tablets, isso facilita a proposta do professor. Então, o fato dele ser um objeto bem simples e várias plataformas, isso aí contribui muito para que o professor use. (Professor D).

Fica clara a observância dos professores pela necessidade do objeto de aprendizagem ser compatível com várias plataformas, principalmente, para o docente conseguir contornar situações de algumas escolas não terem um laboratório de informática que atenda qualitativamente e quantitativamente aos alunos. Tal fato acentua-se quando se trata de escolas públicas. Assim, o CombEsq prover tais possibilidades, torna-se um alívio para grande maioria dos professores que poderão ter um maior leque de opções para utilizar a ferramenta.

Interface e recursos interativos

Em relação à interface e recursos interativos, foram apresentados questionamentos que pudessem perceber se os recursos visuais e interativos do CombEsq são compatíveis com a proposta de aprendizagem em análise combinatória. Como exemplo, temos: O CombEsq é motivador – instiga o interesse em ser manipulado? Tem um bom apelo visual? As fontes utilizadas apresentam tamanho adequado? O usuário tem liberdade de navegação? O CombEsq fornece diferentes níveis de dificuldade? E outros. Sobre as respostas, apenas dois docentes marcaram a pontuação 3 e os demais marcaram opções 4 e 5, com ampla maioria optando pela pontuação 5. Podemos observar a partir das falas abaixo, argumentações dos professores a respeito dessa categoria:

> Eu acho que o diferencial mesmo é a facilidade de utilização. [...] de uma forma geral o objeto é autoexplicativo. Você apenas mexendo ali, você consegue entender o funcionamento dele tranquilamente. (Professor B).
>
> Uma coisa que achei bem positiva: as imagens ilustrativas. O tamanho da letra. Isso é positivo. A cara, a imagem, isso atrai muito o visual do aluno. (Professor C).
>
> [...] a linguagem está ótima. [...]. Eu achei bem interessante a questão dos botões. Você tem uma dúvida, tem uma dica, está lá a palavrinha, você clica. Não é aquela coisa, meu Deus, como é que eu vou mexer aqui para encontrar a dica. […]. (Professor F).

Conforme respostas dadas pelos docentes, os recursos visuais e interativos do CombEsq apresentam-se de forma satisfatória. Basicamente, em todos os itens questionados, houve uma grande aceitação das estratégias tomadas. É importante destacar, ainda assim, a concordância categórica dos professores em relação aos itens "é fácil de usar", "há consistência visual na apresentação de informações (títulos, formatação/disposição dos textos e recursos gráficos" e "o CombEsq fornece diferentes níveis de dificuldade". Tais itens são fundamentais para que o objeto de aprendizagem seja experimentado por docentes e alunos.

Fica ratificado, portanto, o caráter afetivo do CombEsq no sentido de proporcionar ao usuário que esteja interagindo com o objeto um ambiente agradável e de segurança. Tais fatores são fundamentais para que o objeto de aprendizagem seja utilizado, tendo em vista, principalmente, a vida real do professor, normalmente atarefado e com pouca disponibilidade para tentar entender o funcionamento do OA. Tal fator recai também no envolvimento do discente com o objeto, uma vez que um ambiente agradável contribui para uma melhor aprendizagem.

Prover auxílio a usuários

Sobre o aspecto de prover auxílio a usuários, foram apresentados itens que pudessem identificar o potencial do CombEsq em, além de apresentar conceitos e problemas, auxiliar o usuário tanto para manusear o objeto bem como orientar no aspecto pedagógico a partir dos erros. Por exemplo, o CombEsq fornece feedback para o usuário? O CombEsq fornece ajuda para navegação entre as telas do objeto? Apresenta mensagens de erro construtivas, que permitam que o usuário aprenda a partir das mesmas? Entre outras. Conforme resposta dos docentes, todos concordaram com os questionamentos marcando as pontuações 4 e 5 (ampla maioria). Alguns comentários realizados pelos professores vão de encontro com essa concordância:

> Eu acho que o aplicativo tem uma função de tutoria. Porque ele encaminha, ele dá caminhos, dá orientações de como ir por esse caminho, e ao tempo todo ele está tutoriando. […]. (Professor C).

> Ele faz com que aluno procure responder de forma correta. Quando ele não consegue, ele tem outras ferramentas que o ajudam a solucionar o problema. […]. (Professor D).

> [...] vão ter dicas como responder e como pensar, não é a resposta em si da questão. [...] vão dando auxílios para que ele desenvolva esse pensamento voltado para aquele enunciado da questão. (Professor G).

Observando as respostas, torna-se explícito o potencial do CombEsq em fornecer auxílio aos usuários que estejam interagindo com o objeto, com destaque para os itens "fornece feedback para o usuário", "possui claras instruções de uso e apresenta mensagens de erro construtivas, que permitam que o usuário aprenda a partir das mesmas", que obtiveram concordância de 100% dos docentes. Outro item que merece destaque é o que se "apresenta mensagens de erro construtivas, que permitam que o usuário aprenda a partir das mesmas" que obteve também uma expressiva aceitação. A conjunção desses itens torna-se fundamental para que o objeto de aprendizagem seja utilizado e cumpra com o seu principal papel que é promover a aprendizagem. Isso se torna ainda mais relevante, tendo em vista a heterogeneidade de alunos e professores, cada um com seu grau de familiaridade com tecnologia e a matemática envolvida. Dessa forma, um objeto de aprendizagem fácil de usar e, além disso, com diversos formas de ajuda, contribui de sobremaneira para reusabilidade.

Como abordado em seção anterior, a principal funcionalidade do CombEsq é a disponibilização de questões esquematizadas com dicas para que o estudante compreenda os conceitos envolvidos e as estratégias de resolução. A esse respeito, complementamos a discussão acima no que se refere à capacidade do CombEsq prover auxílio a usuários, com algumas argumentações realizadas pelos docentes sobre as dicas e feedbacks apresentados pelo CombEsq:

> [...] Mas as dicas em si mesmo são muito boas. Abre a mente do aluno para entender o problema. [...] quando ele começa a ver aquelas dicas, ele começa a entender melhor o que o problema está passando e como a própria dica mostra, na forma de questionamento, perguntando se aquela opção está de acordo com o problema. [...]. (Professor E).

> [...] vão ter dicas como responder e como pensar, não é a resposta em si da questão. [...] vão dando auxílios para que ele desenvolva esse pensamento voltado para aquele enunciado da questão. (Professor G).

Fica claro, dessa forma, que os auxílios do CombEsq não se resumem apenas a orientações de como prosseguir nas telas, isto é, a ajudas técnicas para o usuário, mas, principalmente, com auxílio para aprendizagem dos alunos, abrindo caminhos para compreensão do problema.

Foco pedagógico

No que se refere ao foco pedagógico do CombEsq, os questionamentos foram apresentados com intuito de verificar a capacidade do objeto em deixar claro seu objetivo pedagógico bem como se disponibiliza alternativas de ensino e aprendizagem da ferramenta. Como exemplos, temos: O CombEsq apresenta uma contextualização inicial, descrevendo o tema/conteúdo tratado no objeto? O CombEsq apresenta como o objeto poderia ser explorado pedagogicamente? É disponibilizado material complementar para orientação do uso do CombEsq? Em relação às respostas realizadas, houve total concordância aos questionamentos com ampla maioria marcando a pontuação 5. Podemos destacar alguns comentários dos professores que contribuem para esse resultado:

> As orientações são claras, bem direcionadas, objetivas, de fácil compreensão. […] (Professor A).

> Eu acredito que essas orientações são boas para se trabalhar inicialmente. A partir de você trabalhar aquelas situações lá propostas no objeto, você, a partir dali, pode fazer um planejamento e tentar trabalhar outras ideias. (Professor B).

A partir das respostas apresentadas pelos docentes, podemos afirmar que o CombEsq atende ao requisito de ter uma proposta pedagógica bem definida, principalmente por meio da resposta aos itens “O CombEsq apresenta o objetivo pedagógico relacionado ao uso do objeto?” e “O CombEsq apresenta como o objeto poderia ser explorado pedagogicamente?”, que obtiveram 100% de concordância. Essa característica é muito importante para que o docente faça uso da ferramenta na sala de aula, pois a distância entre a concepção de como usar a ferramenta e a efetiva prática fica encurtada, no sentido de facilitar o trabalho do professor na concepção pedagógica. Diferentemente de outros recursos digitais que, por não ter um objetivo pedagógico claro e definido, exige do professor uma análise maior da ferramenta e, consequentemente, um maior despendimento de tempo docente para essa tarefa, o que muitas vezes se torna impossibilitado tendo em vista a quantidade excessiva de tarefas dos professores no Brasil.

Sugestões dos sujeitos participantes

A partir desse primeiro contato que os docentes tiveram com o CombEsq, alguns deram sugestões com a intenção de tornar o CombEsq melhor. Destacando alguns comentários, temos:

> Eu acredito que agregando mais questões, fazendo mais outro simulado com mais questões. (Professor B).
>
> Dos conceitos, lá nos conceitos, um exemplo mais simples e exemplo mais complexo para ele fazer esse comparativo. (Professor C).
>
> [...] seria interessante se eu pudesse ter um resultado, tipo, eles fizeram o simulado e aluno tal conseguiu tantas e tantas errou. [...] eu saber se realmente ele fez aquilo. […] eu acredito que no meio da teoria também ter mais um exemplo. (Professor G).

Sobre a sugestão do Professor B, é possível atualizar o CombEsq com mais questões. De todo modo, procurou-se, com a disponibilização de 18 problemas esquematizados e 20 problemas do simulado, contemplar de modo geral os principais conteúdos de análise combinatória da educação básica. O Professor G sugeriu mudanças na funcionalidade conceitos, de modo que fosse disponibilizada uma quantidade maior de exemplos com nível de dificuldade simples ao mais complexo. Complementou ao sugerir que o CombEsq tivesse uma forma de informar ao docente sobre a quantidade de acertos dos estudantes ao interagir com a ferramenta. Sobre esse aspecto, o CombEsq não fornece esse tipo de recurso no modo em que foi desenvolvido no CourseLab. Uma estratégia sugerida, é que o professor solicite aos discentes a elaboração de relatórios sobre o uso do CombEsq com as dúvidas e opiniões a respeito da interação com a ferramenta para que os alunos possam ser avaliados.

Por fim, todos os docentes mostraram-se admirados com a ferramenta e que estão curiosos e ansiosos para colocá-la em prática. Alegaram que, a partir de experiências com estudantes em sala de aula, é que poderão surgir situações em que possam sugerir alterações pontuais na ferramenta.

Considerações Finais

Um grupo de 7 professores de matemática avaliaram o CombEsq e, de modo geral, ficaram surpresos com a qualidade da ferramenta, a facilidade de interagir, de executar, a dinâmica abordada, os recursos interativos empregados – cores, botões, imagens, menu e outros –, a existência de um objeto para análise combinatória – algo inovador, pois os docentes buscaram ferramentas dessa área e não encontraram – e o principal destacado por eles: o fato de ser tecnológico.

O aspecto pedagógico foi bem observado pelos professores durante a avaliação da ferramenta, destacando, de modo geral, a capacidade da ferramenta, por meio das dicas apresentadas, auxiliar o aluno na interpretação do problema e na identificação dos tipos de agrupamento. Além disso, mencionaram também a oportunidade que o docente tem de dinamizar a aula, de atrair mais o estudante para uma aula de combinatória – que geralmente é vista pelos discentes como um conteúdo de difícil compreensão – e a forma de acompanhamento individual do discente que tornaria facilitada com a ferramenta, tendo em vista a diversidade de alunos numa sala de aula.

É importante ressaltar que o foco deste trabalho se deu na avaliação do CombEsq com um grupo de professores, não incluindo nesse processo uma prática da ferramenta com estudantes. Essa prática não foi incluída no momento para que pudéssemos observar um maior número de docentes interagindo com CombEsq com intuito de avaliá-lo, levando em consideração os critérios abordados anteriormente. Além disso, espera-se que, com o método de validação, professores da educação básica e docentes formadores possam observar as estratégias utilizadas e, quem sabe, promovam uma maior utilização de ferramentas dessa natureza no ambiente de ensino. É intenção do autor expandir a discussão atual, incluindo análises da prática do CombEsq na sala de aula de matemática.

Referências

ALVES, R.; SEGADAS, C. Sobre o Ensino da Análise Combinatória: fatores a serem considerados, lacunas a serem evitadas. Acta Scientiae, Canoas, v. 14, n. 3, p. 405-420, 2012. Disponível em: http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/391. Acesso em: 21 jul. 2018.

BRAGA, M. M. Design de software educacional baseado na teoria dos campos conceituais. 2006. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) – Centro de Informática, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2006.

BRASIL no PISA 2015: análises e reflexões sobre o desempenho dos estudantes brasileiros /OCDE-Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico. São Paulo: FundaçãoSantillana, 2016. Disponível em: http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/resultados/2015/pisa2015_completo_final_baixa.pdf. Acesso em: 26 jul. 2018.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais. Matemática: 1ª a 4ª séries. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais. Matemática: 5ª a 8ª séries. Brasília: MEC/SEF, 1998.

COUTINHO, J. L. E.; BARBOSA, J. C. Uma matemática para o ensino de combinação simples a partir de um estudo do conceito com professores. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v. 18, n. 2, p. 783-808, 2016. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/24399. Acesso em: 11 jul. 2018.

D'AMBRÓSIO, B. S.; D'AMBRÓSIO, U. Formação de professores de matemática: professor-pesquisador. Atos de pesquisa em educação – PPGE/ME FURB, v. 1, n. 1, p. 75-85, 2006. Disponível em: http://gorila.furb.br/ojs/index.php/atosdepesquisa/article/viewFile/65/33. Acesso em: 03 jan. 2019.

DORNELAS, A. C. B. Resolução de problemas em análise combinatória: um enfoque voltado para alunos e professores do ensino médio. In: VIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2004, Recife. Anais do VIII ENEM – Comunicação Científica – GT 3 – Educação Matemática no Ensino Médio. Recife: UFPE, 2004. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/files/viii/pdf/03/CC46033050444.pdf. Acesso em: 13 jul. 2018.

LEITE, M. D. Design da interação de interfaces educativas para o ensino de matemática para crianças e jovens surdos. 2007. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) – Centro de Informática, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2007.

LÓS, D. E. S. **CombEsq**: uma proposta de objeto de aprendizagem para o ensino e aprendizagem de análise combinatória. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática, Universidade Federal de Alagoas, Alagoas, 2019. Disponível em: http://www.repositorio.ufal.br/handle/riufal/5480.

LOPES, J. M.; REZENDE, J. C. Um Novo Jogo para o Estudo do Raciocínio Combinatório e do Cálculo de Probabilidade. Bolema, Rio Claro/SP, v. 23, n. 36, p. 657-682, 2010. Disponível em: http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/4035. Acesso em: 11 jul. 2018.

MORGADO, A. C. et al. Análise combinatória e probabilidade. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

REATEGUI, E.; BOFF, E.; FINCO, M. D. Proposta de Diretrizes para Avaliação de Objetos de Aprendizagem Considerando Aspectos Pedagógicos e Técnicos. Revista Novas Tecnologias na Educação (RENOTE), Rio Grande do Sul, v. 8, n. 3, 2010. Disponível em: https://seer.ufrgs.br/renote/article/view/18066. Acesso em: 20 nov. 2018.

SABO, R. D. O ensino dos conceitos de análise combinatória e o livro didático: discurso de professores do Ensino Médio. 2008. Disponível em: http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/257-1-AGT1_sabo_ta.pdf. Acesso em: 10 jul. 2018.

SANTOS-WAGNER, V. M. P.; BORTOLOTI, R. D. M.; FERREIRA, J. R. Análise das resoluções corretas e erradas de combinatória de futuros professores de Matemática. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v. 15, n. 3, p. 606-629, 2013. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/16997. Acesso em: 10 jul. 2018.

SILVA, M. C.; PESSOA, C. A. S. A combinatória: estado da arte em anais de eventos científicos nacionais e internacionais ocorridos no brasil de 2009 a 2013. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v. 17, n. 4, p. 670-693, 2015. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/20665. Acesso em: 13 jul. 2018.

SILVEIRA, M. S.; CARNEIRO, M. L. F. Diretrizes para a Avaliação da Usabilidade de Objetos de Aprendizagem. In: XXIV SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 2012, Rio de Janeiro. Anais do SBIE 2012. Rio de Janeiro: UFRJ/UNIRIO,106
2012. Disponível em: http://www.br-ie.org/pub/index.php/sbie/article/view/1713. Acesso em: 20 nov. 2018.

WILEY, D. A. Learning object design and sequencing theory. Dissertação (Doutorado em Filosofia) - Department of Instructional Psychology and Technology, faculty of Brigham Young University, 2000. Disponível em: https://opencontent.org/docs/dissertation.pdf. Acesso em: 20 nov. 2018.

NOTAS

IDENTIFICAÇÂO DO TEXTO

O presente texto é um recorte da dissertação de mestrado de título CombEsq: uma Proposta de Objeto de Aprendizagem para o Ensino e Aprendizagem de Análise Combinatória, do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), apresentado na Universidade Federal de Alagoas (UFAL), em 12 de maio de 2019, sob orientação do Professor Dr. Rinaldo Vieira da Silva Júnior.

IDENTIFICAÇÃO DE AUTORIA

Dayvid Evandro da Silva Lós. Mestre em Matemática. Universidade Federal de Alagoas, Campus Arapiraca, Arapiraca, AL, Brasil.
E-mail: dayvid.faculdade@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-8924-1737

Rinaldo Vieira da Silva Júnior. Doutor em Matemática Aplicada. Professor Adjunto nível 3 da Universidade Federal de Alagoas, Campus Arapiraca, Arapiraca, AL, Brasil.
Email: rinaldovsjr@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-5743-8730

AGRADECIMENTOS
Não se aplica.

FINANCIAMENTO
Não se aplica.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Não se aplica.

HISTÓRICO
Recebido em: 06/05/2021 – Aprovado em: 12/12/2021 – Publicado em: 15/12/2021.

COMO CITAR
LÓS, D. E. S; SILVA JÚNIOR, R. V. Percepções de Professores sobre Objeto de Aprendizagem CombEsq. **Revista ENSIN@ UFMS**, Três Lagoas, v. 2, número especial, p. 104-118. 2021.

PONTOS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO: UM ESTUDO ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

HIGHLIGHTS OF THE TRIANGLE: A STUDY THROUGH PROBLEM SOLVING

Sandra Iris Naveiro Galera[1]

Paulo César Oliveira[2]

RESUMO: Este relato de pesquisa envolveu a formulação e resolução de três tarefas com o propósito de promover o estudo do circuncentro, um dos pontos notáveis do triângulo. Este estudo foi motivado a partir das lacunas encontradas na análise documental do Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2012) e os respectivos materiais de apoio. Na perspectiva de uma metodologia qualitativa com base no referencial Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas, analisamos a produção escrita de 24 estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental envolvidos na resolução de atividades matemáticas. Como resultados de pesquisa, revelamos pontos positivos e pontos de melhoria quanto ao estudo das propriedades do circuncentro através da Resolução de Problemas.

Palavras-chave: Formulação de problemas. Pontos notáveis no triângulo. Construções geométricas.

ABSTRACT: The research report involves the formulation and resolution of three tasks with the purpose of promoting the study of the circumcenter, one of the notable points of the triangle. This study was motivated by the gaps found in the documentary analysis of the Curriculum of the State of São Paulo (SÃO PAULO, 2012) and the respective support materials. In the perspective of a qualitative methodology based on the Teaching-Learning-Assessment through Problem Solving framework, we analyzed the written production of 24 students from the 9th grade of elementary school involved in this mathematical activity. As research results, we reveal positive points and points of improvement regarding the study of circumcenter properties through Problem Solving.

KEYWORDS: Problem formulation. Notable points in the triangle. Geometric constructions.

Introdução

O relato de pesquisa com foco no estudo do conceito e aplicabilidade do circuncentro como um dos pontos notáveis de um triângulo faz parte de uma dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT (GALERA, 2018), desenvolvida pela primeira autora no âmbito do Grupo de Estudos e Planejamento de Aulas de Matemática (GEPLAM) da UFSCar. A linha de pesquisa na qual foi concebido e

[1] Universidade Federal de São Carlos. E-mail: sandranave@hotmail.com
https://orcid.org/0000-0003-4493-6700
[2] Universidade Federal de São Carlos. E-mail: paulooliveira@ufscar.br
https://orcid.org/0000-0003-2514-904X

● Informações completas da obra no final do artigo

desenvolvido essa investigação denomina-se "Conteúdo e experimentação para o ensino da matemática" cujo objetivo é planejar e analisar contextos de aulas de matemáticas norteadas por investigações matemáticas, resolução e formulação de problemas ou utilização de materiais didáticos.

As informações geradas pelo objeto de estudo, tiveram a análise pautada na metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas. Para Onuchic (1999) a perspectiva metodológica através da Resolução de Problemas destaca um processo pelo qual será construído saberes, a medida em que o professor promove situações escolares para o aluno desenvolver atividades matemáticas em sala de aula de maneira gradual, permitindo vislumbrar, durante sua resolução, novos caminhos para aquisição de habilidades e aprendizagens.

A motivação pelo objeto de conhecimento "pontos notáveis de um triângulo" decorreu da análise documental do Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2012) e das Situações de Aprendizagem do Caderno do Professor para anos finais do Ensino Fundamental, cujos resultados revelaram lacunas no ensino de geometria. O Caderno do Professor é um material complementar ao currículo oficial de São Paulo, no qual contém orientações didático-pedagógicas por meio de oito Situações de Aprendizagem em cada um dos seus volumes semestrais, destinados aos anos finais do Ensino Fundamental e às séries que compõem o Ensino Médio.

Conceitos geométricos no Currículo do Estado de São Paulo

A abordagem dos objetos de conhecimento na Matemática está organizada no Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2012) em três blocos temáticos relacionados entre si: Números, Geometria e Relações.

O bloco Geometria se baseia na percepção das formas e as relações entre os elementos das figuras planas e espaciais; na construção e na representação das formas geométricas existentes ou abstratas, e na concepção do espaço a compreensão do mundo físico (SÃO PAULO, 2012).

Sobre o processo de ensino-aprendizagem no bloco Geometria podemos destacar que a preocupação inicial, no Ensino Fundamental (especificamente no 6º e 7º ano) é trazer o estudo das formas planas e espaciais para situações concretas. Já a ênfase na construção de raciocínios lógicos, de deduções simples de resultados a partir de outros anteriormente conhecidos poderá ser a tônica dos trabalhos no 8º e 9º ano.

Em relação à Geometria, no decorrer de todos os anos do Ensino Fundamental e Médio, o documento enfatiza:

> Consideramos que a Geometria deve ser tratada, ao longo de todos os anos, em abordagem espiralada, o que significa dizer que os grandes temas podem aparecer tanto nas séries/anos do Ensino Fundamental quanto nas do Ensino Médio, sendo a diferença a escala do tratamento dada ao tema. Por exemplo, o número irracional π, associado aos cálculos da circunferência e do círculo, pode e deve ser apresentado nos cursos de geometria elementar, assim como deve ser trabalhado no Ensino Médio, desta vez em contextos associados à Trigonometria, ao estudo dos corpos redondos e aos conjuntos numéricos. (SÃO PAULO, 2012, p.41)

O desenvolvimento dos objetos de conhecimento geométrico se faz com base em quatro faces inter-relacionadas: percepção, a concepção, a construção e a representação.

A percepção refere-se à observação e caracterização das formas presentes no mundo ao nosso redor e à manipulação de objetos concretos. Frente ao aprendizado de geometria é a face que ocorre por meio de atividades empíricas, ou seja, apoia-se em experiências vividas e observações das coisas. Na fase empírica desta pesquisa, propomos a resolução de um problema que envolveu a localização das residências dos alunos através de mapas, mais especificamente, com o auxílio do Google Maps.

A construção remete-se à produção de materiais a serem manipulados tal qual a elaboração de objetos em sentido físico. Na resolução de um dos problemas propostos, incentivamos o uso de canudos e barbantes como materiais manipulativos na atividade matemática.

A representação refere-se à reprodução através de desenhos percebidos ou construídos. Na resolução dos problemas propostos incluímos a utilização de instrumentos do desenho geométrico como régua e compasso, para o desenvolvimento da atividade matemática dos alunos.

A concepção traz a busca do conhecimento geométrico e a organização dos conceitos através do raciocínio lógico-dedutivo e da teoria: sistematização do conhecimento geométrico; predomínio das definições formais; presença das propriedades, proposições e demonstrações. Foi entendido nesse processo de investigação que as correlações entre as faces percepção, construção e representação, emergiu a concepção geométrica em questão.

Com base nos Cadernos do Professor para os anos finais do Ensino Fundamental foram analisadas as orientações didático-pedagógicas estabelecidas para o estudo de triângulos. Como o problema de pesquisa implica em abordar propriedades dos triângulos desde as possibilidades para sua construção (desigualdade triangular) bem como a intersecção das mediatrizes (circuncentro), identificamos no Quadro 1 as Situações de Aprendizagem correlacionadas ao estudo dos triângulos:

Quadro 1: O tratamento escolar para triângulos

Caderno do Aluno	Situação de Aprendizagem	Sessão	Tarefas/Etapas
6° ano, volume 1	Na medida certa: dos naturais às frações	Você aprendeu?	1
6° ano, volume 2	Definir e Classificar experimentando	Atividade Diagnóstica.	1, 2
		Lição de casa	3
		Você aprendeu?	4,5 e 6
6° ano, volume 2	Geometria e frações com Geoplano e malhas quadriculadas	Você aprendeu?	3
7° ano, volume 1	A Geometria dos Ângulos	Você aprendeu?	2 a 6
		Lição de casa	12
8° ano, volume 2	Teorema de Tales: A proporcionalidade na Geometria	Você aprendeu?	1, 2 e 4
8° ano, volume 2	Padrões Numéricos e Geométricos	Pesquisa de campo	Única

Fonte: Elaborado pelos autores

Na sequência apresenta-se a abordagem dada ao estudo de triângulos nas diversas tarefas contidas nas Situações de Aprendizagem citadas no Quadro 1.

Na medida certa: dos naturais às frações – As frações no Tangram

A terceira Situação de Aprendizagem apresentada no Caderno do Professor, 6º ano, volume I, abordou a confecção do Tangram composto por cinco triângulos, um quadrado e um paralelogramo, através de dobraduras e recortes.

Três faces do aprendizado de geometria (construção, percepção e concepção) são trabalhadas concomitantemente: ao passo que a construção do Tangram é realizada através da manipulação por dobraduras o aluno percebe sua conexão com formas a sua volta e concebe o significado de unidade de medida.

As competências e habilidades a serem alcançadas com essa atividade são: “desenvolver a ideia de que medir significa comparar grandezas de mesma natureza; ampliar a noção de número por meio de situações em que a grandeza tomada como unidade não cabe um número exato de vezes na grandeza a ser medida”. (SÃO PAULO, Caderno do Professor, 6º ano, v.1, 2014-2017, p.38)

Neste sentido, o triângulo retângulo é utilizado como unidade de medida de acordo com o que se pretende atingir com essa tarefa, desconsiderando sua definição, mas promovendo sua importância na construção do conteúdo.

Definir e Classificar experimentando – Atividade Diagnóstica.

Trata-se da primeira Situação Aprendizagem do Caderno do Professor para o 6º ano do Ensino Fundamental, volume 2. São disponibilizadas um conjunto de formas poligonais e não poligonais com o objetivo de que os alunos identifiquem as diferenças e semelhanças entre figuras. Posteriormente, há uma tarefa na qual os alunos são estimulados a falar sobre uma característica de figura poligonal ou não poligonal, para que os demais colegas identifiquem as figuras correspondentes.

O propósito quanto ao aprendizado de Geometria é qualificar o vocabulário geométrico dos alunos no processo de identificação e caracterização das figuras planas. A face de aprendizado geométrico da concepção se faz através das etapas que conduzem o aluno a definir e conceituar triângulos e outras formas (polígonos, polígonos convexos, quadriláteros, ângulos) de forma inter-relacionada à face da representação e construção através de seus esboços. A percepção permeia todo o processo quando intuitivamente o aluno associa as figuras construídas a outras já concebidas por ele.

Na discussão quanto às características dos quadriláteros notáveis, observamos a ausência de qualificar o losango; um quadrilátero importante em construções geométricas envolvendo a mediatriz. Interpretamos que a apresentação das tarefas no referido Caderno do Professor envolve o objeto de conhecimento “triângulo”, o qual surge da necessidade de identificação das características das formas poligonais (figuras formadas por segmentos de retas, fechadas, planas e com ângulos) e suas diferenças das demais figuras geométricas que possuem formas arredondadas, por exemplo.

ISSN 2525-7056

Geometria e frações com Geoplano e malhas quadriculadas

O tema é abordado na terceira Situação de Aprendizagem, no Caderno do Professor, 6º ano, volume 2. Com o auxílio dos materiais didáticos (Geoplano ou malha quadriculada), propõe-se ao aluno a construção de quadriláteros convexos e não convexos e diferentes triângulos.

O Geoplano é um material muito útil para o ensino da geometria plana mais precisamente o estudo das formas poligonais. É confeccionado a partir de uma placa de madeira com pregos cravados em forma de uma malha composta por linhas e colunas. Os elásticos são utilizados para formar as figuras com limites nos pregos (vértices).

Partindo do pressuposto que os conceitos sobre polígonos convexos e não convexos já tenham sido discutidos ou ainda que, possam ser construídos os alunos devem, através da representação, face do aprendizado da geometria, construir as figuras pedidas. Se faz necessária a concepção das classificações dos triângulos quanto aos lados.

Uma abordagem sobre as impossibilidades na construção de um triângulo dados três comprimentos de lados, seria adequado para que os alunos pudessem se deparar com a desigualdade triangular. Reitera-se que frente a situações deste tipo e da percepção da necessidade desta importante propriedade, foi contemplado uma tarefa em nossa pesquisa para abordar da desigualdade triangular.

A Geometria dos Ângulos

Na quinta Situação de Aprendizagem do Caderno do Aluno do 7º ano, volume I, tarefa 1, o tratamento dado aos ângulos, inicia-se com a construção de uma unidade de medida não convencional: o TUTI. Através de dobraduras é proposto aos alunos a divisão de um quadrado em 16 partes iguais. Espera-se que a resolução da tarefa permita ao aluno constatar que a “soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a 8 TUTIS” (SÃO PAULO, Caderno do Professor, 7º ano, v.1, 2014-2017, p.45)

Novamente temos uma tarefa envolvendo a construção de um triângulo sem incluir suas impossibilidades. O momento é propício para que o professor formule indagações, tais como: É possível obter um triângulo com dois ângulos de medida 4 TUTIS? É possível construir um triângulo com lados de medidas 5, 2 e 2?

Quanto às faces do aprendizado de Geometria é possível encontrar os quatro eixos:
a) construção: dobraduras e recortes para obter as medidas TUTIS;

b) A percepção permeia todo o aprendizado ao relacionar os lados das figuras e associar os TUTIS às medidas angulares;

c) A Concepção diz respeito à apropriação do conceito de ângulo;

d) Representação: quando se dá a medida do ângulo em TUTIS e pede-se para construir o mesmo ou construir o triângulo e medir seus ângulos.

Uma sugestão de melhoria complementar ao que foi proposto nesta Situação de Aprendizagem é uma abordagem sobre as possibilidades de construção de um triângulo de modo a gerar a desigualdade triangular.

Teorema de Tales: A proporcionalidade na Geometria

Nessa seção são apresentados no Caderno do Professor, 8º ano, volume 2, problemas associados a situações cotidianas como a construção de canteiro para plantar folhagens rasteiras, por exemplo. Foi interpretado que esta situação-problema instiga a face do aprendizado geométrico “percepção” quando menciona o projeto do canteiro triangular, a qual demanda que o aluno associe a figura abstrata a um canteiro. A construção atrelada a “representação” na forma da figura do triângulo, e os segmentos nele traçados levam o aluno a conceber a proporcionalidade entre os segmentos formados.

Padrões Numéricos e Geométricos

Na sétima Situação de Aprendizagem, Caderno do Professor do 8º ano, volume 2, há uma tarefa interessante instigando os alunos na construção de um triângulo retângulo utilizando um barbante com 13 nós. Na formulação das tarefas para o instrumento de coleta de dados, foi utilizada uma tarefa complementar a essa, considerando o fato de que com os 12 espaços formados pelos nós não podem ser divididos aleatoriamente de forma a se obter uma região triangular. Neste sentido, aproveitou-se este fato para estudar a questão da desigualdade triangular.

Na sequência apresenta-se a abordagem dada ao estudo da circunferência e do losango, devido o interesse desta pesquisa nos pontos notáveis de um triângulo, a partir das construções geométricas com régua e compasso.

O tratamento escolar para circunferências

O Caderno do Aluno, 6º ano, volume 1, traz na terceira Situação de Aprendizagem, uma tarefa que consiste em medir diâmetros os objetos de algumas figuras. Cada figura possui uma régua graduada em polegadas. Como a unidade de medida polegadas não é convencional; faz-se necessário uma abordagem do seu significado, bem como a comparação com a unidade padrão de comprimento.

Nesse Caderno do Professor não é apresentado a noção conceitual de circunferência, o que pode suscitar questionamentos em sala de aula. O objetivo principal da tarefa é levar o aluno a se deparar com necessidades de fracionamentos da unidade ao medir um objeto.

A concepção como uma das faces do aprendizado em geometria, se faz necessária, no âmbito de se definir o conceito de diâmetro. Já a percepção com o fato de se relacionar o diâmetro com outras referências do cotidiano: diâmetro de uma cesta de basquete ou pneu de bicicleta, por exemplo.

O tratamento escolar para losangos

No Caderno do Professor, os losangos são apresentados apenas na forma de 'pipa' e isto pode comprometer a aprendizagem, dado o pressuposto do aluno associar o objeto losango diretamente à representação figural da 'pipa'. Conceitualmente, "losango é um paralelogramo equilátero, isto é, com lados congruentes". (SÃO PAULO, Caderno do Professor, 6º ano, v.2, 2014-2017, p71).

A abordagem da área do losango é determinada de duas formas diferentes. Por um lado, a partir de sua classificação como paralelogramo e, portanto, sua área é equivalente a área do paralelogramo; por outro lado, por decomposição do losango a partir de suas diagonais em triângulos congruentes e a composição de um retângulo equivalente ao losango inicial. A segunda maneira nos permite abordar o conceito das diagonais do losango e suas características.

A face percepção do aprendizado geométrico se faz perante a situação a qual o aluno se depara com a conexão entre as propriedades do losango como paralelogramo; a construção pode ser concretizada a partir de recortes e colagens para decomposição e composição das figuras equivalentes; a representação das áreas por composição e decomposição e a concepção quando os alunos se apropriam das deduções de fórmulas.

Na análise documental foi constatado que elementos de geometria como os pontos notáveis de um triângulo não são contemplados na forma de tarefas nas diversas Situações de Aprendizagem contidas nos materiais de apoio do Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2012).

Ensino – Aprendizagem - Avaliação através da Resolução de Problemas

Um grupo de pesquisadores brasileiros, coordenados pela Prof.ª Drª Lourdes de la Rosa Onuchic, da UNESP – Rio Claro, SP – GETERP (Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas), desenvolve suas atividades desde 1992. O grupo é constituído por alunos e ex-alunos do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática que compartilham o interesse por se aprofundar no tema, auxiliar em projetos de pesquisas e aprimorar sua prática docente. Desta forma, o GETERP é um núcleo gerador de atividades que motivam o aperfeiçoamento, a investigação e produção científica na linha de Resolução de Problemas.

O trabalho com Resolução de Problemas em sala de aula é uma atividade coletiva, construída entre professor e alunos, que compartilham suas ideias de forma a colaborar com cada integrante no processo de Ensino – Aprendizagem - Avaliação (ONUCHIC, 1999). As três palavras de forma composta, tem por objetivo expressar uma concepção em que o ensino-aprendizagem devem ocorrer de forma simultânea através da mediação do professor e participação efetiva dos alunos na produção de saberes. A Avaliação ocorre durante o processo de desenvolvimento das atividades matemáticas, articulada às formulações e construções dos alunos.

Para Onuchic (1999, p.215) um problema “é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver” e não é um exercício no qual o aluno aplica uma fórmula de forma quase mecânica ou alguma técnica operatória”. Em termos metodológicos, Onuchic e Allevato (2009) sugere um conjunto de 9 etapas para a organização do trabalho do professor em sala de aula, levando em conta que a avaliação, por sua vez, perpassa o desenvolvimento do processo ensino-aprendizagem:

(1) O professor propõe um problema para os estudantes resolverem;

(2) Os estudantes são desafiados a utilizar seus conhecimentos prévios;

(3) Os estudantes formam pequenos grupos;

(4) O professor incentiva os estudantes e realiza a mediação;

(5) Os estudantes resolvem o problema;

(6) As soluções dos estudantes são apresentadas a todos;

(7) Realiza-se uma plenária discutindo as resoluções desenvolvidas;

(8) Busca-se um consenso dos processos de resolução dos estudantes;

(9) O professor formaliza o conteúdo matemático.

Percurso metodológico da pesquisa

A proposta metodológica de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas contou com a participação de 24 estudantes de 9º ano de uma escola do município de Tatuí, envolvidos com atividades matemáticas relacionadas à propriedade do circuncentro no triângulo.

A pesquisa de natureza qualitativa, caracterizou-se por um estudo naturalista ou de campo em função da mediação da professora-pesquisadora com seus alunos no decorrer do desenvolvimento das tarefas propostas (NACARATO et al, 2005). A produção de informações submetida à análise foi obtida via registros escritos das três atividades desenvolvidas pelos alunos em sala de aula, fotos, vídeos e anotações do professora-pesquisadora.

Seguindo a prerrogativa do ensino via Resolução de Problemas, na perspectiva de Onuchic e Allevato (2009), apresenta-se informações relevantes às 3 primeiras etapas: formulação das tarefas pela professora-pesquisadora; leitura individual das tarefas pelos alunos e leitura coletiva.

No Quadro 2 sistematizamos os temas envolvidos nas 3 tarefas conjuntamente com os conteúdos abordados:

Quadro 2. Tarefas via Resolução de Problemas

Tarefa: Tema	Conteúdos
Explorando o conceito e as propriedades da Mediatriz	Ponto Médio, Losango como quadrilátero Notável e suas propriedades, Circunferência e mediatriz
O Circuncentro de um triângulo e suas propriedades	Triângulos, Desigualdade triangular, Mediatrizes dos lados dos triângulos, Ponto de Intersecção das mediatrizes (posição relativa à superfície triangular), Circuncentro e suas propriedades.
Aplicação das propriedades do Circuncentro	Circuncentro e suas propriedades

Fonte: Elaborado pelos autores.

No que diz respeito à leitura individual das tarefas, foi um momento oportuno para cada aluno compreender o conteúdo do problema, ou seja, levar o aluno a questionar sobre do que se trata, quais palavras desconhece, entre outras coisas. Por isso foi imprescindível criar um ambiente calmo e silencioso. Sabemos das dificuldades de concentração dos adolescentes nessa faixa etária e, portanto, houve necessidade de dialogar sobre a importância de se manter concentrado na leitura do enunciado dos problemas. Após a leitura individual, os questionamentos já começaram a surgir a respeito dos enunciados. Foi pedido que anotassem as dúvidas para que, no total de 6 grupos formados, fossem discutidas.

A leitura em conjunto não foi muito produtiva, apesar dos alunos serem instruídos quanto ao respeito à leitura do próximo. Percebeu-se que para a interpretação do problema, foi mais eficiente a leitura feita por um membro do grupo e, os demais atentos a ela, anotaram dúvidas para posteriormente discutir. Com relação às deficiências de vocabulário, foi sugerido aos alunos o uso de dicionários e incentivo de pesquisa via internet.

Nas seções seguintes contemplou-se à apresentação do conteúdo e análise do desempenho qualitativo dos alunos em algumas questões que formaram o conjunto das 3 tarefas propostas.

Primeira tarefa

Essa tarefa foi composta de 4 questões, cujo conteúdo está disposto no Quadro 3:

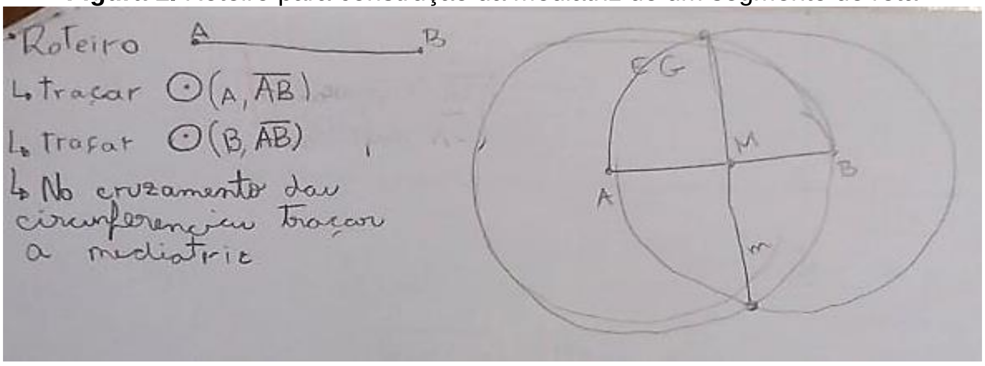
Quadro 3. Explorando o conceito e as propriedades da Mediatriz.

Conteúdo	Recurso	Objetivo
1- Ponto médio. 2-Losango como quadrilátero notável. 3-Propriedades do losango. 4-Construção da circunferência. 5-Mediatrizes e suas propriedades.	1-Materiais de DG (régua e compasso). 2-Transferidor. 3-Canudos. 4-Dicionário. 5-Internet	1-Compreender o significado de ponto médio de um segmento através de atividades experimentais. 2-Retomar as características de uma circunferência através da construção com compasso, dado seu raio. 3-Utilizar as propriedades do losango para construção da mediatriz com régua e compasso.

Fonte: Elaborado pelos autores

A quarta questão envolveu a construção da mediatriz do segmento $\overline{AB}$, bem como a redação do roteiro para tal procedimento com o uso de régua e compasso. Na Figura 1 destaca-se o protocolo escrito do aluno João (nome fictício):

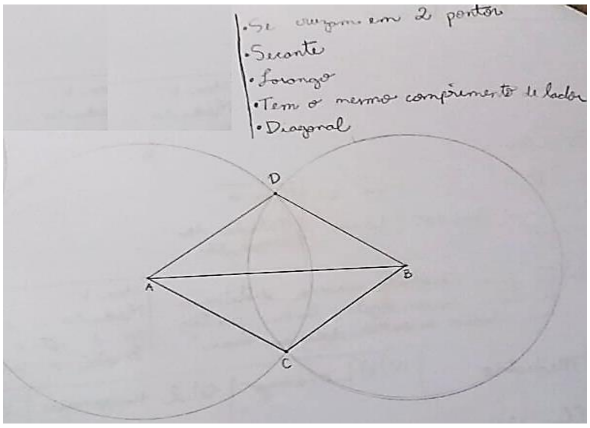
Figura 1. Roteiro para construção da mediatriz de um segmento de reta



Fonte: Elaborado pelos autores

A produção escrita de João contém uma representação matemática na forma simbólica “traçar ⊙ (A, $\overline{AB}$)”, cuja referência é uma circunferência de centro A e raio com medida AB. Na Figura 2 apresenta-se a respectiva construção geométrica de João:

Figura 2. Construção da mediatriz DC



Fonte: Elaborado pelos autores

Ao finalizar essa etapa da primeira tarefa, a professora-pesquisadora apresentou para os alunos na plenária, o protocolo da construção geométrica de João e questionou a ausência da representação da mediatriz do segmento de reta AB. A aluna Márcia fez a conexão da mediatriz com a diagonal CD do losango CBDA. A professora-pesquisadora, por sua vez, questionou: “o que podemos observar quanto à posição relativa entre as diagonais de um losango?” Sem dificuldades, vários alunos manifestaram que as diagonais são perpendiculares entre si.

Em síntese, cada face do aprendizado geométrico foi explorada na resolução das questões da primeira tarefa. No Quadro 4, está exposto o registro escrito de atividades geométricas realizadas pelos alunos:

Quadro 4. Faces do aprendizado geométrico na primeira tarefa

Faces	Atividade
Construção	João construiu a mediatriz do segmento AB com régua e compasso
Percepção	Laura relacionou um canudo de plástico com o segmento de reta AB.
Concepção	Através do roteiro exposto na Figura 1, João mostrou que compreendeu como elaborar as estratégias para a construção geométrica da mediatriz de AB.
Representação	João apresentou a representação geométrica da mediatriz através do uso de régua e compasso.

Fonte: Elaborado pelos autores

Na resolução dessa questão, o foco não foi o procedimento realizado com o manuseio da régua e compasso, mas identificar e caracterizar o quadrilátero losango na construção da mediatriz de um segmento de reta.

Segunda Tarefa

Essa tarefa foi composta de 3 questões, cujo conteúdo está disponível no Quadro 5:

Quadro 5. Circuncentro de um triângulo e suas propriedades.

Conteúdo	Recurso	Objetivo
1-Triângulos 2-Desigualdade triangular 3-Mediatriz relativa aos lados do triângulo 4-Ponto de Intersecção das mediatrizes de um triângulo 5-Circuncentro e suas propriedades.	1-régua e compasso 2-dicionário 3-internet 4-barbante	1-Perceber que não são três comprimentos quaisquer que podem representar os lados de um triângulo e desta forma conjecturar a propriedade da desigualdade triangular. 2-Construir com régua e compasso as mediatrizes dos lados de um triângulo retângulo, isósceles e escaleno. 3-Identificar o ponto de intersecção das mediatrizes como o circuncentro e compreender suas propriedades.

Fonte: Elaborado pelos autores

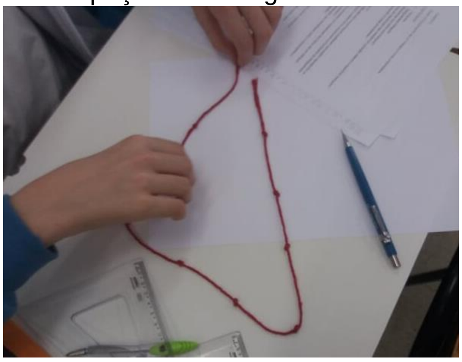
Na sequência há a formulação de cada uma das questões e as respectivas análises com base em algumas produções escritas dos alunos.

A primeira questão contém o seguinte enunciado: Com um pedaço de barbante de aproximadamente 80 cm de comprimento faça nós igualmente espaçados de forma a se obter 10 espaços. a) Construa com esse barbante um triângulo. Qual é o perímetro desse triângulo? Quais as medidas de seus lados? b) Agora, construa outros triângulos com esse mesmo barbante. Quantos triângulos diferentes você conseguiu descobrir? Registre a medida de seus lados. c) Tente construir um triângulo com lados medindo 6, 2 e 2. O que você observa? (Registre suas hipóteses) d) Com quaisquer medidas podemos formar um triângulo? Registre como pensou.

Após cortar os pedaços de barbante, os alunos distribuídos em grupos com 6 integrantes cada e começaram a trabalhar nos espaçamentos e nós. Alguns questionamentos foram feitos pelos estudantes: quando realizamos os nós, se perdem alguns “pedaços” do comprimento total do barbante, isso tem algum problema, professora? - Os espaços entre os nós não ficarão exatamente do mesmo tamanho.

A professora-pesquisadora retomou o objetivo da primeira questão: construir triângulos cuja unidade de medida é o espaço entre os nós. Assim, os grupos perceberam que havia necessidade de minimizar a diferença dos espaços entre os nós. No entanto, como a tarefa envolveu uma atividade manipulativa, não foi possível conseguir espaços congruentes, conforme ilustração na Figura 3:

Figura 3. Espaços não congruentes entre os nós



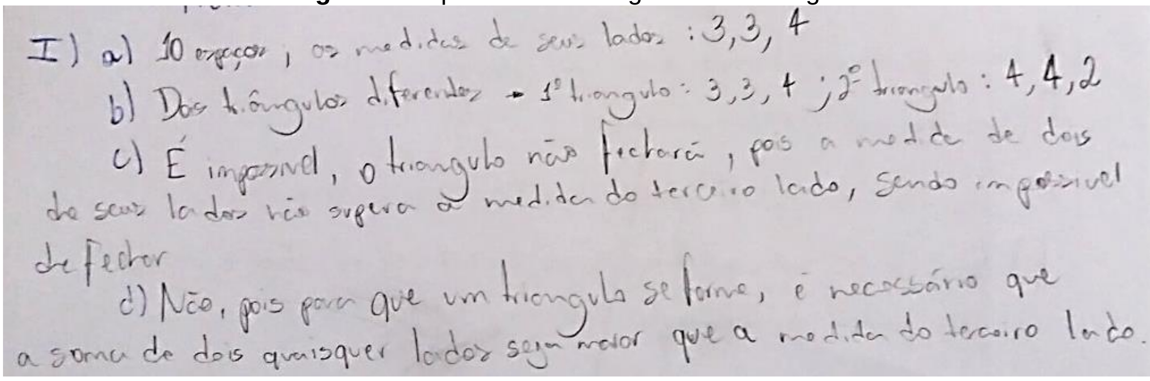
Fonte: Elaborado pelos autores

No decorrer do desenvolvimento da questão, os grupos perceberam imediatamente que o perímetro do triângulo seria aproximadamente 80 cm. Ao tentarem construir triângulos, foi possível notar que determinados casos como no ‘item c’, não possibilitou a construção. Era desejável que os alunos argumentassem sobre a condição de existência de um triângulo com base na desigualdade triangular. Porém, no registro escrito de vários alunos, foi frequente apenas o argumento de que a manipulação de alguns casos com os lados formados com o barbante não permitiu “fechar” o triângulo.

O protocolo escrito coletivamente pelo terceiro grupo apresenta uma linguagem geométrica próxima ao conteúdo da desigualdade triangular, conforme Figura 4.

Na resolução do ‘item a’, os lados foram nomeados de espaços e o triângulo obtido com lados 3, 3, e 4 unidades tem perímetro de 10 unidades. Para o ‘item c’ a impossibilidade de construir o triângulo com lados medindo 10, 4 e 4 unidades foi justificada pelo fato de que “a medida de dois de seus lados não supera a medida do terceiro” lado.

Figura 4. Explorando a Desigualdade Triangular

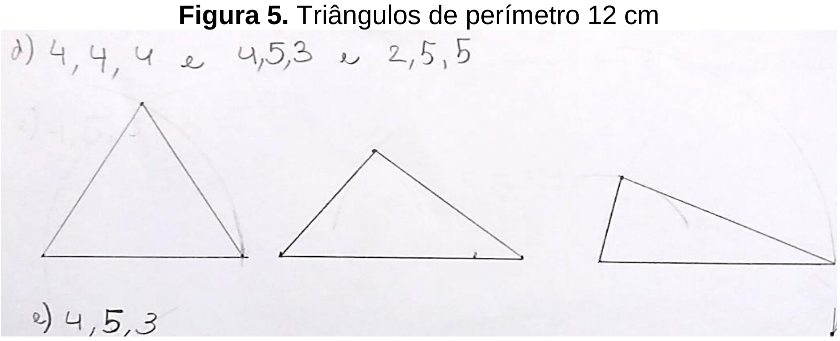

I) a) 10 espaços, as medidas de seus lados: 3,3,4
b) Dois triângulos diferentes → 1º triângulo: 3,3,4 ; 2º triângulo: 4,4,2
c) É impossível, o triângulo não fechará, pois a medida de dois de seus lados não supera a medida do terceiro lado, sendo impossível de fechar
d) Não, pois para que um triângulo se forme, é necessário que a soma de dois quaisquer lados seja maior que a medida do terceiro lado.

Fonte: Elaborado pelos autores

A segunda questão contém o seguinte enunciado: A propriedade que acabamos de conjecturar é a desigualdade triangular. O próximo desafio consiste em construir triângulos com régua e compasso. Construa com régua um segmento de 8 cm e nomeie de $\overline{AB}$. a) Tomando AB como a base de um triângulo equilátero, como você faria para construir os demais lados desse triângulo? Utilize régua e compasso. Nomeie o terceiro vértice de C. b) Escreva um roteiro para construção de um triângulo com régua e compasso. c) Construa triângulos de perímetro 12 cm. d) Quais as possíveis medidas inteiras para os lados desses triângulos? e) Dentre os triângulos construídos no item anterior há um que é um triângulo retângulo. Quais as medidas de seus lados?

Os itens de ‘a’ a ‘c’ foram realizados sem muitas dificuldades pelos 6 grupos. A partir do ‘item d’ os grupos sentiram a necessidade de utilizar a plenária de avaliar se realmente eram 3 possibilidades de triângulos diferentes (Figura 5) com lados formados por números naturais; com o mesmo perímetro (12 cm).

Figura 5. Triângulos de perímetro 12 cm



Fonte: Elaborado pelos autores

Em relação ao ‘item e’ a percepção dos alunos quanto ao triângulo retângulo, oscilou entre a construção de lados 4-5-3 e 2-5-5, de acordo com o conteúdo da Figura 5. Alguns alunos recorreram ao uso do transferidor ou esquadro como instrumentos de medida para averiguar que o triângulo retângulo é aquele com medidas de lados 4-5-3.

Por fim, a terceira questão contém o enunciado: Na primeira tarefa aprendemos o que é uma mediatriz. Agora vamos trabalhar com as mediatrizes dos lados de um triângulo. a) Construa três triângulos. (retângulo, acutângulo e obtusângulo). Não esqueça de nomear seus vértices; b) Construa em cada um deles as mediatrizes de seus lados; c) O que você observa quanto as mediatrizes em cada um dos triângulos? O que há em comum nos três triângulos quanto às mediatrizes? d) Nomeie os pontos de intersecção de C1, C2 e C3, respectivamente. O que acontece com os pontos de intersecção das mediatrizes nos três triângulos construídos quanto a sua localização em relação à superfície triangular? e) Com o centro do compasso no ponto de intersecção das mediatrizes e abertura em um dos vértices, trace uma circunferência em cada uma das três construções. O que você observa? f) Como se chama o ponto de intersecção das mediatrizes de um triângulo? Escreva suas características.

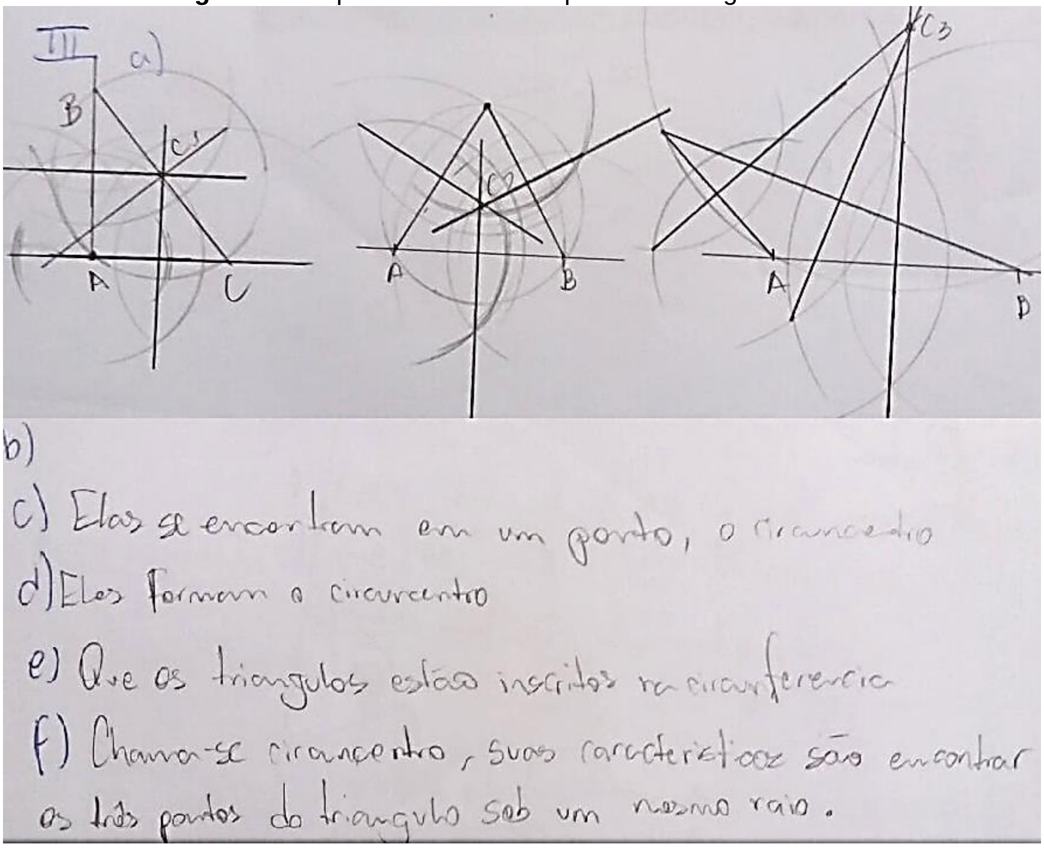
Os alunos não tiveram grandes problemas para construir os triângulos e as mediatrizes relativas a cada lado, mas foi observado o quão os estudantes resistiram a apagar e refazer a construção geométrica, mediante avaliação da professora-pesquisadora. A resistência por parte dos alunos não pela falta do conhecimento e sim por desinteressar-se em fazer todo o processo novamente. Como mediadores do processo ensino-aprendizagem, foi feita a avaliação contínua do desenvolvimento das atividades dos alunos.

Em relação ao ‘item c’ houve dúvidas no conteúdo do enunciado. Após discutir em plenária, os alunos conseguiram desenvolver a atividade matemática recorrente. Parte dos alunos responderam que as mediatrizes relativas aos lados do triângulo se cruzavam em um único ponto e um dos grupos respondeu que essas mediatrizes formaram retas concorrentes.

No ‘item f’ os alunos recorreram à internet para pesquisar o nome do ponto de intersecção das mediatrizes construídas a partir dos lados de um triângulo; o circuncentro. Era esperado inicialmente que os alunos chegassem a conclusão que o circuncentro equidista dos vértices do triângulo, já que é o centro da circunferência circunscrita, porém não tiveram dificuldades de entender após tal fato ser discutido por todos em plenária.

Apresentou-se na Figura 5 a construção das circunferências circunscritas aos triângulos realizadas pelo terceiro grupo, tendo como redatora a aluna Pietra:

Figura 6. Respostas da terceira questão da segunda tarefa



Fonte: Elaborado pelos autores

O grupo representado por Pietra destacou na caracterização do circuncentro a medida do raio, com referência aos pontos C1, C2 e C3; centro de cada uma das circunferências circunscritas aos triângulos construídos.

Em síntese, o Quadro 6 contém o que foi explorado das faces do aprendizado geométrico na resolução das 3 questões pertinentes à segunda tarefa:

Quadro 6. Faces do aprendizado geométrico para a segunda tarefa

Faces	Atividade
Construção	Com 9 nós, o grupo da Pietra conseguiu dividir o barbante em 10 espaços com medidas de comprimento muito próximas e construíram um triângulo de espaços de 3-3-4.
Percepção	Pedro constatou que com os nós era possível identificar vértices de um triângulo e, portanto, construi-lo.
Concepção	Pietra escreveu que para formar um triângulo é necessário que a soma de dois quaisquer lados seja maior que a medida do terceiro lado.
Representação	Pedro construiu corretamente as mediatrizes do triângulo acutângulo com régua e compasso.

Fonte: Elaborado pelos autores

O conteúdo das duas tarefas na perspectiva metodológica do Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas teve por objetivo abordar com os alunos a conceituação da mediatriz de um segmento de reta $\overline{AB}$ como um conjunto de pontos do plano que equidistam das extremidades deste segmento $\overline{AB}$. Dado que a mediatriz de um segmento de reta $\overline{AB}$ satisfaz a propriedade de uma reta perpendicular a este segmento e que intercepta o seu ponto médio, então podemos afirmar que a mediatriz é um lugar geométrico.

Formalmente, de acordo com Dutenhefner; Cadar (2015, p.74), o "lugar geométrico é um conjunto de pontos caracterizado por uma propriedade. Deste modo, uma figura descrita por uma propriedade é um lugar geométrico se: (a) Todos os pontos da figura têm a propriedade; (b) Somente os pontos da figura têm a propriedade".

O estudo da mediatriz como lugar geométrico permitiu-nos abordar o circuncentro como um ponto notável do triângulo, obtido pela intersecção das mediatrizes dos lados de um triângulo. O circuncentro, por sua vez, satisfaz a propriedade de representar o raio da circunferência circunscrita ao triângulo, ou seja, uma circunferência que intercepta os vértices do triângulo.

Neste sentido, na próxima seção o leitor encontrará uma situação de contexto escolar que estabelece conexões entre as propriedades da circunferência circunscrita ao triângulo dado e a solução de uma tarefa proposta através da Resolução de Problemas.

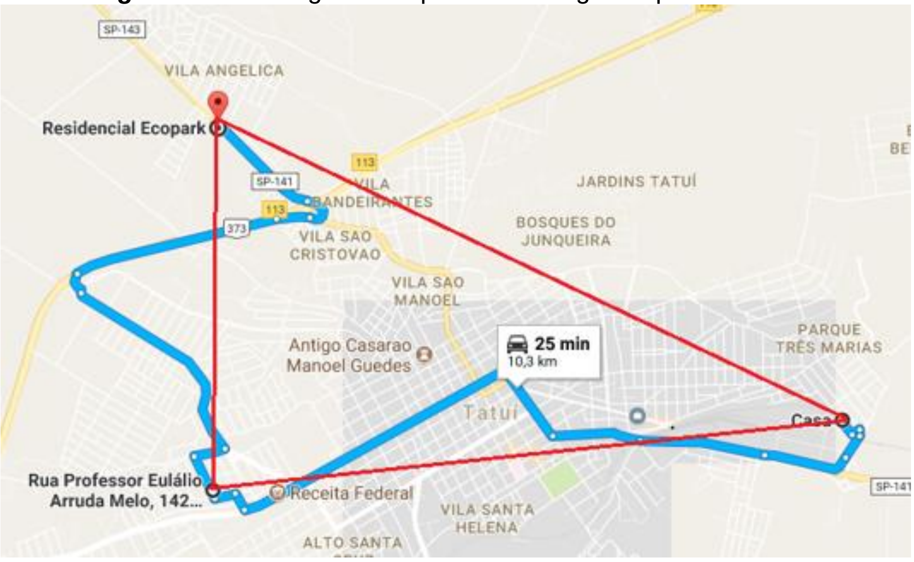
Terceira Tarefa

A professora-pesquisadora propôs aos seus alunos a seguinte formulação de problema: você e dois amigos de grupo resolveram marcar um passeio. Pensaram em marcar o encontro de saída em um lugar que seja equidistante das casas de cada um. Como vocês devem proceder para descobrir esse lugar?

Esta resolução de problema foi desenvolvida com o auxílio de computadores disponibilizados na sala de informática da unidade escolar. A professora-pesquisadora propôs aos alunos que formassem trios para a utilização do Google Maps. A ferramenta Google Maps é um serviço de pesquisa e visualização de mapas e imagens de satélite da Terra gratuito na web e, através dele foi solicitado que cada grupo localizasse as suas residências e marcasse com as ferramentas do próprio aplicativo a localização das três moradias, na forma de 3 pontos.

Na sequência, a professora-pesquisadora solicitou a utilização do editor Paint que compõe os programas do sistema operacional Windows. O objetivo era que os trios de alunos selecionassem a imagem, copiassem e a colassem no editor gráfico Paint. Com pequenas edições na imagem, os alunos ligariam os três pontos que representam as moradias com segmentos de retas para formar um triângulo, cujas imagens foram salvas e impressas, conforme modelo na Figura 7:

Figura 7: Modelo gerado a partir do Google Maps da cidade de Tatuí



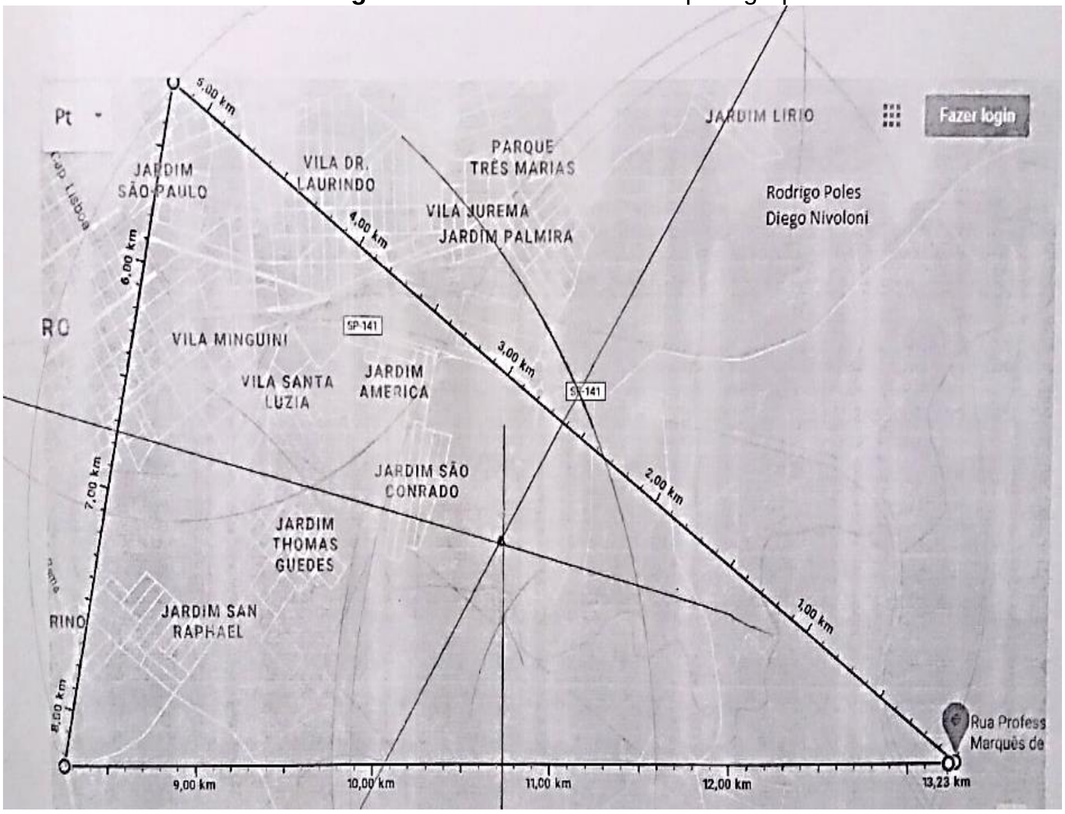
Fonte: Elaborado pelos autores

Com uma postura mediadora em relação aos alunos, a professora-pesquisadora redigiu na lousa as seguintes questões para reflexão: que características devem ter o ponto no mapa que indicará o local do encontro? O que representam as residências no triângulo formado?

As discussões iniciais em trios e depois socializadas em plenária permitiu os alunos compreenderem que a estratégia para a solução da tarefa através da Resolução de Problemas perpassa pelo circuncentro do triângulo dado. Uma questão adicional foi formulada pela professora-pesquisadora: esse lugar que representa o circuncentro no mapa é conveniente para se marcar um encontro?

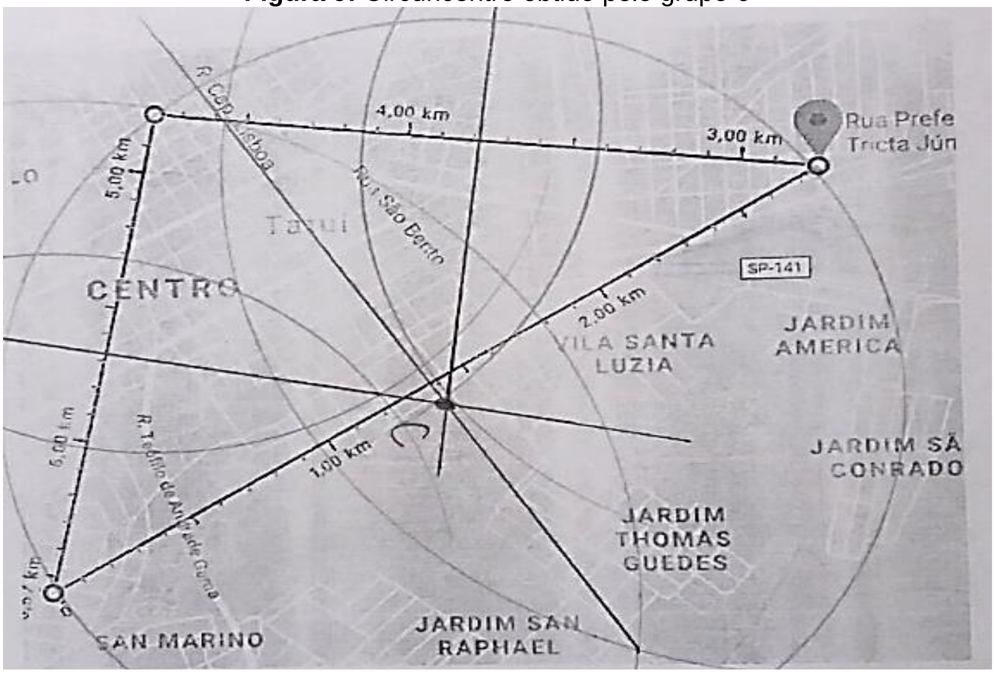
O conteúdo da Figura 8 e 9 contempla a construção geométrica do circuncentro a partir dos protocolos produzidos pelos grupos 5 e 6 representados, respectivamente, pelos alunos redatores Lívia e Enzo:

Figura 8: Circuncentro obtido pelo grupo 5



Fonte: Elaborado pelos autores

Figura 9: Circuncentro obtido pelo grupo 6



Fonte: Elaborado pelos autores

Em ambos os grupos, a avaliação proposta pela professora-pesquisadora quanto à conveniência ou não de marcar um encontro a partir do circuncentro obtido no mapa, foi considerada pelos dois grupos como conveniente, por haver locais públicos próximos ao ponto destacado no mapa.

No Quadro 7 descrevemos as faces do aprendizado geométrico relativo aos grupos 5 e 6:

Quadro 7. Faces do aprendizado geométrico na terceira tarefa

Faces	Atividade
Construção	Os Grupos 5 e 6 produziram seus triângulos com o auxílio de recursos computacionais e com o auxílio da régua e compasso, construíram o circuncentro do triângulo.
Percepção	Os Grupos 5 e 6 perceberam que a construção das mediatrizes e identificação do circuncentro permitiria obter o ponto equidistante das três moradias.
Concepção	Os dois grupos se apropriaram das propriedades do circuncentro quando realizaram as construções de forma adequada ou através das discussões na plenária
Representação	O grupo do Enzo construiu com régua e compasso as mediatrizes do triângulo e, assim, encontrou corretamente o ponto de intersecção. Como o triângulo obtido a partir das suas residências (vértices) foi obtusângulo, o circuncentro ficou externo à superfície triangular. No caso do grupo da Lívia, os procedimentos de construção geométrica foram semelhantes. No entanto, como o triângulo foi acutângulo, o circuncentro ficou interno à superfície triangular.

Fonte: Elaborado pelos autores

Apesar de não termos apresentado todas as produções escritas geradas em grupos e/ou individualmente, o processo de avaliação contínua empregado pela professora-pesquisadora no decorrer do desenvolvimento das atividades dos alunos, permitiu inferir que nenhum grupo destoou efetivamente dos demais quanto ao objetivo e resolução das tarefas propostas. Quando uma ou outra etapa de resolução se apresentava inconsistente com o problema proposto, o próprio grupo em parceria ou não com a professora-pesquisadora, estabelecia discussões em busca de um consenso e validação das respostas obtidas nas atividades desenvolvidas.

Considerações finais

No decorrer da resolução das 3 tarefas propostas, as etapas previstas na metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas não foram seguidas em uma ordem hierárquica. A leitura coletiva não foi a etapa que se destacou, pois apesar das regras propostas para o exercício da comunicação, os alunos em seus respectivos grupos, preferiram eleger um relator para cada um dos grupos.

A plenária ganhou grande destaque, até mesmo sob o olhar dos alunos, pois foi o momento que através da exposição de suas ideias puderam verificar as incompletudes ou erros na resolução. Na busca do consenso houve a necessidade de aprender a ouvir, de ser ouvido, respeitar as colocações dos demais envolvidos, argumentar e trabalhar em conjunto para a constatação de um novo aprendizado. Por fim, a formalização do conteúdo confirmou e complementou as apreensões dos alunos, construindo as definições e conceitos geométricos pretendidos, no caso, o circuncentro como um dos pontos notáveis do triângulo.

Neste processo também ocorreram entraves para a continuidade do desenvolvimento da resolução das tarefas propostas. Destaca-se a necessidade de aprimorar o vocabulário geométrico dos alunos, à medida que os alunos perguntaram a respeito de algumas palavras e foram incentivados a pesquisar no material disponibilizado (internet, apostila, dicionário).

Outra dificuldade constatada foi a questão de explanação através da escrita sobre um conteúdo apreendido. A maior parte dos alunos apresentou limitações nesse momento: uns por ter dificuldade de se expressar na redação das respostas e argumentações e outros por indisposição. Foi de grande importância a postura mediadora da professora-pesquisadora para que os estudantes compreendessem a importância da linguagem matemática escrita em aulas de matemática, disciplina que culturalmente é caracterizada como a ciência dos números e formas.

Para a professora-pesquisadora o processo de formulação de problemas foi também uma atividade desafiadora, pois com as demandas educacionais vigentes, a autoria de propostas de tarefas fica frequentemente a cargo dos autores dos mais diversos materiais didáticos disponíveis nos diferentes contextos escolares.

Referências

DUTENHEFNER, F.; CADAR, L. **Encontros de geometria:** parte 1. Rio de Janeiro: IMPA/OBMEP, 2015.

GALERA, S.I.N. **Ensino-Aprendizagem-Avaliação:** O circuncentro nas tarefas via resolução de problemas. 116f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia, Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba, 2018. Disponível em: https://repositorio.ufscar.br/bitstream/handle/ufscar/10629/DISSERTA%c3%87%c3%83O%20PARA%20Reposit%c3%b3rio.pdf?sequence=1&isAllowed=y

NACARATO, A.M. *et al*. Modalidades de pesquisas em educação matemática: um mapeamento de estudos qualitativos do GT-19 da Anped. In: REUNIÃO ANUAL DA ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA EM EDUCAÇÃO, 28.,

ISSN 2525-7056

2005, Caxambu. **Anais...** 19p. Caxambu, 2005. Disponível em: http://docplayer.com.br/8989953-Modalidadades-de-pesquisas-em-educacao-matematica-um-mapeamento-de-estudos-qualitativos.html. Acesso em: 14 set.2021.

ONUCHIC, L.R. Ensino-Aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M.A.V. (org). **Pesquisa em Educação Matemática:** Concepções & Perspectiva. São Paulo, SP: Editora UNESP, 1999, p.199-220.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Formação de Professores – Mudanças Urgentes na Licenciatura em Matemática. In: FROTA, M. C. R.; NASSE, L. (Org). **Educação Matemática no Ensino Superior:** pesquisas e debates. Recife: SBEM, 2009, 169-187.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo:** Matemática e suas tecnologias – Ensino Fundamental (Ciclo II) e Ensino Médio. Coordenação de área: Nilson José Machado. 1ª ed. atual. São Paulo, SEE, 2012. 72p.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação do Estado. **Material de apoio ao Currículo do Estado de São Paulo - Caderno do Professor:** 6º ano do Ensino Fundamental, Matemática. São Paulo: SEE, 2014-2017, v.1.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação do Estado. **Material de apoio ao Currículo do Estado de São Paulo - Caderno do Professor:** 6º ano do Ensino Fundamental, Matemática. São Paulo: SEE, 2014-2017, v.2.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação do Estado. **Material de apoio ao Currículo do Estado de São Paulo - Caderno do Professor: 7º** ano do Ensino Fundamental, Matemática. São Paulo: SEE, 2014-2017, v.1.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação do Estado. **Material de apoio ao Currículo do Estado de São Paulo - Caderno do Professor: 8º** ano do Ensino Fundamental, Matemática. São Paulo: SEE, 2014-2017, v.2.

NOTAS

IDENTIFICAÇÂO DO TEXTO: O presente texto é um recorte da pesquisa “Ensino-Aprendizagem-Avaliação: O circuncentro nas tarefas via resolução de problemas”, dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat) apresentado na UFSCar-campus Sorocaba, em 31/08/2018, elaborada sob orientação do Professor Dr. Paulo César Oliveira.

IDENTIFICAÇÃO DE AUTORIA

Sandra Iris Naveiro Galera. Discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), SP, Brasil.
E-mail: sandranave@hotmail.com
https://orcid.org/0000-0003-4493-6700

Paulo César Oliveira. Doutor. Docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), SP, Brasil.
E-mail: paulooliveira@ufscar,br
https://orcid.org/0000-0003-2514-904X

AGRADECIMENTOS
Os autores agradecem aos idealizadores do Profmat e ao corpo docente da Universidade Federal de São Carlos (UFSCar).

FINANCIAMENTO
O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Não se aplica.

EDITORES
Patricia Helena Mirandola Garcia, Eugenia Brunilda Opazo Uribe, Gerson dos Santos Farias.

HISTÓRICO
Recebido em: 15/09/2021 – Aprovado em: 23/10/2021 – Publicado em: 15/12/2021.

COMO CITAR
GALERA, S. I. N; OLIVEIRA, P. C. Pontos Notáveis do Triângulo: Um Estudo através da Resolução de Problemas. **Revista ENSIN@ UFMS**, Três Lagoas, v. 2, número especial, p. 119-142. 2021.

INVESTIGAÇÃO COM O PROBLEMA DO MAPA DO TESOURO

INVESTIGATION WITH THE TREASURY MAP

Gustavo Rosas Rodrigues[1]

José Carlos Pinto Leivas[2]

Lidiane Buligon[3]

RESUMO: Apresenta-se, neste artigo, uma pesquisa de cunho qualitativo, recorte de uma dissertação de mestrado do primeiro autor, a qual teve por objetivo analisar como estudantes do Ensino Médio realizam uma atividade investigativa na resolução do problema clássico, 'A Caça ao Tesouro', adaptado em uma situação real no Parque São Luiz, pertencente à escola. A pesquisa foi realizada durante o mestrado e o recorte aqui adaptado explorou como metodologia de ensino a Investigação Matemática. Os sujeitos foram 10 estudantes dos três níveis do Ensino Médio de uma escola privada no interior gaúcho, na qual o primeiro autor é professor e líder de um grupo específico criado para resolver problemas curiosos, os quais retomam e complementam temas do currículo do referido nível de ensino. Os resultados da pesquisa mostraram que os estudantes compreenderam o problema original adaptado às suas realidades, elaboraram estratégias de busca ao tesouro e o encontraram, atingindo o objetivo proposto. Conclui-se, além disso, que os fatos históricos trazidos pelo professor os motivaram a resolver o problema adaptado criativamente e com entusiasmo o que nem sempre ocorre em aulas convencionais. Dessa forma, a metodologia de Investigação Matemática mostrou-se eficiente para os sujeitos envolvidos na pesquisa.

PALAVRAS-CHAVE: Caça ao tesouro. Investigação matemática. Ensino médio. História da matemática.

ABSTRACT: This article presents a qualitative research, part of a master's thesis by the first author, which aimed to analyze how high school students carry out an investigative activity in solving the classic problem, 'The Treasure Hunt', adapted in a real situation in Parque São Luiz, belonging to the school. The research was carried out during the master's degree and the clipping adapted here explored as a teaching methodology the Mathematical Investigation. The subjects were 10 students from three levels of high school from a private school in the interior of the state of Rio Grande do Sul, in which the first author is a teacher and leader of a specific group created to solve curious problems, which retake and complement curriculum themes at that level of teaching. The research results showed that the students understood the original problem adapted to their realities, elaborated treasure search strategies and found it, reaching the proposed objective. It is also concluded that the historical facts brought by the teacher motivated them to solve the problem creatively and enthusiastically adapted, which does not always occur in conventional classes. Thus, the Mathematical Investigation methodology proved to be efficient for the subjects involved in the research.

KEYWORDS: Treasure hunt. Mathematical research. High school. History of Mathematics.

[1] Universidade Federal de Santa Maria. E-mail: gus_santacruz@yahoo.com.br
https://orcid.org/0000-0003-0172-8389
[2] Universidade Franciscana. E-mail: leivasjc@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-6876-1461
[3] Universidade Federal de Santa Maria. E-mail: profbuligon@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-5907-3584

Informações completas da obra no final do artigo

Introdução

Embora ainda perdure no cenário nacional referências de que há abandono no ensino de Geometria, muitas práticas e investigações estão surgindo a respeito, especialmente no que se refere à utilização da Geometria Dinâmica no enfrentamento de resolução de problemas tradicionais na Matemática dedutiva, em especial. A filosofia, tanto geral, quanto da Matemática, em sua forma dedutiva, particularmente, pode ser interpretada à luz dos tempos atuais para a Educação Matemática e *softwares* como o Cabri, o Geogebra, o Poly, dentre outros, tendem a favorecer a evolução do ensino desta área.

Lakatos (1978), um clássico, no livro A Lógica do Descobrimento Matemático - Provas e Refutações não deixa de ser atual na medida em que o professor se volta a ele para desenvolver temas clássicos à luz de novas metodologias em complementação às tecnologias, como, na investigação matemática ou resolução de problemas. Ao tratar sobre os enfoques dedutivistas e heurísticos, o autor afirma: “A metodologia euclidiana desenvolveu certo estilo obrigatório de apresentação. Vou designá-lo de ‘estilo dedutivista’. Esse estilo começa com uma lista laboriosamente feita de *axiomas*, *lemas* e/ou *definições*” (p. 185). Percebe-se, na referida citação, que essa forma de desenvolver Geometria, possa ser o que afasta os estudantes da descoberta no fazer geométrico.

Em relação ao estilo heurístico, o autor afirma que ele acentua, ao contrário do estilo dedutivista, o qual “[...] rompe as definições geradas pela prova dos antepassados, apresenta-as no vazio, de modo artificial e autoritário, ocultando os contraexemplos globais que conduziram a descobrimentos” (LAKATOS,1978**,** p. 188). O autor enfatiza a situação problema a partir da lógica que origina um novo conceito e isso é algo que se preconiza atualmente na questão do aluno ser o construtor do seu próprio conhecimento.

A Base Nacional Curricular Comum (BNCC) enfatiza para o ensino fundamental que “[..] a aproximação da Álgebra com a Geometria desde o início do estudo do plano cartesiano [...]” (BRASIL, 2017, p. 272). Indica, além disso, que Geometria não pode ser restringida a mera aplicação de fórmulas de áreas e volumes, por exemplo. Recomenda, ainda, que “os recursos didáticos, como malha quadriculada, ábacos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e *softwares* de geometria dinâmica, têm um papel essencial para a compreensão das noções matemáticas” (p. 276).

Relacionado às habilidades e competências para o ensino médio, destaca-se na BNCC:

1. Utilizar **estratégias**, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades quotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou **tecnológicas**, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
2. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, **construir modelos** e **resolver problemas** em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e adequação das soluções propostas, a fim de construir argumentação consistente.

A partir desses pressupostos indicados por documentos oficiais, Rodrigues (2014) afirma que,

> com o passar dos anos, foram sendo criadas novas aplicações para o estudo da Geometria. Além disso, estudos sobre novas geometrias foram sendo desenvolvidos e, com isso, esse ramo da Matemática foi ganhando cada vez mais importância. No ensino superior, é relevante a ênfase que se dá ao estudo da Geometria. O próprio PROFMAT é um exemplo disso, pois oferece disciplinas que propiciam ao mestrando um aprofundamento nos quesitos tangentes à Geometria (p. 14).

Assim, justifica-se o presente artigo, que apresenta um recorte adaptativo da dissertação de mestrado do primeiro autor, que investigou de que forma um grupo de estudantes do ensino médio adaptou a resolução de um problema clássico para a atualidade com o uso da Geometria Dinâmica oferecida pelo *software* Geogebra. Neste artigo deixou-se de analisar as questões relativas à tecnologia e objetivou-se analisar como estudantes do ensino médio realizam uma atividade investigativa na resolução do problema clássico, 'A Caça ao Tesouro', adaptado em uma situação real no Parque São Luiz, pertencente à escola.

Na sequência, apresenta-se alguns pressupostos teóricos que nortearam a pesquisa de mestrado, com um recorte sobre Geometria e Geometria Analítica, temas abordados na pesquisa.

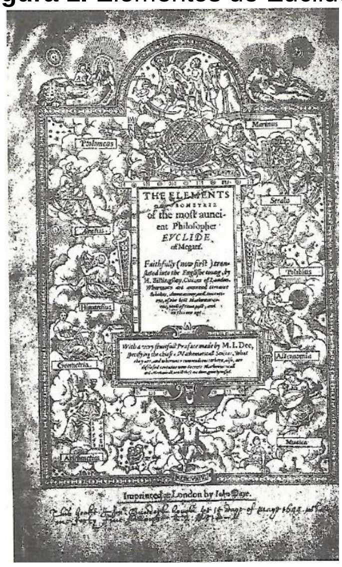
Revisitando a literatura

No histórico da Geometria encontra-se em Boyer (2010) informações de que as civilizações egípcia e babilônica deixaram para a humanidade documentos comprovando conhecimentos importantes para tal área, os quais se propagaram até os dias atuais. Um trabalho conhecido é o de Hipócrates, ao se referir a Tales de Mileto como sendo aquele que introduziu Geometria na Grécia. Porém, outros como Arquimedes e Apolônio têm pouca citação na História da Matemática.

Ao analisar um texto histórico sobre o desenvolvimento da Geometria, os estudantes podem acompanhar o desenvolvimento do programa pelo professor, explorando as atividades que envolvem os seguintes conceitos geométricos: noções e proposições primitivas (ponto, reta, plano); segmento de reta; ponto médio; distância entre dois pontos; perpendicularidade; rotação e ângulos, dentre outros. Esses lhes permitirão desenvolver conteúdos geométricos mais avançados no transcorrer do ensino médio e superior. Assim, recorrer à construção histórica da Geometria é relevante na formação do indivíduo.

Voltando a Boyer (2010), consta que Pitágoras de Samos deu nome a um dos mais importantes teoremas sobre o triângulo retângulo. Com isso inaugurou-se um novo conceito para demonstrações em Matemática. Enquanto a escola pitagórica constituía uma espécie de seita filosófica, envolvendo em mistério seus conhecimentos, os “Elementos” de Euclides (Figura 1) representavam a introdução de um método consistente que contribui há mais de vinte séculos para o progresso das ciências.

Figura 1. Elementos de Euclides



Fonte: Eves (2004, p.172).

A respeito de ensaios sobre o modelo axiomático constantes dos Elementos, Reis (1996) diz que eles partem de conceitos e proposições, admitidos sem demonstração, denominadas postulados ou axiomas para a construção, de maneira lógica, de toda a obra. O autor afirma que, para isso, são necessários três conceitos fundamentais (o ponto, a reta e o círculo) e cinco postulados. Os postulados são os fundamentos para o estudo da Geometria Euclidiana. Não se pode ignorar a existência de geometrias não euclidianas, as quais surgiram, principalmente, dos questionamentos sobre o quinto desses postulados. Matemáticos tentaram demonstrar que não se tratava de um postulado e sim de um teorema. Nessas tentativas, uns o negavam, ou seja, não existir uma única paralela a uma reta dada passando por um ponto fora dela e outros, que existia mais de uma. Com isso, foram criadas as duas principais geometrias denominadas Não-Euclidianas: Elíptica e Hiperbólica.

A Geometria Analítica, ou Geometria das Coordenadas, seguiu a evolução histórica da Geometria, agregando ferramentas para a resolução de problemas geométricos, a saber, a conectando com a Álgebra. Reciprocamente, a Geometria Analítica fornece interpretações geométricas para questões algébricas. Tal conexão entre as duas áreas tornou-se ferramenta importante para o desenvolvimento da própria Matemática.

De acordo com Roque (2012), foram os gregos que deram à Geometria seu caráter de ciência dedutiva. No entanto, faltava, ainda, à Geometria grega o que viria a ocorrer com a Álgebra estabelecendo um princípio unificador de forma operacional. Os gregos não eram bons o suficiente em Álgebra sendo que somente no século XVII que ela estaria razoavelmente aparelhada para uma fusão criativa com a Geometria.

O fato da inexistência de condições para uma descoberta não elimina a genialidade de um estudioso para outras. A Geometria Analítica corresponde a isso, pois uma vez que é creditada a Pierre de Fermat (1601-1665) e René Descartes (1596-1650) a responsabilidade por esse avanço científico. Fermat e Descartes não trabalharam juntos: a Geometria Analítica é um dos muitos casos, em ciência, de descobertas simultâneas e independentes ao longo da História da Matemática. Outro exemplo foi na criação de uma das Geometrias Não-Euclidianas, a Hiperbólica.

Atualmente, Geometria Analítica tem pouca similaridade com as contribuições oriundas da sua criação por Fermat e Descartes. Uma marca mais atual deste fato corresponde ao uso de um par de eixos ortogonais, o que não era utilizado por nenhum dos dois. Nenhum desses criadores teve a ideia de centrar suas descobertas na utilização de equações para identificar curvas e superfícies. Coube a Fermat chegar à essa ideia, enquanto que Descartes voltou-se para a notação algébrica.

Na dissertação, da qual é feito este recorte, foi adotado o sistema de coordenadas cartesianas, o qual consiste num par de eixos perpendiculares e orientados denotados por OX e OU, contidos num plano e com a mesma origem O. Recorreu-se às coordenadas cartesianas com o intuito de resolver problemas de Geometria, unindo os fatos iniciais da Geometria Analítica aos resultados básicos da Geometria Euclidiana. No entanto, este não é o único método, por exemplo, existe o de coordenadas polares.

No que diz respeito à Investigação Matemática, como metodologia de ensino, Ponte *et al*. (2005) afirmam que “Para os matemáticos profissionais, investigar é descobrir relações entre objetos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades” (p. 13). Isso vai ao encontro do indicado por Lakatos (1978), de ser uma ciência rigorosa como a formulada por Euclides, mas também de aparecer como experimental. Isso é reiterado por Polya (1887-1985), além de Bento de Jesus Caraça (PONTE *et al*., 2005).

A Investigação Matemática, geralmente, é realizada em torno de um ou mais problemas. Portanto, “o conceito de investigação matemática, como atividade de ensino-aprendizagem, ajuda a trazer à sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa” (PONTE *et al*., 2005, p. 23). Nessa direção o autor informa que o aluno vai ser chamado para “agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e professores” (p. 23).

Por tais apontamentos, a proposta de realizar uma investigação, adaptada do clássico problema apresentado na presente pesquisa, a saber. “A Caça ao Tesouro”, tem a ver com tais propósitos sugeridos pelo autor dessa metodologia, pois foram aplicadas as três fases indicadas: (a) introdução da tarefa, em que o professor faz a proposta à turma., oralmente ou por escrito; (b) realização da investigação, individualmente ou em grupos ou com toda a turma; (c) discussão dos resultados, em que os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado (PONTE *et al*., 2005). Assim, justifica-se o recorte que se apresenta no presente artigo.

Procedimentos metodológicos

A pesquisa realizada tem abordagem qualitativa no sentido apontado por Severino (2016, p. 125): "[...] referir-se a conjuntos de metodologias, envolvendo, eventualmente, diversas referências epistemológicas". É participante, pois o "pesquisador coloca-se numa postura de identificação com os pesquisados" (Idem, p.126), uma vez que o primeiro autor é o professor dos sujeitos investigados e passou a interagir com os mesmos acompanhando e realizando a atividade em todos os momentos da investigação.

A coleta de dados foi abrangente, incluindo as conversações entre o pesquisador e os sujeitos da pesquisa, registros das considerações do professor e imagens capturadas. Segundo Myers (2017, p. 279), não existe uma listagem que das características relevantes para a análise de conversação a ser feita a partir da coleta de dados, ou seja, vai desde um "'oh' até risos, para avaliações de conclusões". Essa é importante na medida em que o pesquisador vai desde o que os sujeitos decidem sobre quem vai falar e como os grupos se relacionam com os que já falaram. Por sua vez, os participantes buscam decisão de qual tópico irão falar, especialmente no que for mais concreto. O pesquisador utilizou seu diário de bordo para o registro das conversações que desenvolvia com os estudantes durante a realização. Também, para esclarecer algumas dúvidas, posteriormente, em aulas subsequentes, voltou a indagá-los. Além disso, em uma segunda etapa, os mesmos puderam registrar a solução no *software* Geogebra, proporcionando ao professor outros olhares (o que não é registrado neste trabalho, por limitações, como explicitado).

<u>O cenário da pesquisa</u>

Quanto ao cenário da presente pesquisa, ela foi realizada com um grupo de 10 estudantes do ensino médio, participantes de um Clube de Matemática em uma escola privada da região central do Rio Grande do Sul, a qual tem filosofia marista. Esses serão denotados por Aluno 1, Aluno 2, ..., Aluno 10, a fim de evitar identificações. O primeiro autor é o professor desses alunos e tem por metodologia em suas aulas realizar atividades extraclasse de modo a estimulá-los a desenvolver atividades criativas que possam ilustrar os conteúdos envolvidos no referido nível de escolaridade, em conexão com a filosofia marista que orienta este espaço educacional. Há representação dos três anos no grupo e, quando o professor vai desenvolver um conteúdo que esteja envolvido em uma dessas atividades, os que participaram do projeto relacionado auxiliam o professor como monitores.

Dessa forma, foi proposta uma atividade adaptada do problema já especificado. Preliminarmente, foi distribuído um texto envolvendo os aspectos históricos relativos ao tema para uma leitura em casa. Em função da principal característica da filosofia marista ser a simplicidade, o tesouro consistiu em localizar, simbolicamente, as vestimentas antigas utilizadas pelos religiosos. Ao final, foi realizada uma atividade recreativa para reativar a mística do hábito utilizado por eles.

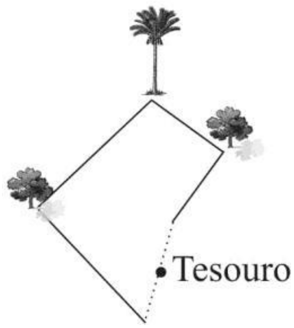
Como nem todos conheciam o *software* GeoGebra, que seria utilizado, o professor fez uma atividade exploratória no laboratório de informática da escola para familiarizar a todos com as ferramentas disponível no aplicativo, o que não fará parte deste recorte feito da dissertação, ficando para um próximo artigo.

<u>O problema original</u>

A primeira referência ao problema foi encontrada em Barbeau (1989), cuja adaptação segue traduzida:

*Um tesouro foi enterrado em uma ilha e foi feito um mapa de sua localização. As instruções contidas no mapa dizem que, ao desembarcar na ilha, avista*m-*se imediatamente dois grandes carvalhos e uma palmeira, conforme ilustrado na Figura 2.*

Figura 2. Representação do Mapa do Tesouro

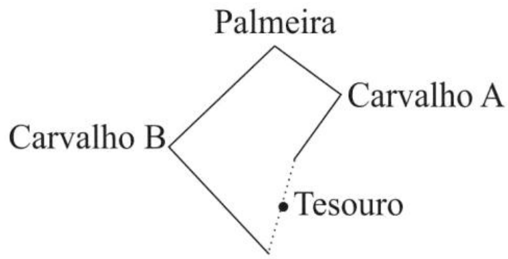


Fonte: Os autores.

O tesouro está enterrado em um ponto que pode ser encontrado da forma escrita a partir da sequência:

1. Partindo da palmeira, caminha-se até o carvalho A (Figura 3) contando os passos.

Figura 3. Mapa sistematizado



Fonte: Os autores.

2. Chegando ao carvalho, deve-se girar para a direita 90º e caminhar o mesmo número de passos e, onde chegar, deve-se fazer uma marca.
3. Voltando novamente à palmeira, caminha-se até o carvalho B contando os passos; gira-se à esquerda 90º e caminha-se o mesmo número de passos, fazendo-se uma marca nesta posição.
4. O tesouro está enterrado exatamente na reta que liga as duas marcas e à mesma distância das duas.

Consta que, em Barbeau (1989), depois de muito tempo, exploradores encontraram o mapa e decidiram ir à ilha resgatar o tesouro. Ao chegarem, tiveram uma desagradável surpresa. Os carvalhos ainda estavam lá, mas a palmeira havia desaparecido. Os exploradores não desanimaram e, depois de pensar um pouco, tiveram uma ótima ideia para resolver o problema de modo bastante prático, o que, no entender dos autores do artigo constitui um problema de Investigação Matemática relevante a ser explorado no ensino médio a fim de resgatar, inicialmente, a questão axiomática da Geometria Euclidiana, bem como um indicativo para incentivá-los para o processo dedutivo na Geometria.

Com a finalidade de estimular os participantes para a tarefa, foi repassada a história e assim responderem: como os exploradores fizeram para encontrar o lugar onde o tesouro estava enterrado e recuperá-lo mesmo sem a palmeira?

Como a escola havia completado 110 anos em 2013, muitas atividades alusivas foram realizadas desde o ano anterior, quando, ao final deste ano foi o lançamento de um livro comemorativo. O mesmo apresentava a história do colégio e ressaltava sua importância para a comunidade em que está inserida. Para relacionar o aniversário da instituição, o lançamento do livro, os ideais do colégio e a Matemática, foi proposta a seguinte adaptação ao problema original.

Quando os primeiros irmãos maristas chegaram à cidade, um tesouro foi enterrado no campo de futebol do Parque São Luiz. Os irmãos confeccionaram um mapa de sua localização, o qual foi encontrado durante as pesquisas realizadas para a produção do livro comemorativo ao 110° aniversário da escola.

No mapa estão as instruções com a localização do tesouro, as quais indicam que, ao chegar ao campo de futebol, se avista imediatamente as duas goleiras e uma palmeira. O tesouro está enterrado em um ponto que pode ser encontrado da forma descrita abaixo:

“Partindo da palmeira, caminhe até a primeira trave da goleira a sua esquerda, contando os passos. Chegando lá, gire para a direita 90º e caminhe o mesmo número de passos. Onde chegar, faça uma marca. Voltando novamente à palmeira, ande até a primeira trave da goleira à sua direita contando os passos. Chegando lá, gire à esquerda 90º e caminhe o mesmo número de passos, fazendo uma marca nesta posição. O tesouro está enterrado exatamente na reta que liga as duas marcas e à mesma distância das duas” (problema adaptado).

<u>O objetivo da pesquisa</u>

Para cumprir com tal objetivo, foram definidas atividades com os seguintes objetivos específicos:

- elaborar estratégia para determinar pontos no plano a partir de certos indicativos: árvore, goleira 1, goleira 2 e tesouro;

- analisar se a localização do ponto de partida para a busca ao tesouro não interfere na solução matemática.

Na sequência do artigo são apresentados os detalhamentos de cada parte do recorte da pesquisa, constante do presente artigo, por atividade realizada e a respectiva análise.

Discussão e Resultados

É fato que alguns imprevistos surgem no cotidiano de uma sala de aula, e isso não deixou de ocorrer. A primeira atividade estava prevista para a tarde do dia 6 de maio, aproveitando para comemorar a passagem do Dia Nacional da Matemática. Devido ao mau tempo, a atividade precisou ser adiada. Diante da impossibilidade de ser realizada a saída, recorreu-se ao laboratório de informática, o que acabou não atrapalhando o andamento do trabalho e tornou-se útil para a sequência do mesmo. Essa deveria ter sido a segunda atividade da pesquisa.

Atividade 1 – Primeiro contato com o GeoGebra

Antecipou-se a ida do grupo ao laboratório de informática e, assim, foi feita a introdução ao GeoGebra. Os estudantes tiveram um período de aula para manipularem o *software* livremente. Em seguida, foi distribuído um material impresso com orientações sobre o uso de algumas ferramentas do programa. Os estudantes tiveram um primeiro contato com o GeoGebra e, ao final do encontro, foi explicado que a atividade exigiria o uso desse programa sendo solicitado que instalassem o aplicativo em seus computadores pessoais para estudos complementares.

Esta etapa mostrou a facilidade com a qual os estudantes iniciaram os trabalhos com o GeoGebra. Isso é mais um indicativo de que o *software* é uma ferramenta viável para o ensino da Matemática no ensino médio. Na Figura 4 ilustra-se o laboratório de informática do colégio e a turma com a qual o trabalho foi aplicado.

Figura 4. Primeiro contato com o aplicativo

Fonte: Dados da pesquisa.

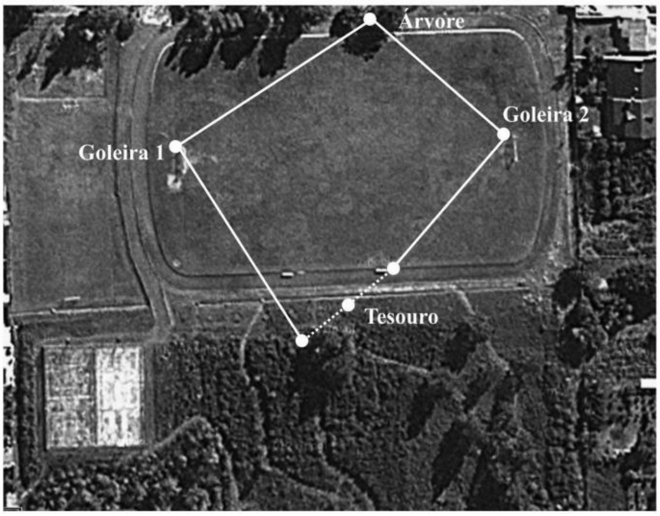
.

Assim, o objetivo da atividade foi alcançado uma vez que os alunos passaram a utilizar de forma plenamente satisfatória o *software*.

Atividade 2 – elaborando estratégias de solução

O objetivo dessa atividade foi obter uma estratégia para determinar um ponto específico no plano, atendendo certas orientações fornecidas, como indicado na Figura 5.

Figura 5. Sistematização proposta (Foto: Google)



Fonte: Dados da pesquisa.

Na Figura 5 ilustra-se um esquema ao qual os estudantes seriam desafiados a criarem outro semelhante, explorando ferramentas do Geogebra adquiridas na atividade 1. Para sua realização, os participantes se organizaram em grupos e escolheram uma estratégia para localizar o ponto indicado no problema adaptado, ou seja, um ponto de referência desconhecido. Nessa atividade foram envolvidos os seguintes conteúdos: ponto médio; distância entre dois pontos; perpendicularidade; rotação. Com isso, os estudantes exploraram o senso de localização e locomoção de forma intuitiva. Isso corrobora com os pressupostos da Investigação Matemática, como metodologia de ensino e de aprendizagem e vai ao encontro do conteúdo de Geometria Analítica.

A atividade teve a duração de três aulas (150 minutos) e, para sua execução, foi fornecido: cópia impressa das orientações, incluindo o Mapa do Tesouro; transporte da turma até o Parque São Luís, onde seria realizada a atividade.

Durante o percurso, os estudantes se organizaram em grupos (dois com três e um com quatro), estudaram o material fornecido, discutiram entre eles e elaboraram suas estratégias, o que vai ao encontro do que afirma Ponte *et al*. (2005, p. 23) “agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas [...], mas também na discussão e argumentação com os seus colegas e professores” (p. 23). No caso, entre eles, uma vez que o professor os deixou à vontade, sem interferir. Na Figura 6, constam os dados que nortearam os estudantes.

Figura 6. Instruções para a caça ao tesouro

Quando os primeiros Irmãos Maristas chegaram a Santa Cruz do Sul, um tesouro foi enterrado no campo de futebol do parque Marista São Luís e, em seguida, foi feito um mapa de sua localização. Hoje, 110 anos depois, um mapa foi encontrado durante as pesquisas realizadas para a confecção do livro comemorativo ao 110° aniversário do Colégio Marista São Luís. O mapa tem instruções com a localização do tesouro. Tais instruções dizem que ao chegar no campo do parque, avista-se imediatamente as duas goleiras do campo e também uma palmeira. O tesouro está enterrado em um ponto que pode ser encontrado da forma descrita abaixo:

MARISTA

"Partindo da palmeira caminhe até a primeira trave da goleira a sua esquerda contando os passos. Chegando lá, gire para a direita 90º e caminhe o mesmo número de passos. Aonde chegar, faça uma marca. Voltando novamente à palmeira, caminhe até a primeira trave da goleira a sua direita contando os passos. Chegando lá, gire à esquerda 90º e caminhe o mesmo número de passos e faça uma marca nesta posição. O tesouro está enterrado exatamente na reta que liga as duas marcas e à mesma distância das duas marcas."

Fonte: Dados da pesquisa.

Como era necessária a descoberta por equipes, um dos grupos fazia a busca e os outros ficaram aguardando seu retorno na sede social. Para aumentar a motivação e agilização, cada grupo teve até 20 minutos para encontrar o tesouro.

O professor acompanhava cada grupo durante a busca e questionava sobre a existência da palmeira (ponto inicial da procura), fazendo com que os estudantes percebessem que não existe mais tal referência e persuadia o grupo a escolher um ponto de partida qualquer. Para a atividade fornecer mais subsídios para a discussão final, ele induzia os grupos a iniciarem a busca pelo tesouro a partir de pontos de referência diferentes.

Depois que todos os grupos terminaram a sua caça ao tesouro, um representante de cada trio (ou quarteto) explicou para o restante da turma qual foi a estratégia utilizada para achar o local onde o tesouro estava enterrado. Enquanto os estudantes teciam explicações, o professor destacava o ponto inicial que cada grupo havia escolhido. Ele dava ênfase, nesse momento da atividade, ao fato de o tesouro não ter sido trocado de lugar durante a busca. Essa intenção era de que os estudantes percebessem que, mesmo desconhecendo o ponto inicial, era possível encontrar a raridade escondida. Concluindo a atividade, cada grupo deveria, posteriormente, comparar sua solução com as apresentadas pelos demais grupos.

Durante todo o desenrolar da atividade, o professor fomentou discussões matemáticas, incentivou a troca de ideias, valorizou as “ideias erradas”, sempre tentando mostrar aos grupos onde estaria o erro e como corrigi-lo. Enfim, considera-se que o docente deve atuar fortemente no sentido de conduzir os grupos e garantir que os estudantes atinjam o objetivo. Ainda, não é suficiente apenas encontrar o tesouro, mas pensar e conjecturar acerca do problema.

A importância de fazer os registros, tanto por parte do professor quanto por parte dos estudantes é um fator importante de ser levado em consideração a fim de não perder os fatos a serem levados à discussão posteriormente. Portanto, os grupos devem anotar o ponto de partida, o número de passos que deram até cada goleira e o número de passos das marcas até o tesouro. Embora a atividade tenha transcorrido de forma tranquila e produtiva, algumas dificuldades surgiram, sendo a primeira delas a identificação da palmeira, a qual era o ponto inicial para dar início à busca do tesouro (Figura 7).

Figura 7. A dificuldade em identificar a palmeira

Fonte: Dados da pesquisa

Alguns grupos procuraram uma palmeira grande, enquanto outros, uma palmeira mais antiga, dois critérios distintos a serem observados. Um dos grupos percebeu um tronco de árvore cortado e, como era uma árvore aparentemente mais antiga, este grupo escolheu aquele para ser o ponto de partida do grupo (Figura 8).

Figura 8. Tronco cortado ao ponto inicial

Fonte: Dados da pesquisa.

Alguns grupos se subdividiram para que as chances de encontrarem o rumo certo aumentassem. Depois de discutirem sobre qual ponto inicial deveriam tomar, decidiram escolher três pontos de partida diferentes. O professor permitiu a mudança na regra para despertar a curiosidade sobre o fato de todos chegarem ao mesmo local.

A caça ao tesouro foi feita de forma independente pelos grupos, sendo que um não acompanhava os outros. Foram anotados os nomes dos integrantes para marcar o local final que cada trio chegou, seguindo as instruções recebidas do professor.

Quando todos os grupos terminaram a caçada, os estudantes foram para o campo e ficaram no ponto ao qual haviam determinado para ser o local do tesouro escondido. Diferentemente do esperado, nem todos ficaram na mesma posição. Apenas dois estudantes de um dos grupos que se subdividiu encontraram o mesmo lugar. Todos os demais grupos acharam locais diferentes, porém com pequena divergência de distância entre eles (Figura 9).

Figura 9. Tronco cortado ao ponto inicial

Fonte: Dados da pesquisa.

Durante a discussão final, os estudantes localizaram o mesmo ponto final, lideraram a discussão na tentativa de convencer os demais colegas de que o ponto inicial era indiferente. Neste momento, a intervenção do professor se fez presente para informar que, de fato, não importava o ponto escolhido para iniciar a busca. Acataram a explicação passando a discussão sobre o porquê ter ocorrido desencontro entre os destinos de cada trio. Desejaram conhecer quais os motivos os levaram a lugares diferentes, ao mesmo tempo em que elencaram algumas possíveis causas para o desencontro, como as que seguem:

- dificuldade de andar em linha reta;

- o fato de um trio ter escolhido uma palmeira que ficava abaixo do nível do campo (portanto, precisou percorrer uma subida até chegar à trave) e isso deu diferença no número de passos dados após a rotação de 90º;

- dificuldade de determinar o ângulo de 90º;

- o fato de um estudante ter contado os passos até a goleira da direita e outro estudante ter contado os passos até a goleira da esquerda;

No momento em que o professor disse que o ponto de partida não iria interferir na chegada ao destino correto, todos ficaram convencidos. No entanto, apresentaram outros questionamentos sem deixar de aceitar a explicação do professor, mesmo sem ele ter usado prova matemática do fato. No momento da discussão, o professor foi bastante enfático ao dizer que eles não poderiam ter se convencido com tanta facilidade. Chama-se atenção para o fato de que, na Matemática, se precisa provar os fatos e não apenas acreditar neles. Destaca-se aqui a importância fundamental de explorar ‘provas’ para que o ponto inicial seja indiferente e não influenciar na descoberta do ponto final, sendo esse um dos objetivos da próxima atividade.

<u>Atividade 3 – transportando ao Geogebra as soluções</u>

O objetivo dessa atividade foi obter, pelo uso do aplicativo GeoGebra, uma representação visual da situação vivenciada na Atividade 2. Ao utilizar esse instrumento, um aplicativo dinâmico, os estudantes poderiam perceber que a árvore inicial não importaria para determinar o local onde se encontrava o tesouro.

Na atividade, são desenvolvidos os seguintes conteúdos: ponto médio e rotação.

Para a realização da atividade, esperava-se que os estudantes tivessem adquirido as ferramentas do GeoGebra, exploradas na primeira parte do trabalho investigativo. Além disso, era esperado que eles tivessem domínio dos seguintes conteúdos, já desenvolvidos em anos anteriores e constante do currículo escolar: noções e proposições primitivas (ponto, reta, plano); segmento de reta; ângulos; perpendicularidade; domínio de ferramentas do GeoGebra.

A atividade teve a duração prevista de duas aulas (100 minutos) e foi realizada no laboratório de informática, com os estudantes ocupando as máquinas individualmente. Logo em seguida, solicitaram ao professor para sentarem juntos conforme o grupo que havia realizado a atividade a fim de acompanharem o material escrito e anotações. Foi concedido o que haviam solicitado, porém, todos deveriam realizar as atividades no seu computador e registrá-las para encaminhar ao professor. No entanto, alguns estudantes optaram por fazer individualmente, sem discussões ou trocas com o restante dos componentes de seu grupo.

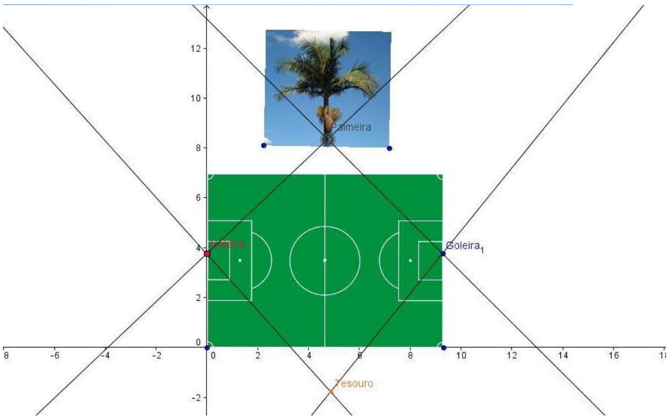
Inicialmente, voltaram à primeira atividade. Foi retomado, pelo professor, o fato de que cada grupo partiu de uma dada árvore; que o tesouro não mudou de lugar bem como as goleiras; e que havia pontos móveis além dos fixos, dentre outros questionamentos.

Apesar das orientações e questionamentos emanados pelo professor e sua expectativa ser que utilizassem o fato do ponto inicial da caça ser indiferente, na prática isso não ocorreu, como é próprio de uma atividade investigativa em que as soluções, muitas vezes, são criativas e fogem ao que o investigador esperava. Entretanto, aspectos relevantes para as conclusões foram expostos, como por exemplo, “devemos começar a atividade marcando o tesouro no GeoGebra?” (Aluno 1)[4]; “podemos colocar o ponto inicial na origem?” (Aluno 2); “podemos colocar o tesouro na origem?” (Aluno 3).

As manifestações desses estudantes mostravam que eles estavam conseguindo relacionar a situação real com uma representação no GeoGebra (Figura 10).

[4] A fim de não identificar os estudantes, os designamos por numerais.

Figura 10. Tronco cortado como ponto inicial



Fonte: Dados da pesquisa.

Entende-se que o objetivo da atividade foi atingido, uma vez que os discentes conseguiram retratar, no aplicativo, a situação vivenciada, repassando ao professor as respectivas soluções.

Por limitação de espaço para o artigo e pelas inúmeras explorações realizadas pelos estudantes, as soluções e respectivas análises constituirão um segundo artigo, no qual os detalhes da exploração no GeoGebra serão feitos.

Considerações Finais

Neste artigo apresenta-se um recorte de uma dissertação de mestrado, que utilizou a Investigação Matemática como metodologia de ensino para resolver um problema adaptado do clássico “Caça ao tesouro” para o ensino médio. Embora a solução do problema original seja conhecida, a adaptação do mesmo exigiu novas estratégias para encontrar a solução. Envolveu um grupo de estudos motivacionais, elaborado pelo primeiro autor e professor das três turmas que se envolveram nas atividades. O grupo é de participação livre e, no presente trabalho, envolveu 10 participantes com estudantes dos três anos.

Entendeu-se que o objetivo geral de analisar como estudantes do ensino médio realizam uma atividade investigativa na resolução de uma adaptação do problema ‘A Caça ao Tesouro’, foi plenamente alcançado. Todos eles se envolveram nas atividades, desde a compreensão do problema e o delineamento de estratégias para a sua realização, como é recomendado na própria metodologia empregada. Foi notável a empolgação dos estudantes, mesmo durante o deslocamento da escola para o local do evento, um parque da própria instituição, mas deslocado da sede, o que exigiu um transporte. No deslocamento havia uma disputa eloquente entre os grupos formados a respeito da intencionalidade de cada um, uma vez que já possuíam certo conhecimento do local.

No início, houve necessidade de alteração/adaptação do plano na sequência das atividades, uma vez que iniciaram, então, pelo reconhecimento, em laboratório, sobre ferramentas do s*oftware*, o que utilizado após a 'caça ao tesouro'.

A análise constante do presente artigo indicou apenas o primeiro movimento exploratório na representação no referido *software* das soluções encontradas pelos grupos formados. Contudo, foi possível intuir que os conhecimentos, inicialmente adquiridos, sobre tal *software* foram suficientes para ilustrar como foi possível traduzirem suas estratégias de solução em uma representação dinâmica. Considerando os registros do pesquisador em seu diário de bordo, as conversações realizadas e as representações feitas pelos grupos, foi possível concluir que todos eles conseguiram esboçar os elementos que nortearam a obtenção do problema.

Como todos os grupos confrontaram suas estratégias com a solução do problema, *in locus*, entendeu-se que o objetivo geral da pesquisa foi alcançado de forma satisfatória. Além disso, a pesquisa mostrou que os fatos históricos trazidos pelo professor motivaram os estudantes a buscarem resolver o problema de forma criativa e com entusiasmo o que nem sempre ocorre em aulas convencionais. Dessa forma, a metodologia de ensino Investigação Matemática mostrou-se eficiente para os sujeitos envolvidos na pesquisa uma vez que as três fases indicadas por Ponte *et al*. (2005) foram observadas, isto é, (a) a introdução da tarefa foi feita por meio da apresentação de um texto histórico pelo professor e discutida oralmente com a turma; (b) a realização da investigação foi realizada por grupos, separadamente; (c) a discussão dos resultados ocorreu quando foi proporcionado aos grupos relatarem suas soluções ao mesmo tempo que promoviam representações das respectivas soluções no *software* GeoGebra.

Referências

BOYER, C.B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blucher, 2010.

BARBEAU, E.J. **Polynomials**. Springer-Verlag, 1989.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2017.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

LAKATOS, I. **A Lógica do Descobrimento Matemático – Provas e Refutações**. (org. WORRAL, J. e ZAHAR, E.). Rio de Janeiro: Zahar, 1978.

MYERS, G. Análise da conversação e da fala. In: BAUER, M.W.; GASKELL, G. **Pesquisa Qualitativa com texto, imagem e som**: um manual prático. 13a. ed. Petrópolis : Vozes, 2. reimpressão 2017.

PONTE, J. P. da; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 1ª ed., Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

RODRIGUES, G. R. **Uma abordagem para o problema do Mapa do Tesouro aplicado ao ensino de Geometria**. Dissertação de Mestrado (Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT- UFSM), 2014, 64p.

REIS, I. **Fundamentos da Matemática**. Editora Moderna, 1996.

ROQUE, T; CARVALHO, J.B.P. **Tópicos de história da Matemática**. Rio de Janeiro: SBM 2012.

SEVERINO, A.J. **Metodologia do trabalho científico**. 24. ed. Revista e atualizada. São Paulo: Cortez, 2016.

NOTAS

IDENTIFICAÇÃO DO TEXTO

O presente texto é uma adaptação de Uma Abordagem para o Problema do Mapa do Tesouro Aplicado ao Ensino da Geometria no Ensino Médio, dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat) apresentado na Universidade Federal de Santa Maria, em 29/08/2014, elaborada sob orientação da Professora Dra. Lidiane Buligon0 e co-orientação da professora Dra. Carmen Vieira Mathias.

IDENTIFICAÇÃO DE AUTORIA

Gustavo Rosas Rodrigues. Professor do Ensino Básico. Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat), Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), Santa Maria, RS, Brasil.
E-mail: gus_santacruz@yahoo.com.br
https://orcid.org/0000-0003-0172-8389

José Carlos Pinto Leivas. Doutor em Educação pela Universidade Federal do Paraná. Professor do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Franciscana (UFN); líder do Grupo de Estudos e Pesquisas em Geometria (GEPGEO), Santa Maria, RS, Brasil.
E-mail: leivasjc@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-6876-1461

Lidiane Buligon. Doutora em Física pela Universidade Federal de Santa Maria. Docente no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat), Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), Santa Maria, RS, Brasil.

E-mail: profbuligon@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-5907-3584

AGRADECIMENTOS
Não se aplica.

FINANCIAMENTO
Não se aplica.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Não se aplica.

EDITORES
Patricia Helena Mirandola Garcia, Eugenia Brunilda Opazo Uribe, Gerson dos Santos Farias.

HISTÓRICO
Recebido em: 15/09/2021 – Aprovado em: 21/11/2021 – Publicado em: 15/12/2021.

COMO CITAR
RODRIGUES, G. R; **LEIVAS, J. C. P; BULIGON, L**. Investigação com o Problema do Mapa do Tesouro. **Revista ENSIN@ UFMS**, Três Lagoas, v. 2, número especial, p. 143-163. 2021.

MODELO DIDÁTICO-PRAXEOLÓGICO PARA ENSINO DE VETORES NO ENSINO MÉDIO: POSSIBILIDADES DE TRABALHOS NA TRANSIÇÃO PARA O ENSINO SUPERIOR

DIDACTIC-PRAXEOLOGICAL MODEL FOR TEACHING VECTORS IN HIGH SCHOOL: POSSIBILITIES FOR WORK IN THE TRANSITION TO HIGHER EDUCATION

Pedro José Defensor Menezes[1]

Edmo Fernandes Carvalho[2]

Lauriclecio Figueredo Lopes[3]

RESUMO: Este artigo traz a proposição de um modelo didático-praxeológico - MPD, para o trabalho com um objeto da Geometria Analítica sob a lente da Teoria Antropológica do Didático - TAD. O objetivo principal foi discutir a possibilidade de trabalho com um modelo didático-praxeológico, embasado na noção de vetores no Ensino Médio, como elemento para mitigar lacunas na transição entre Educação Básica e o Ensino Superior, ou seja, um MDP alternativo aos modelos pautados exclusivamente na Base Nacional Comum Curricular - BNCC. O modelo, o objeto e as tarefas propostas são compreendidos pela TAD, que considera como pressuposto a necessidade de tarefas que evoquem a indissociabilidade entre o saber-fazer e o discurso racional que o justifica. Utilizou-se um método inspirado na análise praxeológica para discutir a viabilidade do MDP, *a priori.* Diante dessas condições, conclui-se que o MDP, pautado na noção de vetores e trabalhado desde o Ensino Médio, pode colocar o estudante em atividade, com praxeologias mais econômicas do ponto de vista cognitivo, nesse nível de escolaridade, mas principalmente no superior.

PALAVRAS-CHAVE: Vetores. Ensino de Matemática. Análise Praxeológica.

ABSTRACT: This article proposes a didactic-praxeological model - DPM, for working with an object of Analytical Geometry under the lens of the Anthropological Theory of Didactics - ATD. The main objective was to discuss the possibility of working with a didactic-praxeological model based on the notion of vectors in High School as an element to mitigate gaps in the transition between Basic Education and Higher Education, that is, an alternative DPM to the models based exclusively on the Base Nacional Comum Curricular. The model, the object and the proposed tasks are understood by the TAD, which considers as an assumption the need for tasks that evoke the inseparability between know-how and the rational discourse that justifies it. A method inspired by the praxeological analysis was used to discuss the feasibility of the MDP, *a priori*. Given these conditions, it is concluded that the MDP based on the notion of vectors worked since high school, can put the student in activity, with praxeologies at this level, but mainly at higher education, which are more economical from a cognitive point of view.

KEYWORDS: Vectors. Teaching of Mathematics. Praxeological Analysis.

[1] Escola Estadual El Shadai. E-mail: pedrojdm@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-3701-8728
[2] Universidade Federal do Oeste da Bahia. E-mail: edmo.carvalho@ufob.edu.br
http://orcid.org/0000-0002-6959-2652
[3] Universidade Federal do Oeste da Bahia. E-mail: lauriclecio@ufob.edu.br
https://orcid.org/0000-0002-3356-5644

● Informações completas da obra no final do artigo

Introdução

Neste artigo, apresentamos um recorte de uma pesquisa de mestrado, realizada pelo primeiro autor, sob a orientação dos coautores, na qual tomou-se como objetivo propor e analisar um modelo didático-praxeológico para o ensino de objetos da Geometria Analítica - GA, que corroboram a transição entre os níveis básico e superior.

Dessa maneira, consideraram-se como problemática didática os aspectos implícitos nas práticas institucionais (escolares ou aquelas relativas à formação docente) no que se refere à transição do Ensino Médio para o Superior. Segundo Menezes (2021), as praxeologias dos estudantes em curso de licenciatura em Matemática, por vezes, são construídas sem um alicerce sólido daquelas possivelmente estudadas na Educação Básica, como no caso do estudo de vetores na Geometria Analítica. Mas isso ocorre, também, em relação a objetos estudados, como no caso das equações das retas, por exemplo.

Tal fato nos chamou a atenção para o que ocorre na transição de um nível de ensino para o outro. O que, por sua vez, levou nosso olhar para os documentos que registram as praxeologias dos dois níveis. Desse modo, a utilização do livro didático nessa investigação se justificou devido à oportunidade de colocar lado a lado as praxeologias que se constroem no Ensino Médio e Superior. Entretanto, neste recorte da investigação, discutido nesse artigo, não tratamos das análises dos livros didáticos do Ensino Médio e Superior, mas optou-se por apresentar as tarefas construídas e/ou adaptadas por Menezes (2021).

É verdade que estamos falando de duas modalidades de ensino diferentes, por isso, a partir daqui, chamaremos de instituições, com objetivos distintos, nos quais naturalmente não encontramos uma abordagem exatamente igual dos saberes da GA. No entanto, há que se considerar que devem existir pontos em comum entre os objetos estudados em ambas as instituições, sendo o Ensino Superior um local para aprofundamento desse estudo.

No entanto, nesse manuscrito, nos propomos a responder quais elementos um modelo didático deve considerar para mitigar lacunas da transição entre Ensino Médio e Superior no estudo de objetos da GA? Isso implica em apresentar um esboço de um modelo didático de referência para ensino de um objeto específico como forma de aprofundar a discussão, o que é feito por meio da apresentação de situações em que o estudo de vetores amplificaria as técnicas de resolução das tarefas de tal modelo, além de se constituir um instrumento de economia cognitiva e fator relevante para mitigar os problemas da transição interníveis.

Para alcançar o objetivo proposto neste artigo, os argumentos apresentados se alicerçam na Teoria Antropológica do Didático - TAD (CHEVALLARD, 1999), que também se constitui como referencial metodológico, haja vista o método de análise (praxeológica) adotado surgir no seio dessa teoria.

Outrossim, a partir de uma análise inspirada na praxeológica *a priori*, mostraremos, neste artigo, que um modelo didático para o Ensino Médio pautado na apresentação de vetores pode suavizar a transição do ensino básico para o superior, ou seja, o modelo de ensino de GA do nível médio não estaria somente alicerçado no plano R^2, mas também no espaço.

Referenciais Teóricos e abordagem metodológica do estudo

Faz-se necessária, para compreensão da investigação cujo recorte é apresentado nesse artigo, a discussão de alguns conceitos que são utilizados e que impactaram na produção dos resultados da pesquisa. Um desses conceitos é o de modelo didático, o qual nós consideramos a primeira noção de base da TAD, fundante para este trabalho.

Assim, compreendemos um modelo didático como uma tentativa de representar os fazeres pedagógicos dos professores (PORLÁN *et al*, 1997; GARCÍA PÉREZ, 2000). Além disso, a ideia de modelo didático também está presente quando nos referimos às tomadas de decisões dos professores, que nem sempre são conscientes, mas que, certamente, integram o fazer pedagógico destes, carregados de crenças, valores e conhecimentos didáticos (GIL-PÉREZ; CARVALHO, 1995).

Na Epistemologia experimental, mais conhecida como Didática da Matemática, fazemos uso do termo modelo didático, mas sem uma definição explícita do que este termo significa. No entanto, encontramos esboços de uma definição em Lucas *et al.* (2014). Assim, na investigação em tela, entendemos um modelo didático como um esquema mediador entre o pensamento e a realidade social na qual o professor está inserido, estrutura na qual se organiza os conhecimentos docentes em torno da missão de difundir os saberes escolares, embasados na epistemologia geral da ciência a ser ensinada.

Vale ressaltar que um modelo didático às vezes assume um *status* de modelo dominante e termina sendo aquele adotado por muitos docentes, independentemente da sua realidade social. De qualquer forma, segundo Chrobak (2006), um modelo didático tem caráter provisional e não representa propriamente a realidade social do professor na tarefa de difundir os saberes escolares, mas uma aproximação com uma determinada realidade.

Do mesmo modo, a noção de modelo didático, de forma simples, nos permite abordar a complexidade da realidade escolar, ao passo que nos auxilia na proposição de estratégias para intervir em tal realidade (GARCÍA PÉREZ, 2000). É possível, na literatura, encontrarmos referência ao modelo didático do professor no sentido de concepções epistemológicas do professor, como em Porlán *et al.* (1997).

No entanto, neste artigo, vamos nos ater a ideia mais ampla de modelo didático (modelo dominante) que revela praxeologias didáticas e matemáticas, não somente de um professor, mas aquilo que foi culturalmente construído e é usado nos fazeres escolares. De maneira mais específica, nos referimos a modelo didático-praxeológico para chamar atenção de que, em uma aula de matemática, o didático não se dissocia do matemático (praxeologia matemática) e é sobre tal modelo que manteremos o foco.

A segunda noção fundante, para compreensão da proposta aqui apresentada, é a de praxeologia. Chevallard (1999), autor da Teoria Antropológica do Didático (TAD), apresenta a referida noção como uma maneira de modelar a atividade matemática de uma pessoa em um determinada instituição. Trata-se do estudo de ações humanas em instituições, mas especificamente da atividade de pessoas diante da matemática modelada em dois blocos: saber-fazer e o saber. Esses blocos deveriam, na teoria, ser indissociáveis. Entretanto, na prática, isso não é tão comum.

Na atividade matemática, uma atividade humana como outra qualquer, uma pessoa é colocada frente a uma tarefa para qual apresentará técnica(s); isso constitui o bloco saber-fazer. Na apresentação de técnica(s), espera-se que a pessoa tente acessar um bloco mais abstrato, o do logos ou tecnológico-teórico que, na prática, se constitui como discurso racional que justifica a(s) técnica(s). Essas noções se justificam na discussão realizada na próxima seção, na medida em que, aponta-se o objeto matemático vetor como ingrediente da técnica, mas também como discurso que justifique esta.

A terceira noção fundamental, empregada na discussão sobre modelos didáticos, é a de relação institucional e pessoal. Um saber, vetores, por exemplo, é um objeto do saber de uma instituição a princípio, se for reconhecido por ao menos uma pessoa desta. Podemos falar de algumas relações institucionais que envolvem pessoa, saber e a própria instituição, mas focaremos na relação pessoal que pode ser alcançada por meio de uma possível implementação do modelo didático aqui proposto.

A ideia do modelo, apresentado a seguir, considera que a relação pessoal dos estudantes no ensino básico e superior com os saberes da Geometria Analítica (GA) precisa ser um ponto crucial da discussão sobre o processo de transição entre os níveis de ensino. Uma vez identificadas algumas fragilidades dessa relação, as tarefas que componham o modelo didático, também praxeológico, podem ser direcionadas; é o que se pretende com a análise feita em torno da ideia de ensino de vetores no Ensino Médio e do tipo de tarefa proposta e analisada neste artigo.

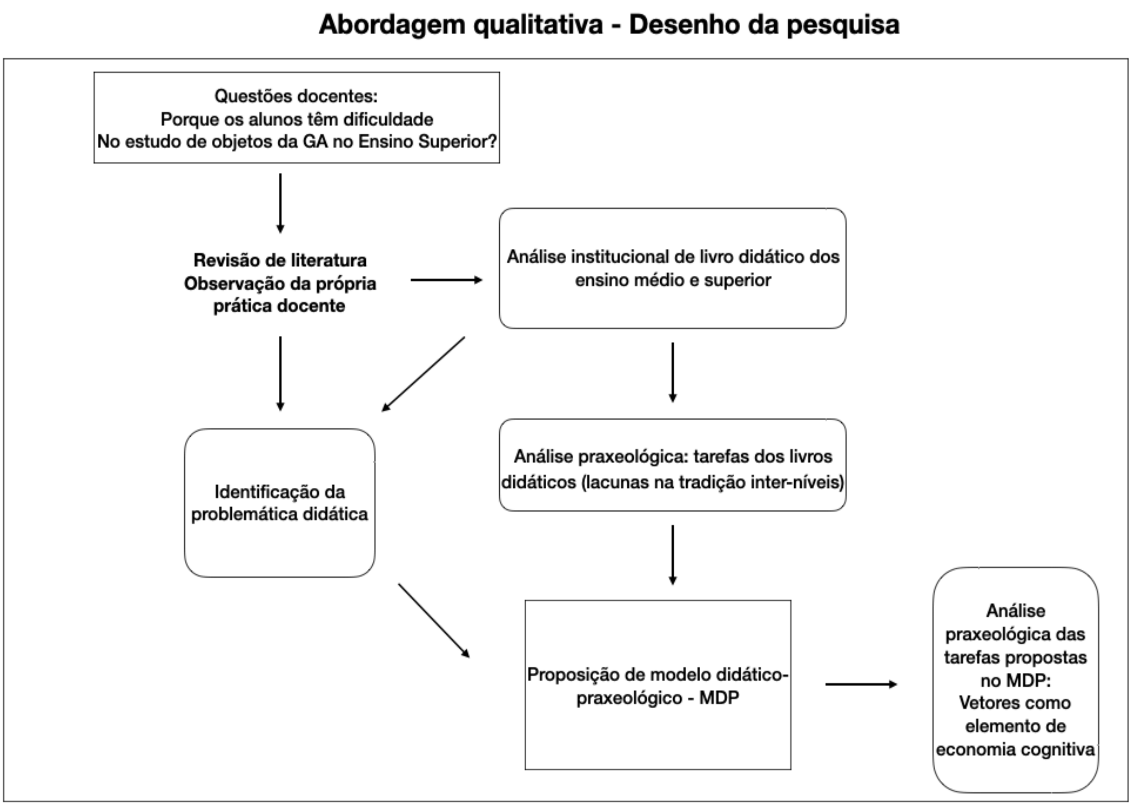
Destarte, a hipótese da parte da investigação que compõe esse recorte sugere que o modelo didático-praxeológico alternativo, apresentado para o ensino de objetos da GA, tem condições de promover alterações significativas nas relações pessoais de estudantes no Ensino Médio e mitiga as dificuldades na transição para o Ensino Superior, promovendo maior aproximação com conceitos a partir da iniciativa de resolver e propor problemas, conjecturar e questionar a natureza do conhecimento estudado; isto porque o modelo em jogo talvez possa estimular tais habilidades pelo tipo de tarefa proposta.

No que tange os aspectos metodológicos deste estudo, pautado em Garnica (2004), destacam-se a abordagem que é de natureza qualitativa; e, como instrumento, a proposição de modelo didático-praxeológico, cuja análise aproxima-se da praxeológica *a priori*. O modelo é constituído basicamente de tarefas cujas técnicas de resolução estão embasadas numa visão vetorial. Tais tarefas foram elaboradas levando-se em consideração as possíveis conexões que podem se estabelecer no Ensino Médio.

Quanto à aproximação com a análise praxeológica, proposta por Matheron (2000), destacam-se as tarefas, as técnicas e, na sequência, o discurso racional que justifica as mesmas, apontando-se as razões para sua integração ao Ensino Básico e as possíveis consequências didáticas.

A Figura 1, a seguir, representa os passos da investigação de modo geral, ou seja, um desenho da investigação que começa no levantamento de questões docentes, normalmente pautadas na observação direta de alguns fatos da sala de aula, e, no caso da análise inspirada na modelo praxeológico, consiste em estudar praxeologias matemáticas que podem ser construídas a partir da experimentação de tarefas do MPD proposto; em outras palavras, uma análise do tipo *a priori*. O termo é emprestado de uma etapa da Engenharia Didática, embasada em Artigue (1988), mas não foi adotada tal abordagem metodológica.

Figura 1. Desenho da pesquisa



Fonte: Os autores.

Cabe ressaltar que a revisão de literatura (não sistemática) contribuiu para melhor delinear o objeto de investigação e configurou a identificação da problemática didática. De acordo com Henriques, Attie e Farias (2007), contribuiu, ainda, para a compreensão do instrumento a análise institucional, utilizada de diferentes maneiras nas pesquisas no âmbito da Didática da Matemática. As tarefas dos livros passaram por um processo de análise (inspirado na análise praxeológica) e isso foi fundamental para a elaboração/adaptação de tarefas que compõem o MDP que está embasado na visão vetorial, significando uma mudança no Ensino Médio do plano (R^2) para o plano e espacial

(R^2 e R^3), o que se acredita ser uma importante ferramenta de agilidade de raciocínio da resolução das tarefas, definida por Grendene e Melo (2008) como economia cognitiva, o que pode ser visto na seção seguinte.

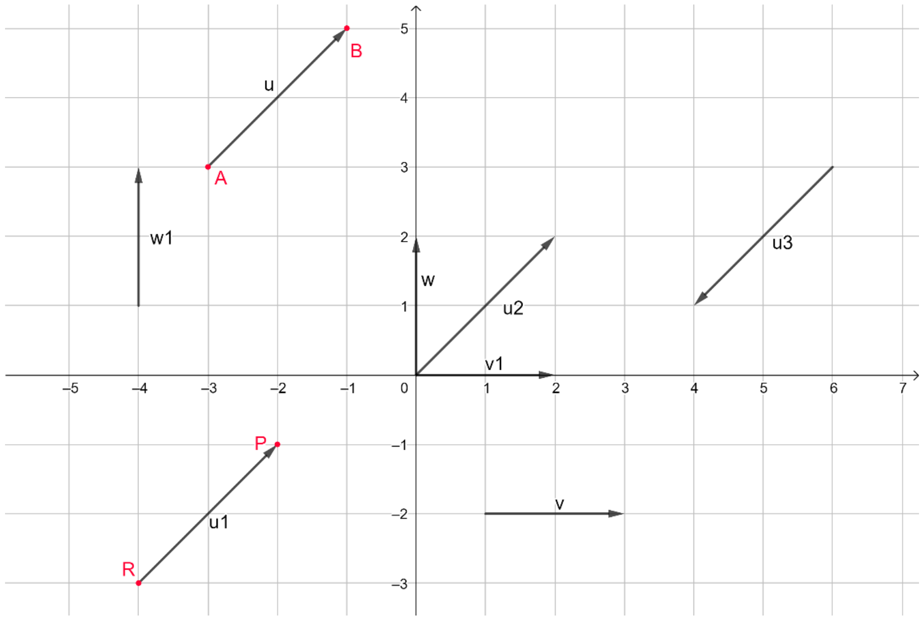
Apresentação do MDP e análise de suas tarefas

No centro do MDP, está a noção de vetores. Dessa maneira, primeiro apresentamos uma explanação básica do ponto de vista matemático sobre a parte de vetores que julgamos apropriados ao Ensino Médio e como esta noção poderia se relacionar com os demais conceitos, já tradicionalmente abordados no ensino básico. Também discutimos as vantagens e desvantagens do uso de vetores na resolução de algumas situações (tarefas), mostrando ser viável a abordagem desse saber nessa instituição (EM), o que pode facilitar a atividade matemática do estudante num curso de GA no Ensino Superior, quando estiver trabalhando no plano (R^2) e no espaço (R^3).

Parafraseando Steinbruch (1987), entende-se vetor (no plano) como sendo uma classe de segmentos de reta orientados de modo que dentro da mesma classe todos os segmentos possuem o mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido. O comprimento é o tamanho do segmento, usualmente chamado de módulo do vetor; a direção é dada pela inclinação do segmento com relação à horizontal, e o sentido está relacionado à orientação do segmento. Dentro de uma mesma classe, qualquer segmento orientado representa um único vetor. Geometricamente, um vetor é representado por um segmento de reta com uma seta em uma das extremidades desenhadas no plano cartesiano. Esta seta indica o sentido do vetor. Na Figura 2, a seguir, ilustramos alguns vetores e, em seguida, tercemos alguns comentários importantes.

ISSN 2525-7056

Figura 2. Vetores no Plano



Fonte: Os autores com uso do Geogebra.

Observe que os vetores u, $u1$, $u2$ e $u3$ possuem o mesmo tamanho (mesmo módulo), a mesma inclinação com relação ao eixo x (mesma direção), mas o vetor $u3$ possui sentido diferente dos demais. Neste caso, afirmamos que os vetores u, $u1$ e $u2$ são iguais. Já o vetor $u3$ possui sentido oposto aos demais vetores. Nessa mesma ideia, os vetores v e $v1$ são iguais bem como w e $w1$. Geometricamente, o vetor não possui posição fixa no plano cartesiano. Porém, algumas vezes, os vetores podem ser determinados por pontos, um ponto de partida e um ponto de chegada. O vetor $u1$ poderia ser denotado por $\overrightarrow{RP}$, no qual deixaria claro o ponto de inicio e o ponto final do vetor. Reforçamos, porém, que $u = u1 = u2 = \overrightarrow{RP} = \overrightarrow{AB}$.

Algebricamente, um vetor u no plano é descrito por suas coordenadas, da seguinte forma, por $u = (a, b)$. O valor de a é diferença da coordenada x entre as extremidades final e inicial do vetor e b é a diferença das coordenadas y entre extremidade final e inicial do vetor. Se $u = \overrightarrow{AB}$, então $u = (a, b) = (x_B - x_A, y_B - y_A)$. Na Figura 2, temos $u =$

$(2,2)$, $v = (2,0)$, $w = (0,2)$ e $u3 = (-2,-2)$. Um caso particular de vetor ocorre quando as extremidades do vetor coincidem; neste caso, o vetor é representado por um ponto e suas coordenadas são iguais a (0,0). Este vetor é chamado de vetor nulo.

Uma vez entendido o conceito de vetor, apresentaremos a definição de três operações envolvendo vetores e citaremos alguns resultados básicos que utilizaremos nos exemplos apresentados a seguir.

Sejam $u = (a,b)$ e $v = (c,d)$ dois vetores e k um número real (chamado escalar), definimos:

a) Adição de vetores: $u + v = (a + c, b + d)$;

b) Multiplicação por escalar: $ku = (ka, kb)$;

c) Produto Interno ou Produto escalar: $u \cdot v = ac + bd$.

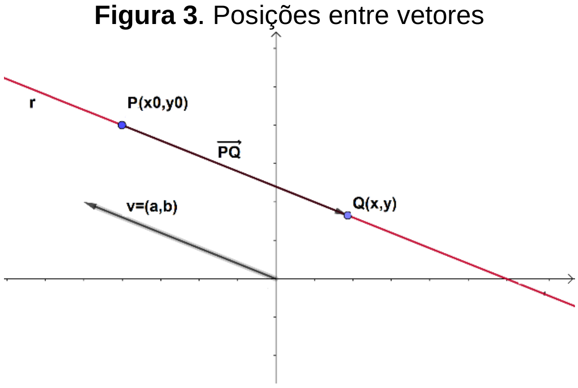
Da teoria vetorial citamos duas propriedades básicas: sejam $u = (a,b)$ e $v = (c,d)$ dois vetores não nulos.

i. Os vetores u e v são paralelos (possuem a mesma direção) se, e somente se, um deles é múltiplo do outro, ou seja, existe $k \in R, k \neq 0$ tal que $u = kv$.

ii. Os vetores u e v são perpendiculares (formam um ângulo de 90 graus quando desenhados com mesma extremidade inicial) se, e somente se, $u \cdot v = 0$.

Também é possível deduzir a equação geral e reduzida da reta com uso de vetores. Sejam r uma reta, $v = (a,b)$ um vetor não nulo e paralelo a reta e $P(x_0, y_0)$ um ponto qualquer de r.

Figura 3. Posições entre vetores



Fonte: Os autores com uso do Geogebra.

Seja $Q(x,y)$ um ponto arbitrário de r. Temos que os vetores v e $\vec{PQ}$ são paralelos, neste caso, existe t real tal que $\vec{PQ} = tv$. Isso nos diz que vale $(x - x_0, y - y_0) = (ta, tb)$, ou seja, $x - x_0 = at$ e $y - y_0 = bt$. Podemos isolar t nas duas equações e igualar, desde que a e b sejam não nulos. Teremos assim, $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}$, e assim, $b(x - x_0) = a(y - y_0)$ e donde obtemos $bx - ay + ay_0 - bx_0 = 0$. Fazendo $A = b$, $B = -a$ e $C = ay_0 - bx_0$ temos $\boldsymbol{Ax + By + C = 0}$ que é a *equação geral da reta* r. Isolando y nessa equação temos $\boldsymbol{y = mx + n}$, que é a *equação reduzida da reta*, em que $m = -\frac{A}{B} = \frac{b}{a}$ e $n = -\frac{C}{A}$.

Sobre estas equações da reta fazemos dois comentários:

(i) o vetor $w = (A, B)$ é perpendicular a reta, pois $w \cdot v = (A, B) \cdot (a, b) = (-b, a) \cdot (a, b) = -ab + ab = 0$;

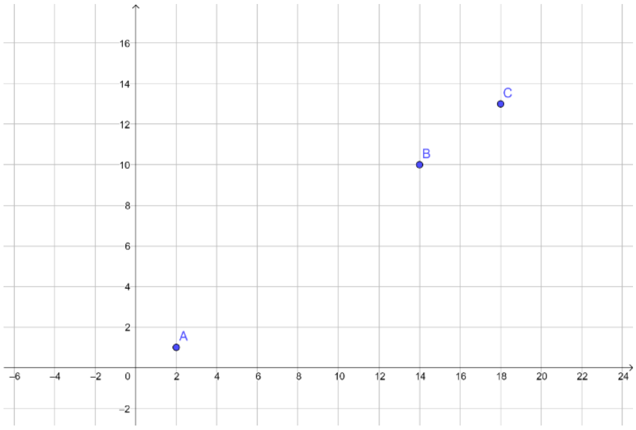
(ii) o vetor $u = (1, m)$ é paralelo a reta, pois $v = (a, b) = a(1, b/a) = a(1, m) = ku$, com $k = a$. Veja que do comentário (i) concluímos que dado um vetor $v = (a, b)$, o vetor $v_1 = (-b, a)$ é perpendicular a v.

A partir da igualdade $(x - x_0, y - y_0) = (ta, tb)$, é possível definir as equações paramétricas da reta, o que ampliaria o leque de tarefas e aplicações. Porém, neste artigo, não abordaremos este tópico.

Com a integração de vetor no plano na Matemática do Ensino Médio, já seria possível responder várias tarefas de Geometria Analítica tanto com o uso de vetores quanto sem, ampliando, assim, o leque de opções de resolução das situações para os estudantes. Vejamos alguns exemplos de tarefas com comentários das consequências didáticas de sua experimentação após a resolução.

Tarefa 1: verificar se os pontos $A = (2,1)$, $B = (14,10)$ e $C = (18,13)$, dispostos na figura 4, são colineares.

Figura 4. Três pontos colineares T1



Fonte: Os autores com uso do Geogebra.

Solução. Sabemos que três pontos são colineares quando estes dois a dois determinam uma mesma reta.

Resolução 1 - técnica 1 (sem vetores): neste caso, se pontos forem colineares, dois a dois definem um segmento contido na reta; por exemplo, os segmentos AB e BC estão contidos na reta e sua inclinação deve ser a mesma da reta, isto é, o coeficiente angular de AB e de BC deve ser o mesmo. Se isso ocorrer, os três pontos são colineares. Coeficiente angular do segmento AB, que denotaremos por m_{AB}

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{10 - 1}{14 - 2} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

Coeficiente angular do segmento BC, que denotaremos por m_{BC}

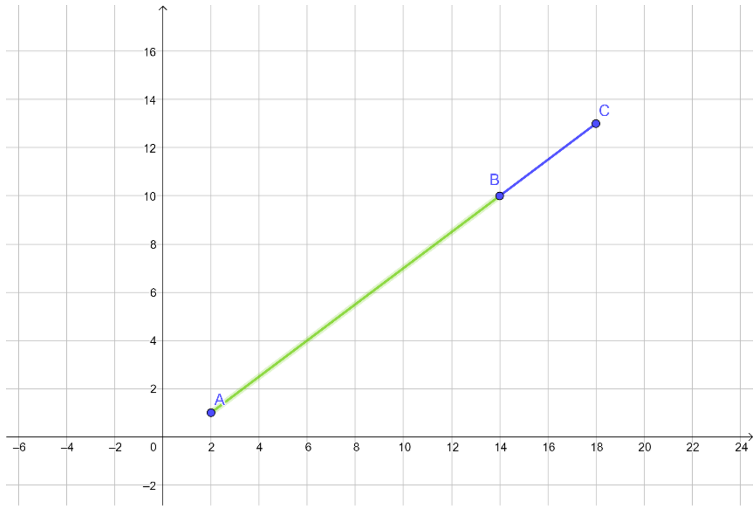
$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{13 - 10}{18 - 14} = \frac{3}{4}$$

Como há igualdade entre os coeficientes, concluímos que os três pontos são colineares.

Nessa resolução, está implícita a ideia de que a reta determinada por A e B e a reta determinada por B e C possuem a mesma inclinação, ou seja, são paralelas. Como elas possuem o ponto B em comum, elas devem ser iguais e, assim, conclui-se que A, B e C definem uma mesma reta e, portanto, são pontos colineares. A Figura 5, a seguir, ilustra essa resolução.

ISSN 2525-7056

Figura 5. Resolução geométrica tarefa 1



Fonte: Os autores com uso do Geogebra.

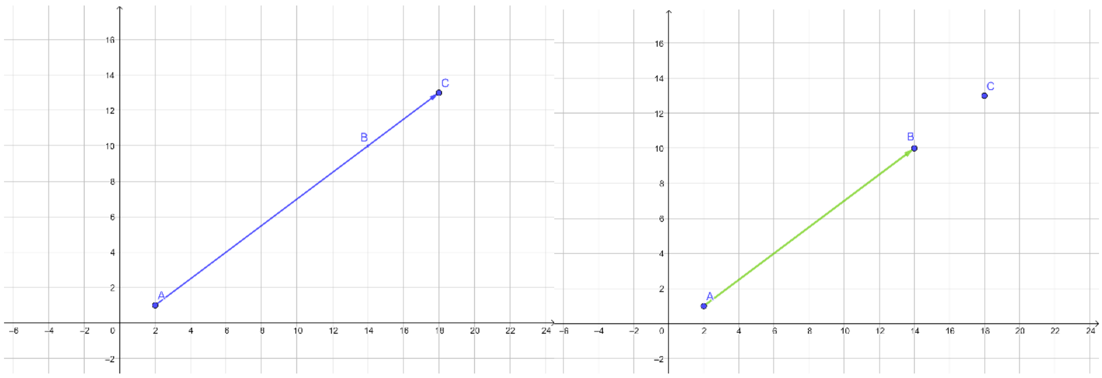
Resolução 2 - técnica 2 (sem vetores): uma alternativa na resolução desta questão, que é trabalhada no Ensino Médio, é verificar se o determinante abaixo é igual a zero. Se for, os pontos são colineares, se não for, os pontos não o são.

$$det\begin{pmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 14 & 10 & 1 \\ 18 & 13 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Isso nos diz que os pontos são colineares. Essa resolução não deixa claro para o estudante os motivos que, de fato, justificam que se o determinante é igual a zero, isso implica que os pontos são colineares. O que a torna uma resolução amparada no processo de memorização de fórmula.

Resolução 3 - técnica 3 (com uso de vetores): primeiro, é preciso dizer que tal técnica pode ser considerada não padrão para o ensino básico, haja vista o fato de vetor não ser um objeto com lugar e função definidos nesse nível de ensino. Ademais, da Figura 6, que ilustra a representação geométrica dos pontos, podemos considerar os vetores $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$. Se esses vetores forem paralelos, as retas definidas por A e B e por A e C seriam paralelas com o ponto A em comum; logo, seria a mesma reta e daí A, B e C seriam pontos colineares. Temos $\vec{AB} = (12,9)$ e $\vec{AC} = (16,12)$. Estes vetores serão paralelos se existir k real não nulo tal que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, ou seja, $(16,12) = k(12,9)$, isto nos dá, $(16,12) = (12k, 9k)$, de onde obtemos $12k = 16$ e $9k = 12$. Obtemos que k =4/3 satisfaz as duas igualdades. Portanto, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são vetores paralelos, implicando, assim, que A, B e C são colineares.

Figura 6. Ilustração de solução da tarefa 1



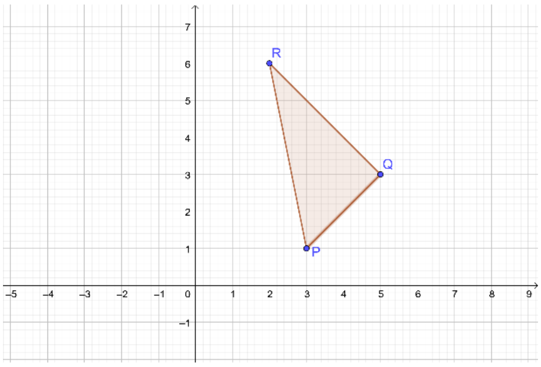
Fonte: Os autores com uso do Geogebra.

Nessa tarefa, consideramos que a resolução 1 e a resolução 3 são as duas resoluções que trazem um significado geométrico para as praxeologias do estudante, fazendo com que seja mais compreensível e até mesmo reforce conhecimentos prévios já estudados, como, por exemplo, o conceito de paralelismo. Em termos de grau de dificuldade, apontamos que ambas as resoluções se equivalem, visto que em uma é necessário conhecer a fórmula do coeficiente angular e a outra necessitaria lembrar-se do resultado *i,* citado anteriormente. Claramente, a inclusão dos vetores não dificultaria a resolução da questão. Como observação complementar, comentamos que na resolução 3 poderiam ter sido utilizados os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$, de modo a se ter uma compatibilidade maior com a resolução 1; porém usamos os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ para ilustrar que nas resoluções 1 e 3 qualquer combinação entre os segmentos AB, BC e AC para o cálculo dos coeficientes angulares e qualquer combinação entre os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BC}$, respectivamente, seria válida, dando, assim, maior liberdade de escolha ao estudante.

Tarefa 2: verificar se os pontos P(3,1), Q(5,3) e R(2,6) são vértices de um triângulo retângulo.

Solução. Após a marcação dos pontos no plano cartesiano, obteríamos a Figura 7, apresentada a seguir, pela qual deduziríamos que se o triângulo é do tipo retângulo, o ângulo reto deve ser o ângulo com vértice em Q.

Figura 7. Ilustração da solução da tarefa 2



Fonte: Os autores com uso do Geogebra.

Resolução 1 - técnica 1 (sem vetores). Para verificar se o ângulo interno do vértice Q mede 90º, verificaremos se os coeficientes dos segmentos QP e QR, respectivamente denotadas por m_{QP} e m_{QR}, satisfazem $m_{QP} \cdot m_{QR} = -1$. Se isso for satisfeito, os segmentos são perpendiculares. Temos que:

$$m_{QP} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{3-1}{5-3} = 1 \text{ e } m_{QR} = \frac{y_Q - y_R}{x_Q - x_R} = \frac{3-6}{5-2} = \frac{-3}{3} = -1.$$

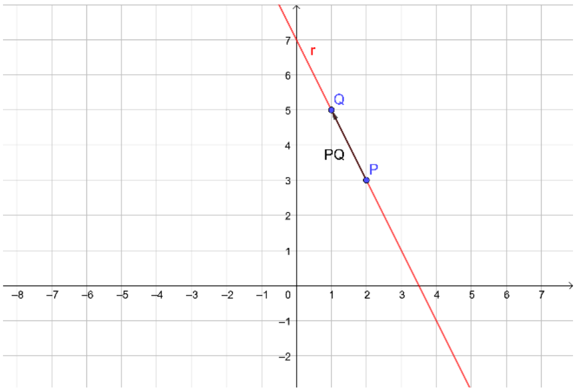
Claramente vale $m_{QP} \cdot m_{QR} = -1$e assim o triângulo é retângulo em Q.

Resolução 2 - técnica 2 (com uso de vetores). Para verificar se o triângulo é triângulo retângulo em Q, verificaremos se os vetores $\vec{QP}$ e $\vec{QR}$ são perpendiculares, ou seja, se $\vec{QP} \cdot \vec{QR} = 0$. Temos que $\vec{QP} = (-2,-2)$ e $\vec{QR} = (-3,3)$, e $\vec{QP} \cdot \vec{QR} = -2 \cdot (-3) + (-2) \cdot (3) = 0$. Portanto, temos um triângulo retângulo em Q.

Nessa tarefa, ambas as resoluções são econômicas do ponto de vista cognitivo, ou seja, não apresentariam grandes dificuldades para seu uso, exceto o fato de uma dada técnica não ter função na instituição Ensino Médio.

Tarefa 3: determinar a equação da reta r que contém os pontos $P(2,3)$ e $Q(1,5)$. A Figura 8, a seguir, ilustra a referida tarefa.

Figura 8. Ilustração da tarefa 3



Fonte: Os autores com uso do Geogebra.

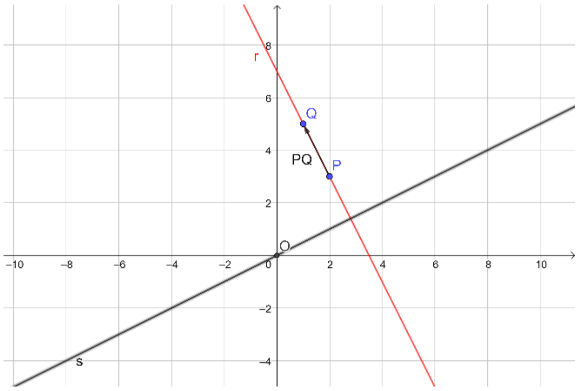
Resolução 1 - técnica 1 (sem vetores). Para este problema, existe a famosa fórmula $y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$ para a equação da reta r. Neste caso, basta escolher qual ponto entre P e Q teria coordenadas (x_0, y_0) e qual teria (x_1, y_1). Apos a escolha, basta substituir na fórmula e obteremos a equação da reta. Se escolhermos $(x_0, y_0) = P(2,3)$ teremos $(x_1, y_1) = Q(1,5)$. Assim, $y - 3 = \frac{5-3}{1-2}(x - 2)$ o que nos dar $y - 3 = -2x + 4$, logo $2x + y - 7 = 0$ é a equação geral e $y = -2x + 7$ é a equação reduzida.

Resolução 2 - técnica 2 (com uso de vetores). Pelo fato da reta conter os pontos P e Q, temos que ela é paralela ao vetor $\vec{PQ} = (1 - 2,5 - 3) = (-1,2)$ e é perpendicular ao vetor $w = (A, B) = (-2, -1)$. Substituindo na equação $Ax + By + C = 0$, temos $-2x - y + C = 0$. Para determinar o valor de C, basta substituir as coordenadas do ponto P ou do ponto Q, pois ambos estão na reta e, obrigatoriamente, suas coordenadas devem satisfazer a equação da reta. Escolhendo P, temos $-2(2) - (3) + C = 0$, logo, $C = 7$. Assim, $-2x - y + 7 = 0$ ou $2x + y - 7 = 0$ são as equações gerais da reta. Isolando y, temos que $y = -2x + 7$ é a equação reduzida.

Tarefa 4: considere os $P(2,3)$ e $Q(1,5)$. Determine a equação da reta s que intercepta a origem do plano cartesiano e é perpendicular a reta que contém P e Q.

Solução. Considerar a Figura 9, a seguir, que ilustra a tarefa.

Figura 9. ilustração para solução da tarefa 4



Fonte: Os autores com uso do Geogebra.

Resolução 1 - técnica 1 (sem vetores). Nessa tarefa, seria necessário determinar o coeficiente angular m_r da reta r que contém os pontos P e Q por meio da fórmula $m_r = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$. Fazendo as escolhas como na situação anterior, teríamos $m_r = -2$. Como s e r são perpendiculares, vale a relação $m_r \cdot m_s = -1$, em que m_s é o coeficiente angular da reta s. Devemos ter $m_s = 1/2$. Conhecendo o coeficiente angular de s e um ponto que pertence a ela, no caso a origem $0(0,0)$, basta substituir estes dados na fórmula $y - y_0 = m_s(x - x_0)$ para obtermos a equação da reta procurada. Nesse caso, temos $y - 0 = \frac{1}{2}(x - 0)$, o que nos dá $y = x/2$ ou $x - 2y = 0$.

Resolução 2 - técnica 2 (com uso de vetores). Como a reta s é perpendicular à reta que contém P e Q, ela é perpendicular ao vetor $\vec{PQ} = (1 - 2{,}5 - 3) = (-1{,}2)$. A equação geral da reta é $Ax + By + C = 0$, em que (A, B) são coordenadas de um vetor perpendicular a reta. Podemos considerar, neste caso, $A = -1$ e $B = 2$. Isso nos daria $-x + 2y + C = 0$. Considerando que $O(0,0)$ pertence à reta, temos $-0 + 2(0) + C =$

ISSN 2525-7056

0, o que nos dá $C = 0$. Assim, $-x + 2y = 0$ seria a equação geral da reta s e $y = x/2$ seria a equação reduzida.

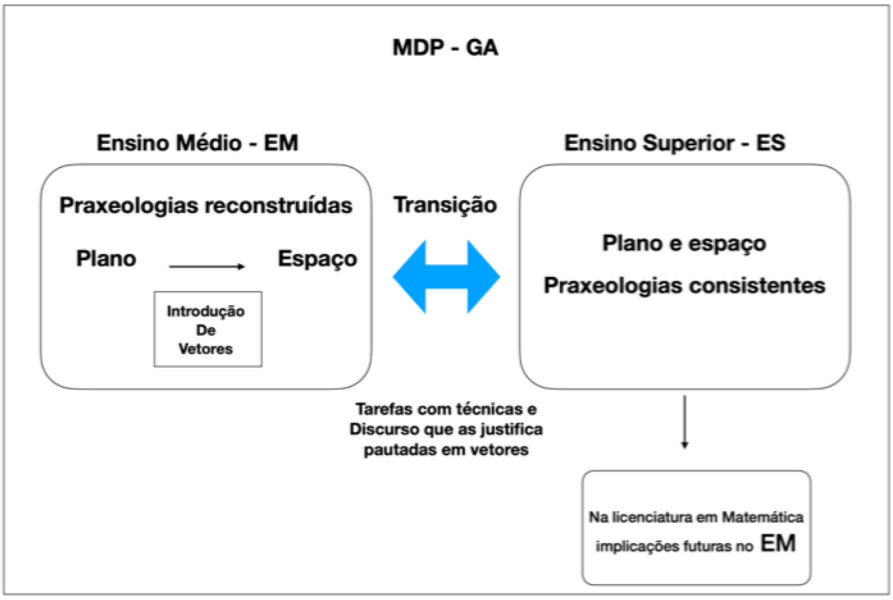
Ademais, como consequências didáticas da experimentação das duas últimas tarefas, pode-se dizer que a resolução com vetores parece ser menos econômica do ponto de vista cognitivo, porém ao compreender essa resolução, o estudante se apropriaria ainda mais da noção de paralelismo e perpendicularismo entre vetor e reta, bem como do resultado fundamental da geometria analítica, que é "um ponto pertence a um objeto geométrico quando suas coordenadas satisfazem a equação deste objeto". Este resultado fundamental é a base da construção dos objetos geométricos via equação e é muito utilizado na GA, apesar de ser explicitamente pouco difundido. Além disso, na resolução com vetores, o estudante basicamente trabalharia com vetores e as expressões das retas, necessitando compreender apenas os significados de alguns coeficientes, enquanto que, na resolução sem vetores, seria necessário o uso de fórmulas adicionais, mesmo que simples.

No entanto, o trabalho com vetores no ensino de Matemática na Educação Básica não tem um amparo explícito na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018), o que é um fator de restrição do uso do modelo de forma ampla no Ensino Médio. Por outro lado, essa restrição não impede que o modelo seja colocado em prática naquele nível de ensino, sendo necessário, para tanto, o conhecimento por parte dos docentes do referido modelo, o que pode ser feito pelas vias da formação docente inicial e continuada.

Ademais, acreditamos que as quatro tarefas apresentadas nesta discussão mostram que o uso de vetores não impacta numa elevação do nível de dificuldade nas resoluções das tarefas, ao invés disso, proporcionaria um ganho na transição entre GA do Ensino Médio e do Ensino Superior, visto que todas elas possibilitam ao estudante conhecer o objeto do conhecimento vetor e sua relação com retas e com os conceitos de paralelismo e perpendicularismo. Ressaltamos, ainda, que no componente curricular Geometria Analítica no Ensino Superior, ocorre um aprofundamento da teoria vetorial bem como o seu uso no espaço R^3 e, uma vez ocorrido o estudo de vetores no Ensino Médio, tanto esse aprofundamento quanto sua versão no espaço poderia implicar em praxeologias mais consistentes e, por consequência, estudantes verdadeiramente em atividade matemática.

Após a explicitação do tipo de tarefa que o pretenso modelo didático-praxeológico comporta, apresentamos na Figura 10, a seguir, o desenho do seu percurso. Observe-se que nele o objeto vetor é destacado como ideia matemática articuladora de dois níveis de ensino. Assim, o elemento de transição, proposto no referido MDP, é a inclusão de vetor no Ensino Médio, o que torna o MDP um modelo alternativo a determinados modelos pautados, exclusivamente, nas orientações da BNCC.

Figura 10. Esquema representativo do MDP



Fonte: Os autores.

Além do que foi explanado sobre a Figura 10, no Ensino Médio, na ideia de integrar vetores aos objetos do conhecimento que devem ser estudados, tem-se forte a noção de reconstrução de praxeologias matemáticas, que passam de exclusivamente construídas no plano para plano e espaço. Enquanto isso, inferimos que no Ensino Superior, na formação docente, por exemplo, as praxeologias matemáticas tornam-se mais consistentes e as implicações disso poderão ser notadas no Ensino Médio, a partir da atuação dos professores que tiveram uma vivência pautada no MDP na sua formação. Os elementos fundamentais desse modelo, que atuarão na transição entre níveis, são as tarefas, abordando a noção de vetores, tanto no que se refere às técnicas quanto em relação ao discurso que justifique tais técnicas.

Considerações finais

Primeiramente, faz-se necessário destacar o caráter provisional do MDP apresentado brevemente. Ele expressa a crença dos pesquisadores e não possui alicerce, do ponto de vista institucional, nos documentos de orientação curricular, ao menos não de forma explícita. Entretanto, isso não impede que ele seja experimentado como uma criação do professor no seu fazer didático.

Quanto os resultados da investigação, destacamos as principais consequências didáticas do uso do MDP, a saber: economia nas resoluções das tarefas, que chamamos de economia cognitiva, e aproximação das praxeologias matemáticas de duas instituições complementares, a GA no Ensino Médio e a GA no Ensino Superior, o que é feito a partir do uso de vetores como noção articuladora. Em outras palavras, o uso de vetores é o elemento que possibilitaria uma transição harmoniosa, em tese, entre os dois níveis de escolaridade, e esse uso não apresenta, na prática, grandes complicações desde que sejam introduzido no ensino aspectos conceituais.

No que tange às restrições da investigação em que apresentamos alguns aspectos, elencamos: do ponto de vista prático, a ausência de referência explicitada na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018) pode impedir que este modelo seja implementado em alguns contextos; da pesquisa propriamente dita, o fato de não ocorrer a experimentação do MDP proposto e apresentado aqui, nos impede de argumentar sobre seu alcance e mesmo sobre sua real viabilidade nas instituições de Ensino Médio.

E, para finalizar, sem esgotar a discussão, existem nuances do MDP que precisam ser estudadas, tais como, a possibilidade ou não de cobrir um currículo ou parte dele com tal modelo, a sua aplicabilidade com outras noções matemáticas como estruturantes e as possíveis criações didáticas que os docentes podem integrar ao MDP em suas práticas. De qualquer modo, tais aspectos apontam para a continuidade da investigação, como um mapeamento do alcance do modelo, tendo como noção articuladora vetores, mas com base nos dados empíricos.

Referências

ARTIGUE, M. Ingénierie Didactique. **Recherches em Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 9, n. 3, p. 281-308, 1988.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018

CHEVALLARD, Y. L'analyse des pratiques enseignantes en Théorie Anthropologique du Didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, [s. l.], v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999.

CHROBAK, R. Mapas conceituales y modelos didacticos de professors de química. *In:* CONFERENCE ON CONCEPT MAPPING, 2, CONGRESO INTERNACIONAL SOBRE MAPAS CONCEPTUALES, 2, 2006, San José, Costa Rica. **Anais eletrônicos**. San José: CMC, 2006, Sept. 5 – 8, 2006. Disponível em: http://cmc.ihmc.us/cmc2006Papers/cmc2006-p215.pdf. Acesso em: 09 fev. 2010.

GRYMUZA, A. M. G.; RÊGO, R. G. A Teoria da Atividade: uma possibilidade no Ensino de Matemática. **Revista Temas em Educação**, [s. l.], v. 23, n. 2, p. 117-138, 2014. Disponível em: https://periodicos.ufpb.br/index.php/rteo/article/view/20864. Acesso em: 05 mar. 2021.

GARCÍA PÉREZ, F. F. Los modelos didácticos como instrumento de análisis y de intervención en la realidad educativa. **Revista Electrónica de la Universidad de Barcelona**, Barcelona, n. 207, 2000. Disponível em: http://www.ub.es/geocrit/b3w-207.htm. Acesso em: 20 fev. 2021.

GARNICA, A. V. M. História Oral e educação Matemática. *In:* BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

GRENDENE, M. V. C.; MELO, W. V. Metacognição e envelhecimento sob a luz do pensamento sistêmico: uma proposta de intervenção clinica. **Revista Brasileira de Terapias Cognitivas**, [s. l.], v. 4, n. 2, pp. 121-138, 2008.

GIL-PÉREZ, D.; CARVALHO, A. M. P. **Formação de professores de Ciencias**: tendências e inovações. São Paulo: Editora Cortez, 1995.

HENRIQUES, A.; ATTIE, J. P.; FARIAS, L. M. S. Referências teóricas da didática francesa: análise didática visando o estudo de integrais múltiplas com auxílio do software Maple. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática - PUC**, São Paulo, v. 9, n. 1, pp. 51-81, 2007. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/585. Acesso em: 19. mar. 2021.

LUCAS, C.; FONSECA, C.; GÁSCON, J.; CASAS, J. O fenômeno didático institucional da rigidez e atomização das organizações matemáticas escolares. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 28, n. 50, p. 1327-1347, dez. 2014.

MATHERON, Y. Analyser les praxéologies quelques exemples d'organisations mathématiques. **Petit x**, [s. l.], n. 54, p. 51-78, 2000.

MENEZES, P. J. D. **Modelo didático-praxeológico alternativo para o ensino de objetos da Geometria Analítica**: Elo entre o ensino médio e o superior. 2021. Dissertação (Metrado Profissional em Matemática em Rede Nacional- PROFMAT) - Centro das Ciências Exatas e das Tecnologias, Universidade Federal do Oeste da Bahia. Barreiras, 2021.

PORLÁN, R.; A. RIVERO Y.; MARTÍN, R. Conocimiento profesional y epistemología de los profesores I: teoría, métodos e instrumentos. **Enseñanza de las Ciencias**, [s. l.], v. 15, n. 2, pp. 155-171, 1997.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Geometria Analítica**. 2a edição, São Paulo: Makron Books, 1987.

NOTAS

IDENTIFICAÇÃO DE AUTORIA
Pedro José Defensor Menezes. Mestre em Matemática pela Universidade Federal do Oeste da Bahia. Professor da Escola Estadual El Shadai, Barreiras, Ba, Brasil.
E-mail: pedrojdm@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-3701-8728

Edmo Fernandes Carvalho. Doutor em Ensino, Filosofia e História das Ciências. Professor Adjunto. Membro do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat). Universidade Federal do Oeste da Bahia, Centro das Ciências Exatas e das Tecnologias, Barreiras, Ba, Brasil.
E-mail: edmo.carvalho@ufob.edu.br
http://orcid.org/0000-0002-6959-2652

Lauriclecio Figueredo Lopes. Mestre em Matemática. Professor Adjunto. Coordenador do Curso de Licenciatura em Matemática. Universidade Federal do Oeste da Bahia, Centro das Ciências Exatas e das Tecnologias, Barreiras, Ba, Brasil.
E-mail: lauriclecio@ufob.edu.br
https://orcid.org/0000-0002-3356-5644

AGRADECIMENTOS
Não se aplica.

FINANCIAMENTO
Não se aplica.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Não se aplica.

EDITORES
Patricia Helena Mirandola Garcia, Eugenia Brunilda Opazo Uribe, Gerson dos Santos Farias.

HISTÓRICO
Recebido em: 14/09/2021 – Aprovado em: 25/11/2021 – Publicado em: 15/12/2021.

COMO CITAR

MENEZES, P. J. D; CARVALHO, E. F; LOPES, L. F. Modelo Didático-Praxeológico para Ensino de Vetores no Ensino Médio: Possibilidades de Trabalhos na Transição para o Ensino Superior. **Revista ENSIN@ UFMS**, Três Lagoas, v. 2, número especial, p. 164-185. 2021.

O TEMA DE EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU COMO ESPAÇO PARA A GENERALIZAÇÃO

THE THEME OF SECOND DEGREE EQUATIONS: A ROOM FOR GENERALIZING

Alexandre Maicher Neto[1]

Túlio Oliveira de Carvalho[2]

RESUMO: Esse artigo apresenta uma proposta de ensino das equações de segundo grau, a ser apresentada a partir do final do ensino fundamental, sugerindo a abordagem da generalização de fórmulas matemáticas utilizadas no período escolar. Para tanto, consultamos a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que é o documento que norteia o ensino da matemática no Brasil, constatando que o mesmo reitera a relevância do tema. Do mesmo modo, consultamos a literatura referente à Educação Matemática para fundamentar a proposta sobre o ensino da álgebra na prática escolar. Abordamos ainda aspectos históricos que de fato foram imprescindíveis para o desenvolvimento desse tema, uma vez que utilizamos a técnica de completar quadrados, empregada desde o século XII por Bháskara, para resolver situações problemas. O método de completar quadrados se constitui como uma técnica indispensável para obter a generalização da fórmula resolutiva de equações de segundo grau. Na sequência relacionamos as equações de segundo grau com certas representações geométricas, a fim de explanar a técnica do completamento de quadrados. Concluímos com sugestões de situações problemas que abordam o tema.

Palavras-chave: Generalização. Equação de segundo grau. Completar quadrados.

ABSTRACT : This article presents a proposal for teaching high school equations, to be presented from the end of elementary school onwards, suggesting the approach of generalizing mathematical formulas used in the school period. To do so, we consulted the Common National Curriculum Base (BNCC), which is the document that guides the teaching of mathematics in Brazil, noting that it reiterates the relevance of the topic. Likewise, we consulted the literature on Mathematics Education to support the proposal on the teaching of algebra in school practice. We also approach historical aspects that were in fact essential for the development of this theme, since we used the technique of completing squares, used since the 12th century by Bhaskara, to solve problem situations. The method of completing squares is an indispensable technique to obtain the generalization of the solving formula of second degree equations. Next, we relate the quadratic equations with certain geometric representations, in order to explain the square completion technique. We conclude with suggestions of problem situations that address the topic.

Keywords: Generalization. Quadratic equations. Completing squares.

Introdução

Uma forma de apreciar o desenvolvimento da humanidade está em acompanhar o desenvolvimento de instrumentos matemáticos: os números, as operações, as

[1] Rede Estadual de Educação do Estado do Paraná. E-mail: alexandremaicherneto@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-8061-3645
[2] Universidade Estadual de Londrina. E-mail: tuliocarvalho@uel.br
https://orcid.org/0000-0002-6344-2418

Informações completas da obra no final do artigo

propriedades, as regras, os conceitos e definições, as fórmulas e os teoremas, construtos que se constituem em respostas a perguntas que vão se tornando mais abrangentes ao longo do tempo. Este artigo toma como fundamento estas características da matemática: abrangência e generalidade, a fim de repensar um tópico bastante conhecido do ensino da mesma.

A matemática é um processo da construção humana. Em particular, a matemática escolar deve expressar essa realidade, ser fundamentada em conceitos, regras, definições e generalizações que posteriormente serão empregadas em situações problemas elementares da vida social.

> As aplicações constituem a principal razão pela qual o ensino da Matemática é tão difundido e necessário, desde os primórdios da civilização até os dias de hoje e certamente cada vez mais no futuro. Como as entendemos, as aplicações do conhecimento matemático incluem a resolução de problemas, essa arte intrigante que, por meio de desafios, desenvolve a criatividade, nutre a auto-estima, estimula a imaginação e recompensa o esforço de aprender. (LIMA, 2007, p. 155)

Com a experiência de alguns anos de magistério, percebemos que as aulas de matemática podem ser resumidas à manipulação numérica e algébrica, sem preocupações em explorar os conceitos algébricos e geométricos que de fato promovem a compreensão da essência do conteúdo. Com isto, a rotina resume-se a aplicar técnicas resolutivas, utilizando procedimentos e fórmulas conectados tão somente ao conjunto de exercícios da subdivisão do currículo que esteja em pauta.

Os fatores que podem contribuir para que essas ações perdurem devem estar no fato de que os materiais orientadores das práticas em sala de aula, o principal deles sendo o livro didático, não fazem referência a conceitos e generalizações como deveriam, bem como a contextualização que tanto se espera. Outra razão pode ser que nós professores não conhecemos os temas com a profundidade que deveríamos.

Neste artigo, propomos abordagens dos conceitos matemáticos relacionados à equação do segundo grau. Oferecer conexões entre aspectos numéricos, algébricos e geométricos com vistas a contribuir para a compreensão deste tópico particular, ressaltando a interligação entre visões como característica essencial da matemática.

Com isso defendemos um ensino que contemple em sua prática o uso de demonstrações algébricas das fórmulas que são empregadas nas atividades de sala de aula, por entender que as demonstrações envolvem conceitos importantes, que serão também ilustrados em situações problemas. Trata-se tornar manifesto que a matemática e os seus problemas se comunicam pelas ferramentas (matemáticas) que os resolvem.

> Acreditamos que as questões relativas à apresentação da demonstração formal de um certo resultado em matemática são importantes e devem ser introduzidas desde a Educação Básica. Acreditamos que o estudante pode perceber que a Matemática é um conjunto bem organizado de resultados, e que uma demonstração é a resposta a um 'por quê', o que também traz aproximações, no nosso ponto de vista entre a Matemática Acadêmica e a Matemática Escolar. (MOSCA; CARVALHO; CARVALHO, 2016, p. 328)

A proposta deste artigo é apresentar uma sistematização do desenvolvimento em linguagem algébrica da fórmula de Bháskara, que pode ser apresentado aos estudantes do nível fundamental. Com isto, esta sistematização deverá ter maiores possibilidades de ser efetivamente usada na prática escolar. Partindo da síntese do método resolutivo de Bháskara:

> Completar o quadrado do primeiro membro para transformar o termo que contém a quantidade desconhecida e seu quadrado em um quadrado perfeito. Diminuir o grau da equação extraindo a raiz quadrada dos dois membros, resolver a equação de primeiro grau que daí resulta. (ROQUE; CARVALHO, 2012, p.196)

Apresentaremos situações problemas que envolvem a construção geométrica do completamento de um quadrado. Embora o tema seja recorrente, essa proposta traz consigo o desafio de uma nova abordagem, uma vez que tradicionalmente usa-se diretamente a fórmula resolutiva para determinar as raízes.

Para compreender e realizar a generalização, utilizamos o processo de completar quadrados, técnica essencial que é utilizada para determinar as raízes da equação de grau dois, apresentada e exploradas aqui e recomendada para que sejam utilizadas em sala de aula.

Para o desenvolvimento desse artigo consultamos a BNCC, documento oficial que normatiza os conteúdos de matemática que devem ser contemplados na prática escolar, sobre a relevância do desenvolvimento algébrico das generalizações como proposta de ensino. Do mesmo modo consultamos a literatura, na perspectiva da Educação Matemática, para fundamentar os aspectos acerca do ensino da álgebra na prática escolar, bem como os aspectos históricos que retratam a resolução de uma equação do segundo grau, por meio da técnica de completar quadrados utilizada por Bháskara.

Referendados por essa literatura passamos propriamente à abordagem do tema equação do segundo grau, sendo apresentada no contexto algébrico e geométrico, justamente para fazermos as relações e desenvolver as técnicas de completar quadrados, que fundamenta uma dedução da renomada fórmula. Por fim deixamos como sugestões de aplicação, situações problemas que abordam o tema.

A BNCC e o ensino da álgebra

A Base Nacional Comum Curricular, BNCC, é o mais recente documento normativo, que regulamenta os níveis de aprendizagens essenciais da educação básica no Brasil, que todos os estudantes devem ter assegurados durante o período escolar, compreendendo a educação infantil, o ensino fundamental e o ensino médio.

Esse documento foi elaborado, sob a coordenação do Ministério da Educação (MEC) e teve a participação da comunidade escolar de todos os Estados, do Distrito Federal e dos Municípios, onde cada profissional pôde contribuir com seu parecer sobre os conteúdos que julgava ser adequado manter, ser suprimido ou ser trabalhado em outro ano/série.

Ele segue as determinações do Plano Nacional de Educação (PNE) e a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) que orienta para que os estudantes recebam uma formação integral com vistas para o desenvolvimento do cidadão e de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

> Este documento normativo aplica-se exclusivamente à educação escolar, tal como a define o § 1º do Artigo 1º da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei nº 9.394/1996), e está orientado pelos princípios éticos, políticos e estéticos que visam à formação humana integral e à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, como fundamentado nas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica. (BRASIL, 2018, p. 7)

A BNCC é uma referência nacional para a elaboração dos currículos e das propostas pedagógicas das redes, estaduais, do distrito federal e dos municípios, além de contribuir com políticas e ações para estabelecer normas referentes à formação de professores, à avaliação, à classificação de conteúdos essenciais a serem trabalhados no ano/série e aos investimentos necessários a serem realizados para o desenvolvimento da educação.

Partindo desse princípio normativo, garantido constitucionalmente, a BNCC fundamenta-se pedagogicamente em dois conceitos, o desenvolvimento de competências, e o compromisso com uma educação com formação integral.

O conceito de competências no trabalho pedagógico, consiste em organizar o currículo de forma a possibilitar o aluno a ***saber*** sobre os conteúdos da grade, dominar as técnicas de resolução de uma equação, saber interpretar, representar algebricamente, conhecer o conceito de incógnita, estabelecer uma igualdade, expressar numérica e algebricamente a situação proposta e usar um algoritmo para resolver a equação.

No entanto isso não é tudo, é preciso aplicar esse conhecimento, é importante ***saber fazer***, saber aplicar o que foi apreendido, o aluno precisa conseguir transferir esse conhecimento para situações que possibilitem de alguma forma utilizar essa teoria na resolução de problemas que podem se deparar.

> Por meio da indicação clara do que os alunos devem “saber” (considerando a constituição de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores) e, sobretudo, do que devem “saber fazer” (considerando a mobilização desses conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho). (BRASIL, 2018, p. 13)

Contemplado os aspectos regulamentares e normativos, mas com foco no objeto deste artigo, o uso de generalizações no ensino da matemática, consultamos para verificar se o tema é abordado pela BNCC, e se existe relevância dele no processo de ensino e aprendizagem da matemática no ensino fundamental e médio.

Constatamos que o ensino fundamental é dividido em cinco unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística, que embora separadas, possam ser articuladas e conduzir os alunos a fazer relações entre o conhecimento empírico que trazem, com o conhecimento científico sistematizado por conceitos e propriedades, e utilizem esses conceitos e propriedades para resolver problemas nos contextos de sua necessidade.

A unidade temática Álgebra tem como objetivo o desenvolvimento do pensamento e da escrita algébrica, processo que leva o aluno a perceber uma regularidade em uma sequência numérica e induz o mesmo a generalizá-la, por meio de uma representação que utiliza letras e símbolos no lugar de números, obtendo, um modelo genérico daquela sequência.

Espera-se que ao final dessa etapa os alunos compreendam os significados de variáveis numéricas nas expressões algébricas e nas funções, o conceito de incógnita nas equações, e sejam capazes de resolvê-las. Além disto, tenham capacidade de reconhecer a regularidade de uma sequência numérica e a generalize.

A unidade temática Geometria caracteriza-se por estudar a posição e deslocamento no espaço, formas de figuras planas e espaciais, com a intenção de desenvolver o pensamento geométrico do aluno, para futuras investigações de propriedades geométricas. Para essa fase o estudo da Geometria a congruência e semelhança de figuras planas, especialmente o triângulo com suas relações de medidas de ângulos, que podem ser utilizadas como introdução para realizar generalizações, onde é possível verificar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º, e essa generalização é base para falar dos demais polígonos.

Portanto a Geometria vai além de aplicar fórmulas para resolver exercícios, ela é um campo que, em conjunto com a álgebra, possibilita o desenvolvimento do raciocínio abstrato, fazendo o estudo de questões geométricas, e assim tendo condições de desenvolver o conceito lógico de uma generalização.

> Assim, a Geometria não pode ficar reduzida à mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras. (BRASIL, 2018, p. 272)

Com a unidade temática Grandezas e Medidas, espera-se que os estudantes reconheçam as medidas comprimento, área, volume e ângulo em diferentes contextos, resolvam problemas consolidando assim as expectativas da fase anterior e avancem. “Nessa fase da escolaridade, os alunos devem determinar expressões de cálculo de áreas de quadriláteros, triângulos e círculos, e as de volumes de prismas e de cilindros.” (BRASIL, 2018, p. 273)

Desse modo as unidades temáticas Álgebra, Geometria e Grandezas e Medidas reiteram que a generalização é tema relevante e precisa ser abordado sobretudo a partir do final do ensino fundamental.

Com relação ao Ensino Médio a BNCC também tem a abordagem seguindo o modelo de competências, como descrito no Ensino Fundamental, com o propósito de desenvolver habilidades de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para alcançar essas habilidades, o ***fazer***, o aluno precisa ter a competência, que é o ***saber*** raciocinar, saber representar, saber comunicar, saber argumentar para que ao longo do processo desenvolva o pensamento matemático cada vez mais elaborado.

> Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados. (BRASIL, 2018, p. 529)

A competência de raciocinar é desenvolvida pela interação entre os envolvidos em sala de aula, ao investigar, explicar e justificar as soluções apresentadas para os problemas, com ênfase nos processos de argumentação matemática (BRASIL, 2018).

A competência de representar pressupõe a elaboração de registros diante de um objeto matemático (BRASIL, 2018).

A competência de comunicar é importante para que os estudantes desenvolvam a capacidades de justificar suas conclusões por meio de sustentação oral, não somente por meio de expressões matemáticas (BRASIL, 2018).

A competência de argumentar se apoia nas competências de raciocinar e representar, pois pressupõe a formulação e a verificação de conjecturas, com a apresentação de justificativa matemática (BRASIL, 2018).

Entre todas as competências a serem desenvolvidas, a BNCC sugere a investigação de conceitos e propriedades matemáticas, lançando mão de diferentes recursos como a observação de padrões, experimentações e a tecnologia, com o intuito de uma demonstração formal das conjecturas envolvendo os conceitos e propriedades investigadas. Essa competência está voltada à capacidade de generalização e demonstração matemática, tendo portanto, relevância para a formação dos estudantes, pois permite compreender a matemática como uma ciência viva, apoiada em estudos, interpretações, métodos, procedimentos e verificações.

Assim a BNCC torna explícito que o estudo e o desenvolvimento de generalização no processo de ensino da matemática, sobretudo ao final do ensino fundamental e durante todo o ensino médio é relevante, pois consta como conteúdo, portanto, é conhecimento que deve ser disseminado em sala de aula.

O ensino da álgebra na perspectiva da educação matemática

Pesquisamos outras fontes para conhecer o que autores ligados à Educação Matemática discutem acerca da álgebra e de seu ensino. Cabe advertir que a escolha dos autores jamais teve a intenção de esgotar todas as visões a respeito do assunto.

Pais (2013) traz reflexões sobre as estruturas metodológicas praticadas em sala de aula, confrontando a escola tecnicista com um modelo que coloca o aluno como centro do processo de aprendizagem. No primeiro, o professor propõe as situações problema e o aluno as resolve fazendo uso de algoritmos e fórmulas sem a sua devida compreensão, enquanto no segundo o professor é mediador das situações propostas encaminhando-as por meio da resolução de problemas.

Para o autor, mais importante do que usar os algoritmos e fórmulas são a compreensão do seu funcionamento, entender o conceito de seu desenvolvimento, de como essa generalização foi obtida, e explorar desta forma a matemática é uma oportunidade de oferecer a nossos alunos a compreensão, rica algebricamente, que quase sempre fica sem ser explorada.

Para esse fim, a metodologia empregada no processo de ensino deve oferecer condições para explorar a matemática indo além de se responder uma questão, uma vez que em toda aula há a oportunidade para estimular o aluno a novos desafios, a argumentar, a fazer articulações entre a teoria e prática, destacando conceitos importantes da matemática. Por outro lado, a escolha da metodologia pode levar à não exploração de certos conhecimentos. Trata-se, portanto, de aproveitar o momento para expandir as competências, ampliar a capacidade de compreensão de conceitos, algoritmos e modelos, em vez de usá-los repetidamente.

> Em suma, entre os objetivos da educação matemática está a intenção de contribuir no desenvolvimento da capacidade intelectual do aluno, expressa pelas competências de formular hipóteses, fazer estimativas, realizar cálculos mentais, estabelecer relações, organizar e interpretar dados, resolver e propor problemas, observar regularidades, generalizar ou particularizar afirmações, redigir textos, entre outras. (PAIS, 2013, p. 33)

O autor também aborda a argumentação no livro didático, relatando que esta precisa ser entendida como o processo de generalização, deduções matemáticas que culminam com a validação de teoremas e fórmulas. Sendo a argumentação matemática um processo validado pela comunidade científica, muitas vezes esse método se distancia dos saberes pertencentes à educação escolar, inclusive não estando contemplados no livro didático. O autor aponta que o desafio didático é perceber, *medir*, a proximidade que as demonstrações e generalizações têm com o saber escolar.

Isso não significa que todo o processo de escolarização deva ser pautado pelo raciocínio lógico dedutivo das demonstrações e generalizações, mas excluí-lo nesta fase de aprendizado não se mostra honesto com um ensino que essencialmente deve ser comprometido com a compreensão daquilo que está sendo estudado.

> Como existem conexões e diferenças entre o saber escolar e científico, não se trata de priorizar, no contexto escolar, a utilização das demonstrações típicas de argumentações lógicas da matemática. A atitude extrema consiste em um engano de mesma natureza, ou seja, excluir as demonstrações do ensino seria negar uma parte considerável da especificidade desse saber escolar. (PAIS, 2013, p. 55)

Estudar e ensinar álgebra se mostra um desafio, sobretudo em seu início quando a simbologia é empregada para representar valores numéricos. Para entender esse processo, e ter uma referência como alternativa de proposta de trabalho, destacamos os estudos de Souza, Panossian e Cedro (2014), que fazem a abordagem do tema, partindo do conceito de incógnita, descrevendo a construção que esse conceito teve ao longo da história até chegar à simbologia que empregamos hoje.

Para os autores, umas das dificuldades encontradas no ensino da álgebra é a de que os alunos têm de fazer a relação entre o simbolismo algébrico com o que ele representa. Eles destacam as concepções de álgebra que pesquisadores como Usiskin (1988;1995) (apud SOUZA, 2014) e Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) (apud SOUZA, 2014) puderam identificar por meio de pesquisa com professores e por meio de investigação histórica, que a álgebra é entendida como uma linguagem, como método desenvolvedor do pensamento e como recurso técnico para resolver problemas.

> A análise dessas concepções nos permite entender que a álgebra pode ser compreendida tanto como uma linguagem quanto um mero conjunto de procedimentos que valorizam ora o desenvolvimento do pensamento, ora a compreensão da linguagem algébrica. (SOUZA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014, p. 28)

Na década de 1980, diante das dificuldades apresentadas pelos estudantes com as manipulações algébricas, tem início o desenvolvimento do ensino da álgebra por meio da generalização de padrões, a fim de tornar o processo de aprendizado mais significativo.

A educação matemática defende a postura de oferecer um processo de ensino pautado na compreensão daquilo que está sendo estudado.

Por exemplo, partindo de certo contexto vivenciado pelo educando envolvendo números, medidas e figuras, tem-se um alicerce para que no decorrer da situação problema, à medida que ele atinja um patamar de compreensão, outros saberes possam ser articulados ampliando seu entendimento dentro do que foi proposto. E com isso outros conceitos matemáticos, presentes na situação problema, possam ser desencadeados, como por exemplo um algoritmo, uma generalização ou uma demonstração.

Desse modo, entendemos que a introdução das demonstrações nos livros didáticos a partir das séries finais do ensino fundamental pode garantir um aprendizado mais sólido, em oposição àquele que é baseado na memorização de regras e fórmulas, uma vez que, deste modo, o aluno não possuiria argumentos para explicá-las.

As generalizações são regularidades obtidas por meio da percepção lógica de um padrão, como nas repetições ao longo de uma sequência numérica, bem como com a manipulação algébrica de uma equação obtendo uma fórmula que pode passar a ser utilizada para resolver uma categoria de problemas.

Por essa razão o professor precisa ter a sensibilidade de introduzir o tema de forma mais concreta possível, e pode dar início a esse desenvolvimento a partir do suporte geométrico, preferencialmente contextualizado, que permite certa “materialização” de parte do processo do desenvolvimento da generalização, aumentando com isso a compreensão da demonstração proposta. “Assim sendo, compete ao professor diversificar as atividades. Visto que um momento pedagógico resulta da convergência de vários elementos, o tratamento dessa variabilidade situa-se na essência do trabalho do professor.” (PAIS, 2013, p. 146)

As provas por demonstrações com representações geométricas possuem um certo poder de convencimento, talvez em razão da materialidade da prova, pois ela envolve o sentido da visão, tornando os seus resultados mais aceitáveis.

A proposta de atividade em contexto real pode ser apresentada por meio da metodologia de resolução de problemas, com o propósito de construir o conhecimento matemático alicerçado em práticas onde o estudante é o agente principal do processo, pois ele é por estas vias conduzido a pensar a matemática, o que, aliado às intervenções realizadas pelo professor, proporciona que ele absorva o conceito matemático proposto naquele problema. As propostas para utilizar essa metodologia devem essencialmente ter relevância para quem são dirigidos, uma vez que o fator que mobiliza, que desperta a atenção para um caso problemático é reconhecer que aquilo faz, ou pode vir a ser, parte de sua realidade. “Resolução de Problemas envolve aplicar a matemática ao mundo real, atender a teoria e a prática de ciências atuais e emergentes e resolver questões que ampliam as fronteiras das próprias ciências matemáticas.” (BICUDO *et al.*, 1999, p. 204)

Desta forma, o processo de aprendizagem ganha novo significado, pois ele possibilita ao aluno construir os conceitos, técnicas e generalizações, permitindo que tenha sua compreensão aumentada sobre a matemática, pois vai constatar, por meio da situação problema, que aquilo que generalizou fez parte de um problema, e que por extensão pode ser aplicado em outras situações de contexto semelhante.

> O aprendizado, deste modo, pode ser visto como um movimento do concreto (um problema do mundo real que serve como exemplo do conceito e da técnica operatória) para o abstrato (uma representação simbólica de uma classe de problemas e técnicas para operar com esses símbolos). (BICUDO *et al.*, 1999, p. 207).

Assim a resolução de problemas como metodologia de ensino é uma ótima oportunidade para se fazer matemática, com o objetivo de compreender os conceitos e generalizações matemáticas que estão nos livros didáticos e que são utilizadas, as vezes, sem compreensão do seu processo de construção. Levar o aluno a compreender construções algébricas é preencher lacunas que podem ser traduzidas por perguntas que frequentemente nos são feitas: “De onde saiu isso?” “Para que serve isso?”.

Acerca da história da álgebra e de seu ensino

Certamente precisamos olhar para a história da construção do conhecimento algébrico, sobretudo no que se refere ao estudo da resolução de equações, para constatar como se desenvolveu o processo de resolução das mesmas, a fim de que este estudo proporcione uma melhor compreensão dos conceitos e definições que já temos hoje.

A história da matemática aponta que o grego Diofanto de Alexandria, que viveu por volta do século III d.C. foi o primeiro matemático a representar um valor desconhecido em um problema por um “termo”. Recorta-se esta observação de seu livro chamado Aritmética. Este valor desconhecido recebeu o nome de Arithme, e em registros posteriores, os termos foram substituídos por símbolos.

> Uma das principais contribuições está em ter introduzido uma forma de representar o valor desconhecido em um problema, designando-o como arithme, de onde vem o nome aritmética. Já no livro 1, ele introduz símbolos, que ele chama “designações abreviadas”, para representar diversos tipos de número. (ROQUE; CARVALHO, 2012, p.168)

Embora Diofanto tenha iniciado o processo de simbologia na solução de uma equação, ele não foi difundido no meio matemático naquela época, os estudos nesse sentido ficaram estagnados por aproximadamente seis séculos, e retomados somente a partir do século IX, que teve o persa al-Khawarizmi como matemático mais influente, vivendo entre 790 e 850. Abordaremos a matemática a partir dos trabalhos do persa al-Khawarizmi e dos matemáticos ligados a ele, ou seja, dos árabes que contribuíram para o desenvolvimento da álgebra que temos hoje, sobretudo no que se refere à resolução das equações de segundo grau.

Embora nesse período os problemas não fossem escritos e resolvidos com notação simbólica, já existia uma representação que nos possibilita associar ao conceito de incógnita que temos hoje. Até então, escreviam os termos desconhecidos e as operações que compunha o problema utilizando palavras.

Neste período, as resoluções possuíam justificativas geométricas, mesmo que o problema não tratasse de geometria, sendo reduzidos a representações geométricas. Com esta condição, todos os valores dados no problema, coeficientes, raízes e números dados, eram positivos. Sobretudo para os números dados, esses valores sempre eram maiores que zero, mas os coeficientes poderiam ser zero.

As equações que seguem, reproduzidas de Roque e Carvalho (2012, p. 199), apresentam os seis problemas de equações de segundo grau, juntamente com sua notação atual:

- quadrados iguais a raízes: $ax^2 = bx$;
- quadrados iguais a um número: $ax^2 = c$;
- raízes iguais a um número: $bx = c$;
- quadrados e raízes igual a um número: $ax^2 + b = c$;
- quadrados e um número iguais a raízes:$ax^2 + c = bx$;
- raízes e um número iguais a quadrados: $bx + c = ax^2$.

A necessidade de seis versões de problemas para as equações de segundo grau decorre de que cada coeficiente assume apenas valores positivos.

Quando o problema saía de uma das estruturas, por exemplo, algum termo negativo no problema, eles eram reduzidos a alguma dessas equações, fazendo o que chamavam de "restauração" (al jabr) e "balanceamento" (al muqabala), a fim de que ficassem com uma estrutura cuja solução fosse de seu domínio, a um modelo que pudesse ser justificada usando a representação geométrica, da reta ou do quadrado.

Esta foi também uma estratégia dos gregos, pois quando precisavam resolver problemas, reduziam esses problemas difíceis a problemas mais simples, cuja solução já era conhecida. Desta maneira os Gregos estavam desenvolvendo uma gama de ideias e estruturas que permitiriam argumentos para uma prova por demonstração ou uma generalização.

O indiano Bháskara, viveu no século XII, é conhecido no Brasil, por lhe terem atribuído a (invenção) da fórmula de Bháskara. A história mostra que os indianos, embora dominassem técnicas de resolução e fizessem uso de alguns simbolismos, não dispunham, na época de Bháskara, de uma fórmula para resolver tais problemas, pois eles ainda eram enunciados e resolvidos por meio de palavras. Ele também se valia de argumentos geométricos, adaptando os problemas a quadrados perfeitos, completando o quadrado com a finalidade de reduzi-los a equações de primeiro grau. “O método de resolução consiste em reduzir o problema a uma equação linear. Isto era feito por meio do método que Bháskara denominava de “eliminar o termo médio”, equivalente ao nosso método de completar quadrados.” (ROQUE; CARVALHO, 2012, p.195)

Bháskara de certa forma possuía uma espécie de algoritmo para resolver os problemas, no entanto claramente podemos perceber que são ações que demonstram a intencionalidade de completar quadrados. Fazer com que a quantidade desconhecida tenha uma raiz, a fim de que possa reduzir o problema a uma equação de primeiro grau. “[é] por unidades iguais a quatro vezes o número de quadrados que é preciso multiplicar os dois membros; e é a quantidade igual ao quadrado do número primitivo de quantidades desconhecidas simples que é preciso adicionar.” (ROQUE; CARVALHO, 2012, p.195).

Um problema representado pela equação como $2x^2 + x = 15$ seria resolvido da seguinte forma:

$$4.2.2x^2 + 4.2.x + 1 = 4.2.15 + 1$$
$$16x^2 + 8x + 1 = 121$$
$$(4x + 1)^2 = 11^2$$
$$4x + 1 = 11$$
$$x = \frac{5}{2}$$

Neste exemplo os dois lados da igualdade tornaram-se quadrados, mas o lado das quantidades conhecidas não é necessário que se torne um quadrado perfeito. Em comparação com o que proporemos, o completamento de quadrados acima exposto tem caráter puramente algébrico.

Com o que foi visto até aqui investigando os métodos resolutivos do persa al-Khwarizmi e do indiano Bháskara, podemos notar que eles já dominavam a técnica de resolver uma equação do 2º grau. A explanação dos casos estudados, embora não utilizando a linguagem algébrica atual para representar coeficientes, incógnitas e as próprias operações (de soma, subtração e multiplicação), mostra um entendimento suficientemente geral do problema de resolver equações do segundo grau. O processo resolutivo era enunciado por palavras, porém ainda não se tratava de uma fórmula.

Abordagem de equações de segundo grau no ensino fundamental

Resolver equações de segundo grau é uma atividade que podemos abordar em situações problemas a partir do sétimo e oitavo ano, não falando propriamente sobre equações de segundo grau, mas quando abordamos conteúdos envolvendo cálculo da área do quadrado.

No contexto de área do quadrado, no sétimo e oitavo ano, as situações problemas geralmente envolvem números naturais, em que a área é um quadrado perfeito. Para a obtenção da medida do lado do quadrado, basta determinar a raiz quadrada positiva de um número. Por outro lado, se for conhecida a medida do lado, a multiplicação do número que a representa por ele mesmo resultará na área procurada.

Do ponto de vista algébrico, a determinação da medida do lado do quadrado se traduz na redução de uma equação de grau 2 para uma equação de primeiro grau, na incógnita que representa a medida do lado. Essa era a estratégia que Bháskara utilizava para resolver problemas enunciados por equações de segundo grau, sobretudo equações que apresentavam ambos os termos (de grau dois e de grau um na incógnita), reduzindo a equação para um modelo onde a solução poderia ser encaminhada pela redução de grau.

Na situação problema que será sugerida aqui faremos uso dessa estratégia, partindo do cálculo da área do quadrado $A = l^2$, onde A e l são respectivamente as medidas da área e do lado do quadrado, estabeleceremos a representação geométrica para dar suporte e melhor compreensão dos procedimentos operatórios e algébricos, uma vez que a representação geométrica, favorece o entendimento e a relação entre as medidas algébricas da equação em um contexto de aplicação.

Em uma situação problema onde é perguntado a medida do lado de um quadrado que têm área A, o estudante aplicando a raiz dos dois lados da equação, encontrará a medida do lado do quadrado.

$$A = l^2 \Rightarrow l = \sqrt{A}$$

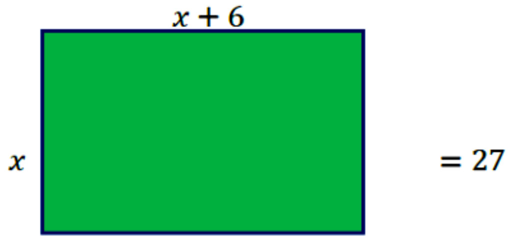
Vamos abordar a situação problema a seguir, que se desdobrará em uma equação de segundo grau, determinando suas raízes, utilizando a técnica de completar quadrados.

Uma sala comercial de formato retangular tem comprimento 6 metros maior que a largura e área igual a 27 metros quadrados. Quais são as dimensões da sala comercial?

Geometricamente a situação problema fica representada pela figura 1.

ISSN 2525-7056

Figura 1. Representação geométrica da situação problema



Fonte: Os autores

Representando agora de forma algébrica, calculando a área do retângulo, multiplicando as dimensões da figura e estabelecendo a igualdade teremos a equação.

$$x.(x + 6) = 27$$
$$x^2 + 6x = 27$$

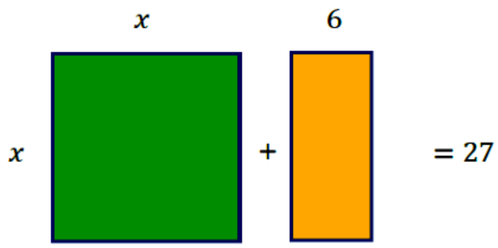
Fazendo agora a representação geométrica dessa última equação, figura 2, podemos notar que ela pode ser representada pela soma de duas figuras, um quadrado de lado x e um retângulo de dimensões x e 6 metros, que continua com a mesma área 27m².

Figura 2. Decompondo o retângulo em duas figuras

Fonte: Os autores

No entanto com essa equação não conseguimos utilizar os conceitos de área do quadrado como ele está, dessa forma precisamos adaptar a figura de modo que seja possível construir um quadrado. Fazendo a interpretação geométrica da equação $x^2 + 6x = 27$ temos do lado esquerdo um quadrado e um retângulo. A figura 3 retrata geometricamente essa equação.

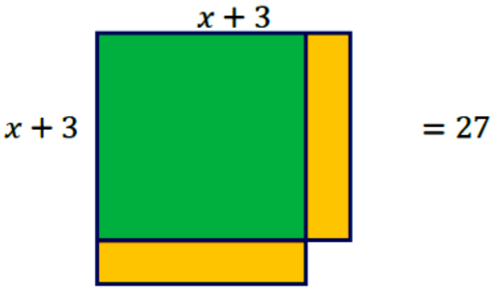
Figura 3. Representação geométrica da equação



Fonte: Os autores

Para formar o quadrado é preciso, a partir do quadrado já existente, incorporar convenientemente a área do retângulo, a figura 4 ilustra essa passagem. Dividindo o retângulo em dois retângulos iguais, com um lado igual a x e outro lado igual a 3, obtemos:

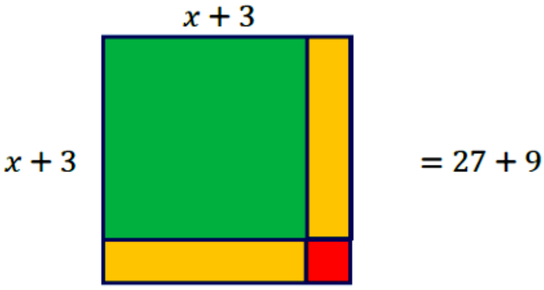
Figura 4. Composição geométrica com a intenção de completar quadrado



Fonte: Os autores

A tarefa final do professor é levar os alunos a compreender que se deve adicionar um quadrado de área 9, para completar a figura, de modo a efetivamente termos um quadrado de lado $x + 3$. Adicionando 9 aos dois membros da equação, poderemos resolver nosso problema utilizando novamente a fórmula para a área do quadrado. A figura 5 ilustra o completar do quadrado.

Figura 5. Fazendo o completamento do quadrado



Fonte: Os autores

Temos então efetivamente um quadrado de lados $x + 3$, que quando elevado ao quadrado oferece-nos a expressão $x^2 + 6x + 9$, comparada com a expressão do problema $x^2 + 6x$, notamos que foi acrescentado nove unidades a ela, correspondendo exatamente ao quadrado de lado 3 encaixado na figura 5.

$$x^2 + 6x = 27$$

$$x^2 + 6x + 9 = 27 + 9$$

Note que a equação está balanceada, uma vez que foi adicionado a mesma área dos dois lados da equação. Como $x^2 + 6x + 9$ representa a área do quadrado, podemos escrever essa expressão na forma de potência $(x+3)^2$ e resolvê-la utilizando o conceito de área do quadrado.

$$(x+3)^2 = 36$$

$$\sqrt{(x+3)^2} = \sqrt{36}$$

$$x + 3 = 6$$

$$x = 3$$

Dessa forma as dimensões da sala comercial são 3 metros por 9 metros. Esse processo se repete para solução de outras equações de segundo grau.

Entendemos que essa técnica resolutiva de completar o quadrado proporciona uma melhor compreensão ao estudante, uma vez que até mesmo partindo de uma equação escrita sem contexto, podemos fazer associações de seus termos com figuras geométricas, tornando o processo matematicamente mais abrangente, uma vez que relaciona aspectos operatórios, algébricos, geométricos e pedagogicamente muito mais compreensível. Abordar o conteúdo por esse ponto de vista pode favorecer a compreensão matemática de aspectos que, se abordados somente algebricamente, podem passar despercebidos. O principal deles entendemos ser a relação com a geometria da técnica (algébrica) de completar quadrado.

No oitavo ano é introduzido o assunto de polinômios, estimulando o pensamento, a escrita e os cálculos algébricos, quando são apresentados os produtos notáveis, sobretudo o quadrado da soma e da diferença entre dois termos.

Notamos que a expressão algébrica resultante desse processo é de grau dois com as mesmas características de uma expressão algébrica da forma $ax^2 + bx + c$. A conexão com as interpretações geométricas aqui expostas pode ser realizada.

Dessa forma, se temos uma equação do segundo grau, independente da sua estrutura algébrica, se formarmos parte de um quadrado com os termos que contém a incógnita, poderemos resolver essas equações utilizando o argumento de completar quadrado. No entanto, a restrição ao uso da raiz quadrada positiva deve ser superada neste momento, tornando o argumento de “completar quadrados” mais afeito à álgebra.

Esse procedimento é o empregado para obter a generalização da fórmula resolutiva de uma equação de segundo grau, a fórmula de Bháskara, que é bastante difundida como instrumento para determinar as raízes da equação, e muitas vezes, como o único meio de resolver tais equações.

Algebricamente o processo consiste em isolar a incógnita da equação representada pelo termo desconhecido, fazendo uso dos argumentos geométricos para sustentar e dar suporte às passagens algébricas, exceto pela passagem que considera também a raiz quadrada negativa. Esta deve ter uma justificativa separada.

Por fim, apresentamos a dedução das soluções de uma equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$, onde a, b e c são números reais com a diferente de zero.

Como o objetivo é determinar as raízes da equação, vamos realizar as operações necessárias utilizando os meios já apresentados na solução da situação problema da sala comercial envolvendo medidas numéricas.

Vamos relacionar os termos $ax^2 + bx$ com as figuras do quadrado e do retângulo, sabendo que os coeficientes a, b e c são números reais.

As manipulações algébricas se iniciam da seguinte forma:

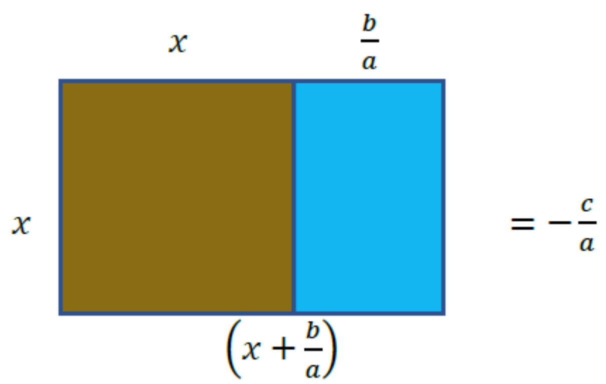
$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 + bx = -c$$

$$x^2 + \frac{bx}{a} = \frac{-c}{a}$$

Depois de isolar os termos que contêm a incógnita e dividir a equação por a, a expressão $x^2 + \frac{bx}{a}$, representa a "soma" das áreas de um quadrado e de um retângulo, pode ser representada por um retângulo de dimensões $\left(x + \frac{b}{a}\right)$ e x. A figura 6 é a representação geométrica da equação supondo $\frac{b}{a}$ e x maiores do que zero.

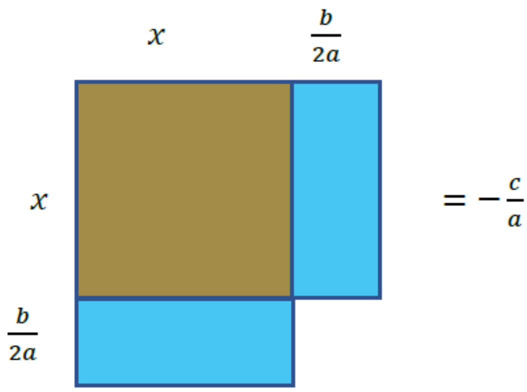
Figura 6. Decompondo o retângulo em duas figuras



Fonte: Os autores

Decompondo o retângulo de dimensões $\left(x + \frac{b}{a}\right)$ e x de modo a reconstruí-lo usando a técnica de completar quadrado, partindo do quadrado existente, devemos dividir ao meio o retângulo de dimensões $\frac{b}{a}$ e x para formar dois retângulos iguais de dimensões $\frac{b}{2a}$ e x e recompor a figura conforme a representação da figura 7.

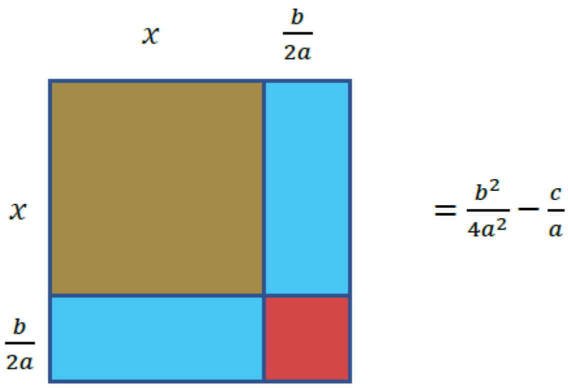
Figura 7. Composição geométrica com a intenção de completar quadrado



Fonte: Os autores

Podemos notar que o polígono formado terá a forma de um quadrado se adicionarmos a ele um quadrado de lado $\frac{b}{2a}$. Estamos imaginando que este valor é positivo, para facilitar a ilustração geométrica, mas se $\frac{b}{2a} < 0$, ainda é possível fazer a ilustração geométrica, com a parte azul se sobrepondo à parte marrom. Entretanto adicionando esse quadrado ao polígono, precisamos adicionar a mesma área do lado direito da igualdade, de modo a mantermos a equação balanceada, assim a equação ganhará a adição de $\frac{b^2}{4a^2}$ dos dois lados da igualdade. A figura 8 indica o balanceamento da equação.

Figura 8. Fazendo o completamento do quadrado



Fonte: Os autores

Portanto agora temos um quadrado de lados medindo $\left(x+\frac{b}{2a}\right)$, cuja área fica expressa por $\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$. Se esse valor é positivo, podemos extrair sua raiz quadrada, obtendo em princípio dois valores possíveis (um positivo e um negativo). Com isto os valores possíveis da incógnita x são:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$x=\frac{-b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Acreditamos que essa proposta vai além do que apenas construir esse instrumento, uma fórmula que é aplicada para encontrar as raízes de uma equação de segundo grau, ela é também a oportunidade de fundamentar e estabelecer relações entre operações aritméticas, algébricas e geométricas com a finalidade de mostrar que a generalização é uma necessidade da ciência de sistematizar situações problemas. Ademais, esta dedução é suficientemente compreensível para o nível básico de ensino.

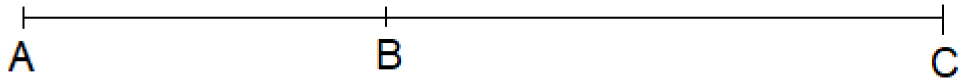
Formulações de situações problemas

As situações problema que estão neste artigo foram produzidas dentro do contexto de compor ideias nossas com situações problema já publicadas em revistas, provas e concursos, havendo a necessidade de adaptação, para que se pudesse abordar o tema ao qual o presente artigo se refere.

Nosso propósito com essa seção é oferecer aos leitores situações problemas que resultem em equações de segundo grau, a fim de que possam ser exploradas por meio da representação geométrica e resolvidas por meio da técnica de completar quadrados.

1) Considere B o ponto que divide AC de modo que AB<BC.

Figura 9. Segmento de reta AC



Fonte: Os autores

Sabendo que as medidas dos segmentos AB, BC e AC formam uma progressão geométrica, calcule a razão dessa progressão.

A situação problema a seguir foi adaptada da questão 5.14 do livro Matemática Discreta, Morgado e Carvalho 2015 Pág. 97.

2) *Uma loja de departamentos realiza uma promoção e anuncia a venda de um violão sob duas condições de pagamentos:*

a) *à vista com 25% de desconto*

b) *em duas parcelas mensais, iguais e consecutivas sendo o primeiro pagamento um mês após a compra.*

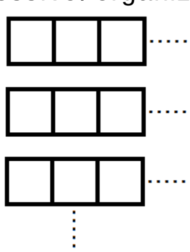
Se o violão custa R$ 800,00 determine a taxa de juros embutida na venda a prazo.

As situações problemas a seguir foram elaboradas pelos autores deste artigo.

3) *A construção de quatro imóveis ocupará uma área total de 112 m². Cada um deles terá o formato retangular de modo que o lado maior terá três metros a mais que o lado menor. Sabendo que os quatro imóveis possuem a mesma área, calcule as dimensões de cada um.*

4) *Em um salão de festas, as mesas para os eventos são montadas usando mesas de formato quadrado, onde cada lado desta mesa acomoda exatamente uma pessoa. Para os eventos, o proprietário encosta as mesas uma na outra de modo a formar mesas retangulares, possibilitando que os convidados se acomodem ao redor das mesas retangulares.*

Figura 10. Possível organização das mesas



Fonte: Os autores

Ele sempre organizou o salão de modo que o número de mesas quadradas em cada mesa retangular seja igual ao número de mesas retangulares. Entretanto, na sua última festa ele precisou colocar uma mesa quadrada a mais em cada uma das mesas retangulares. Quantas mesas quadradas foram utilizadas nessa festa, se havia 240 convidados?

Formular situações problemas inéditas se mostrou uma tarefa complexa, envolvendo muita pesquisa. Consequentemente produzimos algumas e adaptamos outras. Para aqueles que não praticam a pesquisa, elaborar uma situação problema pode ser uma atividade ainda mais difícil do que a resolução de tais situações problemas quando apresentadas pela primeira vez.

Conclusão

O presente artigo teve como meta alicerçar, no contexto da equação de segundo grau, a atitude de generalizar, trazer o tema para ser explorado em sala de aula, inclusive por meio de situações problemas.

A proposta foi uma oportunidade de conectar os aspectos algébricos que fundamentalmente são abordados durante a vida escolar, a algoritmos e fórmulas, que são apresentados com a devida construção e participação dos estudantes, bem como de explorar a técnica de completar quadrados como caminho para solução de equações quadráticas.

O desenvolvimento desse trabalho aconteceu em meio à pandemia da Covid-19, o que trouxe dificuldades extras de aplicação com o ensino remoto emergencial.

Embora as condições não tenham sido favoráveis, percebemos que é possível para os estudantes a partir do final do ensino fundamental, sobretudo voltando a sua rotina de estudos, acompanhar e compreender o desenvolvimento da generalização da fórmula resolutiva de uma equação de segundo grau, tendo o suporte do seu professor.

Foi perceptível a compreensão dos alunos no que se refere a solução de uma equação quadrática por meio da técnica de completar quadrados, sobretudo quando representamos geometricamente a equação a ser resolvida, relacionando os termos algébricos da equação com as figuras que os representam, quadrados e retângulos.

A satisfação dos estudantes em participar de uma ação matemática que teve como resultado uma fórmula, que poderá ser empregada para resolver outras situações de mesma natureza, foi visível. Intervenções como essas contribuem para a melhor compreensão da matemática, por aproximar a matemática escolar do método dedutivo.

Desse modo, as perspectivas que se delineiam é que outros temas matemáticos do ensino fundamental e médio possam ser desenvolvidos de maneira semelhante no processo de ensino da matemática, potencializando a característica da generalização.

Referências

BICUDO, M. A. V. *et al.* **Pesquisa em educação matemática:** concepções & perspectivas. São Paulo: Editora Unesp, 1999.

BRASIL. Ministério da Educação**. Base nacional comum curricular:** Brasília: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf Acesso em: 23 mar. 2021.

FIORENTINI, D; LORENZATO, S. **Investigações em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos: 3º ed. Campinas: Autores Associados, 2012.

LIMA, E. L. **Matemática e ensino:** coleção do professor de matemática. 3º ed. Rio de Janeiro: SBM 2007

MORGADO, A. C; CARVALHO, P. C. P. **Matemática discreta:** coleção profmat. 2º ed. Rio de Janeiro: DRQ gráfica e editora, 2015.

MOSCA, M. A; CARVALHO, T. O; CARVALHO, A. M. F. T. **Acerca da circularidade no estudo inicial dos números irracionais:** uma proposta para a educação básica. Acta Scientiae, Canoas v.18, n.2 p.319-334, maio/ago 2016.

PAIS, L. C. **Ensinar e apreender matemática:** 2º ed. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2013.

ROQUE, T; CARVALHO, J. B. P. **Tópicos de história da matemática:** 1º ed. Rio de Janeiro: Editora Mangava, 2012.

SOUZA, M. C; PANOSSIAN, M. L; CEDRO, W. L. **Do movimento lógico e histórico à organização do ensino:** o percurso dos conceitos algébricos. 1º ed. Campinas: Editora Mercado das Letras, 2014.

NOTAS

IDENTIFICAÇÃO DO TEXTO
O presente texto é resultado da Dissertação de Mestrado do primeiro autor apresentada na Universidade Estadual de Londrina (UEL), em 2021, sob a orientação do Professor Dr. Túlio de Oliveira Carvalho.

IDENTIFICAÇÃO DE AUTORIA
Alexandre Maicher Neto. Mestre em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Professor do quadro próprio do magistério da Rede Estadual de Educação do Estado do Paraná, PR, Brasil.
E-mail: alexandremaicherneto@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-8061-3645

Túlio Oliveira de Carvalho. Doutorado em Física pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Professor Associado. Universidade Estadual de Londrina (UEL), Londrina, PR**,** Brasil.
E-mail: tuliocarvalho@uel.br
https://orcid.org/0000-0002-6344-2418

AGRADECIMENTOS
Não se aplica.

FINANCIAMENTO
O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Não se aplica.

EDITORES
Patricia Helena Mirandola Garcia, Eugenia Brunilda Opazo Uribe, Gerson dos Santos Farias.

HISTÓRICO
Recebido em: 09/09/2021 – Aprovado em: 21/11/2021 – Publicado em: 15/12/2021.

COMO CITAR
MAICHER NETO, A; CARVALHO, T. O. O Tema de Equações do Segundo Grau como espaço para a Generalização. **Revista ENSIN@ UFMS**, Três Lagoas, v. 2, número especial, p. 186-209. 2021.

ENSIN@ UFMS 2021
ISSN 2525-7056

APLICAÇÃO DE VETORES À COMPUTAÇÃO GRÁFICA: UM ESTUDO DE CASO

APPLICATION OF VECTORS TO COMPUTER GRAPHICS: A CASE STUDY

Francisco Alves dos Santos[1]
Alexandre Ramalho Silva[2]

RESUMO: O presente trabalho reporta acerca da realização e das conclusões obtidas após uma oficina sobre vetores aplicados à computação gráfica. A mesma foi desenvolvida em uma turma do curso de licenciatura em matemática de uma instituição de ensino da rede federal da cidade de São Raimundo Nonato-PI, que já havia cursado a disciplina de geometria analítica. Na oficina, foi mostrada a aplicação de vetores para simular movimentos de objetos em um ambiente virtual, programa processing 3.3.5 (gratuito para download). Os objetivos dessa pesquisa são investigar a satisfação e o desempenho dos discentes durante a aplicação da oficina e verificar qual melhoria no aprendizado dos mesmos, no estudo da geometria analítica. A metodologia usada traz em sua composição, uma avaliação diagnóstica, uma avaliação intermediária, uma intervenção e um questionário final, com perguntas abertas com intuito de verificar a compreensão da aplicação de vetores em computação gráfica por parte dos alunos, bem como se os mesmos concordam que a contextualização é importante no processo de ensino-aprendizagem. Pode-se afirmar que os alunos compreenderam como as operações com vetores são aplicadas na programação, em especial em movimentos de objetos em ambientes virtuais e demonstraram interesse em aprofundar seus conhecimentos em geometria analítica. Concluindo, podemos afirmar que a contextualização dos conteúdos matemáticos e sua aplicação, por parte do docente, favorecem, considerável e positivamente, o processo ensino-aprendizagem.

PALAVRAS-CHAVE: Ensino da matemática. Ambiente virtual. Programação.

ABSTRACT: This work reports about the realisation and obtained conclusions after aworkshop on vectors applied to computer graphics. The workshop was developed for a group of mathematics undergraduate students from a federal educational in São Raimundo Nonato city (PI). These students had already studied analytic geometry. In the workshop, it was shown the application of vectors to simulate object's movements in a virtual environment from program processing 3.3.5 (free to download). The objectives of this research are investigate students' satisfaction, analyse their performance during the application of the workshop and verify the improvement in their learning in the studyof analytical geometry. The methodology is based on a diagnostic evaluation, an intermediate evaluation, and a final questionnaire, with objetive questions in order to verify the students' understanding of vectors application in computer graphics, as well as if they agree that the contextualization is important in the teaching-learning process. It can be said that the students obtained a satisfactory understanding of the role that theoperations with vectors perform in the programming, in what refers to movements to objects in virtual environments and showed interest in deepening their knowledge in analytical geometry. In conclusion, we can affirm that the contextualization of the mathematical contents and their application, by the teacher, favor, considerably and positively, the teaching-learning process.

KEYWORDS: Mathematics Teaching. Virtual Environment. Programming.

[1] Instituto Federal do Piauí. E-mail: fas@ifpi.edu.br
https://orcid.org/0000-0001-6386-1498
[2] Universidade Federal do Vale do São Francisco. E-mail: alexrama.univasf@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-0635-4171
● Informações completas da obra no final do artigo

Introdução

O estudo sobre vetores ou grandezas vetoriais, é introduzido no ensino por meio das disciplinas de exatas desde o início do ensino médio, quando se estuda, na física, sobre velocidade, aceleração e forças, por exemplo. Para aqueles que optam por um curso superior na área de exatas, tais como engenharias, licenciaturas ou bacharelados em matemática ou física, esse estudo é mais aprofundado nas disciplinas de geometria analítica álgebra linear e, importantes componentes curriculares desses cursos.

Esse trabalho relata os resultados de uma pesquisa sobre aplicação de vetores geométricos no campo da computação gráfica. É uma introdução à lógica de programação usada nos jogos de computadores para dar movimentos a objetos em um ambiente virtual, por meio de comandos que envolvem operações com vetores, entre outras.

Foi ao participar de um minicurso sobre a aplicação de vetores geométricos em jogos de computadores em um evento de matemática (III Encomat), na instituição da qual sou docente, que surgiu a ideia de trabalhar, em forma de minicurso, com os alunos da mesma instituição de ensino, que já haviam cursado a disciplina geometria analítica, a aplicação de tal componente matemático, na computação gráfica. Isso se deve à busca por métodos de ensino que sejam capazes de despertar no discente, o interesse pelo aprender matemática, e tornam a aprendizagem mais significativa.

As experiências adquiridas como professor de matemática nos ensinos fundamental, médio e superior, desde 2002 até a presente data, me permitiram observar que muitas metodologias utilizadas no ensino da matemática são ineficazes e levam a um distanciamento, por parte do aluno, da disciplina em questão. Para dar fim, ou diminuir às consequências desse "mito" de que aprender matemática é para poucos, vem se pensando, ao longo dos anos, em métodos que façam com que o aluno passe de sujeito passivo a sujeito ativo no processo ensino-aprendizagem.

O aluno será capaz de aprender, quando for capaz de construir seu conhecimento, assimilando e associando aquilo que aprende com o mundo à sua volta, com seu cotidiano. Não obstante, trabalhar a aplicação da matemática em outros componentes curriculares de maneira interdisciplinar, mostra ao aluno que essa disciplina tem um vasto campo de aplicações práticas. Mostra-se ainda que a matemática enquanto conhecimento, ultrapassa o campo da abstração, contrariando o que muitos discentes julgam acerca disso, por não conhecerem a relação entre a matemática e as outras áreas do conhecimento. Em síntese, mostrar essa relação é uma maneira de dinamizar o ensino, e isso colabora com o aprendizado do aluno. Os PCNs acrescentam que

> O professor, considerando a multiplicidade de conhecimentos em jogo nas diferentes situações, pode tomar decisões a respeito de suas intervenções e da maneira como tratará os temas, de forma a propiciar aos alunos uma abordagem mais significativa e contextualizada. (BRASIL 1997, p. 44).

O presente trabalho traz como proposta, mostrar a aplicação de vetores geométricos na computação gráfica. Em suma, de forma não aprofundada, é trabalhada a aplicação de vetores para dar movimento a objetos em um ambiente virtual. Para isso, se faz necessário conhecer algumas propriedades dos vetores e trabalhar algumas operações que envolvem os mesmos.

Quando comecei a ministrar aulas de matemática na instituição de ensino da qual hoje sou professor, no ensino superior, pude ver o quão grande é a deficiência dos discentes em conteúdos matemáticos básicos. Pude também presenciar o desestímulo, por parte de alguns discentes, em estudar algumas disciplinas da grade curricular, por não conhecerem sua aplicação prática, ou que relação há entre os conteúdos estudados e o seu dia a dia.

O panorama atual requer propostas desafiadoras e um tanto atrativas para os alunos do Ensinos Fundamental, do Médio e do ensino superior. O trabalho escolar deve ser pensado e elaborado de acordo com a necessidade do corpo discente, tendo em vista alargar o seu leque de conhecimento da disciplina matemática por meio da sua aplicação prática, pois não é prazeroso aprender aquilo que não tem "utilidade". O aluno necessita conhecer a profundidade daquilo que está aprendendo, e saber em que momento da vida esse conhecimento lhe será útil. Ele precisa saber que o aprender matemática não consiste em memorização de regras e fórmulas que serão usados em determinados momentos e depois serão esquecidos. A esse respeito os PCNs acrescentam que:

> Os Conteúdos do ensino correspondem aos conhecimentos e valores sociais acumulados pelas gerações passadas como verdades acabadas, e, embora a escola vise à preparação para a vida, não busca estabelecer relação entre os conteúdos que se ensinam e os interesses dos alunos, tampouco entre esses e os problemas reais que afetam a sociedade. (BRASIL, 1997, p. 27)

É vasto o campo de aplicação dos conhecimentos matemáticos adquiridos em sala de aula, mas o aluno "não" sabe disso, pois na sala de aula, seu aprendizado é limitado, priorizando algebrismos, memorização e o trabalho descontextualizado.

Para despertar o interesse no aluno pelo aprender matemático, é necessário mostrar ao mesmo que a referida disciplina tem aplicação prática, e não subsiste apenas de teoria, problematizando os conteúdos adequadamente e mostrando suas áreas de aplicação. Torres acrescenta:

> Assim, surge à necessidade de favorecer um ensino que leve o educando a problematizar os mais variados conceitos abordados na referida disciplina escolar. O homem como ser social e integrante de uma cultura necessita do conhecimento matemático na sua relação interpessoal, muitas vezes não sendo perceptível a sua utilização. No entanto, ele o utiliza assim como utiliza a sua língua materna. (TORRES 2016, p. 2)

Assim, faz-se necessário avançar do campo teórico para o prático, para mostrar aos discentes alguns ramos da aplicação dos conteúdos ministrados em sala de aula.

Diante de tais discussões surge a necessidade de se buscar ensinar a matemática de modo que mesma venha a favorecer ao aluno a aplicar seus conceitos, seja em conexão com outras áreas como a física, a geografia, a computação gráfica; seja no cotidiano. Segundo Menezes:

> À medida que se defende a necessidade da utilização da matemática no cotidiano, inevitavelmente deve-se perceber que existem sujeitos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem, de um lado temos o sujeito que ensina ou media e do outro o que aprende ou que constrói o conhecimento junto com o sujeito mediador. (MENEZES, 2016 *apud* CONCEIÇÃO *et al.,* 2015)

Alguns professores de matemática ainda estão presos a um modelo de ensino que não promove no aluno a mobilização da aprendizagem e nem a motivação para perceber que essa disciplina está presente em suas relações sociais. Assim, esse componente curricular torna-se, muitas vezes, distante da realidade do aluno. Isso está relacionado à maneira como ela é trabalhada em sala de aula. Além disso, a ausência de relacionamento da teoria com a prática no ensino da disciplina em questão, associada à sua não aplicação no cotidiano do discente, leva o aluno a não despertar em si o interesse pela disciplina.

O professor conduz a interação de diferentes tipos de alunos que podem pertencer à culturas diversas, e na da sala de aula tais alunos discordam entre si em muita coisa, mudam de opinião, e cada um deles possui o seu próprio tempo de aprendizagem. Eis o primeiro problema que o professor encontra dentro da sala de aula: como nivelar o ensino, tendo tantas disparidades entre os alunos sob sua responsabilidade.

Em se tratando do ensino superior, tais instituições de ensino, que se caracterizam por instituições que produzem conhecimentos, e que estimulam a formação crítica do discente, devem ter um corpo docente que faça uso de metodologias diversas, aperfeiçoando a prática docente pedagógica. No tocante ao ensino da matemática nessas instituições de ensino, tais conteúdos devem ser abordados mostrando a relação dos mesmos com o cotidiano do aluno; ou, onde, em que, e como o aluno fará uso de tais conhecimentos. Para Masola e Allevato (2016)

> Com o pensar voltado para a formação prospectiva e tentando antecipar os desafios que aguardam os egressos no futuro, do qual ainda não se conhece todo o contorno, busca-se uma aprendizagem ativa e problematizadora voltada para a autonomia intelectual, apoiada em formas criativas e estimulantes para o processo de ensino, formando um profissional comprometido com a curiosidade epistemológica e com a resolução de problemas da realidade cotidiana (MASOLA e ALLEVATO, 2016, p. 2).

O ensino, para o professor, é um desafio que ele necessita superar. Sua prática educacional deve adaptar-se ao exigido para cada situação, em particular. A prática do docente deve ser pensada de tal maneira que o professor auxilie na transformação da instituição e suas tradições.

Não é uma tarefa difícil, mas trabalhar a aplicação dos conteúdos matemáticos para alunos do curso superior exige do docente uma preparação mais profunda do que o convencional. É necessário que o professor se adapte (na maioria das vezes) ao uso de tecnologias que permitem simular as aplicações dos conteúdos matemáticos a outras áreas do conhecimento, ou prever certos acontecimentos por meio da criação de gráficos em regressão linear ou polinomial, que são criados por meio de algoritmos e cálculos matemáticos em uma plataforma de programação usando uma linguagem de programação específica, ou mesmo para simular fenômenos do mundo real dentro de um ambiente virtual (esse é o objeto dessa pesquisa).

Há, entre os componentes curriculares do ensino da matemática no ensino superior, algumas disciplinas de cujo ensino se distancia muito da realidade do aluno. Uma das disciplinas que mostra-se bastante distante de sua aplicação prática quando é lecionada, é a geometria analítica. Os vetores, por sua vez, apesar de terem aplicações em uma infinidade de campos, na maior parte das vezes é trabalhado fora do contexto.

Considerando essas premissas, elaboramos uma oficina que mostra a aplicação de operações entre vetores à computação gráfica.

Durante a aplicação desse projeto, os estudantes envolvidos foram submetidos à avaliações e questionários, que foram usadas para coleta dos dados, e que auxiliaram no resultado pesquisa. O objetivo geral deste trabalho é analisar o desempenho e satisfação do aluno em uma oficina em que conceitos básicos sobre vetores e geometria analítica são trabalhados usando um software de computador, onde são simulados movimentos de objetos em ambientes virtuais por meio de operações com vetores.

São objetivos específicos: investigar o desempenho dos alunos durante a realização da oficina supra citada, acerca da aplicação de vetores, quando usados para introduzir movimentos a objetos dentro de um ambiente virtual e; verificar qual a melhoria no aprendizado do aluno, em relação aos conceitos de geometria analítica após a realização da oficina.

A presente pesquisa traz em sua composição, além dessa introdução, um referencial teórico que a embasa, por meio da visão de alguns autores, e traz vários exemplos sobre o uso dos vetores geométricos por meio das operações básicas de adição, subtração, normalização e multiplicação de um vetor por escalar, seguidos de explicações que visam simplificar a compreensão do leitor quanto ao uso dos vetores para tal fim.

Na sequência, trazemos a metodologia da pesquisa de forma detalhada, mostrando os passos de desenvolvimento desse trabalho.

Em seguida os resultados e as discussões baseados na coleta dos dados obtidos durante o desenvolvimento do projeto; e

Por fim, são apresentadas algumas considerações finais, que buscam comparar a questão norteadora, com os resultados obtidos e analisados na disquisição.

Referencial teórico

Neste tópico do trabalho, será apresentado o referencial teórico desta pesquisa, trazendo a visão de alguns autores que embasaram o desenvolvimento da mesma, e exemplos que tratam do uso de vetores para dar movimentos a objetos dentro de um ambiente virtual.

Dificuldades no processo ensino-aprendizagem, como saná- las?

Levando em consideração o crescente desinteresse dos alunos das escolas do tempo presente, e os fatores que levam a isso, vem se pensando em métodos e técnicas que despertem neles o prazer pela aprendizagem da matemática. Essa falta de interesse, por parte dos alunos, associada à falta de métodos dinâmicos no ensino da disciplina em questão, tem levado à deficiência no ensino dessa disciplina e tem criado cada vez mais, lacunas nesse processo tão importante na relação aluno- escola-professor.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCNs (BRASIL, 1997,p. 21) "mesmo os alunos que conseguem completar os nove anos do ensino fundamental acabam dispondo de menos conhecimento do que se espera de quem concluiu a escolaridade obrigatória". Os PCNs (BRASIL 1997, p. 10) definem escolaridade obrigatória como sendo os nove anos do ensino fundamental.

Ao final da escolaridade obrigatória, os alunos aprenderam pouco, e muitas vezes o que aprenderam não facilita sua inserção e atuação na sociedade. Dentre outras deficiências do processo de ensino e aprendizagem, são relevantes o desinteresse geral pelo trabalho escolar, a motivação dos alunos centrada apenas na obtenção de notas e na promoção, o esquecimento precoce dos conteúdos estudados e os problemas de indisciplina. Pensando em mudar essa visão, são muitas as maneiras de se dinamizar o ensino da Matemática, como por exemplo, a utilização de jogos como ferramenta de auxílio ao ensino da disciplina em questão, e sua relação com o dia a dia do aluno.

A matemática mantém grande relação com a área da computação. A própria linguagem de computadores (binária) é um exemplo disso. Por trás daquilo que aparece na tela do computador temos pura aplicação matemática. Ressaltamos que o ensino de linguagem de programação é importante, e auxilia no aprendizado do aluno. Segundo Reif (2017, p. 13)

> Nos dias de hoje, aprender a programar é um diferencial comparado ao que foi aprender inglês há alguns anos, e deveria ser tão importante quanto ler ou escrever. Essa importância não se limita apenas às oportunidades de trabalho, ela possibilita ver o mundo de novas maneiras. (REIF, 2017, p. 13)

Devido a sua imensa importância e à falta de profissionais com habilidades em programação, muitos países perceberam que este aprendizado deve ser incorporado ao currículo das crianças ainda na fase escolar. Dessa maneira, desde cedo elas têm acesso à linguagem de programação, que auxilia no aprendizado de outras disciplinas assim como o desenvolve diversas habilidades pessoais como raciocínio lógico, trabalho em equipe, tomada de decisões e criatividade.

Para Reif (2017), inserção da linguagem de programação por meio da aplicação na matemática, reforça os ideais da prevalência de uma nova postura metodológica em detrimento da postura tradicional de ensino, ainda dominante no ambiente escolar. É importante introduzir nas escolas metodologias que possibilitem o aprendizado do aluno. Técnicas voltadas para a aplicação matemática contribuem para o aprendizado da mesma.

Na seção seguinte, será mostrada a grande importância de se mostrar como se dá aplicação dos vetores de forma a dar movimentos a seres no ambiente virtual. Comandos gerados por meio de linguagens de programação Java permitem aplicar esse tão importante componente matemático na área da computação de modo a dar movimento a objetos na tela do computador.

Vetores: breve contexto histórico

Esse ente matemático, muito importante na física e em outras áreas, foi concebido, da forma como se conhece hoje, através de uma história muito longa. O registro mais antigo que se tem, conforme MARTINS (2015) remontam à Grécia Antiga. Ainda conforme esse autor, “trata-se da lei do paralelogramo para a adição de vetores que pode ter aparecido em um trabalho de Aristóteles que foi perdido, e que encontra-se na Mecânica de Herão de Alexandria“. Ainda conforma MARTINS (2015), esses cálculos aparecem no primeiro corolário do Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (1687), escrito por Isaac Newton.

No século XIX, a necessidade de representar um número complexo fez com que vetores fossem usados para representá-lo geometricamente. Conforme ROSA (1998):

> Historicamente os Números Complexos surgiram quando Bombelli, ao tentar resolver uma equação do 3o grau, usando a fórmula de Cardano-Tartaglia, depara-se com a raiz quadrada de um número negativo. Como ele sabia a priori que esta equação tinha solução, é levado a pensar que existe a raiz quadrada de um número negativo e começa a operar com essas raízes, não as considerando como números, mas sim como representações [...] A ideia é propor aos alunos que resolvam uma equação do terceiro grau, pelo método de Cardano-Tartaglia. Ao resolvê-la eles poderão se deparar com a raiz quadrada de um número negativo [...]. (ROSA, 1998, p. 114).

A descoberta da fórmula de Cardano-Tartaglia, que mostrava números complexos associados a equações cujas soluções reais eram conhecidas fez com que o estudo dos números complexos fossem alavancados. Conforme SANTOS (2018), no século XIX:

> [...] matemáticos como Caspar Wessel (matemático dinamarquês-norueguês, 1745-1818), Jean Robert Argand (um livreiro e matemático amador francês, nascido na suíça, 1768 – 1822), Carl Friedrich Gauss (matemático, astrônomo e físico alemão que contribuiu muito em diversas áreas da ciência, dentre elas a teoria dos números, estatística, análise matemática, geometria diferencial, Geodésia, geofísica, eletrostática, astronomia e óptica, 1777 - 1855), entre outros, conceberam números complexos como pontos no plano bidimensional, isto é, como vetores bidimensionais (SANTOS, 2018, p. 21).

Buscando criar uma ponte entre a Álgebra e a Geometria e ratificar as teorias que envolvem o conjunto dos números complexos, matemáticos dos séculos XVII e XVIII, debrussaram-se na tentativa de desenvolver um sistema de representação geométrica para estes números. Originando com isso, os métodos da Análise Vetorial. Porém, até o final do século XVIII, não havia nenhuma teoria ou conjunto de regras bem definidas que pudessem ser chamadas de Álgebra Vetorial, pois o estudo sistemático e o uso de vetores foram fenômenos do século XIX e início do século XX.

August Ferdinand Möbius publicou, em 1827, o livro The Barycentric Calculus, no qual introduziu diretamente segmentos de reta que eram representados por letras do alfabeto; representação de vetores, mas não no nome.

Um trabalho foi publicado por Giusto Bellavits (matemático italiano, 1803-1880) sobre Geometria, em 1832, onde ele abordou a noção de vetor de maneira explícita. Os elementos básicos da sua obra são os segmentos de reta. Dados dois pontos A e B do plano, os segmentos AB e BA, de extremidades A e B, foram considerados por Bellavits elementos distintos. Essa convenção foi admitida por ele devido ao fato de que o segmento de reta delimitado pelos pontos A e B pode ser encontrado de duas maneiras diferentes: partindo de A para B, ou partindo de B para A. A classificação dos segmentos feita por Giusto, deu-se através da relação de equipolência que, por sua vez, originou a noção de vetor.

A aplicação dos vetores geométricos na computação gráfica, usados para darem movimentos aos seres em um ambiente virtual e fazer algumas simulações. A computação gráfica é a área da computação destinada à geração de imagens em geral, em forma de representação de dados e informações, ou de fenômenos do mundo real.

A aplicação dos vetores geométricos dentro desse campo de conhecimento se dá, por meio de operações que permitem simular movimentos de objetos dentro do ambiente virtual. Por meio dessas operações, pode-se simular, por exemplo, ainda sem o uso de vetores, um objeto circulando dentro do ambiente virtual refletindo seu movimento nas bordas da telinha.

Fazendo uso das operações com vetores, podem-se simular esses movimentos imprimindo ao objeto, velocidade por meios e comandos específicos usando operações com vetores que permitem a atualização da posição do vetor a cada execução dos comandos. Pode-se fixar a magnitude e calcular a norma de um vetor por meio da subtração de vetores.

Essas operações permitem também imprimir uma aceleração ao objeto por meio da adição de vetores; permitem fazer o objeto seguir o mouse; permitem aplicar gravidade (única ou randômica) a um ou mais objetos; permitem modelar uma força aplicada a um objeto; permitem aplicar atrito ao movimento de um objeto, entre muitas outras simulações, apenas por meio das operações com vetores.

Metodologia

Os métodos de investigação utilizados na presente pesquisa foram o quantitativo e qualitativo, para Prodanov e Freitas(2013), este último tem como raízes filosóficas a fenomenologia e a interação simbólica, e o método qualitativo tem o método indutivo como método de análise, dos quais as características são descritas ou explicadas, ou seja, se foca no caráter subjetivo do objeto analisado em questão, estudando as suas particularidades e experiências individuais.

Na pesquisa qualitativa o conjunto inicial de categorias pode ser reexaminado e modificado sucessivas vezes, com vistas a obter ideias e resultados mais abrangentes e significativos.

A pesquisa quantitativa considera que tudo pode ser quantificável, o que significa traduzir em números opiniões e informações para classificá-las e analisá-las. Tem como raízes filosóficas o positivismo, o empiricismo e o lógico; e como coleta de dados, instrumentos manipulados como escala, testes, questionários e etc. Seu método de análise é o dedutivo, por meio do método estatístico. Marconi e Lakato acrescentam que

> As técnicas rigorosas de amostragem têm o objetivo de possibilitar a generalização das descobertas a que se chega pela experiência. Por sua vez, para que possam ser descritas quantitativamente, as variáveis relevantes são especificadas. Os diversos tipos de estudos experimentais podem ser desenvolvidos tanto "em campo", ou seja, no ambiente natural, quanto em laboratório, onde o ambiente é rigorosamente controlado. (MARCONI e LAKATO, 2003, p. 188)

A escolha dos métodos quantitativos e qualitativos aplicados a este trabalho, se devem; primeiro, ao fato de se necessitar quantificar (por meio dos gráficos) os dados coletados pelos questionários fechados que tem como objetivo trabalhar as operações com vetores (muito citadas anteriormente) e; julgar a eficácia de métodos de ensino voltados a trabalhar a aplicação de conteúdos matemáticos por meio da contextualização dos mesmos, e sua relação com outras áreas.

A ordem de execução do presente trabalho seguiu uma sequência desenvolvida em quatro etapas, a saber:

1. Avaliação diagnóstica, que permitiu fazer uma análise prévia sobre o conhecimento dos alunos acerca do conteúdo vetores;
2. Construção de exemplos que envolveram a aplicação de vetores para simular movimentos de objetos em ambientes virtuais;
3. Avaliação intermediária simulando movimentos de objetos por meio da manipulação dos comandos;
4. Avaliação final, baseada em um questionário para julgar a eficácia do desenvolvimento desse trabalho e sua importância para o aprendizado do aluno, e sua contribuição para o ensino do estudo dos vetores.

O presente trabalho teve como público alguns discentes do curso de licenciatura em matemática de uma instituição de ensino superior da cidade de São Raimundo Nonato-PI (os que já haviam cursado a disciplina geometria analítica) e foi realizado em dois encontros de 4h, cada.

Resultados e discussões

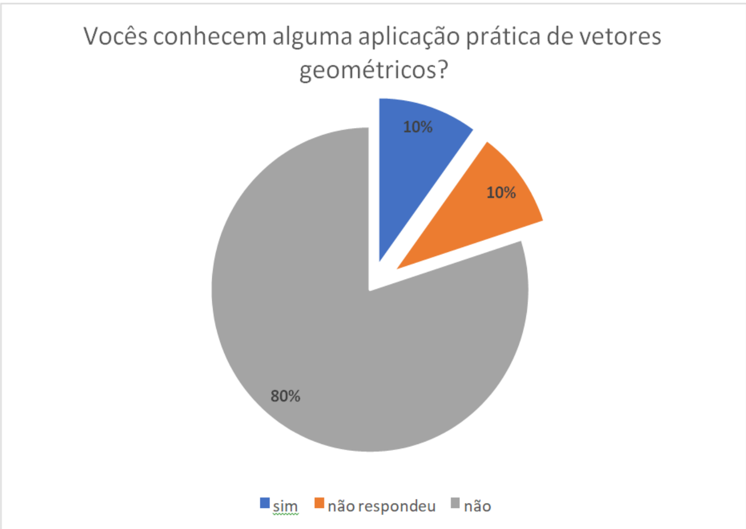
Durante o primeiro encontro foi, inicialmente, realizada uma avaliação diagnóstica com questões voltadas a operações com vetores (essas operações se fazem necessárias para que o aluno entenda como programar esses elementos de modo a alcançar os objetivos deste trabalho). Essa avaliação também buscou identificar se aluno conhece alguma aplicação prática de vetores, se considera relevante esse estudo no curso de licenciatura em matemática e se durante o curso, na disciplina geometria analítica, foi exposto a ele onde seriam aplicados os conhecimentos adquiridos, assim como a relação do conteúdo com outras áreas do conhecimento.

A pesquisa mostrou, inicialmente, que maioria dos discentes não conhecia nenhuma aplicação prática dos vetores. Consideram relevante o estudo do conteúdo em questão, mas não souberam justificar o porquê. A maioria também relatou que durante o período em que cursaram a disciplina geometria analítica não foi mostrada nenhuma aplicação prática dos vetores ou sua relação com outras áreas. Os dados estão registrados nos gráficos a seguir.

As respostas dadas pelos alunos permitiram direcionar o estudo dos vetores por meio de exemplos voltados a sanar as dúvidas iniciais que os mesmos tinham acerca de algumas operações e suas representações geométricas.

O Gráfico 1 tabula os dados da pesquisa referentes ao questionário aberto feito com os discentes. Dos dados obtidos, pode-se constatar que a maioria não conhecia nenhum ramo da aplicação dos vetores geométricos, isso se deve ao fato dos mesmos terem sido submetidos a metodologias de ensino que não lhes permitiram associar a teoria com a prática. Um aluno relatou conhecer a aplicação dos vetores no campo da computação gráfica, por ter participado de um minicurso onde foi abordada tal aplicação, mas durante o curso de licenciatura em matemática, quando cursou a disciplina geometria analítica, não viu nenhuma aplicação prática do conteúdo vetores.

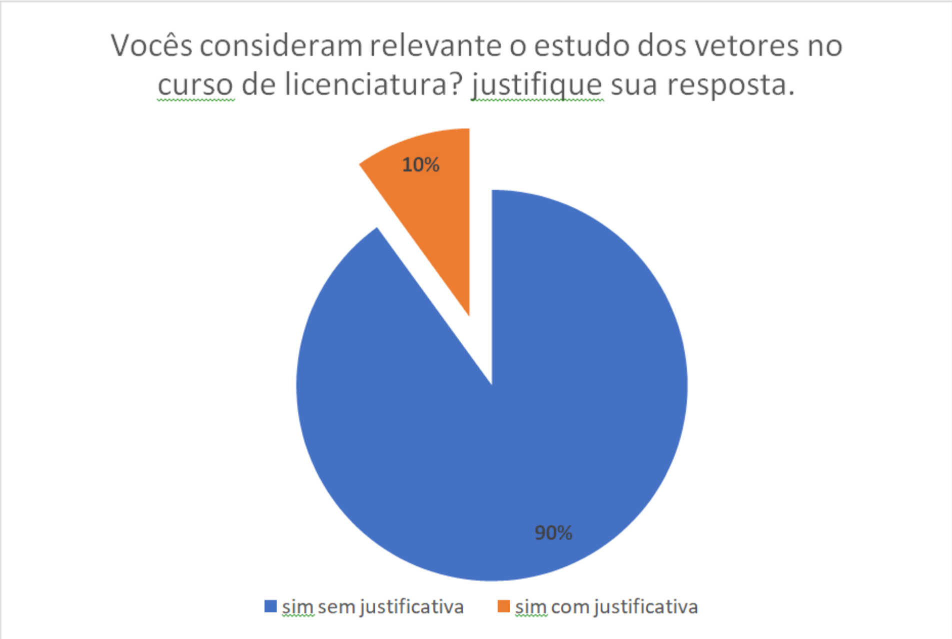
Gráfico 1. Resposta dos discentes ao questionário sobre aplicação de vetores



Fonte: Dados da pesquisa.

Conforme o resultado apresentado a seguir no Gráfico 2, a maioria dos discentes do curso de licenciatura julgam importante o estudo dos vetores no curso de licenciatura, mesmo sem saberem justificar o porquê. Isso, certamente se deve ao fato de não conhecerem a aplicação prática dos mesmos, evidenciando que, por não conhecerem nenhuma aplicação dos vetores geométricos, não sabem relatar a importância de estuda-los, mas apenas que é importante fazê-lo.

Gráfico 2. Reposta dos discentes ao questionário sobre a relevância do estudodos vetores no curso de licenciatura em matemática



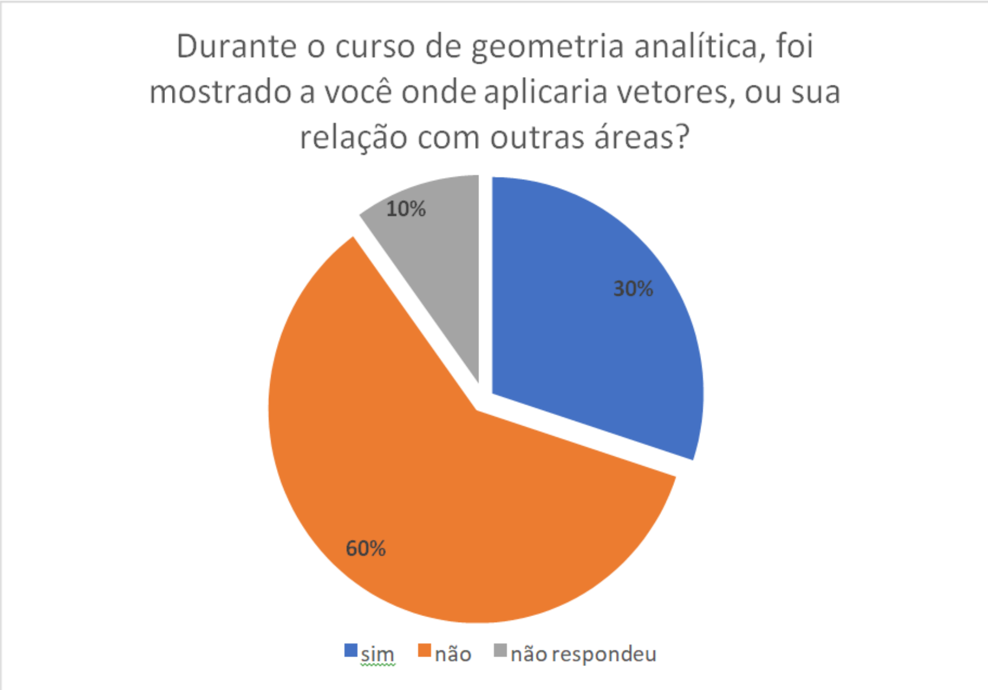
Fonte: Dados da pesquisa.

O Gráfico 3 mostram dos motivos pelos quais muitos dos discentes do curso de licenciatura em matemática não conseguem associar a teoria com a prática: na maioria das respostas, os alunos alegam que o professor que ministrou a disciplina não expôs a relação entre o conteúdo ministrado e outras áreas do conhecimento.

As respostas ao questionário representado no gráfico 3, dadas por alguns discentes, divergem. O aluno X relatou que, durante as aulas de geometria analítica, não foi mostrada a aplicação prática de vetores, apenas a teoria. O aluno Y acrescentou que o professor da disciplina fez comentários sobre a aplicação de vetores na computação gráfica, mas não citou exemplos para mostrar tal aplicação. O aluno Z relatou em sua resposta que foi mostrada a aplicação de vetores, mas não descreveu essa aplicação.

As afirmações dos alunos diferem, pelo fato de alguns deles terem cursado a disciplina em questão, em turmas diferentes (alguns perderam a disciplina e tiveram que cursar novamente); assim, foram submetidos a metodologias de ensino que diferem uma da outra. No entanto, nota-se que a maioria dos professores que a ministram não apresentam a conexão dos conteúdos com outras áreas de conhecimento, assim como na formação desses professores, provavelmente isso não ocorreu.

Gráfico 3. Resposta dos discentes quando questionados se o professor da disciplinageometria analítica mostrou onde eles aplicariam vetores.



Fonte: Dados da pesquisa

Considerando o panorama mostrado, em que os alunos vivenciam a disciplina geometria analítica sem que haja a significação dos conteúdos através de aplicações em diversas áreas de conhecimento, a oficina proposta mostra uma forma de conectar o conteúdo de vetores à computação gráfica. Durante o desenvolvimento desse trabalho, ainda na primeira etapa descrita na metodologia, as questões voltadas a cálculos com vetores ajudaram o aluno a compreender o que acontece nos “bastidores” quando a bola está se movimentando pela tela.

A execução do presente trabalho foi concluída com um questionário com duas perguntas abertas (Apêndice D). A primeira, questiona os alunos sobre a eficácia deste trabalho para compreensão da aplicação dos vetores abordada nesse projeto; e a segunda, se os mesmos julgam mais prazeroso, satisfatório e eficaz o ensino da matemática quando seguido de aplicações, aquilo que se está aprendendo em sala de aula, passando do campo teórico para o prático, não tratando a matemática como uma ciência isolada. A conclusão que se tira após as respostas dos estudantes é que os objetivos da oficina proposta foram atingidos: os mesmos aprenderam uma aplicação do conteúdo de vetores e acharam interessante e prazerosa a metodologia utilizada.

Levando em consideração os dados levantados durante a realização da presente pesquisa, pode-se observar que o ensino da disciplina matemática tem maior aproveitamento quando associadas a teoria com a prática, e os conteúdos são trabalhados de forma contextualizada, mostrando assim a relação entre a matemática e outros campos do conhecimento.

A contextualização e a interdisciplinaridade devem estar presentes em novas discussões e abordagens metodológicas, inseridas em novas propostas de ensino levadas para a sala de aula, que tendem a proporcionar ao aluno a oportunidade de organizar seu conhecimento, estruturar dados e informações e desenvolver seu pensamento crítico. Os PCNs, reforçam que

> Por outro lado, um conhecimento só é pleno se for mobilizado em situações diferentes daquelas que serviram para lhe dar origem. Para que sejam transferíveis a novas situações e generalizados, os conhecimentos devem ser descontextualizados, para serem contextualizados novamente em outras situações. (BRASIL, 1997, p. 26).

Verifica-se, pois, que o ensino da matemática, quando munido de práticas e métodos que permitam o aluno relacioná-la com outras áreas, conhecer sua aplicação, e, por meio disso, atuar como sujeito ativo nesse processo, produzem resultados significativamente positivos.

Considerações Finais

Este trabalho relata o resultado de uma pesquisa desenvolvida com alunos do curso de Licenciatura em Matemática de uma instituição da Rede Federal de ensino, da cidade de São Raimundo Nonato-PI. A pesquisa em questão, abordou o conteúdo vetores de maneira a trabalhar um dos ramos da aplicação de tal componente matemático, de forma a dinamizar o ensino. Esse tipo de abordagem é uma alternativa interessante, baseada na interdisciplinaridade para o ensino da matemática.

É relevante inovar a maneira de ensinar para que o aluno sinta-se motivado a aprender e busque construir seu conhecimento por meio de novas metodologias que conduzam a esse fim.

As etapas de desenvolvimento desse projeto, permitiram direcionar corretamente a realização das atividades propostas, e ajudaram a otimizar sua realização por meio das atividades que julgaram o conhecimento dos alunos sobre o conteúdo abordado, e aquelas que levaram os discentes a compreenderem qual a função das operações com vetores na programação usada para dar movimentos aos objetos dentro de um ambiente virtual.

Durante a execução das atividades, foi possível observar que os alunos apresentaram grande entusiasmo durante todo o desenvolvimento do projeto, visto que os mesmos sentiram-se envolvidos num processo empírico concreto, podendo assimilar melhor o conteúdo abordado no projeto em questão, associando a teoria com a prática.

Os resultados colhidos com a aplicação desse projeto nos permitem afirmar que métodos de ensino em que o aluno atua como sujeito ativo, no processo ensino-aprendizagem, colaboram positivamente com o aprendizado do mesmo.

Diante do exposto, levando em consideração a necessidade de se dinamizar o ensino da matemática, torna-se necessária a procura por métodos de ensino voltados ao enriquecimento das aulas por meios da aplicações práticas, para que o corpo discente entenda que a matemática está presente em tudo à sua volta, e para que possa percebê-la no seu dia-a-dia. Cabe aqui lembrar, que esse trabalho trata da aplicação dos vetores de modo não aprofundado e traz uma introdução à lógica de programação usada em jogos de computadores.

Essa disquisição serve como base para pesquisas futuras sobre componentes matemáticos usados em programações usadas para dar ou auxiliar movimentos de seres em ambientes virtuais.

Para trabalhos futuros, a quem desejar pesquisar sobre tal tema, pode-se trabalhar o uso dos vetores em jogos de computadores com cálculos que produzam ações mais complexas, como por exemplo, a projeção ortogonal, ainda em duas dimensões, que pode ser usada em jogos de carrinhos de corrida para que, aqueles carros que não são controlados pelo jogador, não saiam da pista. Ou pode-se expandir a três dimensões com operações mais complexas, porém, com um leque maior de aplicações.

Outros componentes matemáticos, como a trigonometria, por exemplo, também tem uma vasta aplicação na computação gráfica, e são uma rica fonte nesta linha de pesquisa.

Referências

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf. Acesso em: 27 out. 2018.

DELGADO, J; FRENSEL, K; CRISSAFF, L. **Geometria Analítica. Coleção Profmat**. 1.ed. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2013.

LAKATOS, E. M; MARCONI, M. A. **Fundamentos de metodologia científica - 5. ed**. São Paulo: Atlas 2003.

MARTINS, R. L. **O ensino de vetores e a interdisciplinaridade**. 79 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Profmat) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2015. Disponível em: http://tede.bc.uepb.edu.br/jspui/handle/tede/2382.

MASOLA, W. J, ALLEVATO, N. S. G. **Dificuldades de aprendizagem matemática de alunos ingressantes na educação superior**. Rev. Brasileira de Ensino Superior, Passo Fundo, V.5, n.1 (2019), p. 64-74, mar. 2016.

MENEZES, B. V. *In*: Encontro Científico Multidisciplinar, x.2, 2016, Aracajú. **Importância da aplicabilidade da matemática no cotidiano**: Perspetiva do aluno Jovem e Adulto. Aracajú: (FAMA, 2016. p. 95-104, *apud* CONCEIÇÃO *et al*., 2015)

PRODANOV, C. C; FREITAS, E. C. **Metodologia do Trabalho Científico: Métodos e Técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico**. 2. ed – Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

QUEIROZ, C; MOITA F. **As tendências pedagógicas e seus pressupostos.** Campina Grande; Natal: UEPB/UFRN, 2007.

REAS, C; FRY, B. Processing. **Software de computação gráfica**. Versão 3.3.5, 2001. Disponível em: https://www.filehorse.com/download-processing-64/31136/. Acesso em: 29 nov. 2021.

REIF, T. B. **Programação de computadores: Uma proposta para o 9° ano do Ensino Fundamental**. 2017. 65f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Profmat) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2017. Disponível em: https://sca.profmatsbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150390755. Acesso em 27 out. 2021.

RIGONNATO, M. **Introdução ao Estudo dos Vetores e Aplicações no Ensino Médio**. 60 fls. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Profmat)

Universidade federal do Goiás-UFG, Goiânia, 2018. Disponível em: https://repositorio.ufjf.br/jspui/handle/ufjf/5845.

ROSA, M. S. Números complexos, **Uma abordagem histórica para aquisição do conceito.** 1998. 172 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

SANTOS, F. A. **Aplicação de Vetores à Computação Gráfica: Um estudo de caso.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Profmat) Universidade Federal do Vale do São Francisco, Juazeiro – BA, 2017. Disponível: https://univasf.edu.br/profmat,francisco_alves_dos_santos_turma_2017.pdf. Acesso em: 14 out. 2021.

NOTAS

IDENTIFICAÇÃO DO TEXTO
O presente texto é uma adaptação de: APLICAÇÃO DE VETORES À COMPUTAÇÃO GRÁFICA: um estudo de caso, dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat) apresentado na Universidade Federal do Vale do São Francisco (Univasf), Campus Juazeiro, BA, em 26/10/2018, elaborada sob orientação do Professor Dr. Alexandre Ramalho Silva.

IDENTIFICAÇÃO DE AUTORIA
Francisco Alves dos Santos. Mestre em matemática pela Universidade Federal do Vale do São Francisco (Univasf), Campus Juazeiro, Bahia. Professor EBTT do Instituto Federal do Piauí (IFPI), Campus Angical, PI, Brasil.
E-mail: fas@ifpi.edu.br
https://orcid.org/0000-0001-6386-1498

Alexandre Ramalho Silva. Doutor em nanociências e Materiais avançados pela Universidade Federal do ABC (UFABC). Professor da Universidade Federal do Vale do São Francisco (UNIVASF), Colegiado de Engenharia Mecânica, Juazeiro, BA, Brasil.
E-mail: alexrama.univasf@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-0635-4171

AGRADECIMENTOS
Não se aplica.

FINANCIAMENTO
Não se aplica.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Não se aplica.

EDITORES
Patricia Helena Mirandola Garcia, Eugenia Brunilda Opazo Uribe, Gerson dos Santos Farias.

HISTÓRICO
Recebido em: 30/08/2021 – Aprovado em: 07/12/2021 – Publicado em: 15/12/2021.

COMO CITAR
SANTOS, F. A; SILVA, A. R. Aplicação de Vetores à Computação Gráfica: Um estudo de caso. **Revista ENSIN@ UFMS**, Três Lagoas, v. 2, número especial, p. 210-228. 2021.

ENSIN@ UFMS 2021
ISSN 2525-7056

FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES: PARCERIA ENTRE PROFMAT, EDUCAÇÃO INFANTIL E ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

CONTINUOUS TEACHER EDUCATION: PARTNERSHIP BETWEEN PROFMAT, CHILDHOOD EDUCATION AND EARLY YEARS OF ELEMENTARY EDUCATIO

Ana Maria Porto Nascimento[1]

Arthur do Amaral Rocha[2]

Fabiana Alves dos Santos[3]

Priscila Santos Ramos[4]

RESUMO: Este artigo registra a releitura dos resultados de uma pesquisa de mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat), a fim de identificar as contribuições para a formação continuada dos professores da Educação Infantil e Anos Iniciais do Ensino Fundamental que ocorreu por meio da parceria entre a pós-graduação e a Educação Básica. A pesquisa investigou como professores atuantes nesses segmentos exploram tópicos de Estatística em suas práticas pedagógicas. Adotou-se uma abordagem qualitativa e os sujeitos da pesquisa foram 13 alfabetizadoras que atuaram, no ano de 2020, no I e II Período da Educação Infantil, e nas classes do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental. Os instrumentos de pesquisa foram análise do eixo Estatística na BNCC; encontros com as professoras via *Google Mee*t; seleção de situações no livro didático; elaboração e desenvolvimento de aulas. A releitura dos resultados discutidos na dissertação indica que a pesquisa, realizada no Curso de Mestrado, constituiu-se como formação pedagógica do mestrando e integrou-se à formação matemática, proporcionada pelo Profmat; a visão do mestrando sobre a atividade profissional do professor que atua na Educação Básica foi ampliada; o trabalho do mestrando como coordenador pedagógico da área de Matemática foi aperfeiçoado; a pesquisa configurou-se como atividade de formação continuada para as professoras e uniu a Universidade e a escola de Educação Básica. A ação das professoras formadoras do Profmat, ao orientar a pesquisa e refletir sobre os impactos na formação do mestrando e na formação continuada dos professores, provocou uma sensibilização e motivou a continuidade do trabalho em parceria com os professores da Educação Básica.

PALAVRAS- CHAVE: Educação Básica. Formação Continuada. Estatística.

ABSTRACT: This article records the re-reading of the results of a Profmat master's research, in order to identify the contributions to the continuing education of teachers in Childhood and Early Years of Elementary Education in the partnership between graduate and Basic Education. The research investigated how teachers working in these segments explore Statistics topics in their pedagogical practices. A qualitative approach was adopted and 13 literacy teachers who worked, in 2020, in the I and II Period of Early Childhood Education, and in the classes from the 1st to the 5th year of Elementary School, were subject. The research instruments

[1] Universidade Federal do Oeste da Bahia. E-mail: ana.nascimento@ufob.edu.br
https://orcid.org/0000-0003-2048-5554
[2] Universidade Federal do Oeste da Bahia. E-mail: arthur_rocha99@hotmail.com
https://orcid.org/000-00021406-8861
[3] Universidade Federal do Oeste da Bahia. E-mail: fabiana.santos@ufob.edu.br
https://orcid.org/0000-0002-5271-9231
[4] Universidade Federal do Oeste da Bahia. E-mail: priscilasr@ufob.edu.br
https://orcid.org/0000-0003-3394-764X

● Informações completas da obra no final do artigo

were analysis of the Statistical axis at BNCC; meetings with teachers via Google meet; selection of situations in the textbook; elaboration and development of classes. The re-reading of the results discussed in the dissertation indicates that the research in the Master's Course was constituted as a pedagogical training of the master's student and was integrated to the mathematical training provided by Profmat; the view of the master's student on the professional activity of the teacher who works in Basic Education was expanded; the master's work as a pedagogical coordinator in the area of mathematics was improved; the research was configured as a continuing education activity for teachers and united the University with the School of Basic Education, and the action of the teachers who train the Profmat, by guiding the research and reflecting on the impacts on the formation of the master's student and on continuing education of teachers provoked awareness and motivated to continue the work in partnership with teachers of Basic Education.

KEYWORDS: Basic education. Continuing Education. Statistic.

Introdução

Este texto registra a releitura dos resultados de uma pesquisa, realizada no curso de mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat) em parceria com a Universidade Federal do Oeste da Bahia - Profmat/UFOB, sob a orientação das formadoras, pesquisadoras e coautoras deste trabalho, a fim de identificar as contribuições para a formação continuada dos professores da Educação Infantil e Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

A referida pesquisa foi realizada por um dos autores deste artigo com o objetivo de investigar como professores que atuam na Educação Infantil e Anos Iniciais do Ensino Fundamental, na cidade de Corrente - Piauí, exploram tópicos da Unidade Temática Estatística prescritos na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2017), em suas práticas pedagógicas.

As seguintes questões nortearam a pesquisa: quais as orientações metodológicas para o eixo de Estatística estão contidas na BNCC para Educação Infantil e anos iniciais? E de que forma os professores atuantes nesses segmentos exploram esse eixo? Foram estudados tópicos referentes à aprendizagem matemática na Educação Infantil e nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, principalmente sobre a alfabetização matemática, analisada a BNCC, especificamente as orientações referentes ao eixo de Estatística. Além disso, foram estudados tópicos sobre pesquisa colaborativa, pois o mestrando tinha uma parceria consolidada com o grupo de professoras e atuava como coordenador pedagógico na área de Matemática na escola em que foi realizada a pesquisa. Esses estudos constituíram o referencial teórico e metodológico da pesquisa.

As professoras colaboradoras da pesquisa atuavam na Educação Infantil e nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental com tempo de experiência em sala de aula entre 1 e 15 anos. Inicialmente identificou-se, junto com as professoras, o que está proposto na BNCC. Em seguida, os planos de aula foram elaborados, desenvolvidos e analisados.

Assim, apresentam-se, neste artigo, o percurso da pesquisa, os referenciais teóricos, alguns resultados e as reflexões feitas pelas professoras formadoras do Profmat, junto com o mestrando, a partir da releitura de sua dissertação, em que foram analisadas indicações para a continuidade da pesquisa em parceria com as professoras atuantes na Educação Infantil e Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Entre as principais indicações, é possível ressaltar que a pesquisa, durante o Curso de Mestrado, constituiu-se como formação pedagógica do mestrando e integrou-se à formação matemática, proporcionada pelo curso Profmat; a visão do mestrando sobre a atividade profissional do professor que atua na Educação Infantil e nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental foi ampliada; o trabalho do mestrando como coordenador pedagógico da área de Matemática foi aperfeiçoado; a pesquisa configurou-se como atividade de formação continuada que uniu a Universidade, via pós-graduação, com a escola de Educação Básica.

Além dos resultados apontados, destaca-se que, nesse processo, a ação das professoras formadoras do Profmat, que têm formação específica em Matemática, ao orientar a pesquisa e refletir sobre os impactos na formação do mestrando e na formação continuada dos professores, provocou uma sensibilização destas formadoras, motivando-as a continuar o trabalho em parceria com os professores da Educação Básica. Essas indicações de continuidade da pesquisa serão discutidas ao longo deste artigo.

O ensino de Matemática nos primeiros segmentos da Educação Básica

Os referenciais teóricos que embasaram a pesquisa foram constituídos a partir das perguntas: Quais são os segmentos da Educação Básica? Qual a formação do professor que ensina Matemática na Educação Básica, especificamente na Educação Infantil e Anos Iniciais do Ensino Fundamental? O que significa a alfabetização matemática? O que constitui o eixo Estatística na Educação Infantil e nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental? Como se caracteriza a formação continuada dos professores desses segmentos?

A Educação Básica tem caráter obrigatório e é regulamentada pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) (BRASIL, 1996). Ela engloba a Educação Infantil, o Ensino Fundamental e o Ensino Médio, sendo a Educação Infantil a primeira etapa da Educação Básica, caracterizando-se como fundamento do processo educacional.

A BNCC (BRASIL, 2017) propõe seis direitos de aprendizagem e desenvolvimento na etapa Educação Infantil, para que se assegurem as condições de aprendizagem. As ideias fundamentais desses direitos são: conviver, brincar, participar, explorar, expressar-se e conhecer-se. Assim, a organização curricular da BNCC para a Educação Infantil está estruturada não em disciplinas ou componentes curriculares, mas em torno de cinco campos de experiências, que são: (1) O eu, o outro e o nós; (2) Corpo, gestos e movimentos; (3) Traços, sons, cores e formas; (4) Escuta, fala, pensamento e imaginação; (5) Espaços, tempos, quantidades, relações e transformações. Apesar de não haver uma separação de componentes curriculares, nós conseguimos perceber a presença da Matemática, especialmente no campo 5: Espaços, tempos, quantidades, relações e transformações.

O Ensino Fundamental inicia-se aos 6 anos e tem duração de 9 anos. O principal objetivo dessa etapa de ensino é o desenvolvimento da capacidade de aprender, tendo como meios básicos o pleno domínio da leitura, da escrita e do cálculo. Os Anos Iniciais do Ensino Fundamental é o período constituído do 1 ° ao 5° ano. Em relação à Matemática, a BNCC (BRASIL, 2017) prevê que:

> [...] essa área, por meio da articulação de seus diversos campos – Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade –, precisa garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações (tabelas, figuras e esquemas) e associem essas representações a uma atividade matemática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas. Assim, espera-se que eles desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações. A dedução de algumas propriedades e a verificação de conjecturas, a partir de outras, podem ser estimuladas, sobretudo ao final do Ensino Fundamental (BRASIL, 2017, p. 265).

Quanto à alfabetização matemática, Nascimento (2016) apresenta que ela é um complexo processo de aprendizagem dos conceitos iniciais de Matemática, relacionados a números, operações, grandezas, medidas, formas, localização, orientação, deslocamento, estatística, probabilidade e estimativa. Para essa pesquisadora, trata-se de um processo em que, no envolvimento com situações-problema, a criança constrói e mobiliza tais conceitos e suas representações.

Nascimento (2016) ressalta que esse processo se inicia fora do contexto escolar, continua, é aperfeiçoado e ampliado quando a criança ingressa na escola, seja nas experiências realizadas na Educação Infantil, seja nos primeiros anos escolares do Ensino Fundamental. Nesse processo, estão implicados o aprender a linguagem matemática, conhecer os objetos matemáticos, propor, identificar e resolver situações-problema, desenvolver registros e argumentação oral lógica para comunicar as estratégias de solução e mobilizar os conceitos matemáticos em diferentes situações.

Quanto aos professores que atuam nesses segmentos, Curi (2004, p.179) diz que "nos cursos de formação de professores polivalentes a crítica que pode ser feita é a da ausência de conhecimentos específicos relativos às diferentes áreas de conhecimento, com as quais o futuro professor irá trabalhar". Isso reforça as inquietações sobre a formação da alfabetizadora, que é uma professora polivalente, isto é, trabalha com as áreas de conhecimento que constituem a proposta curricular da Educação Infantil e dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. E, de acordo com Curi (2006), persiste a necessidade de repensar os cursos que formam o professor que irá ensinar Matemática nos primeiros segmentos da Educação Básica. Essa pesquisadora da área de Educação Matemática alerta que devem ser consideradas nos cursos de formação de professores polivalentes as "especificidades próprias do ensino/aprendizagem de Matemática pelas crianças e as características dos professores" (CURI, 2006, p.1)

De modo geral, o profissional que atua na Educação Infantil é licenciado em Pedagogia. Pesquisas, como as de Gatti (2010), mostraram que uma formação voltada para o ensino de Matemática, que promova um sólido conhecimento dos objetos de ensino e um conhecimento pedagógico do conteúdo matemático, ainda não ocorre de modo satisfatório nesse curso. A releitura dos resultados da pesquisa do mestrando indicaram as necessidades formativas das professoras da Educação Infantil e Anos Iniciais e apontaram possibilidades de planejar ações que contribuam para o aperfeiçoamento do trabalho dessas professoras polivalentes. Isso porque se entende que a formação das alfabetizadoras precisa estar voltada não só para metodologias, mas também para conteúdos básicos de Matemática, como os que constituem o eixo de Estatística.

Um estudo que norteou a releitura das informações obtidas na pesquisa do mestrando foi sobre a necessária formação continuada do professor. Nascimento (2016, p.148) afirma que essa formação “se constitui numa reflexão/problematização permanente, em busca de solucionar problemas que afloram a todo o momento, em sala de aula, na complexidade de ensinar, principalmente ensinar matemática”. E obter os conhecimentos profissionais para o ensino, em qualquer área, implica em estudar os conteúdos, planejar e avaliar as aulas. Em Santos (2010) observa-se que:

> [...] a formação continuada é considerada como estratégia de desenvolvimento profissional, na medida em que propicia situações de aprendizagem que afetam o processo do aprender a ensinar e o crescimento intelectual dos professores. Inserida nesse quadro a formação continuada denota sua importância como instrumento que concorre para o desenvolvimento pessoal e profissional, bem como favorece o processo de elaboração da prática pedagógica (SANTOS, 2010, p. 67).

Assim, a pesquisa realizada durante o mestrado, em parceria com as professoras, insere-se na caracterização de uma proposta de formação continuada, pois oportunizou situações de aprendizagem para as professoras atuantes, durante um período atípico, como o período de distanciamento social, em que muitos outros conhecimentos profissionais foram exigidos.

O eixo Estatística na Educação Infantil e nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental

Diante dessas inquietações, procedemos a uma identificação das orientações contidas na BNCC (BRASIL, 2017) para o trabalho com esse eixo:

> Com relação à estatística, os primeiros passos envolvem o trabalho com a coleta e a organização de dados de uma pesquisa de interesse dos alunos. O planejamento de como fazer a pesquisa ajuda a compreender o papel da estatística no cotidiano dos alunos. Assim, a leitura, a interpretação e a construção de tabelas e gráficos têm papel fundamental, bem como a forma de produção de texto escrito para a comunicação de dados, pois é preciso compreender que o texto deve sintetizar ou justificar as conclusões (BRASIL, 2017, p. 275).

Dessa forma, desde o início, vê-se que o recomendado é desenvolver a habilidade de pesquisar, de levantar dados, e as habilidades de ler e interpretar gráficos, de coletar dados e de organizar uma pesquisa devem ser desenvolvidas nos alunos desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. O documento destaca que os primeiros passos envolvem o trabalho com a coleta e a organização de dados de uma pesquisa de interesse dos alunos. A leitura, a interpretação e a construção de tabelas e gráficos têm papel fundamental, bem como a forma de produção de texto escrito para a comunicação de dados (BRASIL, 2017, p. 273).

A pesquisadora Gitirana (2014) ressalta a importância desse eixo para a formação científica do cidadão, pois traz uma perspectiva interdisciplinar.

> Aprender a fazer pesquisa favorece, não somente a formação estatística do cidadão, como, também, a formação científica. A Estatística tem importância numa perspectiva interdisciplinar, para a formação do cidadão em outras áreas do conhecimento, pois as questões a serem investigadas são geradas nos diversos campos de conhecimento (GITIRANA, 2014, p. 8).

Inferimos que a Estatística tem que ser enfatizada desde cedo nas classes de Educação Infantil e Anos Iniciais, devido a sua importância. Essa área de conhecimento pode ser trabalhada de forma interdisciplinar.

A BNCC (BRASIL, 2017) destaca que os primeiros passos envolvem o trabalho com a coleta e a organização de dados de uma pesquisa de interesse dos alunos. A leitura, a interpretação e a construção de tabelas e gráficos têm papel fundamental, bem como a forma de produção de texto escrito para a comunicação de dados (BRASIL, 2017, p. 273). A normativa legal apresenta 8 competências específicas de Matemática no Ensino Fundamental e 5 delas estão diretamente ligadas à Estatística. A seguir, transcrevemos essas competências:

> 3- Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
>
> 4- Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.
>
> 6- Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).
>
> 7- Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.
>
> 8- Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos

> consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles (BRASIL, 2017, p. 267).

Na competência 4, podem ser destacados “investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes”. Na competência 6, atentamos para “expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens,” entre eles, fluxogramas, dados, gráficos e tabelas. E na competência 7, “Desenvolver e/ou discutir projetos”, “valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais”. Desse modo, vimos a relação com a formação científica do cidadão, que foi enfatizada por Gitirana (2014), e que pode ser desenvolvida com um trabalho adequado com o eixo Estatística.

Concluímos essa parte registrando os objetos de conhecimentos e as Habilidades que a BNCC (BRASIL, 2017) traz para serem desenvolvidos no eixo de Estatística nos anos iniciais do Ensino Fundamental:

Quadro 1. Objetos de conhecimento e Habilidades - Estatística

Ano	Objetos do Conhecimento	Habilidade
1º ano	Leitura de tabelas e de gráficos de colunas simples	(EF01MA21) Ler dados expressos em tabelas e em gráficos de colunas simples.
	Coleta e organização de informações Registros pessoais para comunicação de informações coletadas	(EF01MA22) Realizar pesquisa, envolvendo até duas variáveis categóricas de seu interesse e universo de até 30 elementos, e organizar dados por meio de representações pessoais.
2º ano	Coleta, classificação e representação de dados em tabelas simples e de dupla entrada e em gráficos de colunas	(EF02MA22) Comparar informações de pesquisas apresentadas por meio de tabelas de dupla entrada e em gráficos de colunas simples ou barras, para melhor compreender aspectos da realidade próxima. (EF02MA23) Realizar pesquisa em universo de até 30 elementos, escolhendo até três variáveis categóricas de seu interesse, organizando os dados coletados em listas, tabelas e gráficos de colunas simples.
3º ano	Leitura, interpretação e representação de dados em tabelas de dupla entrada e gráficos de barras	(EF03MA26) Resolver problemas cujos dados estão apresentados em tabelas de dupla entrada, gráficos de barras ou de colunas. (EF03MA27) Ler, interpretar e comparar dados apresentados em tabelas de dupla entrada, gráficos de barras ou de colunas, envolvendo resultados de pesquisas significativas, utilizando termos como maior e menor frequência, apropriando-se desse tipo de linguagem para compreender aspectos da realidade sociocultural significativos.
	Coleta, classificação e representação de dados referentes a variáveis categóricas, por meio de tabelas e gráficos	(EF03MA28) Realizar pesquisa envolvendo variáveis categóricas em um universo de até 50 elementos, organizar os dados coletados utilizando listas, tabelas simples ou de dupla entrada e representá-los em gráficos de colunas simples, com e sem uso de tecnologias digitais.

Ano	Objetos do Conhecimento	Habilidade
4º ano	Leitura, interpretação e representação de dados em tabelas de dupla entrada, gráficos de colunas simples e agrupadas, gráficos de barras e colunas e gráficos pictóricos	(EF04MA27) Analisar dados apresentados em tabelas simples ou de dupla entrada e em gráficos de colunas ou pictóricos, com base em informações das diferentes áreas do conhecimento, e produzir texto com a síntese de sua análise.
	Diferenciação entre variáveis categóricas e variáveis numéricas Coleta, classificação e representação de dados de pesquisa realizada	(EF04MA28) Realizar pesquisa envolvendo variáveis categóricas e numéricas e organizar dados coletados por meio de tabelas e gráficos de colunas simples ou agrupadas, com e sem uso de tecnologias digitais.
5º ano	Leitura, coleta, classificação interpretação e representação de dados em tabelas de dupla entrada, gráfico de colunas agrupadas, gráficos pictóricos e gráfico de linhas	(EF05MA24) Interpretar dados estatísticos apresentados em textos, tabelas e gráficos (colunas ou linhas), referentes a outras áreas do conhecimento ou a outros contextos, como saúde e trânsito, e produzir textos com o objetivo de sintetizar conclusões. (EF05MA25) Realizar pesquisa envolvendo variáveis categóricas e numéricas, organizar dados coletados por meio de tabelas, gráficos de colunas, pictóricos e de linhas, com e sem uso de tecnologias digitais, e apresentar texto escrito sobre a finalidade da pesquisa e a síntese dos resultados.

Fonte: BNCC (2017).

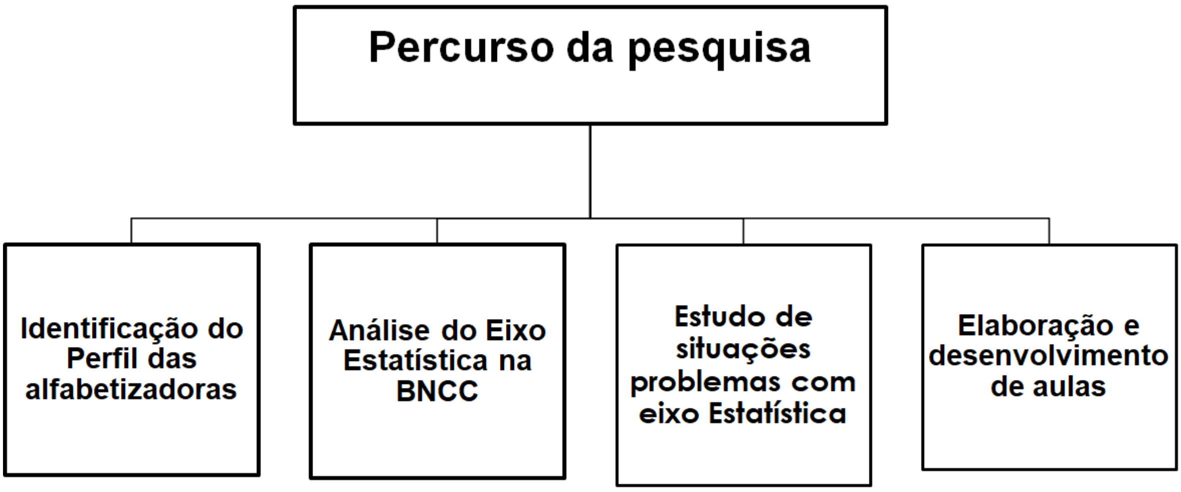
Nota-se que os objetos de conhecimento e as habilidades apresentam-se em uma escala ascendente em um processo em que deveriam ser ampliados e aprofundados a cada ano escolar.

Delineamento metodológico

Em uma abordagem de pesquisa qualitativa, os dados permitem compreender as complexidades e os detalhes das informações obtidas. Então, os dados qualitativos caracterizam-se como informações nas quais buscamos não somente medir um tema, mas também descrevê-lo, usando impressões, opiniões e até mesmo pontos de vista. Desse modo, concordamos com Godoy (1995, p. 23) ao afirmar que: “a abordagem qualitativa, enquanto exercício de pesquisa, não se apresenta como uma proposta rigidamente estruturada, ela permite que a imaginação e a criatividade levem os investigadores a propor trabalhos que explorem novos enfoques”.

A abordagem qualitativa nos dá liberdade para realizar debates sobre possibilidades de contribuição com a realidade dos sujeitos da pesquisa. Inicialmente, houve a preocupação com o contexto atual, pois, desde março do ano de 2020, o mundo se encontra imerso numa pandemia e as aulas presenciais foram suspensas como forma de restringir a aglomeração de pessoas. Adaptou-se o caminho da pesquisa e os instrumentos de constituição das informações, mas foi mantido o propósito de realizar um trabalho em parceria e uma relação bem próxima entre pesquisadores e professoras. De modo geral, o percurso da pesquisa está representado na Figura 1:

Figura 1. Percurso da pesquisa



Fonte: Diário do pesquisador.

Realizou-se a identificação e caracterização das escolas, mas a observação participante nas salas de aula foi impossibilitada. Assim, uma alternativa que substituiu a participação *in loco* do pesquisador foi a gravação da aula em vídeo. Esse vídeo era disponibilizado ao pesquisador para análise. Os principais instrumentos de pesquisa foram: análise do eixo Estatística na BNCC; encontros com as professoras via *Google Meet*; seleção de situações-problemas no livro didático; elaboração de planos de aulas; desenvolvimento de aulas.

Sujeitos da pesquisa

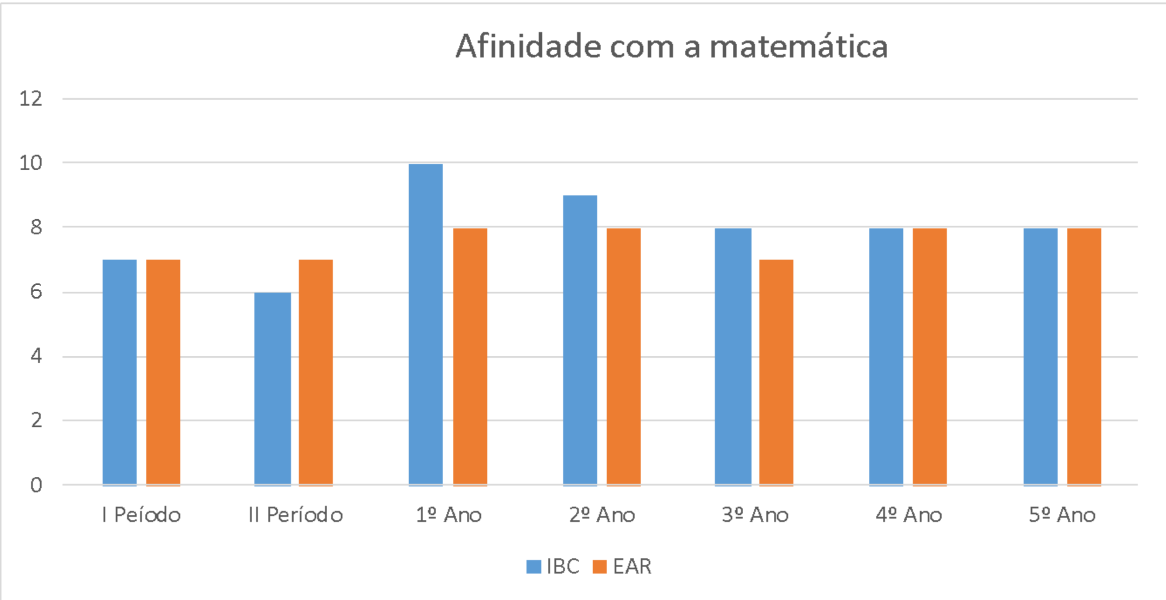
Participaram da pesquisa as alfabetizadoras que atuaram, no ano de 2020, no I Período e II Período da Educação Infantil, e nas classes do 1º ao 5º ano do Ensino

Fundamental de duas escolas da rede particular da cidade de Barreiras/BA, pois durante o período da pandemia as escolas públicas estavam fechadas.

Foram 14 turmas: 02 turmas de I período, 02 turmas de II período, 02 turmas de 1º ano, 02 turmas de 2º ano, 02 turmas de 3º ano, 02 turmas de 4º ano, 02 turmas de 5º ano, mas a professora que ensina matemática nas turmas de 4º e 5º ano do Instituto Batista é a mesma; assim, foram 13 professoras e seus estudantes. Ao fazer a leitura desses dados, percebe-se que a maioria das professoras é experiente: 09 professoras têm um tempo de atuação no magistério acima de seis anos; uma professora com 03 anos de atuação; uma professora com 04 anos de atuação e somente uma iniciou a carreira profissional no mês de janeiro daquele ano de 2020.

Em relação ao tempo de atuação como alfabetizadora, viu-se que estava entre poucos meses a 15 anos de atuação. Quanto à afinidade com a Matemática, em resposta à pergunta: Em uma escala de 0 a 10, que nota você daria para sua afinidade com a Matemática? Obtiveram-se os seguintes resultados:

Figura 2. Afinidade com a Matemática



Fonte: Diário do pesquisador.

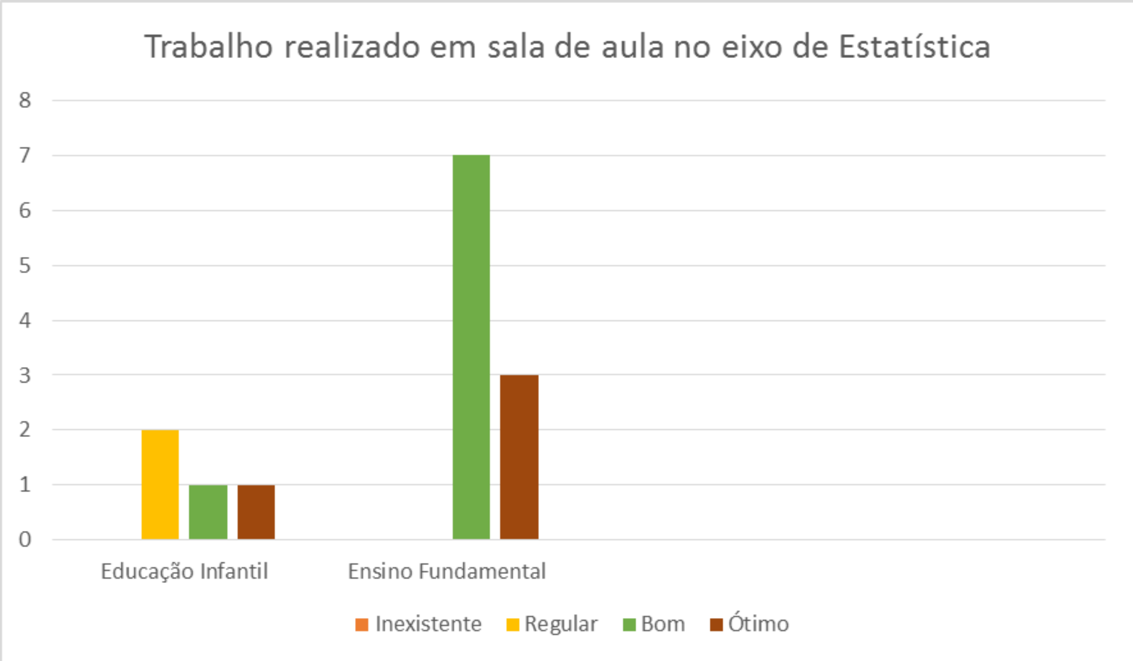
Percebe-se que as professoras atribuíram uma nota que indica uma boa relação com essa área, mas quando se fez a leitura da resposta subjetiva, observa-se que, mesmo dando notas altas, uma média de aproximadamente 7.8, elas relataram que não têm um domínio satisfatório do conteúdo matemático: “Ficaria com a média 08, pois não sou muito boa em matemática. Nas séries iniciais é mais fácil para trabalhar, mesmo assim estudo para compreender melhor”. É interessante destacar a expressão “não sou muito boa” e, ao mesmo tempo nota 8, isso pode evidenciar tanto uma relação satisfatória com a matemática, quanto o desejo de ter um conhecimento maior do que aquele que já tem no momento. E a afirmação de que “estudo para compreender melhor” é uma indicação positiva, pois é inerente à profissão professor o aprofundamento nos estudos e o aperfeiçoamento contínuo.

Uma das professoras justificou a dificuldade em matemática: “Pois no curso de Pedagogia não temos um estudo aprofundado da disciplina. O que vemos é somente uma pequena teoria a respeito de como ministrar alguns conteúdos em sala”. Essa dificuldade foi apontada em diversos estudos sobre a formação do professor que ensina matemática, pois o curso de formação inicial, em alguns casos, promove uma formação generalista e não específica para o ensino das diferentes áreas de conhecimento que constituem o currículo da Educação Básica.

Destaca-se que as professoras da Educação Infantil são as que indicaram menor afinidade com a matemática. Uma das professoras do II Período da Educação Infantil indicou um valor menor que 7 e observa-se que essa professora apresentou dificuldade em identificar situações-problema referentes à Estatística no livro didático, adotado em sua escola.

Outro questionamento feito na pesquisa foi: Em relação ao Eixo Estatística, como você caracteriza seu trabalho em sala de aula? Os resultados estão representados na Figura 3:

Figura 3. Caracterização do trabalho com o eixo estatística



Fonte: Diário de registro do pesquisador.

A indicação de ótimo foi feita pelas professoras do 3º, 4º e 5º ano. Destaca-se que, entre as professoras da Educação Infantil, vê-se uma indicação de um trabalho regular com o eixo Estatística. Esse dado é coerente com a fala da professora do II Período: "Eu estava olhando a entrevista e meu conteúdo... Meu livro não trabalha o eixo de Estatística". Esse trecho revela a dificuldade em identificar as atividades contidas no livro que seriam direcionadas a explorar o Eixo Estatística. Isso evidencia o quanto é necessário realizar um trabalho entre estudantes da pós-graduação em matemática, como o Profmat, e professores atuantes na escola de educação infantil e anos iniciais do Ensino Fundamental. Pesquisas como a de Curi (2004) já indicaram essas lacunas conceituais dos professores que ensinam matemática nesses segmentos, apontando a necessidade da parceria e da participação em grupos de estudo para a superação dessas lacunas que dificultam um desenvolvimento adequado do trabalho com a matemática.

A partir desses questionamentos iniciais, que possibilitaram maior conhecimento do perfil do grupo de professoras, foram propostas a seleção de situações-problemas nos livros didáticos adotados e a elaboração e o desenvolvimento de aulas.

Ressalta-se que apesar do ambiente escolar disponível, nesse ano de 2020, as crianças receberam as atividades para serem realizadas em casa. A dinâmica desse trabalho ocorreu da mesma forma nas duas escolas: as professoras planejavam as atividades da semana, imprimiam e colocavam em envelopes individuais para cada estudante da turma; esse envelope era entregue aos pais. Eram atividades referentes a cada dia da semana e, para orientar os estudantes, as professoras encaminharam uma videoaula gravada pela própria professora. Os pais devolviam o envelope com as atividades respondidas e recebiam um novo envelope com as atividades da semana seguinte e com a atividade da semana anterior corrigida pela professora.

O trabalho das professoras em preparar materiais autoinstrucionais para os estudantes, devido à falta da aula presencial, representou uma sobrecarga de trabalho e tornou-se um empecilho para a análise dos materiais em um grupo de *Whatsapp*, ou via reuniões no *Google Meet*, pois além de elaborar o plano de sua aula, isso exigiria um olhar atento ao plano elaborado por sua colega de trabalho. Por esse motivo, as discussões ocorreram entre o pesquisador e cada uma das professoras.

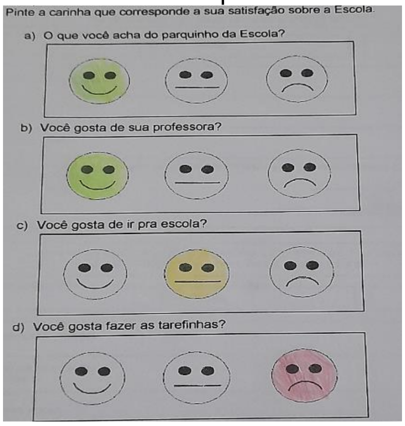
Exploração do eixo Estatística na Educação Infantil e Anos Iniciais do Ensino Fundamental

Os principais resultados da pesquisa de mestrado Profmat/UFOB foram o estudo das competências, habilidades e objetos de conhecimento propostos para o eixo de Estatística na BNCC e a elaboração e o desenvolvimento de aulas com base nesse estudo, o que caracterizou a formação continuada das professoras. Apresentam-se, a seguir, recortes desses resultados.

Houve uma preocupação com as aulas da Educação Infantil, pois como foi relatado pela professora do II Período, “Meu livro não aborda Estatística”, o que poderia ser um obstáculo ao desenvolvimento da aula. No entanto, a aula foi realizada de acordo com o plano de aula que o pesquisador e a professoras do I Período e II Período elaboraram juntos.

Na aula do I Período, a professora enviou a atividade para os estudantes, como proposto no período de pandemia; recebeu, analisou as respostas e, posteriormente, enviou aos alunos o vídeo com os resultados da pesquisa, assim como planejado. Nessa aula, observou-se um grande empenho da professora, uma preocupação em confeccionar uma tabela e apresentar para os alunos. Caso fosse um ensino presencial, a elaboração da tabela seria feita de modo coletivo entre alunos e professora.

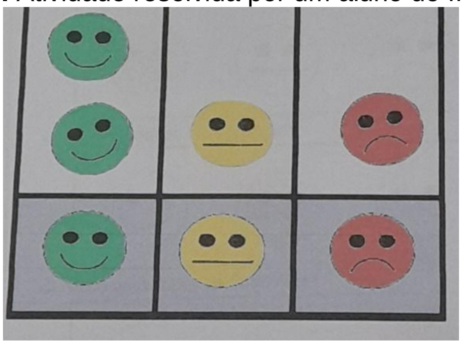
Figura 4. Atividade resolvida por um aluno do II Período



Fonte: Diário do pesquisador.

Na aula do II Período, os alunos responderam a uma pesquisa sobre a satisfação de determinados segmentos da escola. As instruções foram enviadas e eles responderam a pesquisa (levantamento de dados) proposta. A professora ainda ministrou mais uma aula, gravada em vídeo, mostrando para os alunos os resultados.

Figura 5. Atividade resolvida por um aluno do II Período

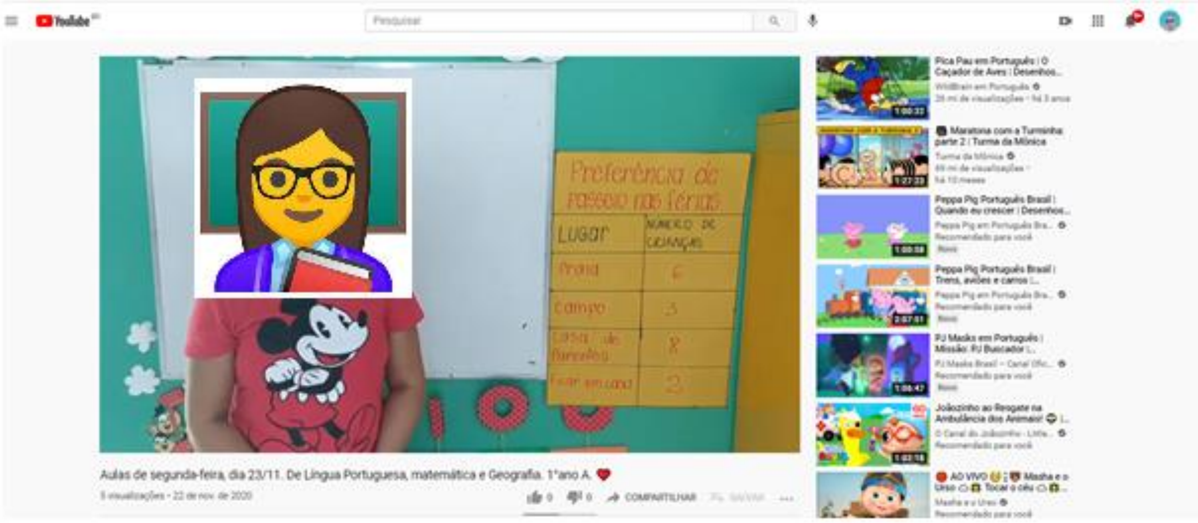


Fonte: Diário do pesquisador.

Com essa atividade, os alunos tiveram a oportunidade de iniciar a identificação de um gráfico de colunas, pois essa tabela com as carinhas, classificadas na vertical, lembra um gráfico de colunas, quanto mais alta a coluna, mais escolhida foi a opção.

Na aula do 1º ano, foi gravado e postado um vídeo no *Youtube* e encaminhado para os alunos. Enquanto eles assistiam ao vídeo, iam respondendo a atividade, seguindo as orientações dadas. A professora recebeu as atividades, corrigiu e devolveu para os alunos. O que chamou a atenção, nessa aula, foi a desenvoltura da professora, acolhendo os alunos como se estivessem todos juntos na sala de aula.

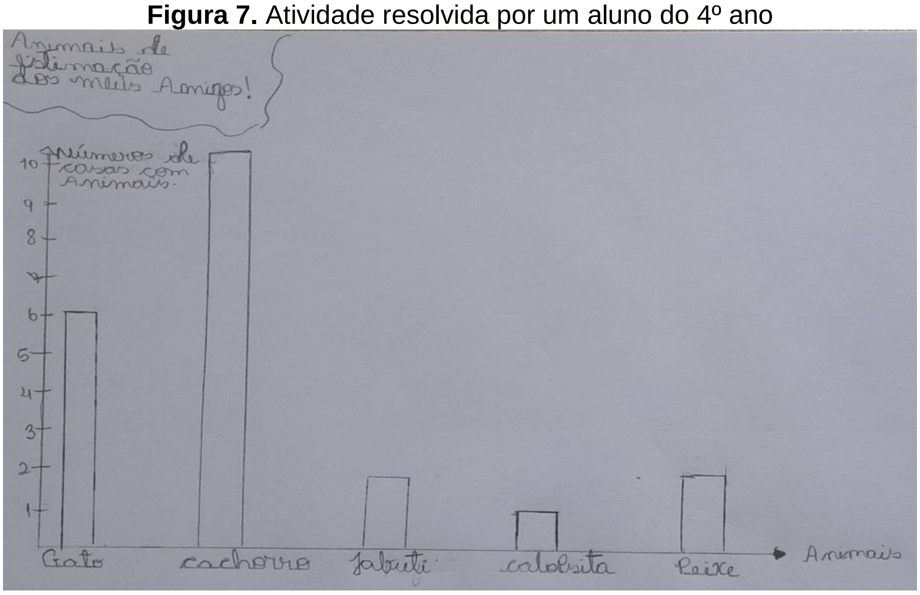
Figura 6. Trecho da vídeo-aula



Fonte. Diário de registro do pesquisador.

O planejamento da aula do 4º ano apresentou uma proposta mais direcionada para oportunizar ao aluno entender como se faz uma pesquisa e mostrar, em atividades práticas, se conseguiu compreender. A professora dividiu a turma em dois grupos, o primeiro pesquisou sobre a cidade onde havia nascido e o segundo sobre o animal de estimação. Muitos alunos tiveram dificuldades no momento de realizar a pesquisa e outros na hora de representar em gráfico ou tabela. A maioria representou em forma de tabela, como mostra a figura 07, poucos colocaram a conclusão dos resultados obtidos na pesquisa.

Figura 7. Atividade resolvida por um aluno do 4º ano

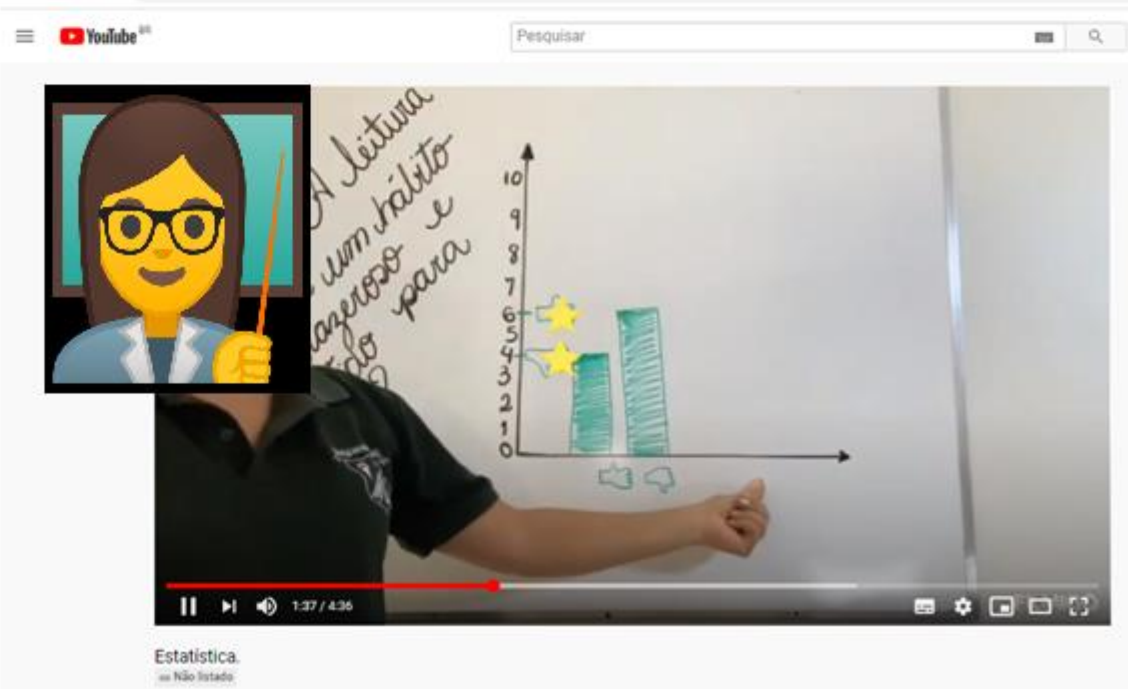


Fonte: Diário do pesquisador.

Destaca-se essa construção do gráfico de um dos alunos, na qual ele colocou corretamente um título para o gráfico, um título para o eixo x e outro para o eixo y.

Na aula do 5º ano, a professora passou um questionário para os alunos, recebeu, analisou e gravou um vídeo mostrando os resultados de cada questionamento. O vídeo foi elaborado de maneira muito interativa, o que demonstrou as novas aprendizagens profissionais da professora, exigidas pelo ensino remoto.

Figura 8. Trecho do vídeo



Fonte: Diário do pesquisador.

Nos relatos e conversas com as professoras, de forma geral, foi manifestado um grande aprendizado, pois antes não compreendiam que a alfabetização no eixo de Estatística era um processo contínuo da Educação Infantil ao Ensino Fundamental. Relataram também que, a partir de 2021, o eixo de Estatística será explorado de forma diferente, enfatizando sua importância e mostrando sempre para os alunos sua presença em outros componentes curriculares. A seguir, apresentamos alguns recortes das falas das professoras, quando perguntadas sobre a contribuição do trabalho para sua formação profissional. Professora A pontuou:

> Como profissional, posso afirmar que seu excelente trabalho não só contribuiu para a formação profissional, como também abriu leques de possibilidades, para que nós profissionais possamos buscar sempre inovar nas aulas de matemática, seja

> através da estatística ou de outros temas abordados. E seremos capazes de estimular no educando o desenvolvimento das capacidades de pensamento lógico e da autonomia.

Professora B:

> Afirma o que já fizemos na nossa metodologia, o que você abordou na sua pesquisa confirma o que fazemos e que podemos aperfeiçoar cada vez mais.

Professora C:

> Principalmente quando elaboramos as aulas juntos, cada um colocando sua metodologia, manifestando suas experiências e trocando informações. Nossas aulas a partir do dia da pesquisa, está sendo planejada de forma diferente.

Professora D:

> Gostei muito da metodologia, trabalhamos de forma coletiva e vimos que a educação é um processo que devemos estar sempre nos atualizando e buscando novas formas de ensinar.

Em relação aos alunos, foi surpreendente o seu envolvimento, levaram as aulas de forma divertida e descontraída. Com essa descontração, conseguimos ter a atenção do aluno, fazendo com que eles colaborassem com a pesquisa e tivessem um grande aproveitamento no aprendizado. Toda essa interação por parte dos alunos pode ser devido à voz que eles ganharam, respondendo as pesquisas, fazendo pesquisas, manifestando o seu grau de satisfação. Isso está de acordo com as indicações de Gitirana (2014) sobre proporcionar o fazer pesquisa desde a Educação Infantil.

Considerações Finais

A análise da BNCC para o eixo de estatística aponta que as crianças da Educação Infantil devem desenvolver habilidades que lhes proporcionem registrar com números a quantidade de crianças (meninas e meninos, presentes e ausentes), a quantidade de objetos da mesma natureza (bonecas, bolas, livros etc.) e construir gráficos básicos. Essas habilidades foram exploradas com êxito nas aulas em parceria com as professoras colaboradoras.

Diante disso, observou-se que se trata de uma orientação capaz de tornar a aula mais interessante, estreitando os laços entre professor e aluno durante a realização de pesquisa e busca por esses dados, que estão integrados em situações familiares às crianças.

Na proposição de desenvolver uma pesquisa em parceria, destaca-se a troca de experiências, sugestões e, ao mesmo tempo, a reflexão sobre a prática docente, mesmo sem a realização de encontros presenciais. Além disso, este trabalho contribuiu para o aperfeiçoamento da prática docente, bem como para o advento de novas práticas, com o uso de métodos diversificados e, consequentemente, abre um leque de oportunidades para a melhoria da qualidade da educação oferecida em todos os níveis. Este estudo, inclusive, tem impacto na associação da Universidade, a nível de pós-graduação, via Profmat, com o Ensino Básico.

Os objetivos foram alcançados, as ações da pesquisa conduziram as professoras a repensarem suas práticas, elaborando suas próprias tarefas, ou adaptando tarefas à realidade dos seus alunos. Além disso, oportunizou ao mestrando a ampliação da sua visão sobre a atividade do professor que atua nos Anos Iniciais e o aperfeiçoamento de seu trabalho como coordenador pedagógico da área de Matemática. Como continuidade da pesquisa, pretende-se ampliar o referencial teórico, implementar outras práticas de alfabetização e realizar novas parcerias em aulas presenciais no período pós-pandemia, expandindo para a rede pública de ensino.

A releitura da investigação sensibilizou os professores formadores do Profmat/UFOB, com formação específica em matemática, para estabelecer parcerias com os professores da educação básica. Espera-se que esses resultados possam contribuir com a alfabetização matemática no eixo de Estatística, além de evidenciar sua grande importância na continuidade da vida escolar e sua implementação no cotidiano das pessoas.

Referências

BRASIL. **Lei n. 9.394/96***.* Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Brasília, 1996. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/L9394.htm. Acesso em: Ago. 2021.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Curricular Comum - BNCC**. Brasília, 2018.

CURI, E. **Formação de Professores Polivalentes**: uma análise dos conhecimentos para ensinar Matemática e das crenças e atitudes que interferem na constituição desses conhecimentos. Tese de Doutorado. PUC/SP. São Paulo. 2004.

CURI, E. A formação matemática de professores dos anos iniciais do ensino fundamental face às novas demandas brasileiras. **Revista Iberoamericana De Educación**, v. 37, n. 5, p. 1-10, 2006. Disponível em: https://doi.org/10.35362/rie3752687 Acesso em: jul. 2021.

GATTI, Bernadete. A formação de professores no Brasil: características e problemas. **Educação e Sociedade**, Campinas, v. 31, n. 113, p. 1355-1379, out.- dez. 2010. Disponível em: http://www.cedes.unicamp.br. Acesso em: jul. 2021.

GITIRANA, V. A pesquisa como eixo estruturador da educação estatística. *In:* BRASIL. **Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa***:* Educação Estatística. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. – Brasília: MEC, SEB, 2014.

GODOY, A. Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades. 1995. Disponível em: https://www.scielo.br/pdf/rae/v35n2/a08v35n2.pdf. Acesso em: abril 2021.

NASCIMENTO, A. M. P. **A construção coletiva de uma práxis emancipatória em alfabetização matemática**. 2016. Tese (Doutorado em Educação)- Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade de Brasília – UnB, 2016.

SANTOS, E. O. dos S. **A formação continuada na rede municipal de ensino do Recife***:* concepções e práticas de uma política em construção. 2010. Tese (Doutorado)- Centro de Educação. Universidade Federal de Pernambuco, 2010.

NOTAS

IDENTIFICAÇÃO DE AUTORIA

Ana Maria Porto Nascimento. Doutora em Educação pela Universidade de Brasília. Professora e Orientadora do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat) da Universidade Federal do Oeste da Bahia (UFOB), BA, Brasil.
E-mail: ana.nascimento@ufob.edu.br
https://orcid.org/0000-0003-2048-5554

Arthur do Amaral Rocha. Mestre em Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat) da Universidade Federal do Oeste da Bahia (UFOB), BA, Brasil.
E-mail: arthur_rocha99@hotmail.com
https://orcid.org/000-00021406-8861

Fabiana Alves dos Santos. Doutora em Matemática pela Universidade Federal do Ceará (UFC). Professora Adjunta da Universidade Federal do Oeste da Bahia (UFOB), BA, Brasil.
E-mail: fabiana.santos@ufob.edu.br
https://orcid.org/0000-0002-5271-9231

Priscila Santos Ramos. Mestre em Matemática pelo Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas (UFAL), Doutoranda em Matemática pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Professora adjunta da Universidade Federal do Oeste da Bahia (UFOB), BA, Brasil.
E-mail: priscilasr@ufob.edu.br
https://orcid.org/0000-0003-3394-764X

AGRADECIMENTOS
Agradecemos ao Profmat e às professoras colaboradas da pesquisa.

FINANCIAMENTO
Não se aplica.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Não se aplica.

EDITORES
Patricia Helena Mirandola Garcia, Eugenia Brunilda Opazo Uribe, Gerson dos Santos Farias.

HISTÓRICO
Recebido em: 13/09/2021 – Aprovado em: 03/11/2021 – Publicado em: 15/12/2021.

COMO CITAR
NASCIMENTO, A. M. P; ROCHA, A. A; SANTOS, F. A; RAMOS, P. S. Formação Continuada de Professores: Parceria entre Profmat, Educação Infantil e Anos Iniciais do Ensino Fundamental. **Revista ENSIN@ UFMS**, Três Lagoas, v. 2, número especial, p. 229-249. 2021.

O ENSINO DE COORDENADAS POLARES FORA DOS NÚMEROS COMPLEXOS: UMA EXPERIÊNCIA USANDO O *WINPLOT*

TEACHING POLAR COORDINATES OUTSIDE THE COMPLEX NUMBERS: AN EXPERIENCE USING *WINPLOT*

Bruno Gomes de Freitas[1]

Vilmar Pereira de Jesus[2]

RESUMO: Este artigo relata a construção e a aplicação de uma atividade sobre o ensino de coordenadas polares, alheio ao contexto dos números complexos. Desenvolvida no âmbito da disciplina Recursos Computacionais, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, a atividade tem como objetivo mostrar ao estudante o uso das coordenadas polares e suas aplicações no dia a dia. Para isso, propõe-se a passagem do sistema de localização cartesiano, já conhecido pelos alunos, para o sistema de coordenadas polares, através da utilização do software *Winplot*. As abordagens aqui propostas estão em acordo com os objetivos da BNCC e contribuem para o desenvolvimento de habilidades citadas no documento para o Ensino Médio e também na matriz de referência do ENEM. Tomando Batistela, Barbariz e Lazari (2016), Gravina e Santarosa (1998) e Saldanha (2016) como referenciais teóricos, o desenvolvimento flui a partir da teoria e da prática, por meio de orientações acerca da utilização do software, da investigação e observação de padrões e de generalizações acerca do plano circular. As aulas foram ministradas por vídeo conferência, com a participação dos autores e estudantes, à época do isolamento social imposto pela pandemia do COVID-19. A utilização do *Winplot* como ferramenta tecnológica proporciona uma passagem bem perceptível, através do novo visual gerado na mudança de configuração entre os dois sistemas de localização, dando uma visão real dessa transição.

PALAVRAS-CHAVE: Sistemas de Localização. Coordenadas Polares. *Winplot*.

ABSTRACT: This article reports the construction and application of an activity on the teaching of polar coordinates, outside the context of complex numbers. Developed within the scope of the Computational Resources discipline, of the Professional Master's Program in Mathematics in National Network – PROFMAT, the activity aims to show the student the use of polar coordinates and their applications in daily life. For that, it will propose the passage from the Cartesian localization system, already known by the students, to the polar coordinate system, through the use of *Winplot* software. The approaches proposed here are in accordance with the objectives of the BNCC and contribute to the development of skills mentioned in the document for High School and also in the ENEM reference matrix. Taking Batistela, Barbariz e Lazari (2016), Gravina and Santarosa (1998) and Saldanha (2016) as theoretical references, development flows from theory and practice, through guidelines on the use of the software, investigation and observation of patterns and generalizations about the circular plane. The classes were taught by video conference, with the participation of authors and students, at the time of the social isolation imposed by the COVID-19 pandemic. The use of *Winplot* as a technological tool provides a very noticeable passage, through the new look generated in the change of configuration between the two localization systems, giving a real view of this transition.

KEYWORDS: Localization system. Polar coordinates. *Winplot*.

[1] Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. E-mail: srfreitasmatemtica@yahoo.com.br
https://orcid.org/0000-0003-0046-0798
[2] Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. E-mail: ramlivmat@hotmail.com
https://orcid.org/0000-0002-1033-320X
● Informações completas da obra no final do artigo

Introdução

O uso de instrumentos e métodos para localização e orientação é uma técnica comum presente em diversos ambientes. A diversidade de mecanismos utilizados no processo orientador depende dos meios que se encontram disponíveis. Sabe-se que até mesmo o sol, a lua e outros astros já foram e ainda são utilizados como referência de localização e marcação temporal.

Em cidades planejadas, com ruas paralelas e transversais, por exemplo, é possível usar as coordenadas cartesianas como referências à localização de pessoas, veículos, imóveis e outros objetos. Já em ambientes marítimo e aéreo, esse tipo de orientação não seria eficiente, uma vez que não há referenciais além do próprio observador. Nesse caso, é viável a utilização das coordenadas polares, uma vez que tal sistema permite identificar com precisão a posição de objetos/pessoas em qualquer ponto do ambiente, especialmente quando em locais onde não existem pontos balizadores. Tal sistema é adotado em aeronaves e satélites, embarcações marítimas e submarinas, entre outras aplicações.

No Ensino Superior, em livros de Cálculo Integral, por exemplo, são apresentadas variadas associações entre os sistemas de coordenadas citados. Contudo, no Ensino Médio, o tratamento das coordenadas polares é vinculado ao estudo dos números complexos, sendo comum encontrar em livros didáticos para esse segmento abordagens sobre o assunto desassociadas das aplicações no sistema de localização/navegação. Diante disso, esse artigo traz uma proposta para apresentar, de forma detalhada, uma associação entre o sistema circular ao sistema cartesiano, sem a necessidade de referenciar a unidade imaginária.

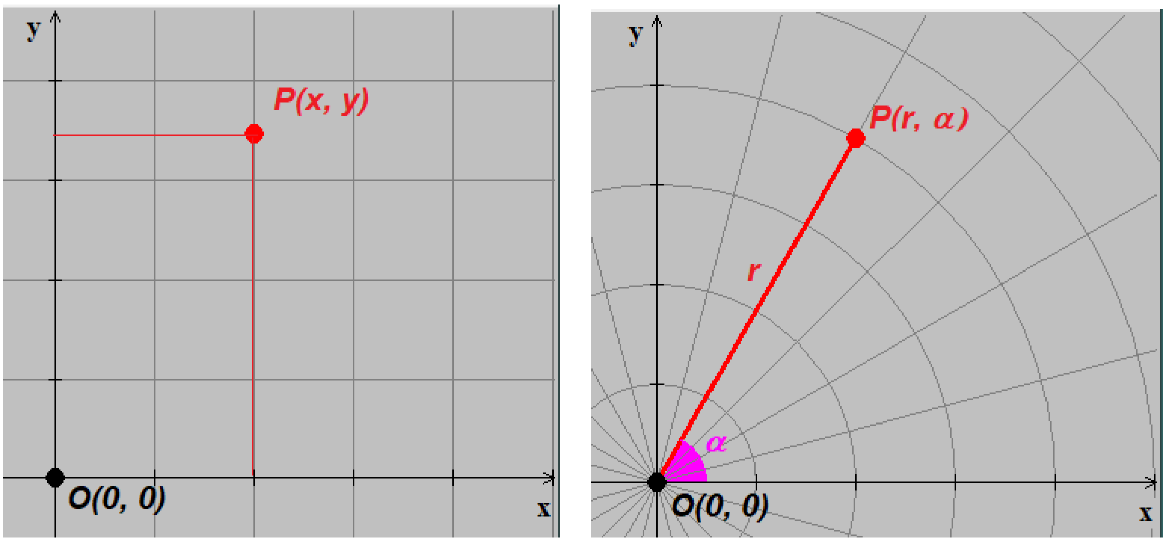
A referida proposta foi desenvolvida no âmbito da disciplina Recursos Computacionais, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, com polo com no Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais – CEFET-MG, em Belo Horizonte. Nos tópicos seguintes, serão apresentados os objetos matemáticos necessários, bem como os recursos tecnológicos que possam permitir sua execução.

ISSN 2525-7056

Coordenadas polares: uma alternativa ao sistema cartesiano

Entre os diferentes sistemas de localização mais utilizados em nosso cotidiano, destaca-se o sistema cartesiano. As coordenadas cartesianas se baseiam em dois eixos orientados e perpendiculares entre si, tendo como origem a interseção desses, denotada nesse texto como ponto *O(0, 0)*. Uma vez que os eixos são numerados a partir de *O*, a localização de um objeto nesse sistema se dá por meio de um par de coordenadas que representam o deslocamento do objeto, a partir da origem, ao longo do eixo horizontal *(x)* e do eixo vertical *(y)*, respectivamente. A Figura 1 mostra a posição de um objeto representada pelo ponto P, expresso num sistema cartesiano pelo par ordenado *P(x, y)*.

Figura 1. Representação de um ponto em sistemas cartesiano e polar

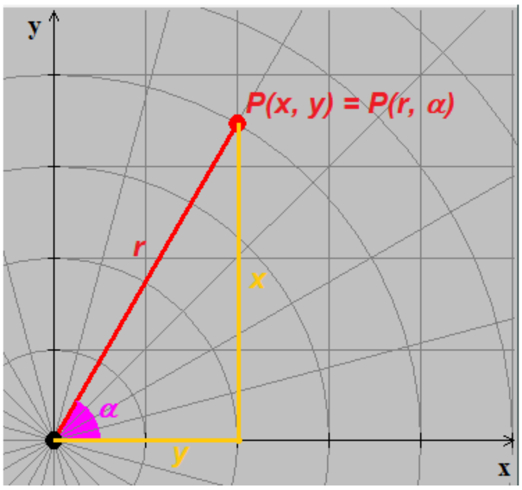


Fonte: Os autores (2021).

Além da representação do ponto *P* em coordenadas cartesianas, *P(x, y)*, a Figura 1 mostra o mesmo ponto representado, em um sistema polar, pelo par ordenado *P(r, α)*. No sistema de coordenadas polares, conhecido também como sistema circular, a localização toma como referências a menor distância do objeto à origem dos eixos cartesianos *(r)* e o ângulo *(α)* que essa distância faz como a porção positiva do eixo horizontal. Utilizando conceitos matemáticos, é possível reescrever as coordenadas de uma localização cartesiana em um sistema polar. A Figura 2, construída a partir de recortes da sobreposição das imagens apresentadas na Figura 1, aponta para as relações úteis à transição dessas representações.

ISSN 2525-7056

Figura 2. Relacionando as incógnitas *x*, *y*, *r* e α

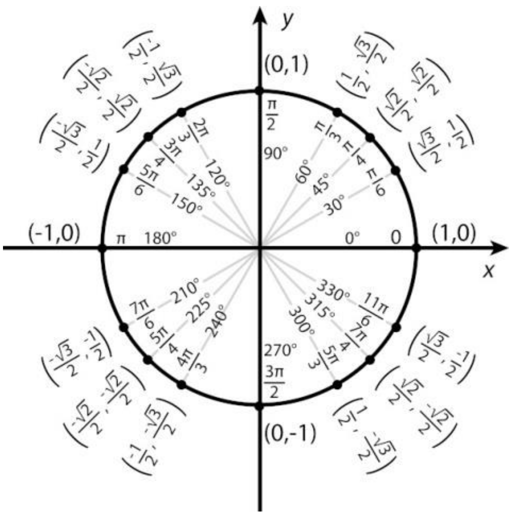


Fonte: Os autores (2021).

Na Figura 2, se observa as incógnitas *r*, *x* e *y* se relacionando pelo Teorema de Pitágoras, $r^2 = x^2 + y^2$, uma vez que *r* é a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos *x* e *y*. Quanto ao ângulo α, das razões trigonométricas seno e cosseno, tem-se as igualdades $x = r \cdot cos\alpha$ e $y = r \cdot sen\alpha$. Para que essas três relações possam ser aplicadas a qualquer posição no plano é necessário o conhecimento sobre todo o ciclo trigonométrico.

Quando o ciclo trigonométrico é apresentado aos discentes do Ensino Médio, uma circunferência de raio unitário é representada em um plano cartesiano na intenção de relacionar os pontos *(x, y)* dessa curva ao par ordenado *(cos*α*, sen*α*)*, tal que $x = cos\alpha$ e $y = sen\alpha$. Dessa forma, os estudantes associam os valores do eixo horizontal aos cossenos e, analogamente, os valores do eixo vertical aos senos, conforme mostra a Figura 3.

Figura 3. O ciclo unitário no plano cartesiano



Fonte: Oliveira - Brasil Escola (2020).

Para um ponto genérico *P(x, y)* localizado sobre a circunferência trigonométrica, tem-se $x = cos\alpha$ e $y = sen\alpha$. Ademais, das relações $x = r \cdot cos\alpha$ e $y = r \cdot sen\alpha$, apresentadas em parágrafos anteriores, conclui-se, de acordo com a Figura 3, *r* = *1*. Isso nos permite concluir que as coordenadas lidas no ciclo trigonométrico são coordenadas cartesianas para pontos que, no sistema polar, seriam representados por *P(1,* α*)*, uma vez que esses se localizam ao longo de um circunferência unitária.

Nesse contexto, o sistema circular é concebido como uma ampliação do ciclo trigonométrico. Enquanto, no estudo do ciclo trigonométrico, a preocupação era com a leitura dos pontos sobre uma circunferência de raio unitário, desencadeando o estudo de funções e outras relações ligadas ao ângulo α, no sistema circular, a atenção se volta à observação dos pontos sobre circunferências com raios distintos *(r)*, promovendo uma nova perspectiva sobre a localização e movimentação no plano.

Essa concepção sobre o plano circular pode facilitar a compreensão dos processos de transição entre as representações no sistema polar e no sistema cartesiano. Tal compreensão implica uma assimilação de assuntos relacionados ao universo dos números reais, especialmente nas disciplinas de Cálculo, e também em contextos relacionados às operações entre números complexos, tais como potência, radiciação e equações polinomiais.

Na Educação Básica, esse processo de transição pode ser trabalhado a partir de softwares e/ou aplicativos. Nesse sentido, esse texto apresenta o software *Winplot*, na intenção de proporcionar aos alunos a visualização e a compreensão de cada etapa do processo.

O uso do *Winplot* como recurso ao ensino de Matemática

O *Winplot* é um programa gráfico, desenvolvido e administrado pelo professor Richard Parris, da Philips Exeter Academy. Foi lançado em torno de 1985 e desde então vem passando por diversas modificações na linguagem computacional, a fim de facilitar sua utilização e compreensão. O software, executado no sistema operacional Windows, contém uma interface que permite inserir dados matemáticos, obtendo como resposta uma visualização gráfica (SILVA *et al*, 2012).

O referido software é inteiramente gratuito, interativo, simples de usar e ocupa pouco espaço interno na memória do computador (cerca de 1768 KB). Seu download pode ser feito pelo endereço https://winplot.softonic.com.br/ e as instruções sobre a instalação da ferramenta podem ser acessadas no link https://youtu.be/ttmwwarJNWk, do canal Peu Seven, no You Tube. Os referidos endereços eletrônicos foram acessados em 28 de novembro de 2020.

Embora sua última atualização ocorrera em 2009, a utilização do *Winplot* é viável em áreas diversas da Matemática e em diferentes aplicações, sendo algumas delas temas de pesquisas desenvolvidas em cursos de pós-graduação *latu sensu* e *strictu sensu*, em diversas instituições de Ensino Superior no país. Entre os programas *latu sensu*, destaca-se o Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, pelo fato do presente trabalho ser desenvolvido no âmbito de uma das disciplinas do referido programa, a saber, Recursos Computacionais, ministrada pelo professor Gilmer Peres.

No repositório de dissertações do PROFMAT, existem trabalhos que abordam distintas possibilidades usando a ferramenta digital em pauta. Entre essas, destaca-se o uso do software no estudo de funções quadráticas como assunto nas pesquisas de Teixeira (2019), Paiva (2016) e Dias (2013). Têm-se também, nas dissertações de Lima (2014), Zica (2013) e Tavares (2013), possibilidades distintas para o uso da ferramenta no ensino de funções trigonométricas. Sistemas lineares de duas e três incógnitas podem ser representados, respectivamente, nos ambientes 2D e 3D da plataforma, conforme estudos de Lacerda (2014) e Dias (2014). Além dessas, o *Winplot* é utilizado no ensino de noções de cálculo, proposto por Santos (2014), e no ensino de matrizes e determinantes, apontado por Trindade (2013).

Em todas essas propostas, a utilização do *Winplot se* adéqua às palavras de Batistela, Barbariz e Lazari (2016, p. 6), ao escrever que "o computador e a Matemática possuem uma relação de proximidade e, além disso, de cooperação e contribuição mútua: a Matemática utiliza-se do computador e a Computação utiliza-se da Matemática.".

Diante dessas exposições, esse texto propõe uma atividade na qual o software será utilizado para ambientar o ensino do sistema de coordenadas polares. Nessa tarefa, haverá orientações sobre a instalação, configuração e instruções sobre a utilização do *Winplot*. Trata-se de um processo conduzido em várias etapas, descritas na próxima seção.

Uma proposta de ensino de coordenadas polares usando o *Winplot*

A atividade aqui proposta tem por objetivo apresentar aos estudantes o sistema de coordenadas polares como um complemento ao sistema cartesiano, sem referenciar o conjunto dos números complexos. O software *Winplot* será utilizado como recurso para essa apresentação.

A princípio é necessário orientar os discentes quanto à instalação do programa. Para isso, foram disponibilizados os endereços eletrônicos https://winplot.softonic.com.br/ e https://youtu.be/ttmwwarJNWk, mencionados na seção anterior. Enquanto o primeiro link permite o download da ferramenta para desktops e notebooks, o segundo é um vídeo com orientações sobre a instalação e a configuração dessa em sistemas operacionais Windows. Para a condução dessa atividade, não é possível o uso do *Winplot* em tablets e smartphones, uma vez que tais aparelhos funcionam a partir de sistemas operacionais diferentes.

Feita a instalação, os participantes executarão a atividade em etapas, conduzidas aqui com o objetivo de "Capturar procedimentos".

> A capturação de procedimentos é recurso encontrado, particularmente, em programas para Geometria. Automaticamente são gravados os procedimentos do aluno em seu trabalho de construção, e mediante solicitação o aluno pode repassar a 'história' do desenvolvimento de sua construção. Isto permite o aluno refletir sobre suas ações e identificar possíveis razões para seus conflitos cognitivos. Este recurso também permite que o aluno explore construções feitas por outrem, o que sempre se apresenta como fonte de riqueza em ideias matemáticas. (GRAVINA e SANTAROSA, 1998, p.11)

Nesse contexto, seguem as descrições de cada etapa da atividade proposta.

A primeira etapa trata da configuração da plataforma. Nessa fase, os alunos recebem informações sobre a seleção do ambiente bidimensional e a configuração desse como um plano cartesiano, com eixos rotulados e escalas demarcadas, além de instrução sobre a navegação nesse ambiente. A Figura 4 mostra a versão integral dessa atividade.

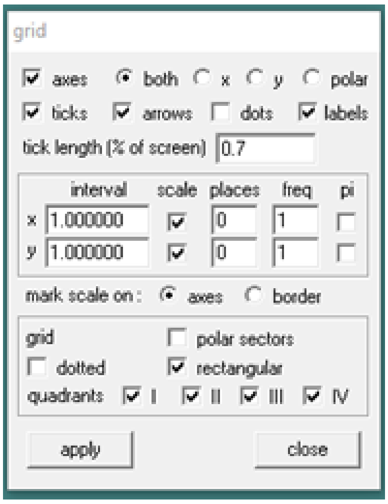
Figura 4. Atividade 1

Atividade 1 – Configurando a plataforma.

Ao abrir o WIINPLOT, é comum aparecer uma janela com dicas para auxiliar no uso da ferramenta. Por se tratar de dicas que não serão usadas imediatamente, feche a janela clicando em "Close/Fechar".
Fechada essa janela, aparecem os menus "Window/Janela" e "Help/Ajuda".
No menu "Window/Janela", selecione a opção "2-dim" para abrir o plano cartesiano.

Para configurá-lo, siga as instruções abaixo.

- No menu "View/Ver", selecione a opção "Grid/Grade"
- Ao aparecer uma janela semelhante à figura ao lado, marque os campos "axes/eixos", "both/ambos", "ticks/marcas", "arrows/setas" e "labels/rótulos". Marque também os campos "scale/escala" e "rectangular/retangular". Preencha os campos "places/decimais" com o número 0.
- Feitas as marcações, clique em "Apply/Aplicar" e verifique se a configuração do plano cartesiano está adequada. Se sim, clique em "Close/Fechar", se não, verifique as marcações e faça as correções necessárias.
- No seu teclado, as teclas direcionais permitem navegar pelo plano e as teclas "PgDn" e "PgUp" alteram o *zoom*.
  Utilize esses comandos para que os intervalos [-5, 5] fiquem à mostra em ambos os eixos.



Feita essas configurações, anexe uma imagem do resultado obtido.
Isso pode ser feito a partir dos comandos "copiar" (Crtl+C), sobre o plano cartesiano, e "colar" (Crtl+V), no documento em Word.

Fonte: Os autores (2021).

A etapa seguinte é composta por dois itens, a saber, Atividade 2 e Atividade 3. A primeira consiste em orientações sobre a plotagem de segmentos de reta pré-definidos, enquanto a segunda se atém a determinar medidas relacionadas ao tamanho e à inclinação desses segmentos em relação ao eixo horizontal. Tais medidas podem ser obtidas a partir da visualização, no caso de segmentos plotados sobre os eixos ortogonais, e de conhecimentos sobre Teorema de Pitágoras e Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo, no caso dos segmentos plotados fora dos referidos eixos. A versão completa das atividades em questão segue na Figura 5.

Figura 5. Atividades 2 e 3

Atividade 2 – Plotando pontos e segmentos.

Considere os pontos mostrados na tabela a seguir.

Pontos	A	B	C	D	E	F	G	H
Coordenadas	(4, 0)	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	(0, 2)	$(-2, 2\sqrt{3})$	(-3, 0)	$(-\sqrt{3}, -1)$	(0, -1)	$\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$

Sendo O(0, 0) a origem do plano cartesiano, plote os segmentos OA, OB, OC, OD, OE, OF, OG e OH.

Para cada plotagem, siga as instruções abaixo.

- No menu "Equa/Equação", selecione "Segment/Segmento" e em seguida "(x,y)".
- Ao abrir a janela "segment/segmento", digite número "0" nos campos "x1" e "y1" e, para os campos "x2" e "y2", insira as coordenadas dos pontos dados na tabela.
  No caso de coordenadas envolvendo raiz quadrada, você pode optar por inserir os valores aproximados, usando $\sqrt{2} = 1.41$, ou digitar o comando *square root*, $\sqrt{2}$ = *sqrt(2)*.
  Caso opte por aproximações, essas não devem ser digitadas usando vírgulas (,), mas ponto (.).
  Caso opte pelo comando *square root*, é necessário que o valor esteja entre parênteses.
- Após inserir as coordenadas desejadas, configure a "pen wid/espessura da linha" para 3 e selecione a cor desejada. É importante que os segmentos tenham cores diferentes.
  Ao clicar em "OK", o segmento aparecerá plotado no plano cartesiano.
- A medida que as plotagens são feitas, as mesmas aparecem automaticamente na janela "Inventory/Inventário". Se isso não ocorrer, acesse, no menu "Equa/Equação", a opção "Inventory/Inventário". Ao selecionar um item dessa lista, clique no botão "equa" para que a legenda do segmento fique disponível no plano cartesiano. Nessa lista, também é possível editar (Edit) e apagar (delete), mostrar e omitir itens (graph), entre outras ferramentas.

Feitas todas as plotagens, anexe uma imagem do resultado obtido.

Atividade 3 – Cálculo de distâncias e inclinações.

A partir das plotagens feitas na atividade anterior e também de conhecimentos sobre teorema de Pitágoras e Ciclo trigonométrico, complete a tabela a seguir.

Segmento	AO	OB	OC	OD	OE	OF	OG	OH
Comprimento								
Ângulo com o eixo x.								

Fonte: Os autores (2021).

A próxima fase é a mais importante do processo. A finalidade dessa, composta pelas atividades 4, 5 e 6, evoca a intenção principal desse exercício: mostrar a transição entre o sistema cartesiano e o sistema polar. Baseada na Matemática Experimental narrada por Saldanha (2016, p. 14), o aluno poderá fazer "a investigação, através da observação de padrões, realizando tentativas e analisando os dados para enunciar propriedades e

ISSN 2525-7056

teoremas, em detrimento da simples enunciação dos mesmos.” Assim, aos alunos poderão enunciar conceitos e propriedades sobre o plano circular.

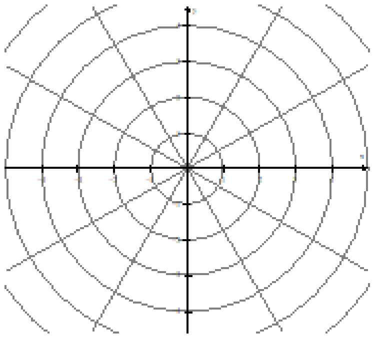
Enquanto a atividade 4 orienta os alunos na configuração do plano circular, as atividades 5 e 6 permitem identificar os elementos que servirão de referência a um novo sistema de localização. A Atividade 4 é exibida integralmente na Figura 6.

Figura 6. Atividade 4

Atividade 4 – Configurando o plano circular.

Para configurar o plano circular, siga as instruções abaixo.

- No menu “View/Ver”, selecione a opção “Grid/Grade”.
- Desmarque o campo “rectangular/retangular”. Em seguida, marque o campo “polar sector/setores circulares” e preencha-o com o número 24.
- Feitas essas alterações, clique em “Apply/Aplicar” e surgirá o novo formato do plano, semelhante a figura ao lado.
- Ajuste o *zoom* para que o círculo de raio 4 apareça.



O plano agora está divido em vários círculos e cada círculo, por sua vez, dividido em setores.
A divisão e a ordenação dos quadrantes é a mesma do ciclo trigonométrico.
Sabendo disso, qual é a medida, em graus, de cada setor?

Seguidas essas instruções, anexe uma imagem mostrando como os segmentos plotados na atividade 2 aparecem nessa nova configuração.

Fonte: Os autores (2021).

Executada a Atividade 4, os alunos podem perceber que os segmentos plotados em atividades anteriores permanecem enquanto o plano configurado passa a ter referenciais circulares: raios e ângulos. A partir dessa percepção, seguem as atividades 5 e 6, nas quais os estudantes devem identificar essas referências para cada segmento. A expectativa é que os discentes associem os comprimentos definidos na Atividade 3 aos raios e que escrevam os ângulos a partir da contagem dos setores circulares, comparando-as às leituras do ciclo trigonométrico. Feito isso, os estudantes devem registrar esses itens como elementos de um novo sistema, as coordenadas polares. A Figura 7 apresenta os campos nos quais esses registros devem ser feitos.

Figura 7. Atividades 5 e 6

Atividade 5 – Identificando pontos no plano circular.

Os segmentos plotados na atividade 2 agora serão identificados a partir de elementos circulares, a saber, raio e ângulo. As orientações dos ângulos devem ser as mesmas do ciclo trigonométrico. Sendo assim, identifique a qual círculo pertence cada ponto e qual é o ângulo estipulado.

Ponto	A	B	C	D	E	F	G	H
Raio								
Angulo*								

Atividade 6 – Escrevendo coordenadas polares.

No plano circular, as medidas do raior (r) e do ângulo (α) constituem informações importantes para se trabalhar com um novo sistema de localização, as *coordenadas polares* (ou circulares).
Nesse contexto, um ponto localizado num sistema cartesiano sob as coordenadas (x, y) agora pode ser pode ser localizado também num sistema polar (ou circular), sob o par ordenado (r, α).

A partir dessas informações, e também das atividades 2 e 5, preencha a tabela a seguir.

Ponto	A	B	C	D	E	F	G	H
Coordenadas cartesianas (x, y)	(4, 0)	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	(0, 2)	$(-2, 2\sqrt{3})$	(-3, 0)	$(-\sqrt{3}, -1)$	(0, -1)	$\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$
Coordenadas polares (r, α)								

Fonte: Os autores (2021).

A partir das observações na etapa anterior, a Atividade 7 segue como a última fase do processo. As intenções são registrar a compreensão dos alunos sobre a transição entre coordenadas cartesianas e coordenadas polares e traçar estratégias para executar essa transição no sentido inverso. Parar isso, a primeira parte dessa atividade contém perguntas sobre tais transformações. Quanto à segunda parte, os estudantes devem completar uma tabela a partir de duas referências, ora polares ora cartesianas, ou ainda, uma de cada. As questões e a tabela que compõem essa atividade seguem na Figura 8.

Figura 8. Atividade 7

Atividade 7 – Convertendo coordenadas.

Agora responda.

a. Como é possível calcular o raio "r" a partir de (x, y)?
b. Como é possível identificar a medida de α a partir de (x, y)?
c. Como é possível identificar o valor de x a partir de (r, α)?
d. Como é possível identificar o valor de y a partir de (r, α)?

A partir dessas respostas, complete a tabela a seguir.
Se necessário, use o desenho para ajudar na localização.

Ponto	Abscissa	Ordenada	(x, y)	Raio	Angulo	(r, α)	Quadrante
J						$\left(3, \frac{\pi}{3}\right)$	1º
K	-½			1			2º
L		$-2\sqrt{2}$			$\frac{5\pi}{4}$		3º
M			$(1, -\sqrt{3})$				4º

Fonte: Os autores (2021).

Acredita-se que essa proposta pode ser executada em qualquer turma do Ensino Médio, desde que os participantes tenham conhecimentos sobre Plano Cartesiano, Teorema de Pitágoras, Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo e Ciclo Trigonométrico.

As propostas contidas nessa atividade cumprem bem as quatro metas principais que a Base Nacional Curricular Comum – BNCC (BRASIL, 2018) estipula para o último segmento da Educação Básica. Na compreensão do sistema circular como alternativa ao sistema cartesiano, tem-se a consolidação de conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental sobre sistema de localização. O aprofundamento sobre o tema direciona os estudantes que desejam ingressar nas engenharias e reforça a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos atrelados ao assunto. Trata-se de um conteúdo que, ao relacionar teoria e prática no ensino da Matemática, com o auxílio de softwares e aplicativos, conduz o aluno à autonomia e à criticidade necessárias para fazer leituras adequadas sobre o espaço que o cerca.

Ademais, o trabalho aqui proposto visa contribuir no desenvolvimento de habilidades constantes nas páginas da BNCC. À medida que se promove o item EM13MAT103 por meio do trabalho com medidas angulares e de comprimento, evoluí-se à habilidade

EM13MAT308, através das possíveis representações de um mesmo ponto em diferentes sistemas de localização. O *Winplot* aparece como recurso digital útil à promoção de EM13MAT404. As descrições de cada uma dessas habilidades, conforme os textos da base, seguem no Quadro 1.

Quadro 1. Habilidades BNCC

Habilidade	Descrição
EM13MAT103	Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.
EM13MAT308	Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
EM13MAT404	Identificar as características fundamentais das funções seno e cosseno (periodicidade, domínio, imagem), por meio da comparação das representações em ciclos trigonométricos e em planos cartesianos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Fonte: BRASIL (2018, p. 525-531).

O conhecimento de coordenadas cartesianas permite o estudante a identificar a movimentação de objetos/pessoas no plano cartesiano. Fato semelhante pode ocorrer no plano circular, dados os conhecimentos sobre coordenadas polares. Tal movimentação é tratada no desenvolvimento de habilidades na matriz de referência do Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM (BRASIL, 2009). São elas:

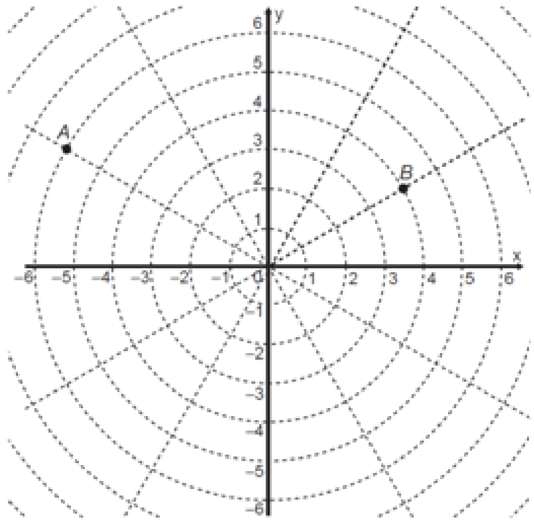
- H6 - Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional;
- H8 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma;
- H9 - Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano;
- H14 - Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas;
- H15 - Identificar a relação de dependência entre grandezas.

Para exemplificar algumas abordagens com foco nas habilidades acima listadas, segue, na Figura 9, uma questão do referido exame, da edição de 2018.

ISSN 2525-7056

Figura 9. Plano Circular no ENEM.

Sobre um sistema cartesiano considera-se uma malha formada por circunferências de raios com medidas dadas por números naturais e por 12 semirretas com extremidades na origem, separadas por ângulos de $\frac{\pi}{6}$ rad, conforme a figura.



Suponha que os objetos se desloquem apenas pelas semirretas e pelas circunferências dessa malha, não podendo passar pela origem (0 ; 0).

Considere o valor de π com aproximação de, pelo menos, uma casa decimal.

Para realizar o percurso mais curto possível ao longo da malha, do ponto *B* até o ponto *A*, um objeto deve percorrer uma distância igual a

Ⓐ $\dfrac{2 \cdot \pi \cdot 1}{3} + 8$

Ⓑ $\dfrac{2 \cdot \pi \cdot 2}{3} + 6$

Ⓒ $\dfrac{2 \cdot \pi \cdot 3}{3} + 4$

Ⓓ $\dfrac{2 \cdot \pi \cdot 4}{3} + 2$

Ⓔ $\dfrac{2 \cdot \pi \cdot 5}{3} + 2$

Fonte: Brasil (2018).

Além de tratar explicitamente as habilidades H6 e H8, a questão exibida na Figura 9, pode ser usada para trabalhar medidas angulares (graus e radianos), expressões algébricas ($C = 2 \cdot \pi \cdot r$, usada no cálculo do comprimento *C* de uma circunferência de raio *r*) e relações de proporção (setores circulares), contribuindo para o desenvolvimento de outras habilidades, a saber,

- H12 - Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas;
- H16 - Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas;
- H19 - Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

De modo semelhante ao que foi proposto na Atividade 4, já exibida na Figura 6, o item apresentado na Figura 9 permite aos discentes um novo olhar sobre o sistema cartesiano, promovendo uma nova perspectiva sobre as localizações no plano. Nesse contexto, são considerados setores circulares, com medidas angulares e raios diversos, por meio dos quais fluem as movimentações a serem analisadas na questão.

Mediante tal exposição, a atividade apresentada nesse texto é respaldada no desenvolvimento de habilidades presentes na BNCC e na matriz de referências do ENEM.

Nesse contexto, seguem, nas próximas seções, considerações acerca da primeira aplicação dessa atividade, em uma turma de terceiro ano do Ensino Médio.

Sobre a aplicação

A aplicação citada na seção anterior ocorreu em novembro de 2020, numa turma de terceiro ano do Ensino Médio. Trata-se de uma escola privada da região Oeste de Belo Horizonte – MG, na qual um dos mestrandos atuava como professor da turma desde 2019. A escolha dessa amostra se justifica pela curiosidade de alguns alunos sobre os softwares utilizados nas aulas sobre Geometria Analítica: *Winplot* e *GeoGebra*. Essas aulas eram ministradas em ambiente remoto à época do isolamento social imposto pela pandemia do COVID-19.

A expectativa para essa aplicação era apresentar o conceito de plano circular sem a necessidade de adentrar no capítulo de números complexos, visto que esse não seria ministrado em virtude da redução da quantidade de aulas no período de ensino remoto. Nesse contexto, o professor da turma julgou relevante propor uma atividade que destacasse a importância do tema.

Essa atividade foi desenvolvida em dois encontros virtuais, 04/11 e 11/11, pela plataforma de videoconferências *Zoom*. Com a presença de ambos os autores desse artigo, o primeiro encontro durou 50 minutos e se destinou a contextualizar os sistemas de localização, a orientar os alunos sobre o uso do aplicativo e a apresentar a atividade. Na etapa de contextualização, foram apresentados sistemas de localização como o GPS e os radares de aeronaves, exemplificando respectivamente os sistemas cartesiano e polar. A seguir, os alunos receberam orientações sobre a instalação do software, bem como sobre as configurações necessárias e algumas funcionalidades do mesmo. Sobre a atividade, os alunos foram conscientizados acerca do objetivo, da produção desse artigo e da participação de um segundo professor na avaliação do processo.

A fim de ilustrar como os discentes deveriam proceder durante a atividade, foram executados, ainda em 04/11, procedimentos semelhantes aos propostos no texto original: plotagem de segmentos, configuração do plano circular, identificação de raios e ângulos. Feito isso, os estudantes se depararam com um novo sistema de localização no qual deveriam ser informadas referências angulares e de comprimento. Sendo assim, dadas sugestões discentes para raios e ângulos, novos segmentos foram plotados, agora em coordenadas polares.

Durante essa exibição, alguns alunos se manifestaram a respeito da dificuldade em manipular recursos computacionais semelhantes ao software indicado. Diante disso, esses foram encorajados pelos professores presentes a seguir as instruções disponibilizadas detalhadamente nos enunciados da atividade. Outros ainda relataram a dificuldade de leitura em língua inglesa, o que foi superado mediante as instruções dos comandos, exibidas no texto em formato inglês/português: “Close/Fechar” e “Apply/Aplicar”, por exemplo.

Findado esse encontro, a atividade foi disponibilizada aos estudantes pela plataforma Google Classroom. Na ocasião, os alunos foram orientados a relatar ao docente, por aplicativo de mensagens, possíveis dificuldades na instalação ou na configuração do software, ou ainda, na realização da tarefa. Apenas uma discente entrou em contato para registrar dificuldades quanto à instalação, conseguindo concluí-la mediante uma breve orientação do professor.

O segundo encontro ocorreu em 11/11 e contou apenas com o professor da turma. Os alunos iniciaram os 50 minutos da aula relatando a facilidade em manipular o software apenas seguindo as instruções descritas na atividade. Contudo, foram relatadas dificuldades no preenchimento da última tabela, presente na Atividade 7. Essa dificuldade não se referia à manipulação do programa, mas a conteúdos matemáticos.

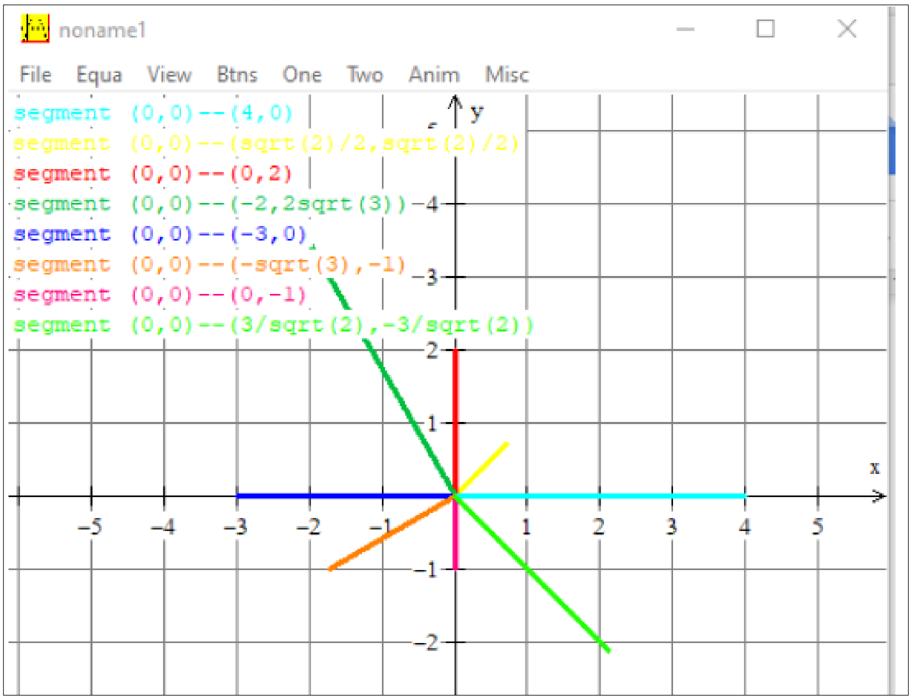
Os relatos das respostas dadas pelos alunos para essa atividade, bem como análises e comentários, serão apresentados no próximo tópico.

Sobre os resultados

Dentre os 22 alunos presentes nas datas citadas, 14 entregaram a atividade, dentre as quais 10 serão analisados. Os alunos que entregaram as atividades analisadas serão identificados por A_1, A_2, A_3, ..., A_9 e A_{10}. As demais postagens serão desprezadas por serem cópias do trabalho do aluno A_1.

Segundo ¾ dos 22 participantes, a instalação e a configuração do software fluíram sem dificuldades. O mesmo ocorreu com a configuração do plano cartesiano na Atividade 1 e também na plotagem dos pontos, na Atividade 2. De acordo com 83% dos alunos, tal fluidez é justificada pela clareza e suficiência das orientações contidas no texto. A Figura 10 mostra o resultado apresentado pela estudante A10.

Figura 10. Respostas à Atividade 2



Fonte: Aluno A10 (2020).

A plotagem ilustrada na Figura 10 atende todas expectativas para as atividades 1 e 2: eixos rotulados, escalas numeradas e segmentos legendados. Quanto à configuração do plano e à plotagem dos segmentos, todos os alunos procederam conforme o esperado. Todavia, houve alguns que não inseriram as legendas. Ademais, para as coordenadas irracionais, houve plotagens com o comando square root - $\sqrt{2} = sqrt(2)$ - e com aproximações decimais - $\sqrt{2} = 1{,}41$.

Acerca da Atividade 3, registram-se divergências entre os comprimentos e os ângulos registrados. A Figura 11 nos permite comparar respostas de dois estudantes para esse item.

Figura 11. Respostas à Atividade 3

Segmento	AO	OB	OC	OD	OE	OF	OG	OH
Comprimento	4	1	2	4	3	2	1	3
Ângulo com o eixo x.	0	45	90	60	180	30	90	45

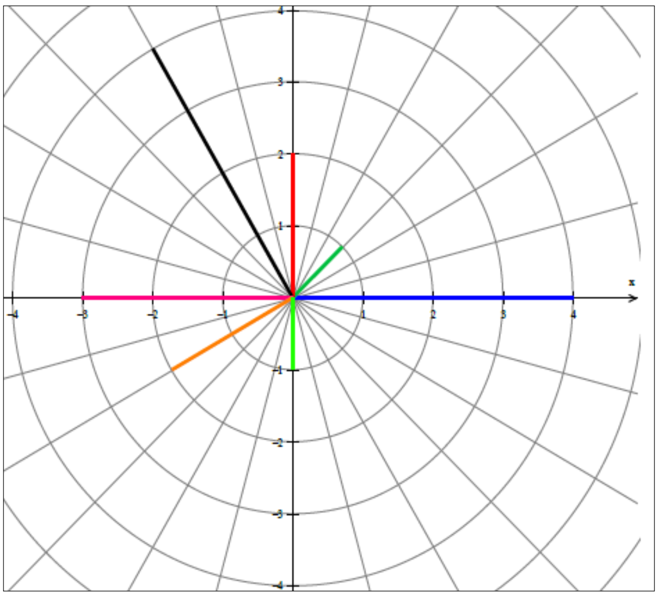
Segmento	AO	OB	OC	OD	OE	OF	OG	OH
Comprimento	4	0,705	2	1,4	3	1,4	1	3,46
Ângulo com o eixo x.	0º	45º	90º	120º	180º	210º	210º	315º

Fonte: Alunos A_3 e A_7, respectivamente (2020).

A primeira tabela apresentada na Figura 11, preenchida por A_3, atende às expectativas para o referido item, mesmo com valores para ângulos agudos e retos nos campos referentes aos segmentos OF, OG e OH. Entretanto, observa-se na segunda tabela, de autoria da aluna A_7, o preenchimento desses ângulos coerente à leitura do ciclo trigonométrico, bem como os valores adequados para os comprimentos dos segmentos OA, OC, OE e OG. Na tabela, o ângulo(OG) = 90º do aluno A_3 não corresponde ao valor 210º, registrado por A_7. Contudo, houve erros quanto às medidas dos segmentos plotados fora dos eixos coordenados, indicando equívocos na manipulação das informações e/ou do Teorema de Pitágoras. Esses mesmos erros figuraram em resultados de outros dois alunos.

No tocante à etapa de configuração do plano circular, a Atividade 4 foi executada com sucesso. Salvo a ausência da legenda, citada anteriormente, todos registraram a configuração conforme o esperado e ilustrado na Figura 12.

Figura 12. Respostas à Atividade 4



Fonte: Aluno A_6 (2020).

. Entretanto, a respeito da Atividade 5, cabem observações sobre o registro dos raios e dos ângulos. Para tais, seguem os registros de três desses participantes, apresentados na Figura 13.

Figura 13. Respostas à Atividade 5

Ponto	A	B	C	D	E	F	G	H
Raio	4	1	2	4	3	2	1	3
Ângulo*	0°	45°	90°	120°	180°	210°	270°	315°

Ponto	A	B	C	D	E	F	G	H
Raio	4	0,9970	2	3,996	3	1,9982	1	1,9940
Ângulo*	0	45º	90º	120º	180º	210º	270º	315º

Ponto	A	B	C	D	E	F	G	H
Raio	4	0,98	2	3,9	3	1,99	1	2,99
Ângulo*	0º	45º	90º	120º	180º	210º	0º	315º

Fonte: Alunos A_2, A_1 e A_9, respectivamente (2020)

Na Figura 13, os registros da aluna A_2 são idênticos aos esperados para essa atividade, feitos a partir da visualização do plano circular e da contagem dos setores polares, coincidindo com a leitura do ciclo trigonométrico. Quanto às tabelas preenchidas por A_1 e A_9, os valores dos raios foram repetições dos registros feitos na Atividade 3. Ainda na mesma figura, são observados erros nos campos Raio(H) = 1,9940 e Ângulo(G) = 0º, preenchidos por A_1 e A_9, respectivamente. Enquanto a primeira divergência se justifica pelo uso de coordenadas diferentes do texto original, o segundo segue sem justificativa. De posse desses registros, os discentes prosseguiram à execução da Atividade 6 de forma coerente aos registros da Atividade 5.

Conforme citado na seção anterior, a Atividade 7, em especial o preenchimento da tabela, foi a mais trabalhosa e também a que demandou maior conhecimento matemático, uma vez que os alunos deviam descrever como ocorre a conversão de coordenadas cartesianas em polares, e vice-versa. Entre os participantes, 42% considerou ser essa a etapa mais difícil do processo. As respostas obtidas às perguntas feitas nessa atividade atendem plenamente às expectativas dos autores, uma vez que itens como Teorema de Pitágoras, Razões Trigonométricas e Ciclo Trigonométrico figuraram em quase todos os registros discentes. Fato curioso, e ainda sem justificativa, diz respeito às respostas

ISSN 2525-7056

“Comparar com ângulo 0°.” e “Comparar com o raio 0.” que o aluno A_1 deu para os itens “Como é possível identificar o valor de *x* (ou de *y*) a partir de (r, α)? “.

O preenchimento da tabela da Atividade 7 deveria ser semelhante à apresentada na Figura 14, podendo variar o formato dos números registrados – raiz, decimal ou fração – e as unidades de medidas dos ângulos – graus ou radianos. Entretanto, há vários equívocos a serem discutidos.

Figura 14. Respostas à Atividade 7

Ponto	Abscissa	Ordenada	(x, y)	Raio	Ângulo	(r, α)	Quadrante
J	$\frac{3}{2}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$	3	$\frac{\pi}{3}$	$\left(3, \frac{\pi}{3}\right)$	1º
K	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	1	$\frac{2\pi}{4}$	$\left(1, \frac{2\pi}{4}\right)$	2º
L	$-2\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}$	$(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$	4	$\frac{5\pi}{4}$	$\left(4, \frac{5\pi}{4}\right)$	3º
M	1	$-\sqrt{3}$	$(1, -\sqrt{3})$	2	$\frac{5\pi}{3}$	$\left(2, \frac{5\pi}{3}\right)$	4º

Fonte: Os autores (2021).

A fim de sanar dúvidas sobre o preenchimento dessa atividade, o professor resolveu, na aula de 11/11, a segunda linha da tabela, a título de exemplo. A partir da representação geométrica dos dados apresentados para o ponto *K*, negritados no texto original, os alunos perceberam as relações que deveriam a ser estabelecidas entre esses dados e os itens referentes aos campos vazios. Daí, o professor registrou os procedimentos de cálculo narrado pelos estudantes e preencheu os espaços devidos com os resultados obtidos.

Diante disso, é possível concluir que a representação gráfica do ponto em questão foi suficiente para esclarecer a dúvida, visto o domínio dos conhecimentos matemáticos necessários. Tal ação evidencia a necessidade de representar graficamente esses pontos a fim de sanar as dificuldades relatadas pelos alunos.

Baseado no exemplo do ponto *L*, os participantes deveriam completar as demais linhas da tabela. Apesar da explanação, alguns erros foram registrados. No ponto *J*, por exemplo, o raio 3 é consequência das coordenadas cartesianas $\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$; mas foram registrados em outros trabalhos, para a mesma medida, os pares $(\sqrt{3}, 3)$ e $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. No ponto *M*, houve registros do par (1,22; 120º) como coordenadas polares, ou ainda (2,89;

300º), enquanto para o ponto L, o par cartesiano $(0, -2\sqrt{2})$ é equivalente às coordenadas polares $\left(-2\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}\right)$. Para desfazer esses e outros equívocos nessa última fase, percebeu-se a necessidade de acrescentar, talvez como Atividade 8, um item que oriente os alunos à conferência das colunas "*(x, y)*" e "*(r, α)*" na tela do *Winplot*.

Após a execução da atividade, os participantes responderam a um questionário registrando suas impressões sobre a mesma. As respostas do questionário indicam que 75% dos alunos não conheciam o *Winplot* e que alguns desses já haviam utilizado outros aplicativos matemáticos, tais como *GeoGebra*, *Photomath* e *Matrix Operations*. Os resultados apontaram também que os alunos gastaram em média, 100 minutos para realizar a atividade, considerada por 75% dos discentes uma tarefa de dificuldade média, devido aos conteúdos matemáticos envolvidos. Tanto que metade dos participantes não conseguiu fazer a atividade apenas seguindo os comandos; muitos recorreram ao auxílio dos colegas. Contudo, 58% dos estudantes consideraram o aplicativo de manuseio fácil ou muito fácil, em vista as orientações descritas na atividade.

Para findar essa análise, segue o depoimento de um dos professores autores, cuja produção dessa atividade lhe propiciou o primeiro contato com o software.

> Através do link e orientações recebidos achei a instalação do Winplot bem simples e ao mesmo tempo bem leve e, mesmo sem nunca ter mexido no programa, com as orientações bem detalhadas para o desenvolvimento das mesmas, tudo foi fluindo naturalmente.
> Na prática, já conhecia as coordenadas retangulares, e as circulares, somente em alguns filmes, noticiários e navegadores. O mais impressionante foi perceber a relação entre as coordenadas do plano cartesiano e as coordenadas circulares. Essa passagem foi incrível e bem perceptível.
> Com base em conhecimentos prévios sobre Trigonometria e das suas relações no triângulo retângulo, bem como a medida dos ângulos em radianos, foi possível compreender melhor essa passagem de um sistema para o outro.

Considerações Finais

Através da análise das atividades foi possível verificar que os participantes conseguiram realizar a instalação do *Winplot* e desenvolver as atividades. Tal desenvolvimento não significa dizer perfeição em desenvolvê-las. Ocorreram também equívocos quanto a alguns conceitos e cálculos matemáticos, levando a respostas alheias às expectativas. Entretanto, parte da turma conseguiu desenvolver a atividade em todos os seus quesitos.

Então, perante a situação apresentada, é plausível e conveniente buscar aprimoramentos no processo de ensino-aprendizagem. Para isso, ouvir as sugestões daqueles que utilizaram o software é importante, pois assim se verifica quais foram as dificuldades enfrentadas e quais são as possíveis melhorias a serem realizadas. As sugestões de dois alunos, dadas após o desenvolvimento e a aplicação das atividades, ilustram este fato: “Trabalhar com o *Winplot* em um número maior de aulas para familiarização com o aplicativo” e “Baixar o aplicativo desde o início, enquanto compartilha a tela, para que os alunos vejam todo o processo e fique mais claro desde o início”.

Como ainda existe a dificuldade de alguns, tanto na utilização do software como em conceitos matemáticos, e por ser o primeiro contato com a essa ferramenta, acredita-se que, com a prática, é possível melhorar a utilização do *Winplot*. Nas diversas áreas de conhecimento, a prática é um fator essencial que contribui constantemente para o desenvolvimento e aperfeiçoamento das técnicas envolvidas no processo de ensino-aprendizagem.

Sendo assim, a partir da utilização dos softwares em um número maior de aulas, bem como do desenvolvimento e aplicações de transformações matemáticas, é possível alcançar um rendimento satisfatório quanto aos conteúdos envolvidos, juntamente com suas aplicações nos meios tecnológicos. Tal fato pode ser ilustrado por meio dos depoimentos de alguns estudantes: “No início eu achei bem complicado, mas depois peguei o jeito para usar. Achei muito interessante trabalhar com ele, já que eu não tinha conhecimento sobre. Amei a experiência!” e “Foi uma experiência que eu gostei e achei bem interessante já que é uma plataforma que ajuda muito e adianta um trabalho que seria muito demorado se fosse feito manualmente”.

Durante o desenvolvimento deste trabalho, foi perceptível que os conhecimentos a serem adquiridos e as inovações tecnológicas devem andar lado a lado, fazendo uma complementação, a fim de otimizar a compreensão no processo de ensino-aprendizagem. Entre essas inovações, esse texto destacou o domínio do software Winplot. Entretanto, segundo apontamentos de colegas e professores, dentro da disciplina Recursos Computacionais, bem como de avaliadores externos, enxergamos a possibilidade de adaptar a atividade aqui apresentada à utilização de outros softwares, tais como Geogebra e Graphmatica. Dessa forma, firmando a importância de utilizar meios tecnológicos, espera-se contribuir, por meio da proposta aqui apresentada, com o aprendizado de todos os agentes envolvidos.

Referências

BATISTELA, R. F; BARBARIZ, T. A. M; LAZARI, H. Um estudo sobre demonstração matemática por/com computador. **REVEMAT.** Florianópolis, v.11, Ed. Filosofia da Educ. Matemática, p. 204-215, 2016.

BRASIL. **Matriz de referência ENEM.** Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – INEP. 2009. Disponível em https://download.inep.gov.br/download/enem/matriz_referencia.pdf. Acesso em 23 de julho de 2021.

BRASIL. **Provas e Gabaritos.** Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – INEP. 2018. Disponível em https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2018/2DIA_05_AMARELO_BAIXA.pdf. Acesso em 23 de agosto de 2021.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular – Ensino Médio**. Brasília: MEC, 2018, 595p. Disponível em http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em 6 de julho de 2021.

DIAS, R. C. **Uma proposta ao uso do Winplot no ensino de funções quadráticas nas turmas do PROEJA.** 2013. 55f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal do Tocantins. Palmas. 2013.

DIAS, F. C. **Sistemas Lineares para o ensino médio com auxílio do Winplot.** 2014. 51f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal do Amazonas. Manaus. 2014.

GRAVINA, M. A; SANTAROSA, L. M. A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados. Informática na educação: teoria e prática. **PGIE – UFRGS.** Porto Alegre. Vol. 1, n. 2, p. 73-88, maio. 1998.

LACERDA, Í. A. **Discussão do sistema linear de três equações e três incógnitas com o uso do Winplot.** 2014. 44f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Estadual de Santa Cruz. Ilhéus. 2014.

LIMA, J. M. **Uma proposta para o ensino das funções exponencial, seno e cosseno com o auxílio do software Winplot Palmas 2014.** 2014. 74f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal do Tocantins. Palmas. 2014.

OLIVEIRA, R. R. **Trigonometria.** Brasil escola. 2020. Disponível em https://brasilescola.uol.com.br/matematica/trigonometria.htm. Acesso em 20 de novembro de 2020.

PAIVA, M. A. B. **Uma proposta de utilização do Winplot no ensino da função quadrática nas turmas do 9º ano.** 2016. 80f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal do Tocantins. Palmas. 2016.

PROFMAT. **Dissertações do PROFMAT.** Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Disponível em https://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes/. Acesso em 13 de março de 2021.

SALDANHA, P. V. A. **Uma análise do uso de planilhas eletrônicas como estratégia no ensino de função afim.** 2016. 52f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal do Vale do São Francisco. Juazeiro. 2016.

SANTOS, C. **Uma proposta para o ensino de noções de cálculo no ensino médio utilizando o Winplot**. 2014. 117f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Estadual da Paraíba. Campina Grande. 2014.

SILVA, A. C; SANTOS, L. V. & SOARES, Willames de A. Utilização do Winplot Como Software Educativo Para o Ensino de Matemática. **Revista Diálogos - Revista de Estudos Culturais e da Contemporaneidade – UPE/Faceteg,** n. 6, p. 187-206, Garanhuns/PE, 2012.

TAVARES, W. S. **O ensino das funções trigonométricas com o auxílio do software matemático de ambiente gráfico Winplot.** 2013. 69f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal de Goiás. Goiânia. 2013.

TEIXEIRA, F. B. B. **O uso do software Winplot no auxílio do ensino de funções quadráticas presentes nas questões do ENEM.** 2019. 116f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Estadual do Ceará. Fortaleza. 2019.

TRINDADE, J. M. **SCILAB, GEOGEBRA e WINPLOT como recurso pedagógico no ensino de matrizes, determinantes e geometria analítica.** 2013. 62f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal do Maranhão. São Luís. 2013.

ZICA, C. O. **Uma proposta de utilização do Winplot no ensino da função seno nas turmas do PROEJA.** 2013. 104f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal do Tocantins. Palmas. 2013.

NOTAS

IDENTIFICAÇÃO DE AUTORIA
Bruno Gomes de Freitas. Mestrando no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET-MG). Belo Horizonte, MG, Brasil.
E-mail: srfreitasmatemtica@yahoo.com.br
https://orcid.org/0000-0003-0046-0798

Vilmar Pereira de Jesus. Mestrando no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET-MG). Belo Horizonte, MG, Brasil.
E-mail: ramlivmat@hotmail.com
https://orcid.org/0000-0002-1033-320X

AGRADECIMENTOS
Nossos agradecimentos ao PROFMAT/CEFET-MG e ao professor Gilmer Peres, pela oportunidade de aprendizado; à coordenação/direção do Colégio ICJ, por autorizar a aplicação da atividade e a participação de um professor convidado; e aos alunos do 3ºEM, pela participação e prontidão em preencher o questionário solicitado.
Agradecemos uns aos outros, os autores, pela parceria e companheirismo nesta troca de experiências e informações, em que foi possível, através do desenvolvimento desse trabalho, uma verdadeira troca de conhecimento e aprendizagem e ao mesmo tempo uma colaboração mútua.

FINANCIAMENTO
Não se aplica.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Não se aplica.

EDITORES
Patricia Helena Mirandola Garcia, Eugenia Brunilda Opazo Uribe, Gerson dos Santos Farias.

HISTÓRICO
Recebido em: 23/08/2021 – Aprovado em: 29/10/2021 – Publicado em: 15/12/2021.

COMO CITAR
FREITAS, B. G; JESUS, V. P. O Ensino de Coordenadas Polares fora dos Números Complexos: Uma Experiência usando o Winplot. **Revista ENSIN@ UFMS**, Três Lagoas, v. 2, número especial, p. 250-274. 2021.

ISSN 2525-7056

NOTAS DE PESQUISA

A INFLUÊNCIA DA AUTOESTIMA NO DESEMPENHO ESCOLAR

THE INFLUENCE OF SELF-ESTEEM ON SCHOOL PERFORMANCE

Renata Furtado Horta[1]

Marcelo Ferreira[2]

RESUMO: O desempenho dos estudantes é afetado por aspectos cognitivos, relacionais e emocionais. No âmbito das emoções, a autoestima desempenha papel essencial na aprendizagem e no progresso social dos alunos. Para a construção de uma autoestima saudável, é estritamente necessário o envolvimento de familiares e equipe escolar, a fim de proporcionar um ambiente seguro e motivador para a criança e adolescente. Através de revisões bibliográficas, foi possível observar as definições de autoestima, dimensionar ações que impactam na autoestima dos alunos e conhecer teorias que apontam a importância da autoestima no ambiente escolar. Dentro do ensino de matemática, estudos identificaram os mais variados tipos de emoções relacionadas à realidade de cada aluno e percebe-se que, tanto as afetividades positivas quanto as negativas, influenciam no desempenho e nas relações escolares. A partir da discussão elaborada, é possível notar que a autoestima pode ser elevada a partir das ações da equipe escolar e da contextualização da vivência do aluno, sendo essencial o incentivo familiar e escolar para o desenvolvimento eficaz e significativo da aprendizagem.

PALAVRAS-CHAVE: Autoestima. Emoções. Ensino de Matemática.

ABSTRACT: Student performance is affected by cognitive, relational and emotional aspects. In terms of emotions, self-esteem plays an essential role in students' learning and social progress. To build a healthy self-esteem, the involvement of family members and school staff is strictly necessary, in order to provide a safe and motivating environment for children and adolescents. Through literature reviews, it was possible to observe the definitions of self-esteem, dimension actions that impact on the students' self-esteem and learn about theories that point to the importance of self-esteem in the school environment. Within the teaching of mathematics, studies have identified the most varied types of emotions related to the reality of each student and it is clear that both positive and negative affectivities influence performance and school relationships. From the elaborated discussion, it is possible to notice that self-esteem can be increased from the actions of the school team and the contextualization of the student's experience, with family and school encouragement being essential for the effective and meaningful development of learning.

KEYWORDS: Self-esteem. Emotions. Mathematics teaching.

O desempenho dos estudantes é afetado por aspectos cognitivos, relacionais e, principalmente, pelos aspectos emocionais. No campo das emoções, a autoestima desempenha um papel crucial, o que é reforçado pela vasta literatura produzida na área. Embora o sucesso acadêmico seja o objetivo monitorado de forma regular e tratado como

[1] Universidade Federal do Triângulo Mineiro. E-mail: re.horta@yahoo.com.br
https://orcid.org/0000-0002-8832-3415
[2] Universidade Federal do Triângulo Mineiro. E-mail: marcelo.ferreira@uftm.edu.br
https://orcid.org/0000-0002-6854-1837
● Informações completas da obra no final do artigo

um forte indicador de qualidade de vida escolar (SLAVIN, 2006), o bem-estar psicológico é considerado decisivo para o sucesso dos alunos. Este bem-estar depende fortemente da autoestima, considerada elemento chave na educação (FERKANY, 2008; HUMPHREY, 2004).

A aprendizagem, segundo alguns estudiosos, é muito mais que apenas comportamentos nela estão implícitos conceitos psicológicos importantes (MENDES *et al.,* 2017). Dentre os conceitos psicológicos, a autoestima tem sido vista como um dos indicadores sociais de importância fundamental para a compreensão do crescimento e do progresso social, tornando-se ponto essencial a ser observado em um desenvolvimento pessoal sadio e completo em todas as áreas da vida. Além disso, entende-se que há uma conexão estritamente importante entre autoestima e rendimento escolar (DIOGO, 2009).

Nesse contexto, tem-se uma efetiva preocupação quanto à importância da autoestima e a influência que o professor e a equipe escolar possuem na vida e no desempenho de cada aluno. É fato que faz parte do papel da equipe escolar, possibilitar que o aluno aprenda em um ambiente em que se sinta seguro e motivado. As escolas possuem uma atmosfera desafiadora para a aprendizagem dos alunos e, para que o aluno aprenda de forma eficaz, se faz necessário o desenvolvimento de um ambiente atraente, positivo, entusiasta e encorajador para estimular gestores, professores e alunos (KOPFHAMMER, 1992).

Atualmente, através de estudos detalhados, identificaram os mais variados tipos de emoções relacionadas à realidade de cada aluno em ambientes escolares e percebe-se que, tanto as afetividades positivas quanto as negativas, influenciam no aprendizado. Sendo assim, este estudo tem como objetivo propor aos professores e a equipe escolar, alguns métodos que possibilitem o aumento da autoestima nos alunos e, como consequência, haja o desenvolvimento da aprendizagem em todo âmbito escolar, com foco, neste estudo, na aprendizagem de matemática.

No que se refere ao ensino de matemática no Brasil, nota-se que a abordagem das emoções e a afetividade não são triviais dentro das salas de aula e dessa forma, o raciocínio matemático se mostra deficiente na população brasileira. Segundo estudos, a autoestima possui influência no desempenho matemático e atua de forma a caracterizar a experiência de aprendizagem do aluno. Emoções como prazer, vergonha, orgulho e ansiedade estão estritamente relacionados ao desempenho matemático dos alunos (LIMA, 2012).

Dados da literatura demonstram que existe uma relação direta entre autoestima e a aprendizagem. O aluno que possui uma autoestima positiva aprende mais feliz e, com maior felicidade, atinge níveis mais altos em sua vida pessoal e profissional. Já o aluno que tem a autoestima baixa, tende a ser relapso em sua vida escolar e profissional e, este aluno que tem a autoimagem distorcida, tende a demonstrar desinteresse na aprendizagem e mau comportamento escolar (BEAN *et al.*, 1995).

Mediante as revisões bibliográficas, foi possível observar análises descritivas multidimensionais dos quais se obtiveram a interação de grupos de pessoas ligados às mesmas afetividades, e com isso, trouxeram uma concepção destinada à determinada direção, permitindo afirmar que a autoestima pode ser determinante no próprio desempenho. Desse modo, este estudo indica que alguns métodos podem melhorar o desempenho matemático, possibilitando autonomia no processo de aprendizagem e nas escolhas pessoais e profissionais.

Acredita-se que a autoestima se inicia na infância, sofrendo influências dos familiares, pais/responsáveis, professores e colegas. Quanto mais nova a criança, mais influências das pessoas próximas a ela definem sua autoestima. Já na adolescência, os hormônios e os colegas tendem a influenciar muito mais do que as pessoas mais próximas. Uma das mais importantes e desafiadoras funções da escola nos últimos tempos é tornar o ambiente escolar um ambiente positivo e encorajador, principalmente para o adolescente. Muitos alunos entram na escola com sua imagem já distorcida, sendo muitas vezes em seu ambiente familiar e doméstico expostos a violências verbais, físicas, sexuais, intelectuais, alcoolismo, prostituição, drogas, entre outras situações de abandonos e desafeto que muito prejudica e agride o desenvolvimento da criança e do adolescente. As raízes multifacetadas do desejo de se melhorar no ambiente escolar e na vida social de um adolescente, estão intimamente ligadas ao desempenho de sua vida pessoal. A autoestima pode ser mudada e aprendida, portanto, pode ser ensinada, tornando-se um pré-requisito necessário para o desempenho escolar (KOPHAMMER, 1992).

Este estudo é direcionado ao público do Ensino Fundamental e Médio, a fim de proporcionar aos alunos autonomia no processo de aprendizagem e melhora no seu desempenho acadêmico. Inserindo alguns métodos para a melhora da autoestima, o aluno se torna parte fundamental no processo de ensino e aprendizagem, e se porta, não apenas como objeto a ser estudado, mas sujeito participante de um processo dinâmico em que as possibilidades são construídas num movimento individual e coletivo, no qual o docente desenvolve papel fundamental.

A autoestima é definida como o conhecimento do indivíduo sobre seu próprio valor, sendo então uma apreciação de seus princípios e importância, e a responsabilidade por si mesmo e para com os outros. Uma autoestima saudável inclui uma vida com mais amor, trabalho, lazer. Portanto, é um componente avaliador do autoconceito (BRANDEN, 1997). Diante de uma autoestima alta, a pessoa demonstra as seguintes características:

1- Age de forma independente;
2- É mais responsável;
3- Tem orgulho do que faz;
4- Não tem medo de mostrar seus sentimentos;
5- Aprende a viver com frustrações;
6- Consegue influenciar outras pessoas com seu entusiasmo.

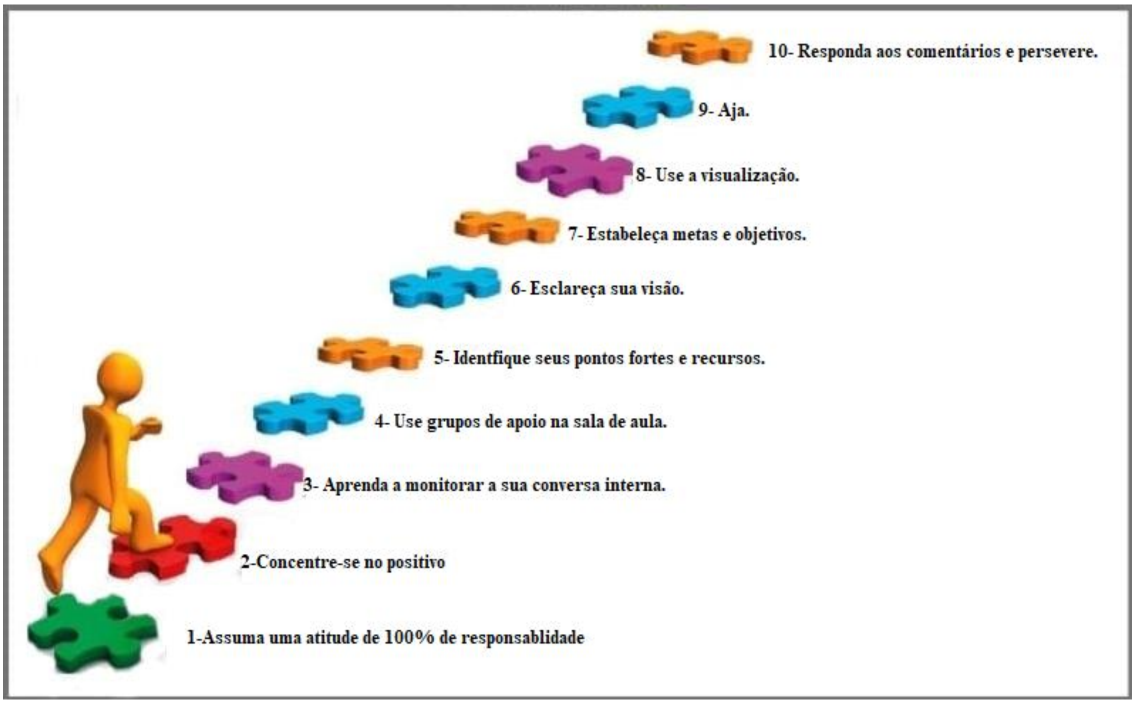
Já a pessoa que possui uma autoestima baixa tende a:

1- Não aceitar suas qualidades;
2- Não se sente valorizada;
3- Tem medo de expor seus sentimentos;
4- É muito influenciada por outras pessoas;
5- Não sabe viver com frustrações;
6- Tende a culpar outras pessoas por suas fraquezas ou erro se torna defensiva diante dos problemas.

Alguns fatores ajudam a determinar e desenvolver a autoestima de uma pessoa, dentre eles, o status socioeconômico, altura, peso, média de notas na escola, religião e participação na sociedade. Entre os adolescentes, estes fatores são fundamentais no desenvolvimento de uma autoestima positiva. A autoestima tem em seu significado a relação entre a imagem ou a opinião que um indivíduo faz de si mesmo, e se constrói a partir de suas experiências, sendo a chave para o sucesso ou fracasso. Além disso, caracteriza-se pela soma do autorrespeito com a autoconfiança e reflete com a capacidade em lidar com os desafios da vida e o direito de ser feliz. Esse processo deve incluir lidar com frustrações, negações, informações que geram desonestidades, irresponsabilidades, incompreensão, sentimentos e emoções que provocam no indivíduo conflitos internos que afetam diretamente sua autoestima.

No livro Seis Pilares da Autoestima (BRANDEN, 1997), há a demonstração de metodologias práticas de como se pode desenvolver com os alunos uma autoestima alta, tendo como práticas: o viver conscientemente, a autoaceitação, a autorresponsabilidade, a autoafirmação, a vida com propósito e a integridade pessoal. Além disso, os ensinamentos dos professores e da equipe escolar podem refletir em toda a vida do aluno e nos dá algumas ideias de como esta autoestima pode ser aprendida e como melhorar o desempenho escolar (KOPFHAMMER, 1992), ver Figura 1.

Figura 1. Dez etapas para ajudar os alunos a aumentarem sua autoestima de acordo com Kopfhammer (1992).



Fonte: Os autores, adaptado de Kopfhammer (1992).

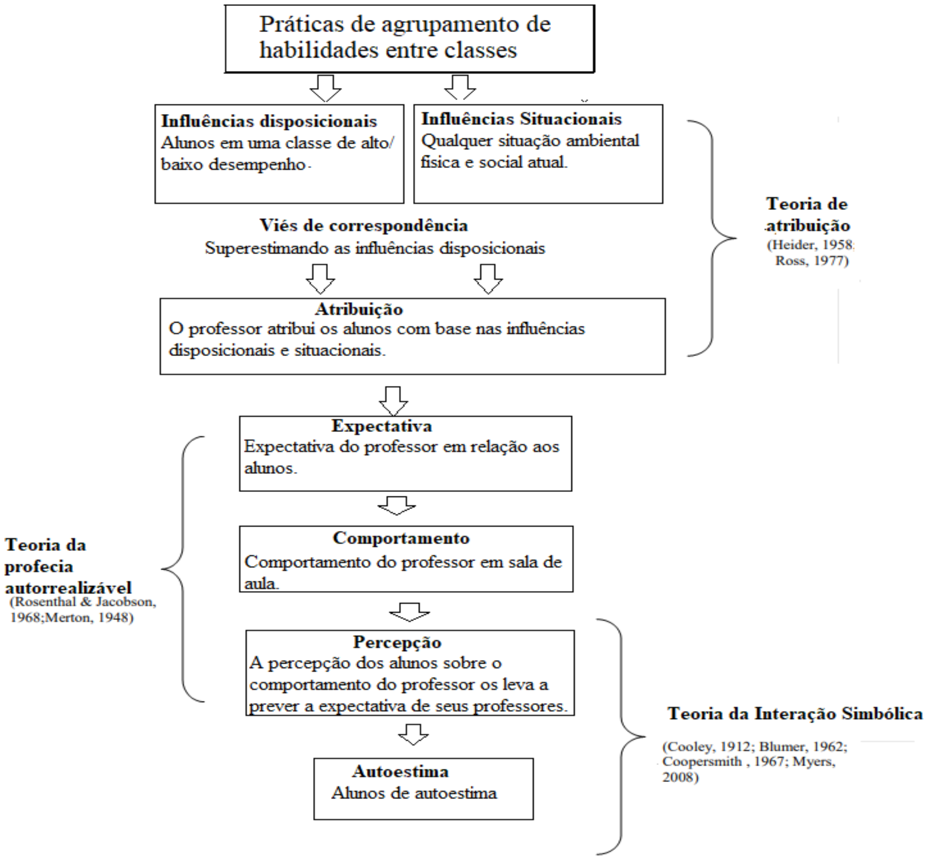
Como dito anteriormente, acredita-se que a autoestima se inicia na infância, porém pode ser alterada independentemente da idade. Logo, cada professor precisa estar disposto a ir atrás dos métodos, passos e etapas que leve o aluno a estar disposto e interessado em aprender e sair de sua zona de conforto (KOPFHAMMER, 1992). Não é um trabalho fácil, mas é necessário para mudar a educação como um todo. Quanto maior a autoestima, maior o desempenho acadêmico e o sentimento de motivação para aprender, tendo um sentimento de prazer e orgulho na matemática. Por outro lado, o aluno com autoestima baixa tem vergonha e ansiedade na matemática, visto que seu desempenho é inferior ao esperado (LIMA, 2012).

A aprendizagem matemática é vista com uma especificidade (ARAUJO *et al.*, 2003), e diante desta realidade, foram feitas pesquisas que mostram que a afetividade e a relação de confiança com os professores refletem na efetiva aprendizagem dos alunos. Segundo estudos, a autoestima é dinâmica e requer um longo processo para construí-la. Para isto, o autor usou em sua pesquisa dois grupos experimentais em escolas de classe alta, média e baixa, sendo um de controle em que recebiam todo o suporte do professor com uma abordagem aberta e o outro grupo apenas uma abordagem tradicional e, como conclusão, obteve um resultado em que o grupo que recebia uma abordagem aberta teve um desempenho muito melhor do que aqueles que eram ensinados de uma forma convencional. Os alunos aumentaram a criatividade matemática e a capacidade de pensar, melhorando significativamente sua autoestima (FATAH *et al.,* 2016).

Outros estudos apresentam conexões entre os aspectos cognitivos e afetivos na aprendizagem e, em especial, na aprendizagem dos conceitos de matemática no 1º ciclo, do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental. Na perspectiva dos estudos na linha construtivista, a aprendizagem efetiva é uma atividade ativa de resolução de problemas e ao se resolver um problema, as emoções que mais se observa nos alunos são satisfação ao encontrar a solução ou frustração quando não a encontram. Os dados desta pesquisa mostram que a relação de confiança com os professores reflete de forma essencial na aprendizagem dos conhecimentos matemáticos (HAZIN *et al.,* 2010). O professor que ensina de forma ativa e atrelada a um ambiente familiar estimulante, influencia na aprendizagem da matemática. Estabelecer relações entre o conteúdo e a realidade dos alunos, inserindo-o como parte fundamental no processo, não como objeto a ser estudado, mas como sujeito participante de um processo dinâmico, onde as possibilidades são construídas num movimento individual e coletivo é fundamental para a construção da autoestima e, consequentemente, da aprendizagem. A participação dos alunos favorece a aprendizagem, estimula a disciplina e potencializa o interesse pelo saber matemático, propondo uma autoestima positiva que propõe uma participação mais ativa dos alunos (NEVES; CARVALHO, 2006).

Teorias demonstram a importância da autoestima e como ela surge na escola. Conforme podemos ver na Figura 2, a teoria da interação simbólica.

Figura 2. Teorias sobre o desenvolvimento de autoestima na escola.



Fonte: Prihadi e Chua (2012), tradução nossa.

Esta teoria aponta que a expectativa dos professores é percebida pelos estudantes e possui influência indireta na sua autoavaliação, ou seja, quando o aluno percebe que seu professor tem expectativas positivas quanto ao seu desempenho, ele tem uma maior interesse e se dedica mais aquele estudo, já quando o aluno percebe que seu professor não tem expectativas positivas quanto ao seu desempenho, ele se sente desmotivado a aprender aquele conteúdo, já que indiretamente o professor insinuou que ele não conseguiria se destacar neste estudo (PRIHADI; CHUA, 2012).

A segunda teoria apresentada é a teoria da profecia autorrealizável, que traz como exemplo um professor que leciona para dois ou mais estudantes da mesma família, irmãos ou primos e acaba, de forma inconsciente, promovendo uma tensão entre o estudante e os demais alunos da sala. O professor por ter dado aula para um estudante da família que era brilhante na escola, tende a esperar o mesmo dos outros mais novos, e com isso, possui um comportamento para com aquele aluno mais novo, de atenção, reforço e cuidado, possibilitando que o aluno mais novo se sinta motivado e com entusiasmo. Dessa forma, se realiza a “profecia” do professor que aquele aluno seria um estudante brilhante.

A terceira e última teoria, é a teoria da atribuição, conforme mostra a Figura 3.

Figura 3. Exemplo Teoria da Atribuição.

Fonte:https://incrivel.club/inspiracion-psicologia/10-frases-para-reforzar-la-autoestima-de-tu-hijo-al-hacer-las-tareas-escolares-900210/ (adaptada).

Teoria em que um fato disposicional ou situacional indica a reação desfavorável ou simpática, como por exemplo, um estudante que é rude com seus colegas recebe a atribuição situacional desfavorável de ser uma pessoa sem educação e odiado pelo restante dos colegas; caso a atribuição fosse simpática, o aluno poderia aprender a ser mais gentil (PRIHADI; CHUA, 2012). Isto acontece também quando se formam grupos selecionados pela aptidão no conteúdo e há a rotulação dos alunos.

Conforme é apresentado, a autoestima se mostra como parte fundamental no desempenho escolar. Através de metodologias ativas que proporcionem a participação dos alunos, é possível desenvolver a confiança e o interesse em uma aprendizagem mais significativa. A autoestima se dispõe como preditora do desempenho escolar, em que o aluno que confia em seus valores e capacidades, se permite envolver no processo e na concretização da aprendizagem. A busca pela construção de uma autoestima saudável em crianças e adolescentes possibilita ampliar não só o interesse dos alunos nos conteúdos escolares, mas também contribui para realizações futuras em sua vida pessoal e profissional. Cabe salientar que o papel do professor está em ajudar os alunos a enxergar suas potencialidades e permitir que sua participação seja efetiva na aprendizagem e no desempenho escolar.

Referências

ARAÚJO, C. R. *et al*. Affective Aspects on Mathematics Conceptualization: From Dichotomies to an Integrated Approach. **International Group for the Psychology of Mathematics Education**, v. 2, p. 269-276, 2003.

BEAN, R. *et al*. **Adolescentes Seguros: Como aumentar a autoestima dos jovens.** São Paulo: Gente, 1995.

BRANDEN, N. **Auto-estima e os seus seis pilares.** Tradução Vera Caputo. São Paulo: 3 ed., 1997.

DIOGO, F. V. **Relação familiar e autoestima. Investigação**, São Paulo, v. 9, n. 1, p. 17-24, jan./abr. 2009.

FATAH, A. *et al*. Open-Ended Approach: An Effort in Cultivating Students' Mathematical Creative Thinking Ability and Self-Esteem in Mathematics. **JournalonMathematicsEducation**, v. 7, n. 1, p. 11-20, 2016.

FERKANY, M. The educationalimportanceof self-esteem. **JournalofPhilosophyofEducation,** 2008.

HAZIN, I; FRADE, C; FALCÃO, J. T. R. Autoestima e desempenho escolar em matemática: contribuições teóricas sobre a problematização das relações entre cognição e afetividade. **Educar**, n. 36, p. 39-54, 2010.

HUMPHREY, N.The Death oftheFeel-Good Factor: Self-Esteem in theEducationalContext. **SchoolPsychologyInternational**, 2004.

KOPFHAMMER, P. H. **Research and methods of improving: elementary school students' self-esteem**. MarquetteUniversity, 1992. Disponível em: https://www.marquette.edu/library/theses/already_uploaded_to_IR/kopfh_p_1992.pdf. Acesso em: 15 ago 2021.

LIMA, M. C. F. **Emoções de desempenho na matemática e suas relações com autoconceito acadêmico, autoimagem e autoconsciência.** Dissertação – Universidade Federal de Pernambuco – Programa de pós-graduação em psicologia. Recife, 2012.

MENDES, D. C; CASTELANO, K. L; MARTINS, L. M; ANDRADE, Claudia Caixeta Franco. A influência da autoestima no desempenho escolar. **Revista Educação em Debate**, Fortaleza, ano 39, n. 73, p. 9-21, jan./jun. 2017.

NEVES, M. C; CARVALHO, C. A importância da afectividade na aprendizagem da matemática em contexto escolar: Um estudo de caso com alunos do 8. º ano. **Análise Psicológica**, v. 24, n. 2, p. 201-215, 2006.

PRIHADI, K; CHUA, M. Students' Self-Esteem at School: The Risk, the Challenge, and the Cure. **JournalofEducationand Learning.** Vol. 6, p. 1 – 14, 2012.

SLAVIN, R. E. AbilityGroupingandStudentAchievement in ElementarySchools. **Review ofEducationalResearch**, 2006.

NOTAS

IDENTIFICAÇÃO DO TEXTO
O presente texto é um recorte da dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat) em desenvolvimento na Universidade Federal do Triângulo Mineiro (UFTM), elaborada sob orientação do Professor Dr. Marcelo Ferreira.

IDENTIFICAÇÃO DE AUTORIA
Renata Furtado Horta. Discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Universidade Federal do Triângulo Mineiro (UFTM), Uberaba, Minas Gerais, Brasil.
E-mail: re.horta@yahoo.com.br.
https://orcid.org/0000-0002-8832-3415

Marcelo Ferreira. Doutor em Matemática Aplicada pela Universidade Estadual Paulista (UNESP), São José do Rio Preto, SP. Orientador do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Universidade Federal do Triângulo Mineiro (UFTM), Uberaba, Minas Gerais, Brasil.
E-mail: marcelo.ferreira@uftm.edu.br
https://orcid.org/0000-0002-6854-1837

AGRADECIMENTOS
Agradecemos aos idealizadores do Profmat, e ao corpo docente da Universidade Federal do Triângulo Mineiro (UFTM).

FINANCIAMENTO
O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Não se aplica.

EDITORES
Patricia Helena Mirandola Garcia, Eugenia Brunilda Opazo Uribe, Gerson dos Santos Farias.

HISTÓRICO
Recebido em: 14/09/2021 – Aprovado em: 12/12/2021 – Publicado em: 15/12/2021.

COMO CITAR
HORTA, R. F; FERREIRA, M. A Influência da Autoestima no Desempenho Escolar. **Revista ENSIN@ UFMS**, Três Lagoas, v. 2, número especial, p. 276-286. 2021.

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E PRÁTICAS EXPERIMENTAIS NO ESTUDO DE UMA RELAÇÃO ENTRE AS MEDIDAS DOS LADOS DO TRIÂNGULO RETÂNGULO

HISTORY OF MATHEMATICS AND EXPERIMENTAL PRACTICES IN THE STUDY OF A RELATIONSHIP BETWEEN MEASURES ON THE SIDES OF THE RECTANGLE TRIANGLE

Anderson de Oliveira Melo Silva[1]

Christine Sertã Costa[2]

RESUMO: Este artigo tem como base um recorte teórico da dissertação do Profmat de Silva (2021) e visa apresentar uma atividade experimental fundamentada na história da matemática, problematizando um conteúdo ensinado no 9º ano do ensino fundamental da educação básica, com base nos seus processos históricos de produção provocando o diálogo entre duas abordagens: a história da matemática e o ensino por atividades experimentais. O diálogo construído permite alcançar objetivos específicos importantes como a “humanização da matemática”, possibilitando que alunos deste ano de escolaridade compreendam a matemática como produto da necessidade humana e a “significação da matemática” promovendo o aprendizado por meio do desenvolvimento de atividades práticas que tragam sentido e motivação à aprendizagem de novos saberes. Assim, é aqui apresentada uma abordagem histórica, levantando reflexões teóricas importantes sobre a autoria do teorema conhecido como de Pitágoras e é sugerida uma atividade de sala de aula fundamentada em relações entre contextos históricos e práticas experimentais.

PALAVRAS-CHAVE: História da Matemática. Atividades Experimentais. Teorema de Pitágoras.

ABSTRACT: This article is based on a theoretical slant from Profmat de Silva's dissertation (2021) and aims to present an experimental activity based on the history of mathematics, questioning a content taught in the 9th year of elementary education in basic education, based on its historical processes production, provoking a dialogue between two approaches: the history of mathematics and teaching through experimental activities. The constructed dialogue allows for important specific goals to be reached, such as the "humanization of mathematics", enabling students in this school year to understand mathematics as a product of human need and the "meaning of mathematics" promoting learning through the development of practical activities that bring meaning and motivation to learn new knowledge. Thus, a historical approach is presented here, raising important theoretical reflections on the authorship of the theorem known as Pythagoras, and a classroom activity based on relationships between historical contexts and experimental practices is suggested.

KEYWORDS: History of Mathematics. Experimental Activities. Pythagorean Theorem.

Introdução

O teorema de Pitágoras relaciona as medidas dos lados de um triângulo retângulo e é caracterizado como uma de suas relações métricas, sendo referenciado na Base Nacional

[1] Faculdade Internacional Signorelli. E-mail: anderson_oms@yahoo.com.br
https://orcid.org/0000-0002-7448-2634
[2] Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. E-mail: csertacosta@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-8759-5590

Informações completas da obra no final do artigo

ISSN 2525-7056

Comum Curricular (BNCC), documento que recomenda que os alunos do 9º ano do ensino fundamental tenham a habilidade de demonstrá-lo e de resolver e elaborar problemas que envolvam esse polígono (BRASIL, 2017).

Neste artigo, defendemos a possibilidade de abordar este teorema através da conjugação de duas metodologias de ensino: a história da matemática e a atividade experimental. A história da matemática é um recurso didático defendido por diversos autores como D'Ambrósio (1999) que afirma que desvincular a matemática das demais atividades humanas é um erro já que esta se desenvolveu a partir de movimentos em diversas civilizações e Saito (2016) que afirma que tal metodologia permite o afastamento da formalidade da matemática moderna, ressignificando conceitos fundamentais. A atividade experimental é uma metodologia que pode auxiliar a aquisição do conhecimento matemático, pois permite ao aluno se envolver com mais efetividade na aula por meio da manipulação de experimentos que permitirão a formulação de hipóteses, a realização de conclusões e a consequente construção de conceitos. Tal proposta é defendida por Sá (2020) que afirma que a realização de experimentos com materiais manipulativos promove a participação efetiva do aluno no processo de aprendizagem permitindo que este exercite habilidades como observação, análise, pesquisa, avaliação, inferência, testagem, planejamento, medição e conclusão. O autor define algumas etapas para a implementação desta metodologia: organização, apresentação, execução, registro, análise e institucionalização, conforme ilustrada na figura 1.

Figura 1. Ensino de Matemática por Atividade Experimental

Fonte: Adaptado pelos autores com base em Sá (2020).

A justificativa para unir estas duas estratégias pedagógicas está baseada em Mendes (2001), que sugere a história da matemática como o elemento gerador do conhecimento Matemático e o ensino por intermédio de atividades experimentais como a ferramenta que efetiva os estímulos que constituem o processo contínuo de construção do conhecimento dos conceitos matemáticos por modos físico/visual, oral e simbólico. O autor afirma que a finalidade da proposta implica em uma efetiva participação do aluno na construção do conhecimento, constituindo-se no aspecto fundamental no processo de ensino-aprendizagem.

O Conhecimento da Relação por Civilizações pré-Pitagóricas

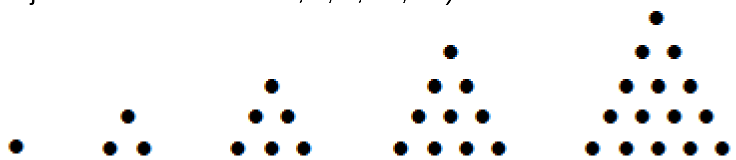
Cerca de 1900 a 1600 anos antes de Cristo, os babilônios já conheciam ternos de números naturais que satisfaziam a expressão que descreve a relação de Pitágoras. No Egito, aproximadamente 1500 anos antes de Cristo, já havia o conhecimento de que um triângulo com lados medindo 3, 4 e 5 unidades era classificado como retângulo. Este povo utilizava uma corda contendo doze nós igualmente espaçados e quando esticada formava um triângulo retângulo e com este artifício conseguiam resolver problemas de marcações de propriedades de terra. Por volta de 1000 a.C., esta relação era mencionada pelos chineses em problemas sobre profundidade de lagos e comprimento de sombra de árvores. Na Índia, também há indícios deste conhecimento através dos *Sulbasutras*[3], que foram escritos entre 500 e 800 a.C.

Como Pitágoras viveu de 569 a 500 a.C. percebe-se, portanto, que não poderia ser o autor do teorema que envolve a relação entre as medidas dos lados do triângulo retângulo já que, conforme apresentado, era conhecido de outros povos antecessores a sua época.

A RELAÇÃO DE PITÁGORAS

Segundo Roque (2012), os números para os Pitagóricos não eram os símbolos que hoje conhecemos. A matemática pitagórica era baseada em uma aritmética que era representada através de pedras cuja configuração determinava os números chamados figurados. Assim, por exemplo, a área de um triângulo formado por três pontos seria a representação do que conhecemos hoje com o algarismo 3, símbolo desta quantidade. As figuras 2, 3 e 4 mostram a disposição de alguns números figurados idealizados pelos pitagóricos.

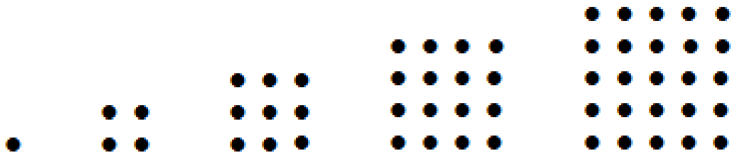
Figura 2. Números triangulares (configurações que representavam o que hoje escrevemos como 1, 3, 6, 10, 15)



Fonte: Autores.

[3] *Sulbasutras* são antigos manuais hindus onde há detalhes prescritos para a construção de altares. A palavra *Sulbasutra* significa "Manual de corda", e se justifica pois, nas construções do altar, eram utilizadas estacas e cordas.

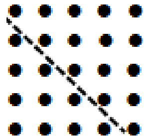
Figura 3. Números quadrados. (configurações que representavam o que hoje escrevemos como os quadrados 1, 4, 9, 16, 25 = 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2)



Fonte: Autores.

Os Pitagóricos obtinham relações aritméticas com base nestas configurações, como por exemplo o fato de todo o número quadrado ser resultado da adição de dois números triangulares, conforme ilustra a figura 4.

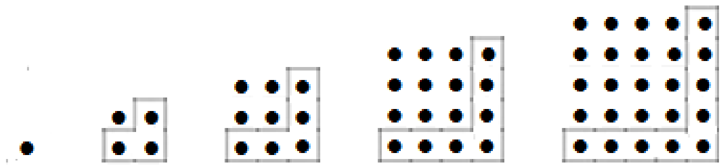
Figura 4. O número quadrado 25 sendo o resultado da adição dos números triangulares sucessivos 10 e 15.



Fonte: Autores.

Segundo a autora, não deveria ter havido uma forma geométrica do teorema que envolve as medidas dos lados de um triângulo retângulo e sim um estudo sobre as triplas pitagóricas[4], formadas por números inteiros e associadas às medidas dos lados de um triângulo retângulo. Ainda segundo Roque (2012), os Pitagóricos teriam chegado a essas triplas por meio de uma figura conhecida como *gnomon*, um número ímpar em formato do que hoje nomeamos de esquadro e que explicitava as diferenças entre dois números quadrados sucessivos, conforme ilustra a figura 5.

Figura 5. Sequência de obtenção de números quadrados através de gnomons, partes escurecidas em cada número quadrado



Fonte: Autores.

Na figura 5, o número quadrado 25 é formado pelo número quadrado 16 mais o gnomon de 9 pontos (que também é um número quadrado 3); obtendo-se a igualdade 9 +

[4] Uma tripla pitagórica é uma sequência de três números que satisfazem a propriedade dos números quadrados que consistia em encontrar um número quadrado que fosse a soma de outros dois números quadrados.

16 = 25 obtida a partir da primeira tripla pitagórica formada pelos números quadrados 3, 4 e 5.

PROPOSTA DE ATIVIDADE

Com base na hipótese de Roque (2012), foi elaborada uma sugestão de atividade prática seguindo as etapas descritas por Sá (2020), com objetivo de verificar a relação aritmética dos números quadrados dos pitagóricos e associá-la às medidas dos lados do triângulo retângulo. É sugerido que antes da aplicação desta atividade seja introduzido os conceitos acerca do triângulo retângulo e que a atividade seja realizada em duas aulas consecutivas de 50 minutos. Posteriormente uma versão da atividade formatada para aplicação estará disponível. Ressaltamos que a mesma pode sofrer adaptações para se adequar as diferentes realidades de cada sala de aula.

Organização:

- Divida a turma em grupos entre 2 e 4 alunos[5].
- Para cada grupo, distribua uma régua e uma folha de papel quadriculado.
- Distribua para cada grupo uma cópia da atividade.

Apresentação:

A atividade deve ser iniciada pelo professor ao apresentar e conversar com a turma sobre a descoberta histórica dos números figurados quadrados pelos pitagóricos. Em seguida deve haver a descrição da atividade.

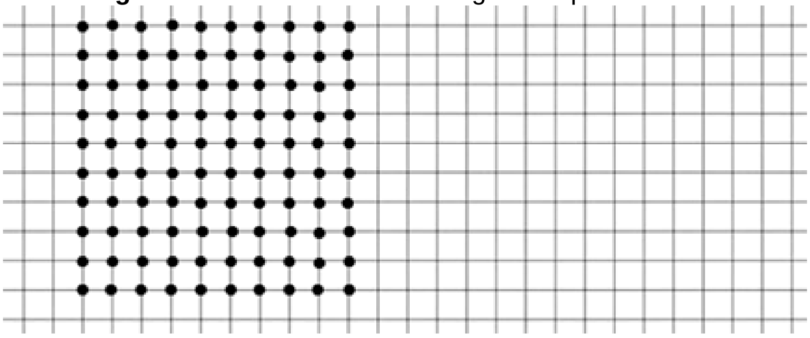
Execução:

Os alunos devem realizar a atividade seguindo a proposta Os Números Figurados e o Teorema de Pitágoras apresentada ao final deste artigo, onde constam as seguintes situações a serem realizadas.

1. Peça para que os alunos desenhem um número figurado quadrado 10 (figura 6).

[5] Não recomendando menos que 2 alunos para que haja discussão de ideias e não mais que 4 alunos para que não haja dispersão.

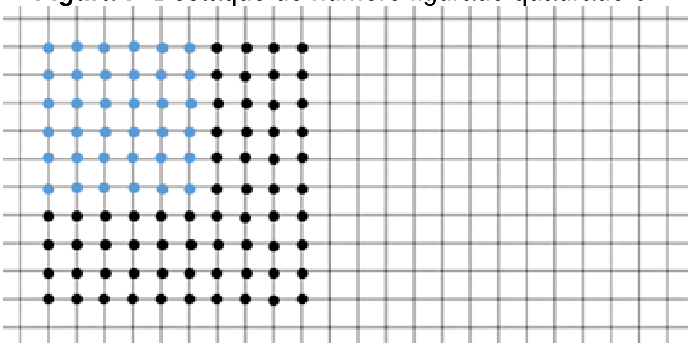
Figura 6. Desenho do número figurado quadrado 10.



Fonte: Autores

2. Sugira aos grupos para destacarem o número figurado quadrado 6 (figura 7).

Figura 7. Destaque do número figurado quadrado 6.



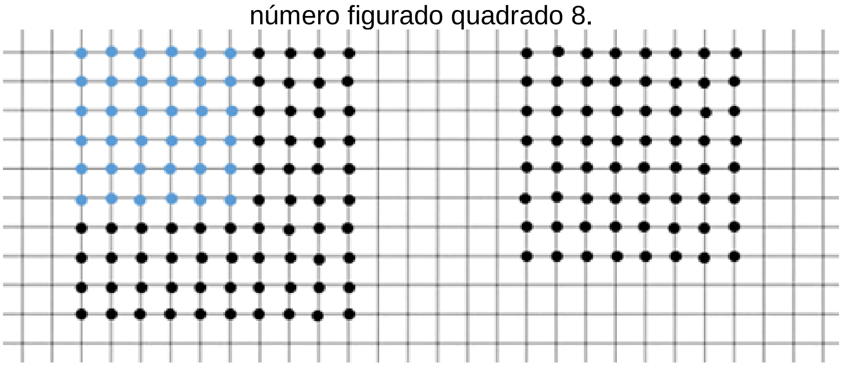
Fonte: Autores

Registro:

Etapa onde cada grupo anota as informações coletadas. Os alunos devem:

1. reconhecer os demais pontos como o número quadrado 8, associando 64 a 8^2.
2. registrar no papel quadriculado os demais pontos não destacados na forma de um número quadrado (figura 8).

Figura 8. Pontos não destacados na forma do número figurado quadrado 8.



Fonte: Autores.

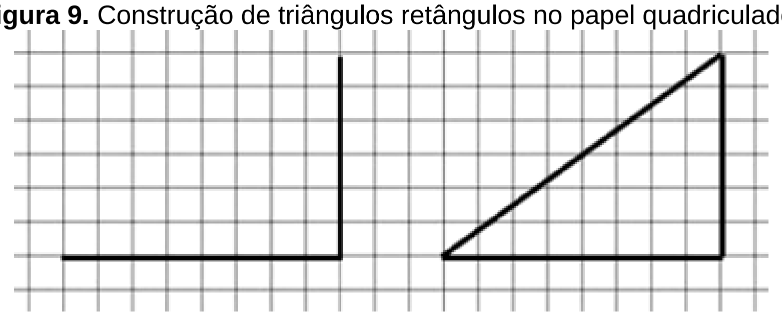
3. registrar na tabela fornecida os números figurados presentes na construção.

Análise:

Nesta etapa, cada grupo deve avaliar as informações registradas e descobrir relações entre os dados e resultados do experimento procurando construir novos conceitos, propósito fundamental da experimentação. Para atingir este objetivo, os grupos devem seguir o seguinte roteiro:

1. Escreva a relação entre os números figurados registrados.
2. No papel quadriculado construa dois segmentos perpendiculares e consecutivos - o primeiro horizontal de comprimento 8 cm e o segundo vertical de comprimento 6 cm.
3. Feche o triângulo e classifique-o quanto aos ângulos (figura 9).

Figura 9. Construção de triângulos retângulos no papel quadriculado.



Fonte: Autores

4. Meça o comprimento da hipotenusa

Institucionalização

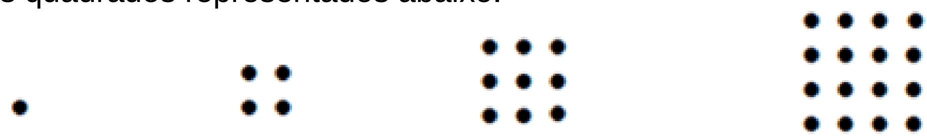
Nesta etapa os alunos serão levados a reconhecer a relação entre os números figurados e as medidas dos lados do triângulo retângulo formado com eles, estabelecendo a relação de Pitágoras para o triângulo retângulo.

ATIVIDADE: OS NÚMEROS FIGURADOS E O TEOREMA DE PITÁGORAS

Apresentamos a seguir o roteiro da atividade a ser desenvolvida pelos alunos, com o objetivo de reconhecer no triângulo retângulo a relação presente nos números figurados quadrados.

ATIVIDADE: OS NÚMEROS FIGURADOS E O TEOREMA DE PITÁGORAS

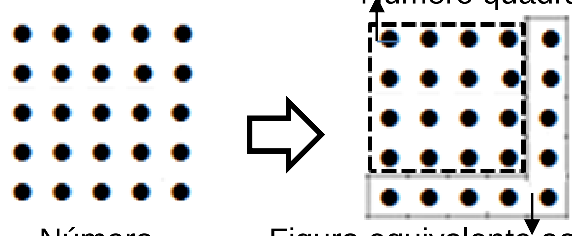
Dentre os estudos realizados por Pitágoras e pelos pitagóricos está uma aritmética estabelecida através de pontos. Os números para os pitagóricos não eram representados pelos algarismos que conhecemos hoje: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Sua matemática era baseada em pontos, representados por pedras organizadas em determinada configuração, dando origem aos números figurados, como por exemplo os números figurados quadrados representados abaixo.



Número Quadrado 1 | Número Quadrado 2 | Número Quadrado 3 | Número Quadrado 4

A partir destas configurações, os pitagóricos formavam relações entre números quadrados. Observe:

Número quadrado 4



Número Quadrado 5

Figura equivalente ao número quadrado 3 por ter a mesma quantidade de pontos.

AGORA O DESAFIO É PARA VOCÊS

- Dividam-se em grupos entre 2 e 4 alunos.
- Material necessário: régua e uma folha de papel quadriculado.

FAÇAM O QUE SE PEDE EM CADA QUESTÃO

1) Responda:
a) Por que você acha que a figura 2, que possui 4 pontos, é chamada de *número quadrado 2*?
b) Por que vocês acham que a figura 3 que possui 9 pontos é chamada de *número quadrado 3*?
c) Por que vocês acham que a figura 4 que possui 16 pontos é chamada e *número quadrado 4*?
d) Por que vocês acham que a figura 1 que possui 1 ponto é chamada e *número quadrado 1*?
2) Represente o número quadrado 10 na folha de papel quadriculado.
3) Destaque na representação anterior o número quadrado 6.
4) A que número quadrado corresponde os pontos não destacados? Por quê?

5) Represente-o na folha de papel quadriculado.
6) Complete a tabela com base na sequência de números figurados que você construiu.
7) Escreva a relação matemática que envolve estes três números figurados quadrados.

	Nome	Quantidade de Pontos
1º número figurado representado		
2º número figurado representado		
número figurado oculto		

8) Aproveitando as pautas da folha de papel quadriculado construa:
a) um vertical de comprimento 6 cm.
b) um segmento horizontal de 8 cm a partir de uma das extremidades do segmento construído anteriormente.
c) utilize a régua para unir as extremidades livres de cada segmento.
d) Utilize a régua e meça o segmento que fecha o triângulo.
9) Qual é a medida deste segmento?
10) Em relação aos ângulos deste triângulo responda: que tipo de triângulo você formou? 11) Como é chamado o lado de maior comprimento deste triângulo?

Considerações Finais

As metodologias de ensino são ferramentas eficientes para a abordagem dos conteúdos matemáticos. Neste sentido, destacamos a história da matemática que permite apresentá-la como produto da construção humana e as atividades experimentais que proporciona o aprendizado dos conceitos matemáticos através de práticas orientadas.

A combinação destas metodologias possibilita ao aluno, simultaneamente, uma reflexão acerca da construção histórica do conhecimento matemático e a aquisição destes através da execução de atividades práticas, o que oportuniza desempenhar um papel transformador no ensino de matemática.

Neste sentido, a prática apresentada foi desenvolvida com base nestas metodologias e visa atender a essas necessidades educacionais, fazendo do aluno o ator principal do processo de aprendizagem. Ressaltamos que esta proposta não é um manual que devem ser seguidos com rigor e que pode e deve ser modificadas de acordo com cada realidade.

Por ter sido idealizada em um ano (2021) onde a escola de educação básica funcionou de forma remota por estar no contexto adverso da pandemia da Covid-19, a mesma não foi realizada e por isto ainda não há resultados referentes à sua aplicação, ficando sua execução no momento em que a escola retornar às suas atividades normais.

Muitos temas da escola básica também podem ser abordados através da combinação destas metodologias, como a construção do conceito de números naturais e racionais, a trigonometria, a análise combinatória, as funções, entre outros.

Espera-se que o presente artigo contribua de forma efetiva e significativa com o conhecimento e motivação do professor da escola básica e o incentive, não só a utilizar as metodologias e atividade aqui proposta, mas também a construir novas propostas com esse olhar.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, MEC/SEB, 2017.

D´AMBROSIO, U. A história da matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática. In: BICUDO, M. A. V. (org.). **Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: UNESP, 1999. p. 97-115. Disponível em: https://drive.google.com/file/d/0B4JIJny_7pdXFaSW91M2dNTVU/view?resourcekey=0-HaIRfb3sKcPqtCtHoNyPIg. Acesso em: 3 dez. 2020.

MENDES, I. A. **Ensino da Matemática por Atividades:** Uma Aliança entre o Construtivismo e a História da Matemática. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2001. Disponível em: http://www.crephimat.com/visor.php?id_t=206&t=3. Acesso em: 6 jan. 2021.

SÁ, P. F. **Ensinando matemática através da redescoberta**. Traços [online]. v. 2, n. 3, p. 77 - 81, 1999. Disponível em: http://revistas.unama.br/index.php/revistatracos/article/view/822. Acesso em: 21 dez. 2020.

SAITO, F. **Construindo Interfaces entre História e Ensino da Matemática**. Ensino de Matemática em Debate [online]. São Paulo. v. 3, n. 1, p. 3-19, 2016. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emd/article/view/29002. Acesso em: 07 dez. 2020.

SILVA, A. O. M. **Diálogos entre Histórias da Matemática e Práticas Experimentais na Escola Básica**. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2021. Disponível em: https://www.maxwell.vrac.pucrio.br/53661/53661.PDF. Acesso em: 4 ago. 2021.

ROQUE, T. **História da Matemática**: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. 1ª ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

NOTAS

IDENTIFICAÇÃO DE AUTORIA
Anderson de Oliveira Melo Silva. Mestre em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio). Professor da Faculdade Internacional Signorelli, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
E-mail: anderson_oms@yahoo.com.br
https://orcid.org/0000-0002-7448-2634

Christine Sertã Costa. Doutora em Engenharia de Produção pela COPPE/UFRJ. Professora do Departamento de Matemática da Pontifícia Universidade Católica-RJ, Brasil.
E-mail: csertacosta@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-8759-5590

AGRADECIMENTOS
Não se aplica.

FINANCIAMENTO
Não se aplica.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Não se aplica.

EDITORES
Patricia Helena Mirandola Garcia, Eugenia Brunilda Opazo Uribe, Gerson dos Santos Farias.

HISTÓRICO
Recebido em: 21/08/2021 – Aprovado em: 23/11/2021 – Publicado em: 15/12/2021.

COMO CITAR
SILVA, A. O. M; COSTA, C. S. História da Matemática e Práticas Experimentais no Estudo de uma Relação entre as Medidas dos Lados do Triângulo Retângulo. **Revista ENSIN@ UFMS**, Três Lagoas, v. 2, número especial, p. 287-297. 2021.

RELATOS DE EXPERIÊNCIA

CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA DE UM TRIÂNGULO VIA FLUXOGRAMA: UM RELATO DE EXPERIÊNCIA

CONDITION OF EXISTENCE OF A TRIANGLE THROUGH FLOWCHART: AN EXPERIENCE REPORT

Juliano da Cunha da Silva[1]

Carmen Vieira Mathias[2]

RESUMO: Neste trabalho, apresentamos o relato de experiência de uma investigação realizada durante a aplicação de uma sequência didática que versa sobre a condição de existência de um triângulo, com enfoque em fluxogramas. Tal sequência foi implementada em uma turma de sexto ano do ensino fundamental em uma escola da rede municipal e pensada a partir das orientações existentes na Base Nacional Comum Curricular. Consideramos que o uso do material concreto foi decisivo na compreensão da condição de existência de um triângulo, conhecida a medida de três segmentos, enquanto o uso do fluxograma demonstrou-se uma opção viável no processo de ensinar e aprender o tema trabalhado.

PALAVRAS-CHAVE: Geometria. Fluxograma. Ensino e aprendizagem.

ABSTRACT: In this work, we present the experience report of an investigation carried out during the application of a didactic sequence that deals with the condition of existence of a triangle, with a focus on flowcharts. This sequence was implemented in a sixth-year class of elementary school in a municipal school and designed based on the existing guidelines in the Common National Curriculum Base. We consider that the use of concrete material was decisive in understanding the condition of existence of a triangle, known as the three-segment measure, while the use of the flowchart proved to be a viable option in the process of teaching and learning the theme worked on.

KEYWORDS: Geometry. Flowchart. Teaching and learning.

Introdução

A carreira docente é seguida de inúmeros desafios, dentre eles, ressaltam-se os de caráter metodológico, intrínsecos a práxis diária e no âmbito de diretrizes, normas e parâmetros curriculares que servem de balizadores à Educação Básica.

Ao longo de muitos anos, a capacidade de resumir e organizar os pensamentos não era desenvolvida durante a vida escolar. Assim, o ensino da Matemática tornava-se meramente conceitual e pouco prático, sem levar em conta os efeitos do cotidiano do aluno para a resolução de problemas.

[1] Rede Municipal de Ensino Santa Maria, RS. E-mail: julianosilvacunha@hotmail.com
https://orcid.org/ 0000-0003-1527-5675
[2] Universidade Federal de Santa Maria. E-mail: carmen@ufsm.br
https://orcid.org/0000-0001-5667-159X

Informações completas da obra no final do artigo

Esse pressuposto é reforçado por Andrade (2013):

> O ensino de matemática infelizmente ainda baseia-se na tradicional aula expositiva, na qual o professor reproduz para a lousa um resumo daquilo que considera importante e suficiente para que ocorra o processo de ensino e aprendizagem. Nesse modelo de ensino, o aluno apenas faz cópias dos conteúdos do quadro e tenta resolver exercícios que não passam de uma cópia daquilo que o professor resolveu no quadro (ANDRADE, 2013, p. 15-16).

Porém, observamos que, após muitos anos de pesquisas na área de ensino, desenvolvimento social e psicologia infantil, são apresentados novos cenários que demonstram a importância de o aluno ser o protagonista do próprio saber. Dessa forma, compreendemos que o pensamento matemático necessita ser desenvolvido desde os anos iniciais, valorizando o processo e o apoio às tentativas.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), além de definir o conjunto de aprendizagens essenciais da Educação Básica, apresenta o ensino de Matemática como um desenvolvimento gradativo e contínuo. Por meio dessa proposta, dependendo do estímulo dado, o estudante poderá apropriar-se do conhecimento de forma significativa e prazerosa, sendo o agente ativo na construção dos saberes.

Uma das mudanças com maior impacto na prática docente, trazida pela BNCC, em termos de saberes, conteúdos e aplicações, diz respeito ao uso de fluxogramas. Esse tópico tem uma inserção no sétimo ano, no que é denominado na BNCC de “Objeto de Conhecimento - Triângulos: construção, condição de existência e soma das medidas dos ângulos internos” (BRASIL, 2018, p. 309).

Nesse viés, destacamos o papel chave que o professor desempenha, sendo este responsável por perceber as alterações necessárias, ajudar a elaborar documentos mais completos e de acordo com a realidade dos alunos. O professor possui, ainda, a incumbência de ser o agente fiscalizador da eficácia do sistema de ensino proposto. Como resultado da tríade professores, metodologias e diretrizes educacionais, surge uma gama de abordagens metodológicas que apresentam potencialidades.

Diante desse cenário, este trabalho tem como objetivo apresentar o relato de uma investigação realizada durante a aplicação de uma sequência didática que versa sobre a condição de existência de um triângulo, com enfoque em fluxogramas.

Desenvolvimento

Este trabalho teve como pilar de fundamentação a BNCC, para que, dessa forma, a sequência desenvolvida com os estudantes atenda aos parâmetros curriculares vigentes. A BNCC é um documento normativo que define o conjunto de aprendizagens essenciais da Educação Básica e tem como objetivos superar a fragmentação das políticas educacionais e ser balizadora da qualidade da educação (BRASIL, 2018)

A BNCC apresenta o desenvolvimento das habilidades relacionadas ao objeto de conhecimento - Geometria- em cada ano de ensino, mais especificamente, a construção e a apreensão de habilidades que servem como base ao conteúdo construção e condição de existência de um triângulo.

Apesar do trabalho aqui desenvolvido focar no ensino de Geometria nos anos finais do Ensino Fundamental, consideramos ser importante desenvolver as habilidades também nos anos iniciais, por ser uma etapa decisiva na ideia que os alunos formam sobre a Matemática. As habilidades desenvolvidas nos anos iniciais devem, sempre que possível, ser lembradas e utilizadas nos anos posteriores, para que, dessa forma, os alunos consigam realizar conexões entre o que está sendo aprendido e o que já foi visto.

Além disso, a Geometria se mostra uma ferramenta muito útil na resolução de problemas e na elaboração de esquemas, conforme Fonseca e outros (2002):

> [...] os conhecimentos geométricos possibilitam a elaboração de representações mais facilmente traduzíveis em recursos visuais (gráficos, diagramas, organogramas, etc.) para diversos conceitos relacionados a tais conteúdos. Dessa maneira, a Geometria surge também como um aporte relevante para a compreensão de outros campos do conhecimento. (FONSECA *et al*., 2002, p. 99).

Ao realizar um olhar sobre os objetos de conhecimento a serem desenvolvidos no ensino de Geometria, podemos perceber que as habilidades apresentadas pela BNCC, durante os nove anos da Educação Básica, trazem um aumento gradativo de conhecimento. Isso se evidencia pelo fato de algumas habilidades serem extremamente semelhantes a outras, diferenciando-se por uma ou duas inserções, por exemplo. Essa configuração traz a ideia de que os conteúdos estão sendo revistos ano após ano, com um acréscimo real de conhecimento. Nesse ponto, vale salientar, que tal característica nos remonta a um ensino em espiral, no qual o aluno está em constante contato com um mesmo conteúdo, mas em diferentes níveis de aprofundamento. Acreditamos que isso foi proposto para que, dessa forma, as dificuldades sejam superadas paulatinamente, possibilitando, assim, ao estudante, a oportunidade de superá-las de acordo com o seu tempo de aprendizado.

Essa observação remete ao modo com que os conteúdos são abordados nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Nesse sentido, também realizamos uma pesquisa nesse documento, acerca dos conteúdos trazidos por este trabalho. Encontramos, a partir dessa busca, três inserções do tema fluxograma. O documento menciona os fluxogramas como forma de representação e organização de dados, recurso visual adequado no auxílio de sintetização e elaboração de conclusões, bem como uma ferramenta encontrada na veiculação de informações no cotidiano (BRASIL, 1998).

Apesar de não serem encontradas relações explícitas entre a condição de existência de um triângulo, dada a medida de três segmentos, e a abordagem pelo uso de fluxogramas, acreditamos que a BNCC reitera a importância do recurso fluxograma na construção do conhecimento matemático, entendendo que esse seja necessário para o desenvolvimento cognitivo que almejamos a nossos alunos.

Assim, fica evidente a importância já trazida pelos PCN e reiterada na BNCC de um ensino voltado a atividades práticas, para que o aluno seja o protagonista do saber e evolua no desenvolvimento de procedimentos e atitudes.

Ainda, pesquisas atuais apontam a importância de o aluno ser o protagonista do próprio saber. Ou seja, o professor precisa aguçar a linha de raciocínio dos estudantes, com contraexemplos, perguntas ou sugestões, para que o aluno perceba o erro. Estará contribuindo, desse modo, para a formação de um estudante investigador, questionador e reflexivo, ou seja, que assume o papel de protagonista do seu próprio conhecimento (GUIMARÃES, 2019; FERNANDES; ALVES; ARAÚJO, 2019).

Procedimentos Metodológicos e Atividades Propostas

Contexto da pesquisa

A pesquisa ocorreu nos meses de novembro e dezembro de 2019, em uma Escola Municipal localizada no interior do Rio Grande do Sul, em que o primeiro autor atua como docente. A sequência didática foi proposta a uma turma de sétimo ano, que possuía 26 alunos.

Para o primeiro momento, a turma trabalhou de forma individual e, posteriormente, em grupos de no máximo 4 alunos, escolhidos pelos próprios estudantes. Não oferecemos a possibilidade de fazer as atividades propostas de forma individual, pois compreendemos que o trabalho em grupo permite o surgimento de reflexões, o embate de ideias e a formulação de hipóteses que aparecem somente quando os estudantes trabalham de forma livre entre eles.

Para fins de identificação e com o intuito de preservar a identidade dos alunos, eles serão identificados por letras do alfabeto (A, B, C, ...) e os grupos por números (1, 2, 3, ...).

Atividades Propostas

O processo de ensino e aprendizagem está sempre em evolução, com isso, o professor entende que seu planejamento nunca está estanque, mas em evolução contínua. Assim, as atividades que compõem a sequência proposta foram pensadas de forma a centralizar o processo na participação dos alunos. Nesse sentido, todas as atividades possuem um momento introdutório, seguido de um diálogo com a turma.

A sequência é composta por quatro atividades e teve duração de seis períodos de cinquenta minutos, iniciando com uma proposta de familiarização ao tema fluxogramas, intitulada de Atividade Zero. Nessa atividade, planejada para execução em um período de aula, o objetivo foi apresentar aos estudantes o tema em questão, assim como balizar a execução das atividades seguintes.

O trabalho teve continuidade com uma atividade prática, também planejada para um período de aula. A denominamos de Atividade Um, em que os grupos de alunos manipularam o material concreto (palitos previamente cortados em tamanhos distintos) com o objetivo de construir triângulos. Esse momento foi destinado à observação dos critérios utilizados pelos alunos e seus posicionamentos perante uma dificuldade, fato que, incentivado pelo professor, oportunizou conjecturas e hipóteses.

A terceira atividade indicada na sequência apresentada aos alunos, a qual intitulamos Atividade Dois, versou sobre uma proposta de construção via régua e compasso, tendo duração de um período de aula. Essa atividade teve por objetivo aferir o conhecimento prévio dos alunos sobre o uso dos referidos instrumentos de desenho.

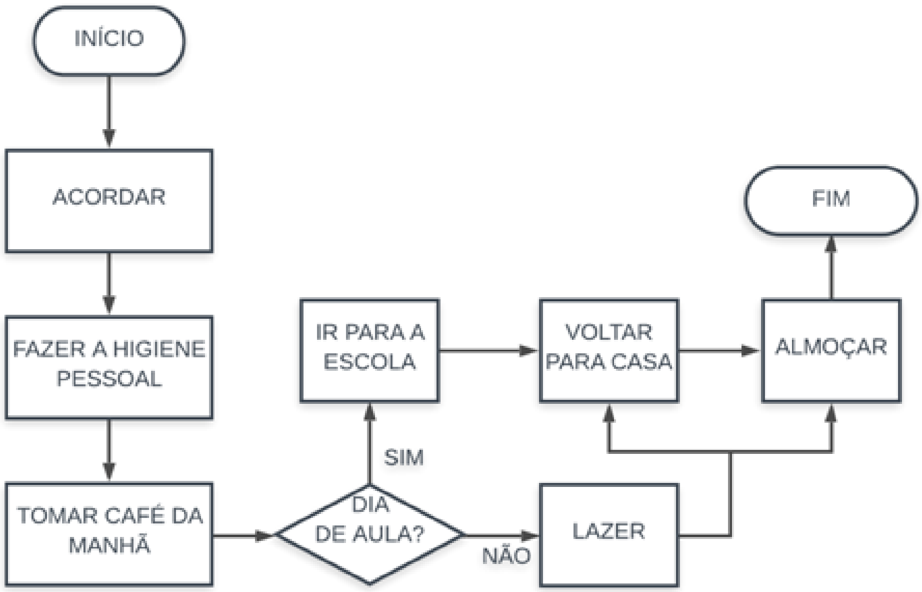
A Atividade Três consistiu na escrita de um fluxograma contendo uma definição formal sobre a condição de existência de um triângulo. Assim, finalizamos a sequência didática, conectando todas as atividades anteriores, com um fechamento lógico, de tal forma que os alunos percebam a evolução e o entrelaçamento que conceitos matemáticos sofreram no processo.

Relato da experiência

A Atividade Zero teve como objetivo apresentar aos alunos um exemplo de fluxograma, para que se familiarizassem com a escrita e a configuração deste. Entendemos tal atividade necessária, pelo fato de que muitos alunos não conheciam fluxogramas, nem fizeram uso deles. A tarefa consistia na elaboração de um fluxograma versando sobre alguma atividade do interesse de cada aluno. Esse trabalho foi realizado de forma individual, visto que cada estudante possui sua área de interesse.

Essa atividade teve dois momentos distintos. O primeiro momento foi conduzido pelo professor, quando ele apresentou um fluxograma e pontuou as características e significados dos símbolos específicos que este apresenta. Por exemplo, o retângulo (processo), que indica um determinado procedimento e suas funções e atividades; ou um losango (decisão), que mostra que uma escolha terá de ser feita e que o fluxo do processo seguirá determinada direção em função desta, entre outros. A Figura 1 ilustra o fluxograma apresentado à turma.

Figura 1. Exemplo de fluxograma apresentado aos alunos na Atividade Zero



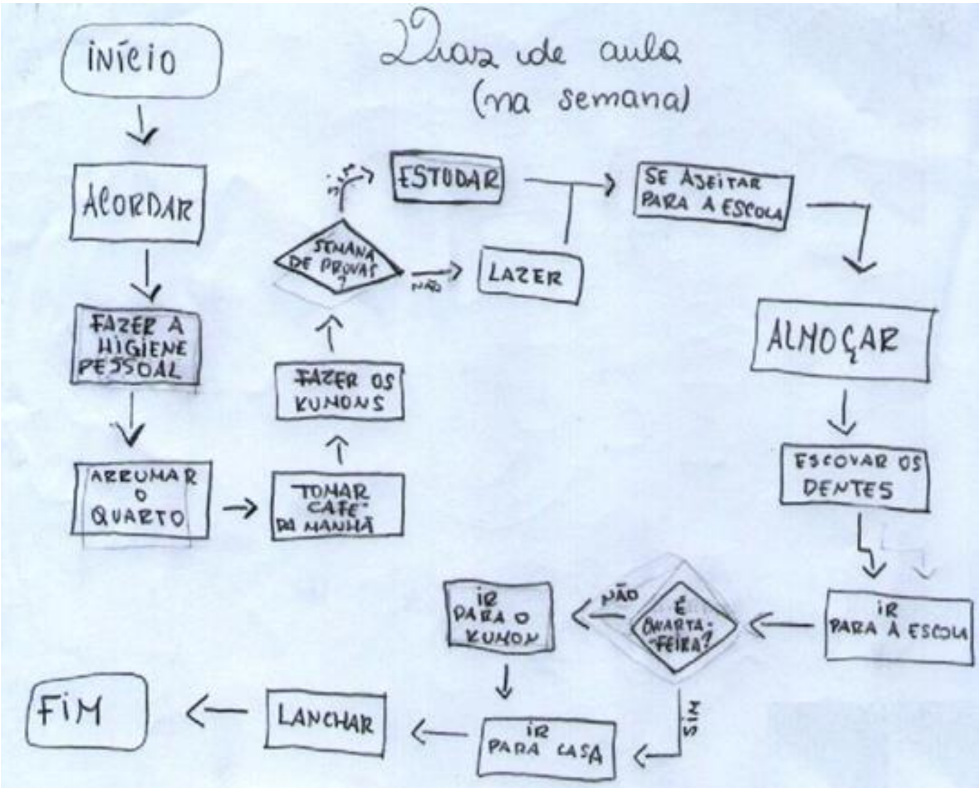
Fonte: Os autores.

Após finalizado o primeiro momento, os alunos foram desafiados a produzir o seu próprio fluxograma. O resultado da atividade foi entregue na aula posterior.

Ao lermos os fluxogramas entregues, percebemos que, de maneira geral, os alunos compreenderam a explicação realizada e como o exemplo visto em aula foi relevante na execução das tarefas. Todos os alunos elaboraram um fluxograma semanal, incluindo detalhes e decisões tomadas durante a sua produção.

A Figura 2 ilustra o fluxograma do aluno G, o qual construiu um fluxograma semanal, pontuando as questões mais relevantes do seu dia a dia.

Figura 2. Exemplo de fluxograma apresentado pelo aluno G



Fonte: Dados da pesquisa

Observamos que o aluno expôs decisões como, por exemplo, se a semana tinha ou não alguma prova, ou o fato de ser quarta-feira, dia em que o aluno G possui uma atividade no Kumon logo após o término da aula. Percebe-se, ainda, o cuidado que esse aluno tomou quando nos referimos à centralização das setas e às formas geométricas presentes no seu fluxograma, aspecto observado pelo padrão dos retângulos e pelo desenho dos losangos, tendo em vista as marcas de borracha deixadas no papel.

Na sequência do trabalho, foi realizada a Atividade 1. Essa tarefa consistiu em distribuir um conjunto de 9 ou doze palitos de picolé de diferentes medidas (comprimento) aos grupos, de acordo com a quantia de alunos em cada um, para montarem triângulos.

ISSN 2525-7056

Nosso objetivo com essa atividade foi que os estudantes percebessem que em determinadas configurações de três palitos não é possível formar um triângulo.

Ao receber o conjunto de palitos, os alunos, rapidamente, construíam seus triângulos, conforme o planejado. Diante de uma configuração não adequada, faziam o remanejamento necessário para a utilização de todos os palitos, como ilustra a Figura 3.

Figura 3. Alunos durante a montagem dos triângulos com material concreto

Fonte: Dados da pesquisa

Observamos que a percepção das adequações necessárias para construir o triângulo foi facilitada pelo uso de material concreto e pela possibilidade de discussão entre os alunos de cada grupo. Por uma questão de organização da turma, para que todos tivessem a oportunidade de participar, os grupos fizeram seus levantamentos e elaboraram suas justificativas separadamente. Quatro grupos justificaram a construção dos triângulos com o argumento de que possuíam um palito muito grande e dois palitos muito pequenos. Já o grupo que fez maior número de tentativas, apenas acreditava que não havia achado o modo certo de colocar os palitos, mas que talvez existisse um. Observamos que, nesse grupo, a soma das medidas de dois palitos era muito próxima da medida do terceiro palito.

Na aula seguinte, realizamos a Atividade 2, de forma individual, mas os alunos ainda dispostos em grupos. Para essa aula, foi solicitado que trouxessem régua, compasso ou um pedaço de cordão, além de uma folha branca sem pauta. Para dar início ao primeiro momento, foi discutido com os alunos sobre o conhecimento prévio que possuíam a respeito do uso de régua e de compasso.

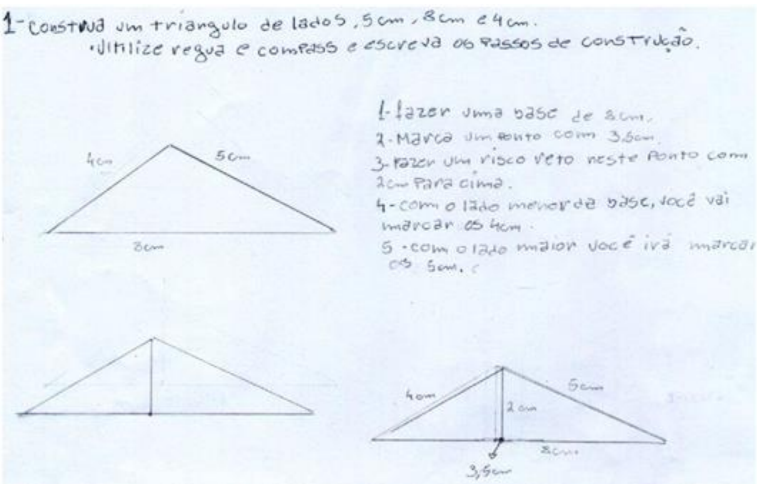
Após conversar com os discentes sobre a notação de segmento de reta, convencionamos designá-lo por $\overline{AB}$, pois seus pontos extremos eram A e B. Denominamos a reta suporte de *r*. Após esse momento, mostramos aos estudantes como realizar o transporte do segmento, bem como que esse processo poderia ser feito seguindo uma sequência de passos. Após realizar as construções, demos continuidade à atividade inicial e propusemos aos alunos que desenhassem um triângulo de medidas 4 cm, 5 cm e 8 cm. Percebemos que alguns desenharam o triângulo utilizando apenas a régua, por tentativa e erro, sendo que, em algum momento, os vértices se encontrariam e as medidas dos lados seriam as solicitadas inicialmente.

Ao finalizar a construção dos triângulos, foi dada continuidade ao segundo momento, no qual os alunos deveriam descrever os passos de construção utilizados.

Nesse momento, percebemos como um pequeno grupo pode influenciar no desenvolvimento individual de cada aluno, tanto de forma positiva quanto negativa, diante de dúvidas pertinentes ao problema proposto.

Concluída a fase descrita acima, foi oportunizado um momento em que os estudantes puderam perceber como a descrição realizada por eles foi interpretada por outras pessoas. Para isso, foi solicitado para um aluno voluntário (aluno G) ir ao quadro e fazer uma construção, conforme a leitura de uma sequência de passos descritos por outro estudante (aluno L), como ilustra a Figura 4.

Figura 4. Alunos durante a montagem dos triângulos com material concreto

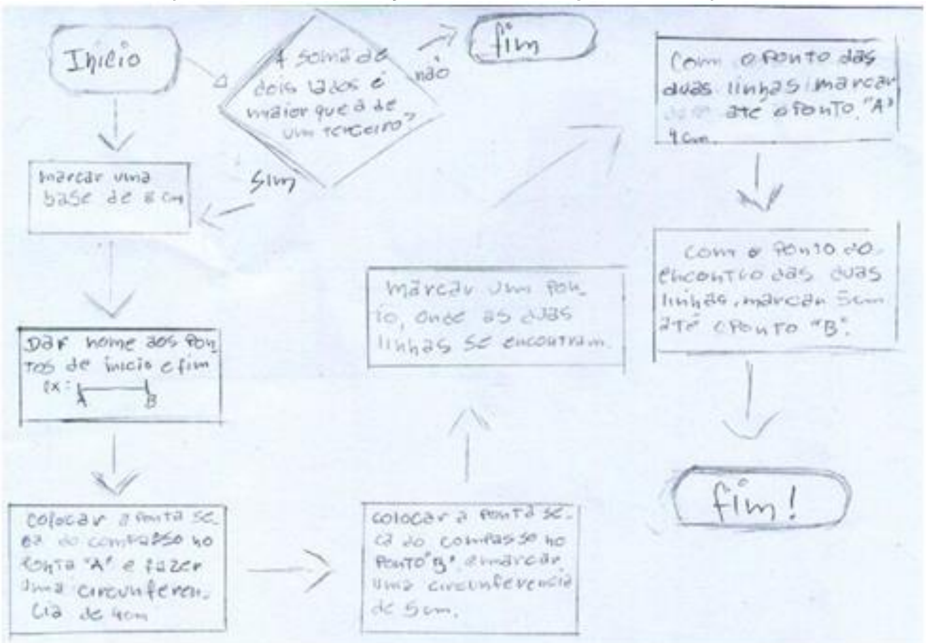


Fonte: Dados da pesquisa

Esse momento foi de extrema importância para os estudantes, pois, quando o professor leu os passos descritos pelo aluno L, o aluno G, de imediato, manifestou que não entendeu o que era para fazer. Depois da discussão com toda a turma, os alunos perceberam como uma descrição que parece muito clara e coerente, quando lida por outros, pode ser confusa e incoerente, chegando a resultados distintos do que o imaginado. Ou seja, expressar de forma clara, com palavras escritas corretamente, o que se está pensando é fundamental para que outros entendam.

Assim, com base em uma notação via fluxogramas, foi solicitado aos alunos que reescrevessem os passos da construção, mas agora, seguindo as observações vistas anteriormente, como ilustra a Figura 5.

Figura 5. Reescrita dos passos de construção de um triângulo, feitos pelo aluno L, via fluxograma



Fonte: Dados da pesquisa

Ao observarmos o fluxograma criado pelo aluno L (Figura 5), fica evidente a diferença de escrita e de organização de raciocínio. Nesse exemplo, conseguimos perceber como os questionamentos e as discussões realizadas em grupo foram positivas na continuidade e no aprimoramento do trabalho realizado. Nessa etapa, os alunos conseguiram perceber a evolução nos seus trabalhos.

Após a finalização da segunda atividade, seguimos com a leitura dos fluxogramas construídos pelos alunos, com o objetivo de realizar outras construções de triângulos, dada a medida de três segmentos.

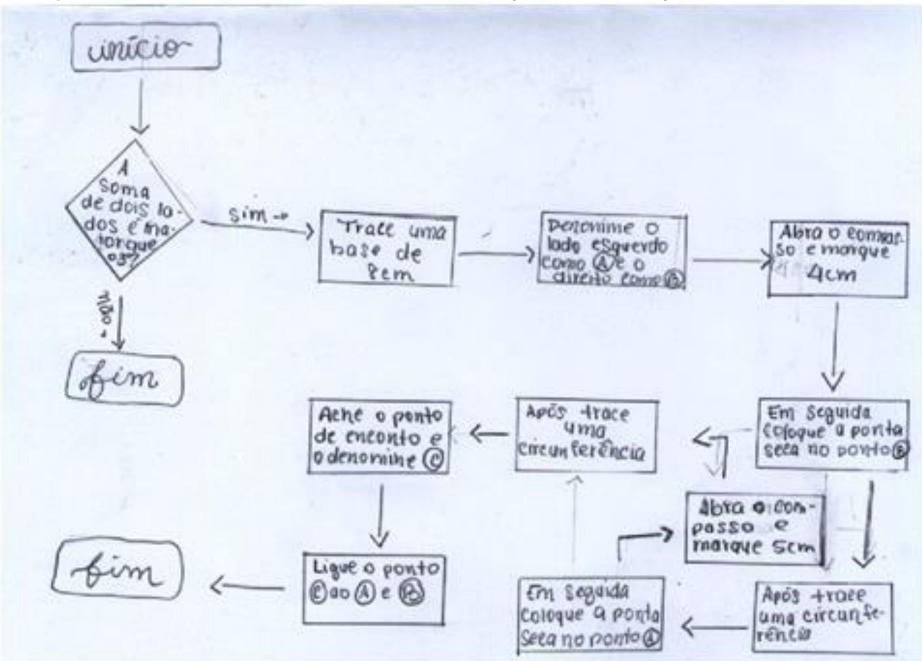
Para finalizar a proposta, foi realizada a Atividade 3, também de forma individual. Nessa etapa, foram dadas as medidas de três segmentos que não possibilitavam a construção de um triângulo. Observamos que alguns alunos começavam a construção e

ISSN 2525-7056

percebiam que não seria possível a finalização de todos os passos do fluxograma. Assim, alguns deles lembraram da atividade feita com os palitos, conectando as duas atividades, de forma a realizar o fechamento sobre o fato estudado, ou seja, uma formalização sobre a condição de existência de um triângulo, dada a medida de três segmentos.

Os alunos adicionaram essa condição ao fluxograma já construído, que passou a obter a decisão: a soma de dois lados é maior que a do terceiro lado? Se sim, seguem-se os passos de construção; se não, as medidas dadas não formam um triângulo. Observamos, no fluxograma do aluno B, como ilustra a Figura 6, a inserção da condição de existência, bem como um cuidado na notação dos pontos referentes aos vértices do triângulo e aos componentes do compasso.

Figura 6. Fluxograma final do aluno B, com a observação da condição de existência de um triângulo



Fonte: Dados da pesquisa

Ressaltamos, ainda, que os fluxogramas possuem notações não usuais ao desenho geométrico, fato que, em termos de rigor matemático, são relevantes, de modo que devem ser trabalhados com mais afinco durante a realização das atividades. Porém, com relação à execução do trabalho e à apreensão dos conceitos tratados nessa sequência, tornam-se coadjuvantes, tendo em vista o resultado final.

Considerações Finais

O objetivo principal deste trabalho foi apresentar o relato de uma investigação realizada ao aplicarmos uma sequência didática que versa sobre a condição de existência de um triângulo, com enfoque em fluxogramas. As atividades foram planejadas tendo o aluno como protagonista e o professor como incentivador nas tomadas de decisões.

Como os alunos não possuíam conhecimento prévio sobre fluxogramas, os exemplos e discussões foram fundamentais para despertar a curiosidade sobre o assunto, familiarizando-os com as notações básicas utilizadas. Nesse ponto, acreditamos que o professor, conhecendo sua turma, tenha liberdade para acrescentar mais exemplos e para modificar a atividade, de modo que ela se torne mais atrativa à sua turma.

O uso de fluxogramas se mostrou de fácil entendimento aos alunos, portanto, acreditamos ser um bom recurso na elaboração de esquemas e de resumos em atividades que necessitem uma ordem de execução. Conforme indicado pela BNCC e exposto neste trabalho, o uso de fluxogramas deve ser incentivado em diferentes contextos e anos escolares, de forma que, no decorrer da Educação Básica, o aluno sempre esteja em contato com essa possibilidade de notação em diferentes níveis de aprofundamento.

A proposta com material concreto foi bem desenvolvida e percebemos o quanto os alunos gostam de atividades de manipulação. Entendemos que esse tipo de atividade deva ser mais utilizado por nós professores, bem como que a proposta descrita neste estudo possa servir de motivação para atividades futuras. É possível considerá-la, inclusive, para a introdução de novos conteúdos, já que desperta a curiosidade e permite aos alunos serem os protagonistas na construção dos saberes.

Com a continuidade das propostas, percebemos, ainda, o incentivo no diálogo e na defesa de opinião que as atividades propiciaram, questão que acreditamos ser fundamental no desenvolvimento dos estudantes. Cumpre salientar que, mesmo sabendo o método, eles demonstram dificuldade em expor ideias e defender argumentos.

Consideramos que o uso do material concreto foi decisivo na compreensão da condição de existência de um triângulo, conhecida a medida de três segmentos, enquanto o uso do fluxograma demonstrou-se uma opção viável no processo de ensinar e aprender o tema trabalhado.

Referências

ANDRADE, C. C. de. **O ensino da Matemática para o cotidiano**. 2013. 48f. Monografia (Especialização em Educação: Métodos e Técnicas de Ensino). Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Medianeira, 2013. Disponível em: http://riut.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/20861/2/MD_EDUMTE_2014_2_17.pdf

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental**. Brasília: MEC / SEF, p. 148, 1998.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

FERNANDES, C; ALVES, F. R. V; ARAÚJO, M. J. Contribuições da resolução de problemas para a formação de professores de matemática através da engenharia didática. **Research, Society and Development**, v. 8, n. 10, p. 1-16, 2019.

FONSECA, M. C. R, LOPES, M. P; BARBOSA, M. D. G. G; GOMES, M. L. M; DAYRELL, M. M. M. S. **O ensino de Geometria na Escola Fundamental: três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais**. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

GUIMARÃES, G. G. Novas tendências de aprendizagem em engenharia: o aluno como protagonista na produção do conteúdo curricular na disciplina de cálculo diferencial e integral. **Revista de Ensino de Engenharia**, v. 38, n. 1, p.81-91, 2019.

NOTAS

IDENTIFICAÇÃO DO TEXTO
O presente texto é um recorte de Condição de existência de um triângulo: uma abordagem via fluxogramas, dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat) apresentado na Universidade Federal de Santa Maria, em 27/02/2020, elaborada sob orientação do Professora Dra Carmen Vieira Mathias

IDENTIFICAÇÃO DE AUTORIA
Juliano da Cunha da Silva. Mestre em Matemática. Professor da Rede Municipal de Ensino Santa Maria, RS, Brasil.
E-mail: julianosilvacunha@hotmail.com
https://orcid.org/ 0000-0003-1527-5675

Carmen Vieira Mathias. Doutora em Matemática pela Universidade Federal de Rio Grande do Sul (UFRGS). Professora Associada da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), Santa Maria, RS, Brasil
E-mail: carmen@ufsm.br
https://orcid.org/0000-0001-5667-159X

AGRADECIMENTOS
Não se aplica.

FINANCIAMENTO
Não se aplica.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Não se aplica.

EDITORES
Patricia Helena Mirandola Garcia, Eugenia Brunilda Opazo Uribe, Gerson dos Santos Farias.

HISTÓRICO
Recebido em: 31/08/2021 – Aprovado em: 19/10/2021 – Publicado em: 15/12/2021.

COMO CITAR
SILVA, J. C; MATHIAS, C. V. Condição de Existência de um Triângulo via Fluxograma: Um Relato de Experiência. **Revista ENSIN@ UFMS**, Três Lagoas, v. 2, número especial, p. 299-312. 2021.

SOMA 15: O JOGO DA ESCOPA UTILIZADO COMO FERRAMENTA PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA

SUM 15: THE SCOPE GAME USED AS A TOOL FOR TEACHING MATHEMATICS

Luís Fernando Alcântara de Falqui[1]

Fernando Pereira de Souza[2]

RESUMO: Este artigo discorre sobre um relato de experiência a respeito da utilização de um jogo de cartas, a escopa, enquanto instrumento de ensino de matemática, em sala de aula. Buscamos uma abordagem atrativa e de fácil absorção, despertando curiosidades e construindo pensamentos estratégicos intuitivos, de modo individual ou em grupos, trabalhamos alguns conceitos matemáticos, entre eles: raciocínio lógico, contagem e operações aritméticas básicas. Além de registrarmos a criatividade dos alunos, atuamos na comunicação entre os jogadores (em duplas), na observação de possibilidades e tomada de decisões e nas estratégias para o desenvolvimento do jogo, de forma lúdica e divertida através da gamificação. Ademais, procuramos variar e ampliar a utilização do material didático, nas aulas expositivas, na resolução de exercícios, como mais uma ferramenta para a aprendizagem, e assim, tentamos motivar alunos e professores, tornando o estudo dessa parte da Matemática mais dinâmica, significativa e prazerosa.

PALAVRAS-CHAVE: Ensino de Matemática; Cálculo Mental; Raciocínio Lógico; Contagem; Escopa.

ABSTRACT: This article discusses an experience report on the use of a card game, the scope, as an instrument for teaching mathematics in the classroom. We seek an attractive and easy-to-absorb approach, arousing curiosity and building intuitive strategic thoughts, individually or in groups, we work with some mathematical concepts, including: logical reasoning, counting and basic arithmetic operations. In addition to recording the creativity of students, we work in communication between players (in pairs), in the observation of possibilities and decision-making and in strategies for the development of the game, in a playful and fun way through gamification. Furthermore, we seek to vary and expand the use of teaching material, in lectures, in solving exercises, as another tool for learning, and thus, we try to motivate students and teachers, making the study of this part of Mathematics more dynamic, meaningful and pleasurable.

KEYWORDS: Mathematics Teaching; Mental Calculus; Logical reasoning; Score; Scope.

Introdução

Inspirados pelas dificuldades na compreensão de conceitos e no desenvolvimento/aprimoramento de habilidades inerentes à disciplina de matemática, constantemente exigidos em grandes concursos, desenvolvemos tal experiência afim de contribuir para a diminuição de tais obstáculos, buscando maior integração entre os alunos,

[1] Pesquisador autônomo. E-mail: lffalqui@hotmail.com.br
https://orcid.org/0000-0001-7304-7377
[2] Universidade Federal do Mato Grosso do Sul. fernando.pereira@ufms.br
https://orcid.org/0000-0001-6441-0103

● Informações completas da obra no final do artigo

entre alunos e professor, entre alunos e a Matemática, aspirando a redução no receio dos estudantes em investigar sobre suas dúvidas em relação a algum conceito ou habilidade desta disciplina, viabilizando uma aula mais dinâmica e aprazível, por meio da prática de um jogo de cartas. Possibilitar a compreensão de conteúdos matemáticos como contagem, raciocínio lógico e operações aritméticas básicas, para alunos do Ensino Médio e curso preparatório para vestibular, foi nossa motivação.

Pesquisadores da área de Ensino, dentre os quais destacamos Marcos Aurélio Cabral, em "A utilização de jogos no ensino de matemática", Regina Célia Grando, em "O Jogo suas possibilidades metodológicas no processo ensino-aprendizagem da matemática", Willians Freire Pires, em "O jogo de escopa adaptado para o uso em sala de aula", compartilham uma mesma conclusão sobre as abstrações encontradas na matemática e no ser humano. Segundo eles é necessário estimular os estudantes a apreciar e valorizar os conceitos que lhes serão transmitidos, contribuindo para a compreensão e desenvolvimento desses. Com base nisso, recorremos à utilização de jogos no ensino desta disciplina, com a intenção de trazer maior sentido e interesse para a aprendizagem de alguns tópicos, mediante a recreação, a interpretação e respeito às regras, a competição e o raciocínio que permeiam os jogos.

Em sua dissertação, Regina Célia Grando apresenta algumas respostas referentes à questão "Para você, o que é jogo?", dadas por professores de Matemática da Prefeitura de Campinas – SP e por alunos do curso de pedagogia da PUCCAMP – Campinas, corroborando com nosso entendimento descrito anteriormente:

> Ao perguntarmos para várias pessoas sobre o que elas acreditam que sejam JOGOS, é muito comum ouvirmos respostas do tipo: "lazer, brincadeira, brincadeira regrada, desafio, divertimento emocionante, desenvolvimento do raciocínio, disputa, competição, divertimento que exige do jogador determinadas habilidades, passatempo, recreação, atividade que pode ser individual ou em grupo, atividade que tem regras pré-estabelecidas, atividade dotada de algum sentido lúdico..." (GRANDO, 1995, p. 46).

Entre os benefícios do uso de jogos no processo de ensino da matemática, podemos citar a aprendizagem de conceitos matemáticos, a obtenção de ganhos individuais em relação à tomada de atitude e resolução de problemas, que são fundamentais para o crescimento e formação de alunos críticos e lúcidos. Acordando com tais relações, citamos Marco Aurélio Cabral:

> A pretensão da maioria dos professores, com a sua utilização, é a de tornar as aulas mais agradáveis com o intuito de fazer com que a aprendizagem torne-se algo fascinante. Além disso, as atividades lúdicas podem ser consideradas como uma estratégia que estimula o raciocínio levando o aluno a enfrentar situações conflitantes relacionadas com seu cotidiano e, também, a utilização dos jogos vem confirmar o valor formativo da matemática, não no sentido apenas de auxiliar na estruturação do pensamento e do raciocínio dedutivo, mas, também, de auxiliar na aquisição de atitudes (CABRAL, 2006, p. 19).

Ampliando o contexto da utilização dos jogos no ensino da matemática para o âmbito psicológico, tanto na área da psicomotricidade quanto na área afetivo-social, apontamos sua relação direta com a construção da inteligência, ressaltando o prazer, a motivação, a formação de valores como respeito e honestidade, de acordo com Piaget. Mencionamos, a seguir, Pacagnam e Nishihara, destacando essas concepções piagetianas, salientando que, em um jogo, existe vencedor e vencido:

> Jogos práticos são aqueles que as crianças fazem explorações sensórias-motores, jogos simbólicos, aos poucos as crianças vão adquirindo a imitação, o faz de conta e os jogos de regras que são utilizados até a fase adulta, sendo necessário que a criança aprenda o significado e a importância das regras para então poder relacioná-las com as regras que utilizamos em nosso convívio social (PACAGNAM, 2013, p. 20).
>
> Os jogos podem ser utilizados para fins educacionais para transmitir o sentido de respeito às regras e a mensagem de que numa disputa entre adversários haverá sempre um que perde e outro que ganha (NISHIHARA, 2016, p. 2).

O baralho de cartas padrão é um manipulador de baixo custo, facilmente encontrado em todas as partes mundo, e com bom potencial para ser utilizado por professores e alunos, sendo capaz de amplificar a modelagem, a motivação e o ensino de habilidades e técnicas no raciocínio lógico, resolução de problemas, noções de conjuntos, estatística elementar, teoria dos jogos, matemática para negócios e probabilidade elementar. Tudo isso é possível através de atividades interativas focadas no conteúdo proposto, apresentando uma abordagem alternativa para alunos desencantados com o currículo tradicional proposto para a Matemática. Ressaltamos que o uso de jogos não deve substituir a apresentação teórica dos conceitos, mas sim, vir como uma alternativa para atrair e aguçar os estudantes.

Expomos, também, nossa preocupação em utilizar o baralho de forma simples e natural, de modo que não houvesse conflito com pais de alunos ou responsáveis, esclarecendo sobre a sua relevância, no aprendizado dos temas a serem abordados. Pires também traz esse receio em seu trabalho, atentando para o preconceito que pode estar embutido na utilização das cartas, no ambiente escolar:

> Embora os jogos de cartas tenham uma grande intimidade com a Matemática, no ambiente escolar, a prática desse tipo de jogo ainda é um tabu. Sendo assim, a proposta é fazer uma adaptação estética e, principalmente, das regras do jogo, de modo a deixá-lo atraente e capaz de cumprir um papel pedagógico (PIRES, 2016, p.23).

Decidimos pela utilização de um jogo acessível, tanto em relação à sua compreensão quanto ao seu desenvolvimento. Seu principal objetivo é combinar uma ou mais das cartas sobre a mesa com uma daquelas que o jogador possui em suas mãos, obtendo soma igual a 15, possibilitando, assim, o trabalhar das operações básicas mentalmente, o raciocínio lógico e a contagem, na associação de parcelas, com propósito do jogo seguir favoravelmente a cada jogador, acordando com suas devidas táticas e técnicas, que podem promover ganhos educacionais, pensando nas resoluções de exercícios que certamente exigirão certas habilidades desses alunos. Citamos Pires novamente, com uma apresentação sucinta do jogo escopa e sua origem:

> A escopa ou escopa de 15 é um tradicional jogo de cartas de baralho trazido ao Brasil pelos imigrantes italianos. O nome escopa vem da palavra scopa que, em italiano, significa vassoura. Pode ser jogado entre duas, três ou quatro pessoas, nesse caso, em parceria, e utiliza-se do Baralho Espanhol (PIRES, 2016, p.22).

O jogo

No jogo escopa, é utilizado um baralho com quarenta cartas (denominado baralho espanhol), sendo dez cartas de cada naipe:

- Cartas: A (ÁS), DOIS, TRES QUATRO, CINCO, SEIS, SETE, Q (DAMA), J (VALETE), K (REI);
- Naipes: ouros, espadas, copas e paus.

As cartas que não apresentam valores numéricos em suas imagens, nomeadas figuras do baralho, têm os seguintes valores: ÁS vale um (1), Q vale oito (8), J vale nove (9) e K vale dez (10). Segue também que as cartas de ouro (símbolo) têm maior importância, especialmente, A, SETE, Q e K, chamados “belos” (Figura 1). As cartas de número SETE dos demais naipes também têm sua importância. Tais valores serão apresentados a posteriori.

Figura 1. Os belos

Fonte: Autor

A essência do jogo consiste em somar 15 pontos em cada jogada, e, caso isso seja feito com o recolhimento de todas as cartas da mesa, combinadas com uma do próprio jogador, é feita uma escopa. Cada partida pode ser jogada individualmente, um contra um, ou com três jogadores distintos se enfrentando. Também pode se desenvolver com o enfrentamento em duplas, alternando os jogadores das duplas a cada jogada, seguindo os padrões citados a seguir.

Inicia-se uma partida com um dos jogadores entregando três cartas para cada um dos demais e, abrindo outras quatro sobre a mesa. Esse jogador, escolhido por sorteio ou acordo entre os participantes, é denominado “pé do baralho”. As cartas são distribuídas com uma condição: a primeira carta deve ser entregue, necessariamente, ao jogador à direita do “pé”, esse é chamado “mão do baralho”. As demais cartas são entregues de acordo com o desejo do embaralhador, respeitando as quantidades anteriormente mencionadas.

Cada jogador utiliza apenas uma de suas cartas por vez. Com isso, em cada rodada os jogadores descartam três cartas, iniciando-a sempre pelo “mão” e terminando-a pelo “pé”. Após as primeiras três cartas de cada jogador serem jogadas, o “pé” volta a distribuir mais três cartas para cada jogador, até que elas acabem.

Assim, a rodada tem início. Se o “mão” combinar uma de suas cartas com alguma(s) outra(s) da mesa, somando 15, recolhe-as e começa a formar seu monte de cartas para que, ao final das rodadas sejam contados e somados seus pontos, caso não consiga somar

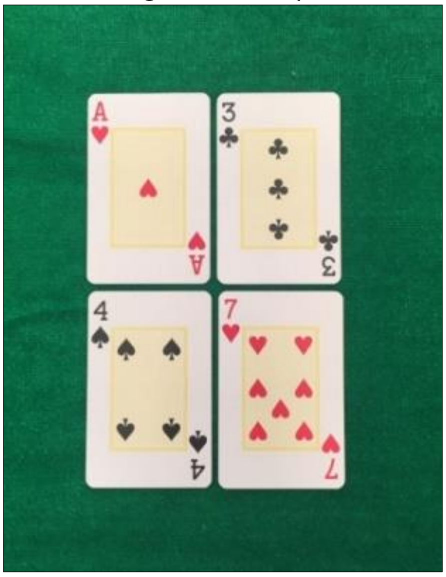
15, ele deve descartar uma de suas cartas sobre a mesa para que o próximo jogador faça sua jogada. Analogamente, sempre em sentido anti-horário, cada jogador faz o mesmo.

Voltamos a citar Pires, que evidencia algumas jogadas em seu estudo, detalhando as combinações de algumas cartas para somar 15, propósito fundamental do jogo.

> Por exemplo: na mesa estão os números 5, 3, 7, 6. Se o jogador tiver o número 8, poderá juntar com o número 7 (8 + 7 = 15) e formar seu monte. Se o jogador tiver o número 1 poderá juntar com os números 5, 3 e 6 (1 + 5 + 3 + 6 = 15) e formar seu monte. Se o jogador tiver o número 9, poderá juntar com todas as cartas da mesa e formar seu monte (9 + 5 + 3 + 7 + 6 = 30) (PIRES, 2016, p.25).

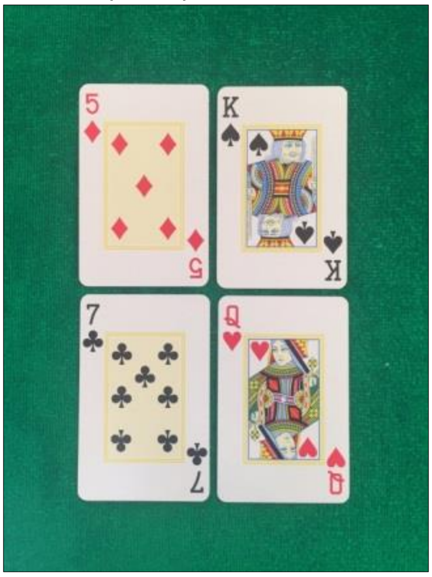
Eventualmente, ao virar as quatro cartas sobre a mesa, o “pé” pode obter soma 15. Por exemplo: ao virar um às, um três, um quatro e um sete, a soma dessas é igual a 15 (Figura 2). Neste caso, ele recolhe as cartas para si e anota uma escopa. Dando continuidade ao jogo, o “mão” descartando uma de suas cartas, já que não poderá recolher nenhuma. Na virada inicial do “pé”, existe uma única possibilidade de se fazer duas escopas, que é obter dois pares, cada um deles somando 15. Por exemplo: ao virar um CINCO, um K, um SETE e um Q, já que, CINCO mais K é igual a 15, SETE mais Q, também (Figura 3).

Figura 2. Escopa



Fonte: Autor

Figura 3. Par de escopas a partir da virada efetuada pelo "pé"



Fonte: Autor

Cada escopa (somar 15 pontos recolhendo todas as cartas da mesa, como já citado anteriormente) vale um ponto. Além disso, existem sete pontos fixos, chamados "pontos do baralho":

I. Cada belo vale um ponto. Seguem 4 pontos no total;
II. O jogador ou dupla que tiver maior número de cartas SETE, ganha um ponto. Em caso de empate, ninguém pontua;
III. O jogador ou dupla que tiver maior número de cartas de ouro, ganha um ponto. Em caso de empate, ninguém pontua;
IV. O jogador ou dupla que tiver maior número de cartas totais, ganha um ponto. Em caso de empate, ninguém pontua.

Despercebido, um jogador descarta uma carta que, combinada com outra(s) somava 15. Percebendo o equívoco, o próximo jogador pode recolher as cartas para si antes de realizar sua jogada. A última rodada se dá com uma escopa, ou remanescerão cartas sobre a mesa. A soma dos valores de tais cartas são, obrigatoriamente, $10, 25, 40$ ou 55 pontos, acordando as cartas excedentes com a divisibilidade por 15 da soma total dos pontos com os valores das cartas, que é igual a 220 $[(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10)\cdot 4 = 220]$. Decorrendo a soma de tais cartas com valor diferente destes, algum jogador cometeu erro na sua recolhida. Encontrada a infração, uma penalidade, previamente discutida e aderida por todos, deve ser dada ao jogador ou dupla que a cometeu.

O fim do jogo se dá quando um dos jogadores ou dupla obtêm 15 pontos, independentemente da quantidade de rodadas. Como esta pontuação é variável, deve ser decidida de antemão. Alguns preferem que o jogo vá até 21, 25, 31 pontos. A única semelhança é que o final vem com uma quantidade ímpar de pontos, reduzindo a possibilidades de empates com uma quantidade par de pontos.

A Matemática em jogo

Retomando as ideias inicialmente tratadas, salientamos a utilização do jogo de cartas, em especial a escopa, como base para o desenvolvimento deste estudo, por todo o contexto favorável que a gamificação traz para a educação, sobretudo em conteúdos e habilidades matemáticas, dentre estes: raciocínio lógico, operações básicas e cálculos mentais, números naturais e inteiros, contagem, análise combinatória, e probabilidade. Grando também discorre sobre este ponto:

> Quando se propõe a utilização de jogos no contexto educacional de ensino-aprendizagem, muitas são as finalidades que se quer atingir. Entre elas, destacam-se: a fixação de conceitos, a motivação, a construção de conceitos, aprender a trabalhar em grupo, propiciando solidariedade entre os alunos, estimular a raciocinar, desenvolver o senso crítico, a disposição para aprender e descobrir coisas novas, além do desenvolvimento da cidadania (GRANDO, 1995, p. 86).

Apresentamos a seguir, alguns exemplos que foram trabalhados devido à abordagem feita por parte dos alunos no decorrer dos jogos, ou por pensamento prévio para a adequação da introdução de algum conceito específico, o qual será mencionado previamente, de modo prático e visual, familiarizando as cartas com esses tópicos da Matemática.

O raciocínio lógico é essencial para a resolução de problemas, o que pode significar um trampolim para o sucesso acadêmico, profissional e até mesmo pessoal. Instigar o desenvolvimento do raciocínio lógico nos alunos ajuda a melhorar as suas habilidades com as operações básicas e os cálculos mentais, resultando em níveis mais altos de atividade cognitiva e numa maior capacidade de resolver problemas. A escopa estimula o raciocínio lógico a cada cartear, como mostra o exemplo aplicado em sala de aula.

Exemplo 1: Na mesa há um QUATRO e um OITO, e o jogador possui em suas mãos as cartas ÁS E NOVE. O que será mais vantajoso nesta situação?

Podemos observar que, ao jogar a carta ÁS, se facilita a possibilidade do próximo jogador, no caso um oponente, efetuar uma escopa, pois as cartas que ficarão na mesa terão soma menor que quinze $(4 + 8 + 1 = 13)$. Ou seja, uma posterior carta DOIS $(4 + 8 + 1 + 2 = 15)$, garante a recolhida de todas as cartas. Agora, se é jogada a carta NOVE, a soma supera quinze $(4 + 8 + 9 = 21)$, impossibilitando a feitura de uma escopa na próxima jogada.

Exemplo 2: Tendo em mãos um TRÊS e um CINCO, qual dessas cartas eu devo jogar, havendo um DOIS e um K na mesa?

Ponderando as possibilidades, consideramos que jogar o TRÊS é a melhor escolha, já que, com esse movimento, uma escopa será feita, pois a soma dessas três cartas resulta quinze $(2 + 10 + 3 = 15)$. Com a carta CINCO, o jogador em questão recolhe apenas a carta K $(5 + 10 = 15)$, deixando a carta DOIS na mesa, e não efetua a escopa, o que é bastante significativo no jogo.

A importância das habilidades e estratégias utilizadas na realização de cálculos mentais e suas estratégias é inegável, considerando sua utilidade na vida cotidiana em comparação com alguns dos algoritmos escritos. Além disso, a prática desses cálculos contribui para o desenvolvimento de vários conceitos e habilidades matemáticas, como senso numérico mais profundo e inúmeras habilidades cognitivas, como proficiência e flexibilidade entre estratégias usadas em situações problema, em diferentes domínios matemáticos. O cálculo mental é utilizado com frequência durante o jogo, como podemos observar no seguinte exemplo.

Exemplo 3: Uma rodada é finalizada e, sobra na mesa, uma de cada das seguintes cartas: ÁS, TRÊS e QUATRO. Quais as opções para o "mão" recolher todas ou algumas dessas?

Primeiramente, o jogador deve calcular mentalmente que, a soma das cartas da mesa é igual a 8 $(1 + 3 + 4)$. Assim, teremos as seguintes alternativas:

- Com um SETE, o jogador faz uma escopa, pois, com os 8 pontos da mesa, previamente mentalizados, basta calcular que, para a soma ser igual a 15, faltam 7 pontos (8 + 7 = 15);

- Com um Q, o jogador recolhe o TRÊS e o QUATRO, haja visto que Q vale 8 pontos, e, para fazer uma escopa, são necessários outros 7 pontos disponíveis na mesa, calculados com as cartas TRÊS e QUATRO (3 + 4 + 8 = 15);
- Com um K, o jogador recolhe o ÁS e o QUATRO. Seguindo com o cálculo mental, como K vale 10, com mais 5 pontos da mesa, chega-se nos 15 pontos desejados (1 + 4 + 10 = 15);
- Nas demais situações, o jogador não poderá recolher, apenas descartar. Nesse momento, sua jogada é tão importante quanto àquela que recolhera cartas para si, pois ele deve se atentar, mentalizar e mentalmente calcular que, como existem 8 pontos na mesa, tem de jogar algo que ultrapasse os 15 pontos, impossibilitando que seu oponente faça uma escopa na jogada seguinte. Assim, a melhor jogada se dá com o descarte de um J, que vale 9, e a soma de 9 com os 8 pontos da mesa é 17; caso contrário, a soma será sempre menor que 15.

A análise combinatória é um significativo componente do currículo de matemática, interligado com as regras e princípios de contagem e com as áreas da Computação e Probabilidade. Para tratar desse assunto, a escopa exige, por parte dos alunos, conhecimentos mais aprofundados, pois o cálculo de probabilidades se torna complicado quando é feito mentalmente. Porém, trabalhamos a combinatória, nesse jogo, com exercícios mais teóricos, dando maior profundidade a esses conceitos e habilidades, como mostra o exemplo seguinte.

Exemplo 4: Qual a chance de o "pé" do baralho fazer uma escopa, logo na primeira rodada, ou seja, ao virar as 4 cartas iniciais da mesa?

Para que o "pé" faça uma escopa ao distribuir as primeiras cartas, as 4 que irão compor a mesa devem somar 15. Assim, para calcular o número destas possibilidades, respeitando os valores das cartas, devemos resolver uma equação do tipo, $x + y + z + w = 15$, sendo $x, y, z, w \in \mathbb{N}$ e $0 < x, y, z, w \leq 10$. Com tais restrições, damos uma unidade para cada uma das variáveis e, com isso, teremos a equação $x' + y' + z' + w' = 11$. Esta, com resolução mais simples, será análoga à anterior ao retirarmos as 4 seguintes possibilidades, que apresentam o número zero nas soluções: $(11, 0, 0, 0)$, $(0, 11, 0, 0)$, $(0, 0, 11, 0)$, $(0, 0, 0, 11)$. Devemos pensar que tal resolução significa partir 11 unidades em 4 partes. Daí, representaremos cada solução por uma fila de sinais + e |, sendo que as barras são utilizadas para separar as incógnitas e a quantidade de sinais + indica o valor de cada uma. Por exemplo, a solução $(2, 5, 1, 3)$ é representada por: $++$ | $+++++$ | $+$ | $+++$. Logo, são 14 símbolos no total, com repetição de 3 | e 11 $+$. Calculamos as possibilidades por meio de uma combinação com repetição, ou uma permutação com repetição, que, nesse caso, são equivalentes, como mostra o desenvolvimento dos cálculos, destacando que, uma permutação com duas repetições que, somadas resultam o total de elementos, tem a característica de desordem de uma combinação:

$$\mathrm{Cr}_{11,3} = \mathrm{C}_{14,3} = \mathrm{P}_{14}^{3,11} = \frac{14!}{3! \cdot 11!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 11!} = 14 \cdot 13 \cdot 2 = 364.$$

Calculemos agora, a probabilidade de esta jogada ocorrer, denominando tal evento pela letra A.

A: As quatro cartas iniciais da mesa somarem 15;

$$\mathrm{n(A)} = 364 - 4 = 360.$$

O número de elementos do espaço amostral será obtido com uma combinação $\mathrm{C}_{40,4}$, já que das 40 cartas do baralho, 4 serão viradas sobre a mesa, independentemente da ordem que isso for feito.

$$\mathrm{n(E)} = \mathrm{C}_{40,4} = \frac{40!}{4! \cdot 36!} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 36!} = 5 \cdot 13 \cdot 38 \cdot 37 = 91390.$$

Portanto, $\mathrm{P(A)} = \frac{\mathrm{n(A)}}{\mathrm{n(E)}} = \frac{360}{91390} = \frac{180}{45695} \cong 0,004 = 0,4\ \%$.

Ademais, o ensino de Matemática não precisa ser desenvolvido somente por meio de aulas expositivas e resolução de exercícios. As estratégias de jogo, como vistas em nosso trabalho, “provoca” o aluno de modo que ele desenvolva cálculos mentais e estratégias para resolver situações problema. Também estimulam o desenvolvimento de sua capacidade de tomada de decisões e de trabalho em grupo quando, nesse jogo, os princípios de contagem e o conceito de probabilidade apontam como combinar os movimentos e quais as possibilidades de obter sucesso nas jogadas e, portanto, vencer o jogo.

A importância de trabalhar a matemática recorrendo a jogos, também é abordada por Júlia Borin, acentuando os conceitos que descrevemos e exemplificamos anteriormente, os quais acrescentam valor para o ensino matemático e para a resolução de problemas do dia a dia, estendendo o trabalho para além da sala de aula:

> Especialmente na aula de Matemática, se bem aplicado, o jogo pode ajudar a desenvolver diversas habilidades de raciocínio, como a organização, a atenção e a concentração. Também auxilia na descentralização, na capacidade de se observar algo de outro ponto de vista que não o seu. Tais habilidades são essenciais ao ensino da Matemática e à resolução de problemas em geral (BORIN, 2004, p.).

A execução do projeto

No início do ano letivo de 2018 o trabalho foi apresentado às três escolas em que eu lecionava. O tabu existente sobre a utilização do baralho e dos jogos de cartas, em sala de aula, trouxe empecilhos para a aplicação das atividades previamente propostas, já que os gestores das instituições e os pais dos alunos ou responsáveis consideravam esta prática inadequada ao ambiente escolar, seja por serem vistos como jogos de azar, por estarem ligados aos bares, cassinos e ambientes similares, por motivos religiosos, ou pela falta de horário na grade dos alunos.

Então, procuramos um curso especializado em exatas, onde consideramos que a execução do projeto teria maior chance de aceitação e ser realizada, tendo em vista a heterogeneidade dos alunos que, tentando alcançar diversos níveis de competências e habilidades, buscam este tipo específico de curso. Alguns visam a abordagem de conteúdos mais simples, com seus enfrentamentos às dificuldades trazidas pela deficiência no conhecimento de matemática básica, e outros, com algumas habilidades já adquiridas, tentam alcançar um nível de conhecimento que possibilite obterem aprovação no vestibular.

Por eu também trabalhar nessa instituição onde foi permitido realizar esse estudo, começamos a divulgar nossas pretensões para os alunos, deixando claro quais atividades iríamos executar, e podemos verificar mais de perto, qual seria o nível de aceitação dessa proposta. Contudo, o projeto foi bem aceito e então, enviamos autorizações a seus pais e/ou responsáveis para que pudéssemos utilizar os jogos de cartas em aulas previamente definidas, acordando com os cursos já ministrados, e assim, empregamos a escopa em duas noites.

No primeiro encontro, sete alunos receberam as instruções sobre as regras do jogo e quais conceitos matemáticos seriam abordados na escopa. Além deles, estava presente um outro professor, felizmente conhecedor do jogo, contribuindo para que jogássemos uma partida inicial. Assim, apresentamos o jogo na prática, explicando, algumas vezes, o porquê das jogadas que fazíamos, mostrando as possibilidades futuras, a cada cartear.

Em sequência, um dos alunos substituiu o professor que jogou a primeira partida, seguindo com a mesma ideia de apresentar as possibilidades das jogadas. Depois, foi sugerido que eles jogassem entre si e nós professores fossemos assistindo-os em suas dúvidas. Assim, fizemos.

A presença de outra pessoa que sabia como lidar com a escopa foi de grande importância, uma vez que era um jogo desconhecido pelos alunos. No entanto, observamos que, caso isso não seja possível, o professor instrutor pode utilizar os mais variados sites ou aplicativos, para jogar e fazer as devidas apresentações, auxiliando os alunos em suas noções preliminares.

O receio em jogar “errado” foi a marca das primeiras rodadas. Com o passar do tempo e das jogadas, com as indicações/mediações dos professores, os alunos se sentiram mais à vontade e jogaram à vera. Ao fim da aula, já tendo ultrapassado o horário combinado (resultado da empolgação dos jogadores), foi pedido para que voltássemos em outra oportunidade para continuar com as partidas. Desse modo, julgamos ter sido, além de gratificante, de suma valia a utilização da escopa para ampliar as ferramentas para o aprimoramento das habilidades daqueles que estão em busca de aprendizado e aprovações.

Acentuando a principal característica da primeira noite de escopa, o receio ao descartar, apresentamos algumas das jogadas que advieram no transcorrer das partidas, exemplificando com as dúvidas expostas pelos novos jogadores.

Exemplo 5: Tendo em mãos um TRÊS e um CINCO, qual destas cartas devo jogar, havendo outro TRÊS na mesa?

Como dito acima, a jogada consistia em um jogador ter em mão TRÊS e CINCO, além de haver um TRÊS na mesa. Ponderando as possibilidades, consideramos que jogar outro TRÊS é a melhor escolha, já que desse modo, o jogador seguinte poderá apanhar as cartas somente com um J. Com a carta CINCO, o oponente recolhe cartas com um SETE ou com K. Por esse motivo, é primordial observar as cartas já utilizadas anteriormente para poder analisar qual jogada menos favorece o adversário.

Exemplo 6: Caso eu não consiga pegar nenhuma das cartas que estão na mesa, o que devo jogar?

Depende muito das cartas apresentadas na mesa e daquelas que já foram utilizadas. Contudo, apresentamos algumas dicas para essa situação, salientando a pontuação da escopa:

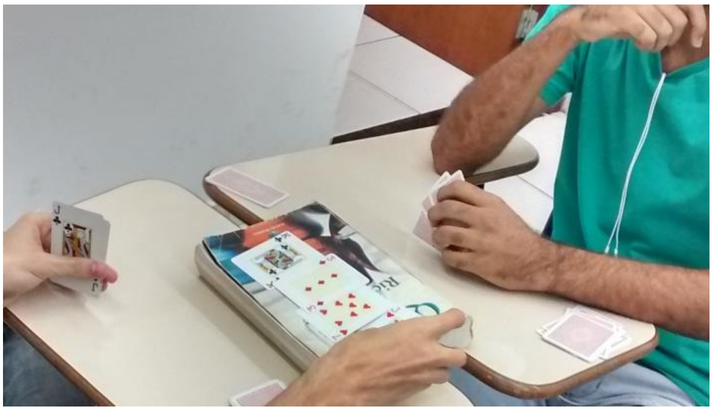
I. Não jogar belos, pois cada um desse vale 1 ponto;
II. Deixar o valor total das cartas da mesa acima de 15 pontos. Assim seu adversário não pode fazer uma escopa;
III. Não permitir que o oponente pegue um belo que tenha em mãos com as cartas da mesa. Por exemplo, evitar deixar uma carta CINCO, a qual possibilita utilizar o K de ouro;
IV. Evitar jogar SETE, ou que seu opositor possa utilizar um SETE para obter cartas da mesa, pois quem tiver mais cartas SETE ao final do jogo, ganha 1 ponto;
V. Jogar cartas que já estão na mesa, propiciando menos combinações para as cartas do próximo jogador.

No segundo encontro, nove alunos, sendo três novos e seis que já haviam participado da aula anterior, compareceram para a nova atividade. Como alguns desse já conheciam o jogo, tivemos uma boa oportunidade para observarmos o nível de aprendizado daqueles que já tínhamos orientado na prática do jogo de escopa. Assim, decidimos que os alunos que participaram do primeiro encontro seriam monitores daqueles que ainda não conheciam o jogo, análogo ao que fizemos na primeira noite. Demos assistência em alguns momentos introdutórios, recordando algumas regras ainda não absorvidas pelos monitores, e em jogadas específicas, seja por uma grande quantidade de opções ou por erros de execução que passaram despercebidos. Após todos estarem aptos a jogar e melhor compreender a relação entre escopa e matemática, passamos a discutir sobre exercícios por nós elaborados, aduzindo conceitos específicos como: conjuntos numéricos, contagem e probabilidade, aspirando atar a prática do jogo, com o cotidiano dos alunos e vestibulandos.

Figura 4. Alunos jogando em duplas

Fonte: Autor

Figura 5. Alunos jogando individualmente



Fonte: Autor

Considerações finais

O projeto não foi aplicado/desenvolvido como gostaríamos, pois, enfrentamos barreiras devido à utilização do baralho, tanto por parte das instituições como dos pais dos alunos ou responsáveis. Mesmo questionando-os sobre a utilização de jogos e aplicativos com abordagem análoga, e até fazendo a apresentação de um baralho (Figura 6) criado pelo Prof. Dr. Fernando Pereira de Souza, docente lotado na UFMS – CPTL, em conjunto com orientandos da graduação, trazendo personagens e símbolos matemáticos históricos, contextualizando o baralho com a Matemática, enfatizando suas origens e grandes pensadores, não permitindo a utilização do baralho comum, principal ponto de resistência das instituições. Porém, não foram argumentos e ferramentas suficientes para uma maior e melhor aceitação, em termos quantitativos.

Figura 6. Baralho criado pelo Prof. Dr. Fernando Pereira de Souza

Fonte: Prof. Dr. Fernando Pereira de Souza

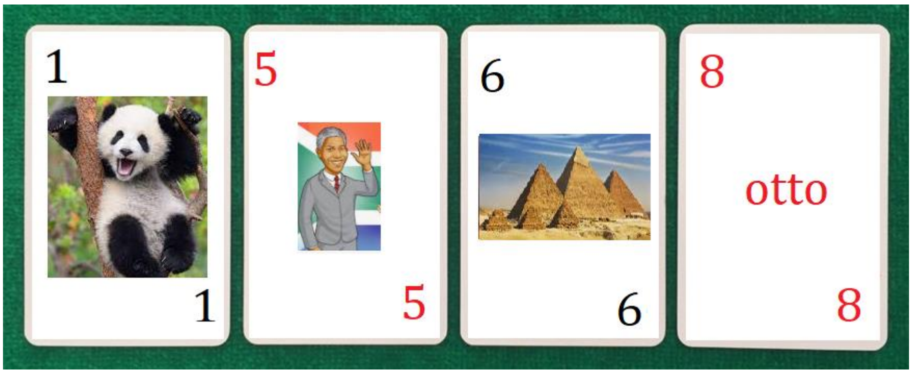
Além do baralho apresentado anteriormente, é oportuno propor que os próprios estudantes confeccionem suas cartas, explorando sua criatividade e habilidades, possibilitando a maior aproximação e consequente envolvimento com o projeto.

A interdisciplinaridade também pode ser trabalhada se utilizarmos “novos” baralhos, cunhados com outras imagens ou figuras que, além de estabelecer relações entre várias disciplinas, podem acrescentar valor qualitativo e maior interação e integração entre os professores e demais colaboradores das instituições. Apresentamos algumas opções para a troca das figuras originais do baralho, objetivando a interdisciplinaridade e seus propósitos:

- Objetos históricos como as Pirâmides, a Torre Eiffel, a Torre de Pisa. Objetos utilizados nas grandes guerras ou no holocausto;

- Presidentes, governadores e demais políticos que marcaram a história de seus países e estados;
- Esportistas memoráveis, objetos utilizados em esportes menos conhecidos;
- Flores, árvores, plantas, animais, sejam em extinção ou que representem símbolos de destaque;
- Representação dos números em formatos remotos (romano, grego, etc.) ou escritos em línguas estrangeiras ou indígenas.

Figura 7. Cartas com diferentes representações



Fonte: Autor

Salientamos a utilização do jogo de cartas como instrumento de motivação e prazer para a introdução de conceitos tratados, por muitos alunos, como os mais difíceis para compreensão, muitas vezes pontos determinantes para não aprovações em exames e desmotivação no aprendizado de outros conteúdos. Filgueira traz pensamento similar, conforme apresentamos a seguir:

> Através dos jogos podemos desenvolver atividades prazerosas, que estimulam aprendizagem em várias disciplinas, principalmente na Matemática, que é vista pelos alunos como uma grande vilã, muitos não gostam dessa disciplina, encontrando muita dificuldade em aprender o conteúdo da matéria, talvez pela maneira tradicional que o professor a apresenta, pelas cópias e mais cópias cansativas, exercícios repetitivos e mecanizados de fórmulas e regras, assim desmotivando os alunos a aprender (FILGUEIRA, 2018, p.2).

Considerando que, nas noites em que a escopa foi apresentada e realizamos o jogo, pudemos perceber a curiosidade iminente em cada participante assim como uma boa assimilação dos conteúdos introduzidos, concluímos ter sido gratificante e de suma valia a utilização da escopa como mais uma ferramenta para o aprimoramento das habilidades e competências, no processo de ensino e aprendizagem.

Referências

BORIN, J. **Jogos e resolução de problemas**: uma estratégia para as aulas de matemática. São Paulo: IME-USP, 2004.

CABRAL, M. A. **A utilização de jogos no ensino de matemática**. Dissertação (Graduação em Matemática) – Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2006. Disponível em: http://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/96526. Acesso em: 24 mar. 2021.

FILGUEIRA, L. A. B. V. **A utilização dos jogos no ensino de matemática nos anos iniciais do ensino fundamental**. Centro Universitário Mário Palmério – Unifucamp. Monte Carmelo, 2018. Disponível em: http://repositorio.fucamp.com.br/jspui/handle/FUCAMP/100. Acesso em: 01 abr. 2021.

GRANDO, R. C. **O Jogo suas possibilidades metodológicas no processo ensino-aprendizagem da matemática**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1995. Disponível em: http://repositorio.unicamp.br/jspui/handle/REPOSIP/253786. Acesso em: 24 mar. 2021.

NISHIHARA, A. **Jogos na educação matemática**: um olhar das pesquisas acadêmicas brasileiras para o ensino médio. ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XII, 2016, São Paulo.

PACAGNAM, L. **O jogo como estimulação para o desenvolvimento da criança na educação infantil**. Dissertação (Especialista na Pós-graduação em Educação) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Medianeira, 2013. Disponível em: http://riut.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/20743/2/MD_EDUMTE_II_2012_10.pdf. Acesso em: 01 abr. 2021.

PIRES, W. F. **O jogo de escopa adaptado para o uso em sala de aula**. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Presidente Prudente, 2016. Disponível em: http://hdl.handle.net/11449/134314. Acesso em: 24 mar. 2021.

NOTAS

IDENTIFICAÇÃO DO TEXTO

O presente texto é resultado da Dissertação de Mestrado do primeiro autor apresentada na Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), em 2018, sob a orientação do Professor Dr. Fernando Pereira de Souza.

IDENTIFICAÇÃO DE AUTORIA
Luís Fernando Alcântara de Falqui. Mestre em Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional (PROFMAT), pela Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campus Três Lagoas. Pesquisador autônomo.
E-mail: lffalqui@hotmail.com.br
https://orcid.org/0000-0001-7304-7377

Fernando Pereira de Souza. Doutor em Matemática pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Professor Adjunto da Universidade Federal do Mato Grosso do Sul (UFMS), Três Lagoas, MS, Brasil.
E-mail: fernando.pereira@ufms.br
https://orcid.org/0000-0001-6441-0103

AGRADECIMENTOS
Não se aplica.

FINANCIAMENTO
Não se aplica.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Não se aplica.

EDITORES
Patricia Helena Mirandola Garcia, Eugenia Brunilda Opazo Uribe, Gerson dos Santos Farias.

HISTÓRICO
Recebido em: 09/09/2021 – Aprovado em: 28/11/2021 – Publicado em: 15/12/2021.

COMO CITAR
FALQUI, L. F. A; SOUZA, F. P. Soma 15: O Jogo da Escopa utilizado como Ferramenta para o Ensino da Matemática. **Revista ENSIN@ UFMS**, Três Lagoas, v. 2, número especial, p. 313-331. 2021.

O USO DO GEOGEBRA PARA O ENSINO DO CÁLCULO DA ÁREA DE POLÍGONOS NO ENSINO FUNDAMENTAL

THE USE OF GEOGEBRA FOR TEACHING THE CALCULATION OF THE AREA OF POLYGONS IN ELEMENTARY EDUCATION

Lilian da Silva Gonçalves[1]

Joelma Ananias de Oliveira[2]

RESUMO: Os resultados da prova Saeb (Sistema nacional de Avaliação da Educação Básica) apresentam proficiência média em matemática dos quintos e nonos anos em 2019 que são inferiores a 30% de proficiência Inep (2019) e confirmam o que já é percebido em sala de aula, a dificuldade dos estudantes em compreender os assuntos matemáticos. Isto evidencia a necessidade de pesquisas e discussões sobre métodos de ensino da disciplina. Assim, o objetivo deste artigo é apresentar resultados de um estudo realizado para a elaboração de uma coleção de atividades interativas no GeoGebra, que auxilie o professor do ensino fundamental a fazer as demonstrações das fórmulas usadas no cálculo da área de polígonos. O caminho metodológico trilhado pelo estudo foi a realização de uma pesquisa de natureza aplicada; abordagem qualitativa; quanto aos objetivos é exploratória; em relação aos procedimentos é uma pesquisa bibliográfica com método indutivo. Durante o desenvolvimento da pesquisa foi possível conhecer algumas funcionalidades do GeoGebra, como: o uso do aplicativo para representação gráfica de função, discussão sobre resolução de sistemas lineares, a contribuição mútua entre os membros da comunidade GeoGebra e o desenvolvimento colaborativo disponível pelo software.

PALAVRAS-CHAVE: Área. Polígonos. GeoGebra.

ABSTRACT: The results of the Saeb test (National System of Evaluation of Basic Education,) present average proficiency in mathematics of the fifth and ninth years in 2019 that are lower than 30% of Inep proficiency (2019) and confirm what is already perceived in the classroom, the difficulty of students in understanding mathematical topics. That is evidence of the need of research and discussions regarding the methods of teaching the subject. Thus, the objective of this study to the elaboration a collection of interactive activities on GeoGebra, which helps elementary school teachers to demonstrate formulas used in the calculation of the area of polygons. The methodological path followed by this study was the realization of a research of applied nature; qualitative approach; as for the objectives it is exploratory; in relation to the procedures it is a bibliographic research with inductive method. During the development of the research it was possible to know some features of GeoGebra, such as the use of the application for graphical representation of function, discussion on solving linear systems, the mutual contribution between members of the GeoGebra community and the collaborative development available through the software.

KEYWORDS: Área. Polígonos. GeoGebra.

[1] Universidade Federal de Rondonópolis. E-mail: goncalves.liliandasilva@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-5263-8290
[2] Universidade Federal de Rondonópolis. E-mail: joelma.ananias@ufr.edu.br
https://orcid.org/0000-0002-8759-5590

● Informações completas da obra no final do artigo

Introdução

A área de polígonos é objeto de estudo presente na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), etapa do ensino fundamental, o conteúdo apresenta excelência para contribuir no desenvolvimento do raciocínio do estudante, quando este consegue compreender a lógica de seus processos, que é mais facilmente entendida quando há aprendizagens com experimentações. O software GeoGebra permite essa experiência de ação e consequência, e visualização com movimento, tornando a aprendizagem significativa.

Os resultados da prova Saeb (Sistema nacional de Avaliação da Educação Básica) apresentam proficiência média em matemática dos quintos e nonos anos em 2019 que são inferiores a 30% de proficiência Inep (2019) e confirmam o que já é percebido em sala de aula, a dificuldade dos estudantes em compreender os assuntos matemáticos. Isto evidencia a necessidade de pesquisas e discussões sobre métodos de ensino da disciplina, ainda mais neste momento de pandemia da COVID-19 que, o mundo enfrenta e tem reflexos diretos na educação escolar.

O entendimento da Geometria merece especial atenção, visto que sua compreensão é facilitada quando há processos de experimentação, o que demanda tempo, em contrapartida, o extenso conteúdo de matemática presente no currículo do ensino fundamental e o cenário atual de pandemia não colaboram com experimentos que envolvam materiais concretos. Diante das considerações apresentadas neste parágrafo, fica evidente a importância de pesquisas que apresentam resultados favoráveis quanto ao uso de softwares para o ensino de geometria, como é o caso do presente trabalho.

Para a apresentação de resultados sobre o uso do software GeoGebra para o ensino do cálculo da área de polígonos no ensino fundamental, foi realizada uma pesquisa bibliográfica. O processo de pesquisa envolveu a aprendizagem do uso do software a fim de compreender a usabilidade deste em sala de aula, bem como, traçar os critérios e como proceder nesse sentido para a melhoria da prática pedagógica e dinamização dos processos de ensino e de aprendizagem.

O referencial teórico desta pesquisa está sequenciado da seguinte maneira: a apresentação da origem do pensamento matemático, sendo a exposição comum para a origem deste pensamento entre os historiadores pesquisados, o raciocínio comparativo; na sequência são apresentadas citações diretas e indiretas, que falam sobre a importância da matemática para a vida em sociedade, destacando sua influência direta na capacidade do indivíduo de exercer o papel de cidadão.

Ainda no Referencial Teórico são apresentadas as expectativas da BNCC quanto à aprendizagem da geometria, bem como sua importância no desenvolvimento do raciocínio lógico dos estudantes. Em seguida são expostos argumentos de outras pesquisas afirmando, que o desenvolvimento do raciocínio acontece quando há compreensão da geometria, o que é facilitada quando a aprendizagem envolve experimentações práticas ou aplicativos dinâmicos para demonstração dos fatos.

É apresentado o cenário atual de pandemia, bem como sua influência no desenvolvimento dos trabalhos, em especial o trabalho docente. São expostos resultados de pesquisas, que apresentam a relevância do uso de softwares para a prática pedagógica, instrumentos advindos da evolução/revolução tecnológica, que agregam efetividade nas atividades cotidianas, no caso em tela, do aprendizado da geometria.

Sobre o uso de aplicativos dinâmicos para o ensino da geometria, o GeoGebra é citado pelas fontes bibliográficas desta pesquisa, como um software com capacidade de promover resultados superiores no aprendizado escolar, quando comparado com um grupo que passou pelo processo de aprendizagem utilizando imagens estáticas.

Os Resultados da Pesquisa, apresentam o produto desenvolvido, fruto deste trabalho, bem como, o link para acessar o produto. Neste capítulo é citado o material suporte: vídeos; artigos e outros materiais usados para o desenvolvimento do GeoGebra *Book,* que é constituído de *applets*, que são pequenos *softwares* que executam uma atividade específica, como define Scheer *et al* (2000).

Considerando o currículo escolar no ensino fundamental norteado pela BNCC; a dificuldade dos estudantes em compreender as fórmulas para o cálculo de área sem uma atividade de experimentação e considerando a situação atual em que as aulas são desenvolvidas remotamente, este artigo tem como objetivo apresentar uma alternativa para o ensino e a aprendizagem do cálculo da área de polígonos advinda de uma pesquisa que proporcionou a elaboração de uma coleção de atividades interativas no GeoGebra, que auxilie o professor do ensino fundamental a fazer as demonstrações das fórmulas usadas no cálculo da área de polígonos.

Referencial Teórico

O referencial teórico deste artigo está dividido em três seções. A primeira seção aborda o princípio do raciocínio matemático e sua importância para a vida em sociedade; na segunda seção estão as considerações sobre o ensino da geometria no currículo escolar, e na terceira seção é apresentado o cenário pandêmico e as adaptações escolares, nesta etapa também são expostas as dificuldades no ensino da geometria e quais as estratégias utilizadas por professores para facilitar os processos de ensino e aprendizagem.

A Origem do Pensamento Matemático e sua Importância para o Relacionamento Social

Quando o homem deixa de ser nômade e passa a fazer a administração dos recursos disponíveis numa dada região, surge a necessidade de fazer contagens e, neste sentido, a matemática ganha essencialidade para o fazer cotidiano da vida. Inicialmente, esse processo foi desenvolvido a partir da comparação entre o consumo diário e a oferta de alimentos na região. E, tais comparações originaram os agrupamentos por padrões, bem como a identificação de diferenças (ROCHO et al., 2018).

Sobre a origem dos raciocínios matemáticos Boyer faz os seguintes apontamentos:

> As noções primitivas de número, grandeza e forma podiam estar relacionadas com contrastes mais do que com semelhanças – a diferença entre um lobo e muitos, a desigualdade de tamanho entre uma sardinha e uma baleia, a dessemelhança entre a forma redonda da lua e a retilínea de um pinheiro. Gradualmente deve ter surgido, da massa de experiências caóticas, a percepção de que há analogias: e dessa percepção de semelhanças em número e forma nasceram a ciência e a Matemática (BOYER, 2010, p. 1).

Eves (2011), Rocho et al. (2018) e Boyer (2021), pesquisadores sobre a história da matemática, concordam que as necessidades, observações e esforços primitivos proporcionaram o surgimento do conceito de grandeza, forma e número. Uma vez em posse de tais raciocínios, eles foram repassados aos seus sucessores e, desse modo, serviram de base para reformulações e melhorias das técnicas de contagem.

Hoje, os matemáticos se preocupam em apresentar definições rigorosas, utilizando os raciocínios primitivos apresentados nos parágrafos anteriores; comparação, semelhança e diferenças, a fim de que não haja dubiedade na identificação de objetos. Estas definições acarretam consequências para determinados grupos, e provar tais consequências com raciocínios precisos para que não haja dúvida sobre sua efetivação completam o foco das pesquisas em matemática pura na atualidade (BOYER, 2021).

D'Ambrosio (1999, p. 97) escreveu que: "Em todos os momentos da história e em todas as civilizações, as ideias matemáticas estão presentes em todas as formas de fazer e de saber". Ainda conforme D'Ambrosio (1999), o pensamento do matemático não é voltado a um único objeto, mas é enriquecido pela possibilidade de comunicação e pela percepção da matemática em suas ações. Observando o padrão que se encontra em toda a natureza, conhecido como sequência de Fibonacci (SILVA; ALMEIDA, 2020), é possível afirmar que a matemática faz parte da essência da vida.

Para exercer cidadania o homem segundo Silva, Gomes e Piai (2016, p. 2) deve "ser capaz de relacionar, mensurar e comparar fenômenos à sua volta", isso lhe permite compreender fatos, conjecturar consequências mediante determinadas ações com uma margem de erro reduzida, o que lhe conduz a melhores escolhas para si e para o grupo. Segundo D'Ambrosio (1999) a matemática é uma forma de pensamento estável fundamentada na lógica racional, que considera fatos comprovados e especificados com olhar atento à cada discrepância de resultado num determinado estudo, sendo desenvolvida por diversos povos individualmente e a partir da universalização e compartilhamento de suas verdades.

Sobre o pensamento matemático e a vivência em sociedade, Silva ainda acrescenta:

> Se uma pessoa não desenvolve o pensamento lógico matemático, estará sujeita a um risco social maior, pois sua capacidade de relacionar diferentes ideias será deficitária, abrindo espaço para a alienação e impedindo o pleno gozo de sua cidadania, bem como estar ciente de seus direitos e deveres enquanto sujeito social (SILVA; GOMES; PIAI, 2016, p. 2).

Para Silva, Gomes e Piai (2016) o desenvolvimento do pensamento matemático promove melhores oportunidades e capacita o indivíduo a ter autonomia para fazer escolhas que o conduzam a boas ações para si e para os próximos, pois o pensamento matemático permite ao indivíduo analisar as alterações acarretadas por suas ações antes que elas aconteçam, favorecendo com isso o equilíbrio social.

A Geometria e o Currículo Escolar: metodologias utilizadas

A geometria é um campo da matemática que exige constantes raciocínios para a compreensão dos problemas propostos, em contrapartida, utiliza-se de gráficos que auxiliam a interpretação dos dados ou informações apresentadas. O enlace da resolução algébrica com a apresentação gráfica, incrementado por uma interessante situação problema faz com que estudos de geometria favoreçam o desenvolvimento da capacidade de abstrair, generalizar e projetar situações problemas, trazendo uma melhor compreensão das situações apresentadas (PAVANELLO, 2012).

A matemática foi dividida na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) em 5 unidades temáticas, dentre elas estão “Grandezas e medidas” e “Geometria”, fora da BNCC o tema grandezas e medidas é estudado pelo ramo da geometria. Sobre o estudo das Grandezas e medidas a BNCC apresenta que:

> As medidas quantificam grandezas do mundo físico e são fundamentais para a compreensão da realidade. Assim, a unidade temática Grandezas e medidas, ao propor o estudo das medidas e das relações entre elas – ou seja, das relações métricas –, favorece a integração da Matemática a outras áreas de conhecimento, como Ciências (densidade, grandezas e escalas do Sistema Solar, energia elétrica etc.) ou Geografia (coordenadas geográficas, densidade demográfica, escalas de mapas e guias etc.). Essa unidade temática contribui ainda para a consolidação e ampliação da noção de número, a aplicação de noções geométricas e a construção do pensamento algébrico. No Ensino Fundamental – Anos Iniciais, a expectativa é que os alunos reconheçam que medir é comparar uma grandeza com uma unidade e expressar o resultado da comparação por meio de um número (BRASIL, 2018, p. 273).

Segundo o Brasil (1997, p. 35), é importante que os conceitos geométricos façam parte do currículo escolar de matemática pois, “por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive”.

As expectativas do Brasil (2018) para os anos finais do ensino fundamental são: o reconhecimento de figuras geométricas, a identificação de seus elementos e a resolução de problemas envolvendo grandezas geométricas. Os estudantes devem determinar as expressões de cálculo de áreas de quadriláteros, triângulos e círculos e as de volume de prismas e cilindros.

Nesse entendimento, analisa-se que para que o estudante consiga solucionar problemas do cotidiano faz-se necessário, além do entendimento da situação apresentada, a compreensão da teoria necessária para resolver a situação. Neste sentido, a aprendizagem a partir da memorização de fórmulas é ineficiente, visto que proporcionam a capacidade de resolver problemas específicos, semelhantes aos quais houve treinamento para isso (GOMES; RODRIGUES, 2014).

Para que o estudante tenha compreensão do conteúdo é importante, que as situações apresentadas sejam analisadas com atenção, a fim de não propor um problema fora de contexto. Ao preparar uma aula de conhecimentos matemáticos os professores devem ter uma boa base de aplicações para apresentar e, assim, fazer com que o conteúdo tenha sentido. Os materiais devem ser preparados com cautela, verificando se a organização dos conteúdos está disposta na ementa do curso e se algum dos exemplos pretendidos não envolvem pré-requisitos que o estudante não dispõe. O embasamento teórico deve ser claro quando for tratar de um tópico que não admite contextualização isoladamente, nestas situações o professor deve fazer uma boa introdução ao assunto, preparar exemplos que permitam ao estudante comparar o desenvolvimento de problemas com o uso da teoria e sem esta, em que seja ressaltado o quão mais fácil é conhecer a teoria estudada (VANZELLA; MONTEIRO, 2020).

Quando o conteúdo é transmitido de forma processual o estudante tende a deixar de ter uma postura investigativa diante da situação, comprometendo com isso sua compreensão sobre o assunto tratado. O professor necessita priorizar a compreensão do objeto de estudo, reconhecendo esse entendimento como essencial, pois os cálculos podem ser realizados por calculadoras e aplicativos, mas, a interpretação do problema e a determinação de qual cálculo executar não são determinados por máquinas. Na compreensão de Vanzella e Monteiro (2020, p. 74): “O mais importante no trabalho matemático é o raciocínio, a capacidade de resolver problemas e de usar as ideias matemáticas para explorar as situações mais diversas”.

Como escrito por Pavanello (2012), a geometria se relaciona com outras áreas do conhecimento, o que deveria facilitar seu entendimento, mas conforme Martinez e Novello (2013) existem professores, que sentem dificuldade no ensino dos conceitos geométricos por falta de experimentação, desse modo, o professor deve praticar a resolução de situações reais que o permita desenvolver estratégias para então ensiná-las aos estudantes.

A Tecnologia e o Cenário Atual

A pandemia da COVID-19, doença causada pelo vírus SARS-CoV-2, gerou barreiras sanitárias no mundo, bem como, trouxe problemas na convivência social, afetando também a vida pessoal e profissional de cada indivíduo devido ao alto potencial de contágio do vírus. O Brasil é um dos países que vem sendo amplamente afetado pela infecção desse Betacoronavírus (WERNECK; CARVALHO, 2020). A crise vivenciada pelas pessoas não é somente sanitária, mas é também financeira, socioeconômica e, especialmente, psicológica, sendo comparado o período atual somente à Grande Depressão de 1929 e a Crise Econômica e Financeira Internacional que aconteceu entre os anos de 2007 e 2008 (COSTA, 2020).

Assim, diante do cenário apresentado, e em consonância com o tema da pesquisa, será discutido o uso das tecnologias em sala de aula, que foram reforçadas pela situação atual, especialmente aplicadas ao ensino da geometria.

Diante dos recursos oferecidos pelas tecnologias como a organização de informações, cooperação no desenvolvimento de trabalhos em tempo real e apresentação dinâmica do conteúdo, educadores, pesquisadores e demais interessados em educação têm discutido a necessidade da inclusão de instrumentos tecnológicos como prática comum em sala de aula (SILVA; CORREA, 2014). Para o filósofo Levy (2010) a tecnologia faz parte do homem, é a materialização das suas ideias e não há como separar o homem do que ele é.

Para Brasil (1998) a principal função desenvolvida pelo computador é a armazenagem e transmissão de informação, enquanto Valente (1993) considerou o computador uma ferramenta eficiente para fazer demonstrações de fenômenos ou conceitos, por sua capacidade de animação, apesar de afirmar ser uma subutilização do computador usá-lo apenas para demonstrações ao observar a capacidade de interação entre o estudante e a máquina, que faz a aprendizagem ser dinâmica, o que permite ao estudante experimentar possibilidades e visualizar as consequências.

De acordo com os resultados da pesquisa realizada por Ferreira et al. (2020), os recursos tecnológicos ainda podem ser melhor explorados, havendo para isso, a necessidade de capacitação dos professores, de forma a potencializar as suas práticas pedagógicas. Segundo Marques e Esquincalha (2020) a jornada de trabalho do professor foi aumentada na pandemia, pois ele teve que aprender a utilizar ferramentas que ainda não conhecia, além de preparar aulas e ministrar aulas “como de costume”, porém, sob um enfoque mais tecnológico. O professor também deve fazer e editar vídeos e preparar materiais especiais para os estudantes que não acessam as aulas remotas, isto significa dizer que o professor necessita buscar práticas que possam encantar o estudante ao aprendizado da matemática.

Como bem escreve Marques e Esquincalha (2020, p. 9) “A chegada do coronavírus acelerou um processo de apropriação de tecnologias no e para o ensino”. Cabendo observar que os resultados das pesquisas são favoráveis ao uso de tecnologias, considerando que estas promovem o desenvolvimento da criatividade na resolução de problemas matemáticos.

> [...] o uso de aparelhos eletrônicos tanto na sala de aula, como fora dela, é visto como uma forma de potencializar o trabalho colaborativo, facilitar o consenso e o dissenso sobre ideias matemáticas e favorecer a argumentação e a comunicação dessas ideias. Também foi defendido que o uso de software dinâmico como GeoGebra, Cabri, entre outros, e algumas aplicações da Internet, encorajam múltiplas representações e visualizações, favorecendo a compreensão de conceitos matemáticos (VALENCIA, 2020, p. 3).

Os resultados apresentados por Orange et al. (2018) afirmam que os estudantes que tiveram contato com os softwares para a aprendizagem do conteúdo apresentado, obtiveram um melhor rendimento nas avaliações. No entanto, para que esse aprendizado seja mais significativo é importante que o professor tenha práticas pedagógicas motivadoras.

Charnei (2019) fez uma pesquisa comparativa cujo objeto de estudo foi o cálculo de área de figuras planas retangulares, com a utilização do *software* GeoGebra para aprendizagem do conteúdo. Ainda segundo Charnei, o uso do *software* permite que o estudante vivencie uma experiência de interação, em que ele constrói objetos geométricos, manipula-os analisando as consequências de cada ajuste realizado, podendo desfazer e refazer buscando entender tais relações. Para Charnei a ferramenta oferece melhor oportunidade de compreensão do que o desenvolvimento de um desenho estático, destacando a necessidade de capacitação para o professor.

Silva (2013, p. 7) fez uma pesquisa bibliográfica com “o objetivo de discutir a adequação de exercícios e problemas envolvendo área e perímetro das principais figuras planas para o trabalho com o GeoGebra” nessa pesquisa, foi apresentada a seguinte análise:

> Pelo método tradicional, o conceito de área e perímetro das principais figuras planas são apenas transmitidos para os alunos, de forma oral e escrita, incentivando apenas a memorização de fórmulas, ou seja, o aluno recebe tudo pronto. Com o GeoGebra, os alunos têm a oportunidade de trabalharem, de forma dinâmica, as propriedades das figuras planas envolvidas na atividade e entender o porquê de tal propriedade ser usada ou não para o cálculo de determinada área ou determinado perímetro, bem como relacionar, através do software, várias figuras planas,

> proporcionando ao aluno que ele perceba as semelhanças e diferenças entre tais figuras, estimulando o raciocínio e a criação de conjecturas (SILVA, 2013, p. 63).

Para Nogueira (2020, p. 93), o maior destaque na utilização de *softwares* para o ensino é “auxiliar no desenvolvimento de habilidades, no qual seja possível construir processos de conceituação que objetivem uma maior participação dos sujeitos na construção do conhecimento”. Sobre o GeoGebra o autor observou boa aceitação pelos estudantes, ele escreveu ainda que deve haver incentivo e capacitação aos professores para a utilização da ferramenta. Nogueira ainda acrescenta que o *software* GeoGebra permite a aprendizagem cooperativa, torna os processos de ensino e de aprendizagem dinâmicos e produz maiores índices de habilidades conquistadas.

Resultados da Pesquisa

Durante o desenvolvimento desta pesquisa foi possível conhecer algumas funcionalidades do GeoGebra, como o uso do aplicativo para representação gráfica de função, discussão sobre resolução de sistemas lineares, a contribuição mútua entre os membros da comunidade GeoGebra e o desenvolvimento colaborativo disponível pelo *software*.

O *software* é gratuito e não é necessário fazer o cadastro para usar as ferramentas ou acessar os materiais disponíveis. Algumas construções podem ser desenvolvidas em aula com a participação dos estudantes, outras precisam de um tempo maior de preparo, sendo importante deixá-las pronta para o uso, mas, para salvar as construções é necessário ter um perfil particular na comunidade.

> O GeoGebra é um software de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos em um único pacote fácil de se usar. O GeoGebra possui uma comunidade de milhões de usuários em praticamente todos os países. O GeoGebra se tornou um líder na área de softwares de matemática dinâmica, apoiando o ensino e a aprendizagem em Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática (GEOGEBRA, 2021, p. 1).

Em termos de dimensão o material produzido, o *GeoGebra Book,* que pode ser acessado através do link https://www.geogebra.org/m/nk7hhhvq , é um protótipo de livro que está dividido em três capítulos, o primeiro capítulo contém aplicações para uso do professor em sala de aula, com a finalidade de facilitar a demonstração das fórmulas para o cálculo de área de polígonos e fornecer uma ferramenta que facilite a visualização e compreensão das fórmulas pelo estudante. O segundo capítulo é constituído de atividades práticas para memorização dos processos de cálculo, e o terceiro capítulo apresenta situações problemas. Em posse de um material publicado o usuário pode acessar o perfil do criador, procurar pela publicação e fazer comentários, críticas ou apresentar sugestão de mudança.

O desenvolvimento do livro foi motivado pelo conhecimento do livro "Aprendendo Geometria Plana com a Plataforma GeoGebra – 2019*" de* Cássio (2019), e para aprender a programar no GeoGebra foram fundamentais as obras do Programa dá Licença: Oficina - Programando Objetos no GeoGebra. 2020; Live - GeoGebra e ensino remoto de matemática. 2020, as obras de Cássio 2020: Como fazer uma atividade com feedback automático no GeoGebra? 2020; Como criar um botão no GeoGebra. 2020; Curso de GeoGebra. 2020, e Nóbriga e Dantas (2021).

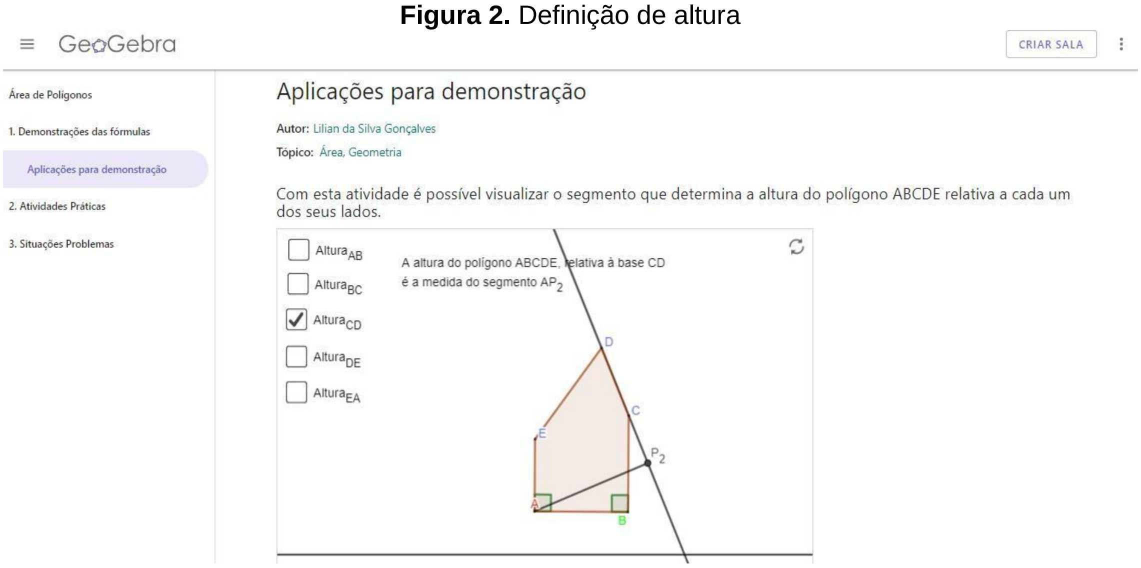
A figura 1 representa a capa do livro, nela contém a apresentação do material e os canais de navegação pelos capítulos. Os *applets* que compõem o livro são intuitivos e fáceis de manusear. O primeiro capítulo do livro, que será apresentado neste artigo, contém aplicações para uso do professor em sala de aula durante a explicação do conteúdo. O segundo capítulo é composto de exercícios para prática dos cálculos, e no terceiro capítulo são apresentadas situações problemas, que envolvem a teoria sobre o cálculo de área de polígonos. É importante salientar que no presente artigo somente será exposto o capítulo 1. Para o acesso ao livro produzido clique no link https://www.geogebra.org/m/nk7hhhvq .

Figura 1. Página inicial

Fonte: Os autores.

O *applet* visualizado na figura 2 apresenta a altura relativa a cada uma das bases do polígono *ABCDE.* No momento em que o professor estiver explicando sobre a altura dos polígonos, ele pode solicitar que o *applet* mostre a altura relativa à uma outra base do polígono dado, selecionando a altura desejada.

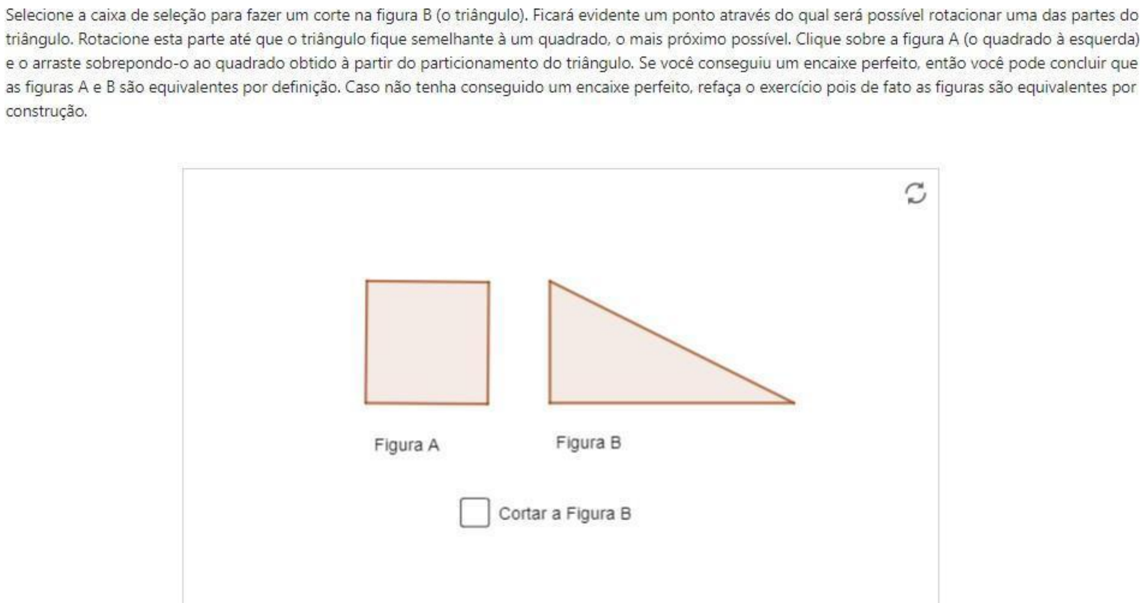
Figura 2. Definição de altura



Fonte: Os autores.

A figura 3, representa um *applet* que permite ao professor mostrar para o estudante um exemplo de sobreposição de figuras, que garanta a igualdade de área. Desse modo, o conceito de equivalência de figuras e do processo de medição de áreas é facilmente compreendido pelo estudante, motivando-o para o aprendizado da matemática.

Figura 3. Definição de figuras equivalentes



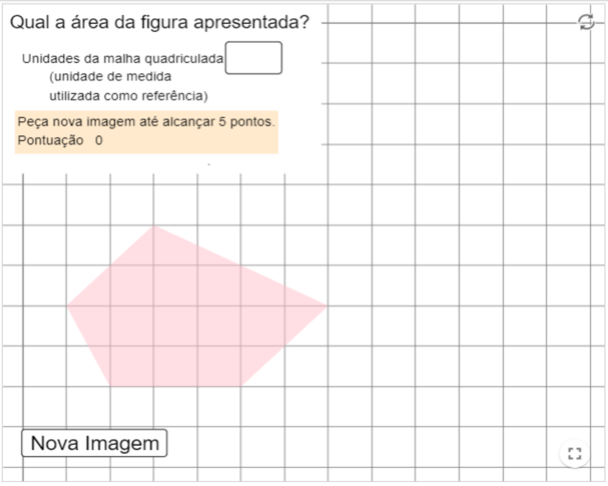
Fonte: Os autores.

Com o *applet* visualizado na figura 4 o professor fará a contagem da área da figura apresentada na malha quadriculada, destacando que esse valor para a área se refere a quantidade de unidades da malha quadriculada correspondente à cobertura da figura.

O *applet* da figura 5 é similar ao apresentado na figura 4, e a utilização é análoga. A diferença entre eles é que o segundo permite a determinação da área da figura evidente, por meio da contagem de unidades de uma malha triangular, mostrando com isso que a área de uma figura depende da referência utilizada e que esta referência nem sempre é quadrada.

O *applet* exibido na figura 6 permite que o professor faça a contagem, junto com o estudante, da área de diferentes retângulos cujos lados têm medidas inteiras, a mudança de retângulos é obtida com o deslocamento dos pontos B e C. Com esse *applet* o professor mostra para o estudante, que em qualquer retângulo com lados inteiros, a área é obtida multiplicando a medida dos seus lados, facilitando a indução de que a área de qualquer retângulo é obtida da mesma forma.

Figura 4. Determinação de área na malha quadriculada



Fonte: Os autores.

Figura 5. Determinação de área na malha triangular

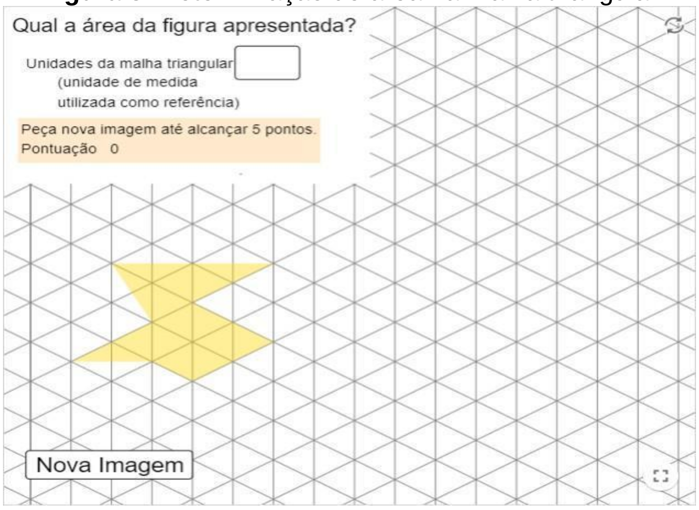
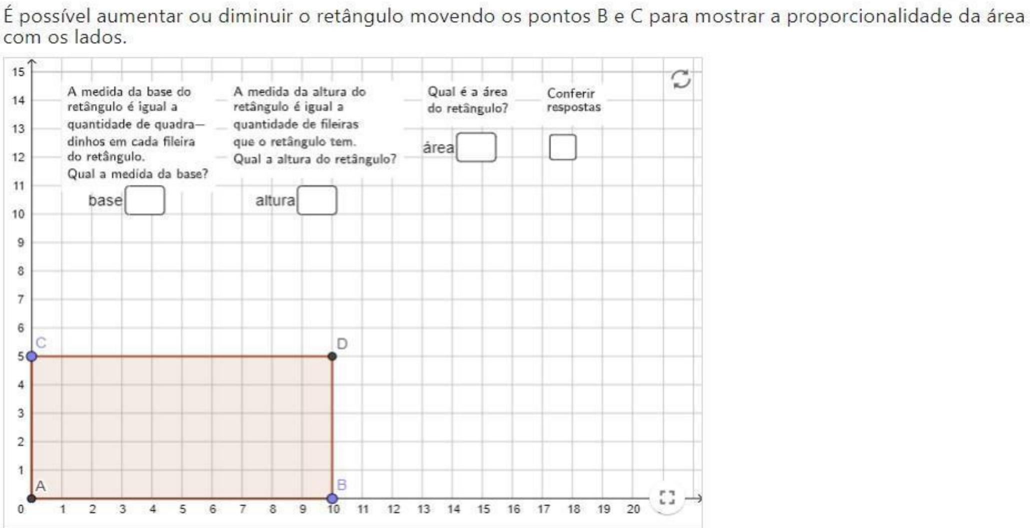


Figura 6. Fórmula da área do retângulo



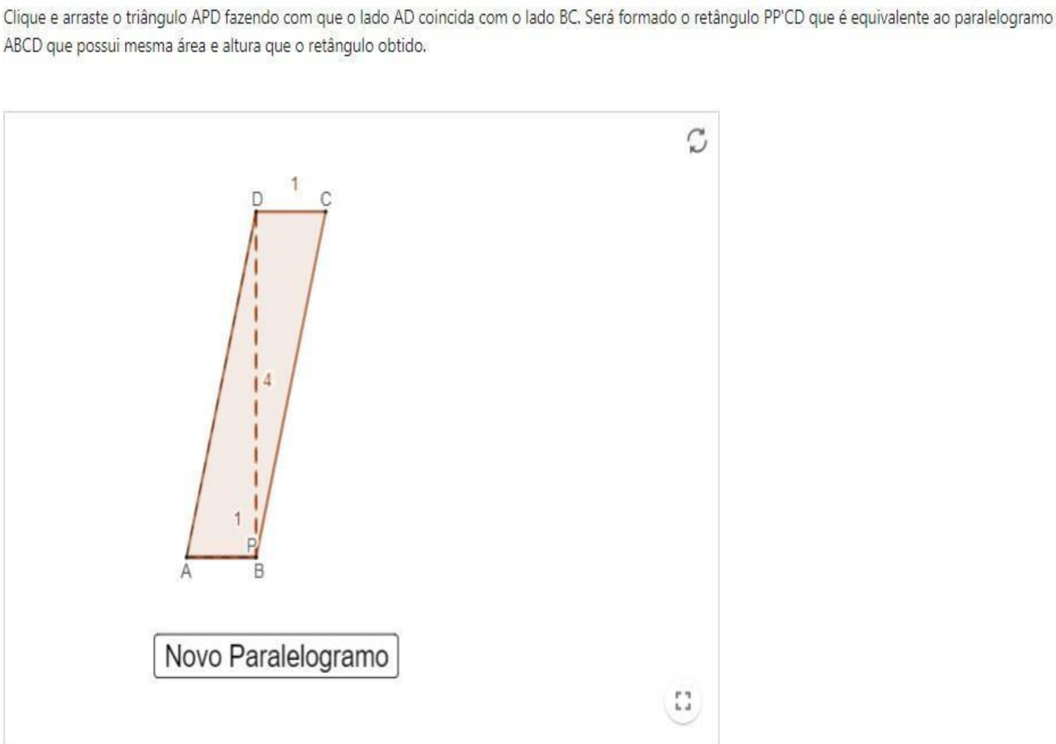
Fonte: Os autores

Pode-se observar no *applet* da figura 7, que esse permite ao professor mostrar para o estudante que todo paralelogramo é equivalente a um retângulo de mesma base e mesma altura relativa à esta base, para isso o professor deve fazer o deslocamento do triângulo ABD até que AD coincida com BC. O professor pode fazer esse processo quantas vezes for necessário para que o estudante compreenda, utilizando paralelogramos diferentes ao clicar em “Novo Paralelogramo”.

O *applet* apresentado na figura 8 não desenvolve movimento, mas dá suporte ao professor para mostrar para o estudante que todo triângulo equivale à metade de um paralelogramo de mesma base e mesma altura relativa à esta. Um novo triângulo surge ao clicar em “Novo Triângulo”, o que facilita a apresentação de vários exemplos pelo professor.

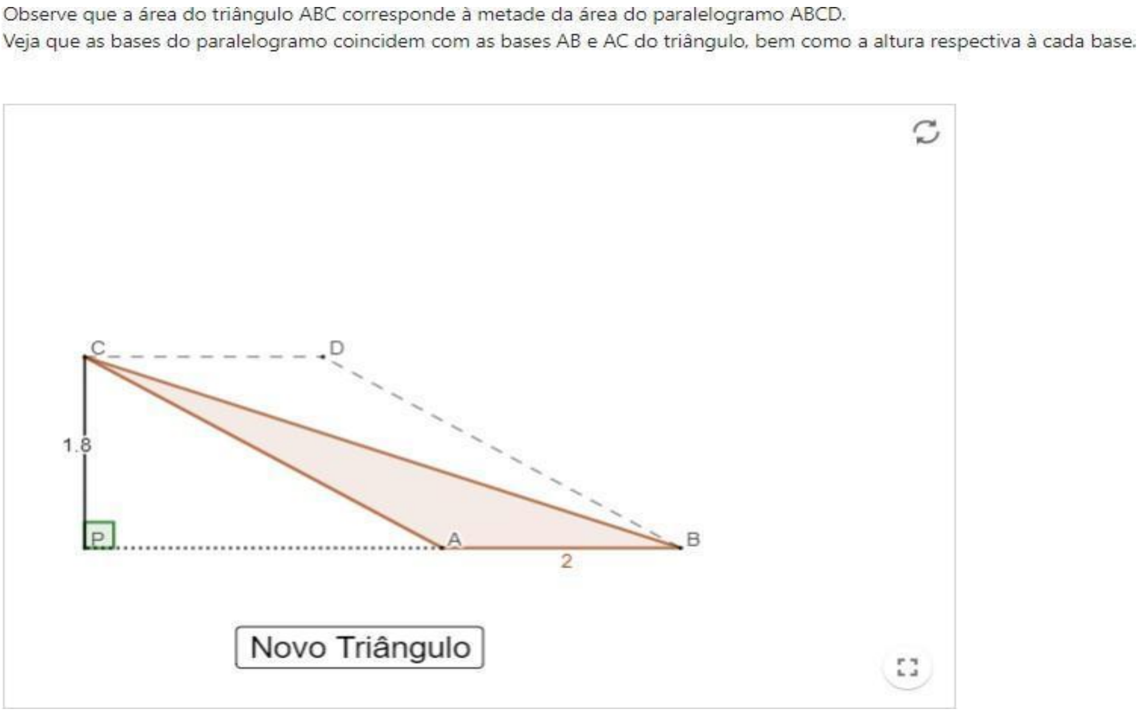
Nas figuras 9 e 10 estão representados *applets* que auxiliam o professor a apresentar ao estudante algumas estratégias de particionamento de um polígono qualquer a fim de determinar a sua área.

Figura 7. Fórmula da área do paralelogramo



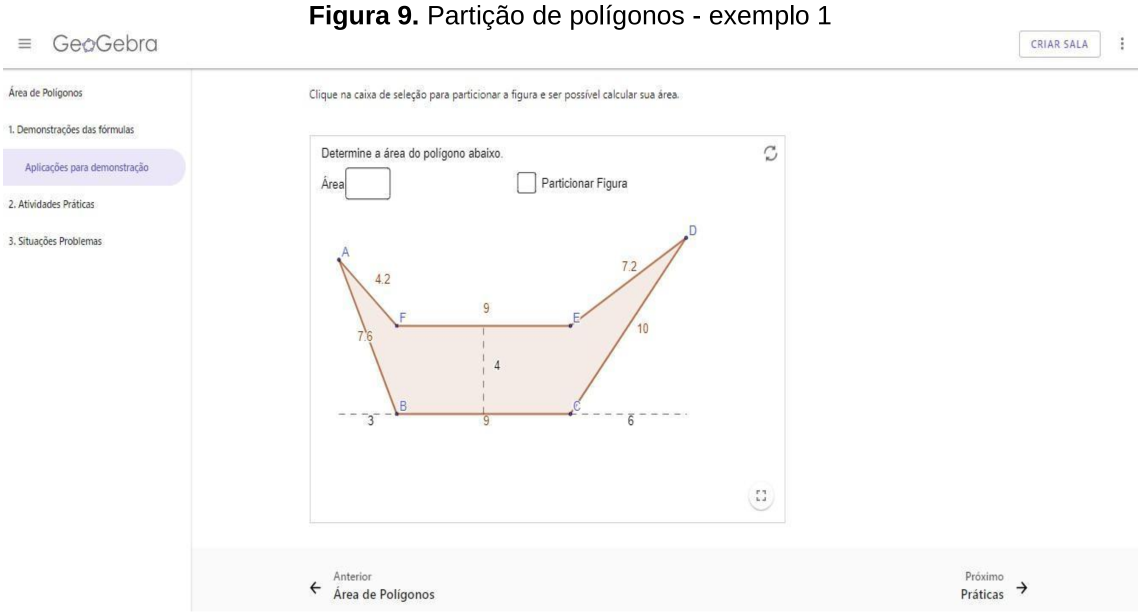
Fonte: Os autores

Figura 8. Fórmula da área do triângulo



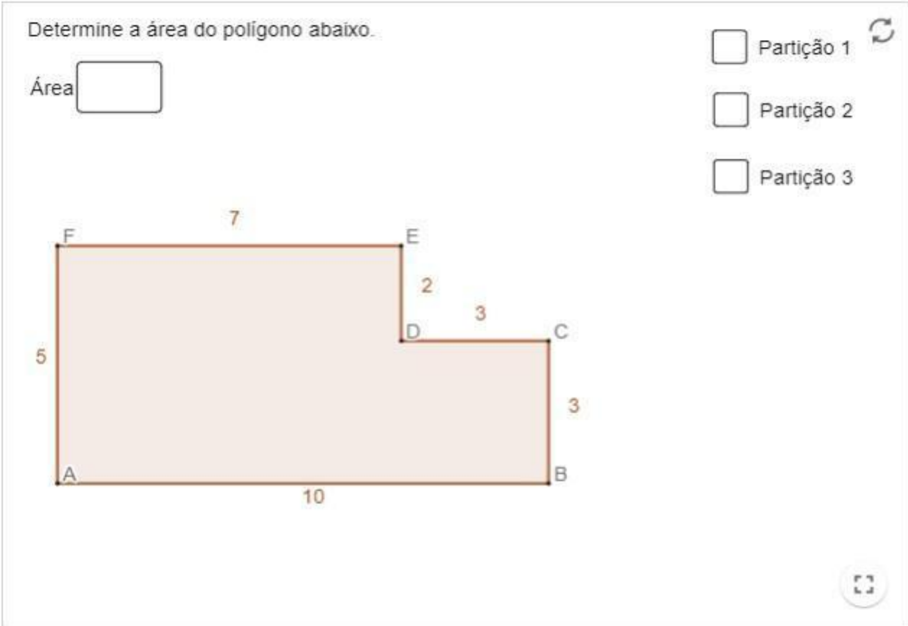
Fonte: Os autores

Figura 9. Partição de polígonos - exemplo 1



Fonte: Os autores

Figura 10. Partição de polígonos - exemplo 2
Clique na caixa de seleção para particionar a figura e ser possível calcular sua área.



Fonte: Os autores

Os *applets* do primeiro capítulo auxiliam o processo de ensino, a possibilidade de obter uma nova figura com um clique, com as devidas medidas ou partições, torna a aula dinâmica, e permite ao professor apresentar um maior número de exemplos.

Considerações Finais

Diante das pesquisas apresentadas neste trabalho fica evidente, a importância do raciocínio matemático para o desenvolvimento de capacidades essenciais para a compreensão de deveres e o reconhecimento do objetivo que conduz a realização destes. Este raciocínio também capacita o cidadão à diferenciar deveres e direitos, e a apresentar argumentos que propiciem o recebimento dos seus direitos.

Para que haja o desenvolvimento do raciocínio matemático é preciso estudar a matemática e compreender cada nível estudado, considerando sempre que a compreensão do raciocínio anterior contribui para a compreensão de um raciocínio posterior. O entendimento dos conteúdos é melhor desenvolvido quando trabalhado com experimentação, que pode acontecer com material concreto ou aplicativos dinâmicos que permitam isso.

É importante considerar que a pandemia acarretou um aumento na jornada de trabalho do professor, e uma redução do nível de compreensão dos conteúdos matemáticos pelos estudantes, o que fez com que os professores buscassem por alternativas para chamar a atenção e promover a interação do estudante em sala de aula.

O GeoGebra mostra-se eficiente no ensino de geometria para estudantes da educação básica, facilitando a compreensão, visualização das fórmulas e permitindo a experimentação de ações e análise de consequências, bem como a interação dos estudantes e discussão sobre os resultados.

Por intermédio dos resultados de outras pesquisas citadas nesse artigo foi possível perceber a falta de preparo dos professores para trabalharem com o GeoGebra, e considerando sua influência na aprendizagem dos estudantes é interessante que as secretarias de educação forneçam capacitação específica para professores, fomentando assim a adoção do *software* pelos docentes.

A pesquisa propiciou a elaboração de uma coleção de atividades interativas no GeoGebra que auxilie o professor do ensino fundamental a fazer as demonstrações das fórmulas usadas no cálculo da área de polígonos, ou seja, alcançou seu objetivo principal, e a publicação desse artigo exibe o resultado aos possíveis interessados.

Por fim, fica a sugestão para as secretarias de educação municipais e estaduais, em especial a secretaria do Estado do Mato Grosso promoverem incentivo à adoção de tecnologias para o ensino da matemática, bem como incentivo à publicação de materiais colaborativos e instrutivos.

Referências

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Trad. Elza F. Gomide. ed. 3, 2010. 512 p.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. **O computador na sociedade do conhecimento**. Secretaria de educação à distância. Brasília: Ministério da Educação, 1998.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília-DF: Ministério da Educação, 2018. 600 p.

CHARNEI, M. Dificuldade de aprendizagem do cálculo de área de figuras planas retangulares: uma possibilidade através do geogebra. **WCBIE**, UNESPAR, p. 623–632, 2019.

COSTA, S. d. S. Pandemia e desemprego no brasil. **Revista de Administração Pública**, v. 54, n. 4, p. 969–978, 2020.

CÁSSIO, J. **Aprendendo Geometria Plana com a Plataforma GeoGebra - 2019**. [S.l.]: GeoGebra, 2019.

CÁSSIO, J. **Como criar um botão no GeoGebra**. 2020. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=zA0gdmBKJpQ&t=23s. Acesso em: 03 mar. 2021.

CÁSSIO, J. **Como fazer uma atividade com feedback automático no GeoGebra?** 2020. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=8PX8K7iyJ9o&t=5s. Acesso em: 09 mar. 2021.

CÁSSIO, J. **Curso de GeoGebra**. 2020. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/Ywtj4ejx>. Acesso em: 07 mar. 2021.

D'AMBROSIO, U. A história da matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na educação matemática. *In*: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org.). **Pesquisa em educação matemática**: concepções e perspectiva. São Paulo: UNESP, 1999.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. 5. ed. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas, SP.: Ed. da UNICAMP, 2011.

FERREIRA, L. A. *et al*. Ensino de matemática e covid-19: práticas docentes durante o ensino remoto. **Em teia, EDUMATEC**, v. 11, n. 2, p. 15, 2020.

GEOGEBRA. **O que é o GeoGebra?** 2021. Disponível em: https://www.geogebra.org/about?lang=pt-PT#:~:text=GeoGebra%20%C3%A9%20uma%20comunidade%20em,aprendizagem%20em%20todo%20o%20mundo. Acesso em: 26 fev. 2021.

GOMES, T. d. A; RODRIGUES, C. K. A evolução das tendências da educação matemática e o enfoque da história da matemática no ensino. **Revista de Educação, Ciências e Matemática**, v. 4, n. 3, p. 57-67, 2014.

INEP. **Press Kit Saeb 30 anos – 2019**. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/saeb/2019/presskit/PressKit_Saeb_2019.pdf. Acesso em: 20 jun. 2021.

LEVY, P. Cibercultura. Trad. Carlos Irineu da Costa. São Paulo: Editora 34, 2010.

MARQUES, P. P. M. d. R; ESQUINCALHA, A. d. C. Desafios de se ensinar matemática remotamente: os impactos da pandemia covid-19 na rotina de professores. **Edição Virtual**, SBEM-RJ, p. 10, 2020.

MARTINEZ, M. L. S; NOVELLO, T. P. **Uma proposta para o ensino de geometria na educação básica**. VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática, ULBRA, p. 13, 2013.

NÓBRIGA, J. C. C; DANTAS, S. C. **Uma proposta de atividade com feedbacks automáticos no geogebra**. 2021. Disponível em: https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/12755. Acesso em: 06 abr. 2021.

NOGUEIRA, E. B. **Uso do software geogebra no ensino da geometria analítica**: equação da reta e equação da circunferência. PROFMAT-UESB, p. 110, 2020.

ORANGE, C. B. G. P. R. *et al*. **Os softwares como ferramenta auxiliadora no processo de ensino aprendizagem da matemática**. Universidade Federal da Paraíba - UFPB, p. 9, 2018.

PAVANELLO, R. M. **Por que ensinar / aprender geometria?** Universidade Estadual de Maringá, p. 6, 2012.

PROGRAMA DÁ LICENÇA. Live - GeoGebra e ensino remoto de matemática. 2020. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=rjiD-XgaQZ0&t=371s. Acesso em: 09 mai. 2021.

PROGRAMA DÁ LICENÇA. **Oficina - Programando Objetos no GeoGebra**. 2020. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=a1oSyr1qEI0&t=1265s. Acesso em: 09 maI. 2021.

ROCHO, V. d. R. *et al*. (Orgs.). História da matemática: **e-book** - como surgiram alguns conceitos matemáticos. Sombrio-SC: Instituto Federal Catarinense, 2018.

SCHEER, S. *et al*. **Desenvolvimento Java Applets para Ensino de Engenharia**. Curitiba-PR: Universidade Federal do Paraná, Centro de Estudos de Engenharia Civil, 2000.

SILVA, E. F. d. **Cálculo de área e perímetro das principais figuras planas**: discutindo a adequação de exercícios e problemas para o geogebra. Universidade Federal do Paraíba, p. 67, 2013.

SILVA, R. F. d; CORREA, E. S. Novas tecnologias e educação: a evolução do processo de ensino e aprendizagem na sociedade contemporânea. **Educação e Linguagem**, v. 1, n. 1, p. 23–35, 2014.

SILVA, R. L; ALMEIDA, R. L. d. S. A fantástica sequência de fibonacci e o enigmático número de ouro: contexto histórico, definições, propriedades e aplicações. **Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 18, p. 12, 2020.

SILVA, R. M. d; GOMES, D. A. A; PIAI, M. A. L. **A matemática como instrumento para o desenvolvimento humano e emancipação social**. SBEM, 2016.

VALENCIA, A. F. Tecnologia e educação matemática em tempos de pandemia. **Olhar de professor**, v. 23, p. 4, 2020.

VALENTE, J. A. Por quê o computador na educação? **Governo do Paraná**, p. 25, 1993.

VANZELLA, E; MONTEIRO, R. **Educação sem Fronteiras**. João Pessoa - PB: Ed. do CCTA, 2020.

WERNECK, G. L; CARVALHO, M. S. A pandemia de covid-19 no brasil: crônica de uma crise sanitária anunciada. **Cad. Saúde Pública**, v. 36, n. 5, p. e00068820, 2020.

NOTAS

IDENTIFICAÇÃO DE AUTORIA
Lilian da Silva Gonçalves. Licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Mato Grosso (UFMT). Discente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat), Universidade Federal de Rondonópolis (UFR), Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Departamento de Matemática, Rondonópolis, MT, Brasil.
E-mail: goncalves.liliandasilva@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-5263-8290

Joelma Ananias de Oliveira. Doutora em Engenharia de Produção. Professora Associada I da Universidade Federal de Rondonópolis, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Departamento de Matemática, Rondonópolis, MT, Brasil.
E-mail: joelma.ananias@ufr.edu.br
https://orcid.org/0000-0002-6922-9458

AGRADECIMENTOS
Não se aplica.

FINANCIAMENTO
Não se aplica.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Não se aplica.

EDITORES
Patricia Helena Mirandola Garcia, Eugenia Brunilda Opazo Uribe, Gerson dos Santos Farias.

HISTÓRICO
Recebido em: 31/08/2021 – Aprovado em: 04/12/2021 – Publicado em: 15/12/2021.

COMO CITAR

GONÇALVES, L. S; OLIVEIRA, J. A. O Uso do GeoGebra para o Ensino do Cálculo da Área de Polígonos no Ensino Fundamental. **Revista ENSIN@ UFMS**, Três Lagoas, v. 2, número especial, p. 332-353. 2021.

ENSIN@ UFMS 2021
ISSN 2525-7056

PROCESSO DE CONSTRUÇÃO E CALIBRAÇÃO DE UMA LOUSA DIGITAL DE BAIXO CUSTO

CONSTRUCTION AND CALIBRATION PROCESS OF A LOW COST DIGITAL WHITEBOARD

Thiago Lessa dos Santos Melo[1]

Isnaldo Isaac Barbosa[2]

Arlyson Alves do Nascimento[3]

RESUMO: No ano de 2018 discutíamos como as novas tecnologias poderiam auxiliar o professor de Matemática no processo de ensino-aprendizagem. Dentre os recursos disponíveis naquele momento nos deparamos com o processo de construção de uma lousa digital de baixo custo, projeto do norte-americano Johnny Lee (Lee, 2018), o qual descreve um procedimento e um programa de código aberto para a devida calibração da lousa. Com base neste projeto desenvolvemos e replicamos a lousa com os recursos disponíveis no mercado brasileiro com um custo final de R$ 120,00. Tal produto educacional foi explorado desde então em algumas escolas do estado de Alagoas com o objetivo de criar um ambiente colaborativo favorecendo a construção do conhecimento matemático em sala de aula. No início do ano de 2020 o mundo começou a conviver com a Pandemia do SARS-CoV-2 (COVID-19). Dentre as mudanças impostas por esta pandemia está a necessidade de utilização de recursos tecnológicos para a ministração das aulas. Diante desta situação, foi oportuno replicar o processo de construção e calibração de uma lousa digital de baixo custo para que outros professores pudessem, mesmo através do ensino remoto, possibilitar o ambiente colaborativo onde os alunos pudessem fazer uso de conhecimentos prévios de matemática para a calibração e confecção de uma lousa digital própria.

PALAVRAS-CHAVE: Lousa Digital. Ensino de Matemática. Software.

ABSTRACT: In 2018, we discussed how new technologies could help the Mathematics teacher in the teaching-learning process. Among the resources available at that time, we came across the process of building a low-cost digital whiteboard, a project by the American Johnny Lee (Lee, 2018), which describes a procedure and an open source program for the proper calibration of the board. Based on this project, we developed and replicated the slate with the resources available in the Brazilian market at a final cost of R$120.00. This educational product has been explored since then in some schools in the state of Alagoas with the aim of creating a collaborative environment favoring the construction of mathematical knowledge in the classroom. In early 2020, the world began to live with the SARS-CoV-2 (COVID-19) pandemic. Among the changes imposed by this pandemic is the need to use technological resources for teaching classes. Given this situation, it was opportune to replicate the process of construction and calibration of a low-cost digital whiteboard so that other teachers could, even through remote teaching, enable a collaborative environment where students could make use of prior knowledge of mathematics for calibration and making its own digital whiteboard.

KEYWORDS: Digital Whiteboard. Mathematics teaching. Software.

[1] Instituto Federal de Alagoas. E-mail: thiago.melo@ifal.edu.br
https://orcid.org/0000-0001-6204-9318
[2] Universidade Federal de Alagoas. E-mail: isnaldo@pos.mat.ufal.br
https://orcid.org/0000-0003-3147-1780
[3] Instituto Federal de Alagoas. E-mail: arlyson.nascimento@ifal.edu.br
https://orcid.org/0000-0002-0631-3273

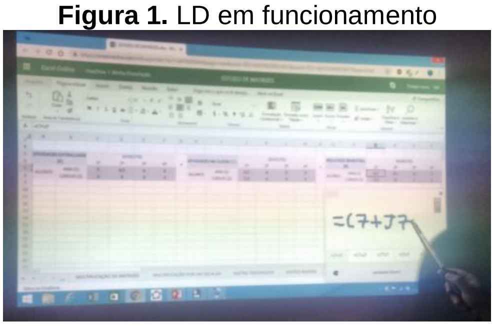
Introdução

Este trabalho teve início em 2018 para se tornar ao final do mesmo ano o produto educacional de uma dissertação do PROFMAT. A proposta do trabalho original era investigar o uso de recursos digitais como meios para tornar o ambiente de sala de aula colaborativo. Durante a construção da parte teórica deste trabalho tivemos contato com um projeto de construção de uma Lousa Digital (LD), que é uma ferramenta de grande utilidade para ambientes educacionais e empresariais por adicionar atividades e recursos do computador para as lousas tradicionais, apresentando uma sensibilidade ao toque. Daí, o motivo de ser considerada um dispositivo de entrada e saída de dados. Sua denominação varia conforme o fabricante e a região, podendo também ser chamada de quadro digital, quadro interativo, lousa interativa ou painel interativo.

Segundo Hervás et al. (2010, p. 204, tradução nossa) “O primeiro quadro interativo foi fabricado pela SMART Technologies Inc. em 1991, reconhecendo seu enorme potencial como uma ferramenta para aprender e apresentar novos conteúdos”. Atualmente, existem muitos tipos, que variam de modelo, tamanho, marca e preço, mas, basicamente, a lousa digital funciona com três equipamentos: a lousa propriamente dita, um computador e um projetor. Inclusive, alguns modelos já possuem computador e/ou projetor integrado.

Construímos nossa primeira LD ainda em 2018 e esta foi utilizada durante a defesa da dissertação de mestrado do PROFMAT.

Figura 1. LD em funcionamento



Fonte: Os autores

A proposta deste trabalho é que o professor e/ou os próprios alunos sejam capazes de construir lousas digitais e, desta forma, observar a utilização da Matemática para a resolução de um problema real. O ensino médio atual não tem sido muito atrativo para a permanência dos estudantes conforme SCHWARTZMAN, 2021, isso ocorre quando não existe ligação entre aquilo que se aprende e o cotidiano dos estudantes. Conforme REIS, 2017:

> A perspectiva do ensino de conceitos matemáticos com vistas ao desenvolvimento do pensamento teórico evidência grandes avanços nas concepções de aprendizagem matemática. Não apenas contribui com elementos teóricos sobre o desenvolvimento do pensamento em ascensão, o que permite justificar diferentes contextos no processo de ensino, como também orienta o processo de aprendizagem por um novo caminho, subsidiando a necessidade de romper com a aprendizagem repetitiva. (Reis, 2017, p. 187).

A utilização da lousa digital propõe promover uma interação diferenciada entre o professor e os alunos, mas, o ganho na construção de tal recurso educacional ultrapassa este fato. A participação efetiva dos estudantes na confecção das ferramentas e na calibragem do dispositivo devem causar uma aproximação significativa daquilo que se aprende em sala de aula com esta oportuna solução tecnológica.

Uma Lousa Digital de Baixo Custo

Os benefícios das lousas digitais para a sala de aula permitem repensar o modelo de educação utilizado e as perspectivas de futuro para o nosso ensino. Pois, seu caráter diferenciado e inovador, estimulam o interesse e a participação dos discentes. Neste período de aulas remotas a confecção individual de uma LD possibilita, mesmo em um ambiente virtual, um espaço colaborativo onde os próprios estudantes têm oportunidade de trocar experiências e as intervenções do professor, no nosso caso professor de Matemática, demonstram-se oportunas. Por outro lado, muitas escolas ainda não puderam adquirir o produto, por não possuírem recursos financeiros suficientes para um investimento desse tipo. A ideia desse artigo é construir uma Lousa Digital de Baixo Custo (LDBC) acessível à maioria das escolas e capaz de criar um ambiente que possibilite a construção coletiva do conhecimento na sala de aula. O projeto foi elaborado pelo cientista Johnny Chung Lee, utilizando um controle do Nintendo Wii (wiimote) e alguns outros itens. Para Lee (2018, tradução nossa):

> Como o wiimote pode rastrear fontes de luz infravermelha (IR), você pode rastrear canetas que tenham um LED na ponta. Ao apontar um wiimote em uma tela de projeção ou em uma tela de cristal líquido, você pode criar quadros interativos ou tablets de baixo custo. (Lee, 2018, tradução nossa)

Os recursos utilizados no projeto original apresentado em (Lee, 2018):

1. Wiimote;

ISSN 2525-7056

2. LEDS Vishay TSAL6400s funcionando a 100mA, mas muitos outros LEDs também funcionam (este LED é utilizado na construção da “caneta”).

A seguir, conheceremos os materiais necessários para o desenvolvimento do projeto da LDBC que construímos desde 2018.

Materiais Necessários

Considerando que a maioria das escolas devem possuir ao menos um computador e um projetor, vejamos o que mais será preciso para complementar o projeto:

1. Uma caneta de infravermelho: Caneta responsável pela emissão de radiação infravermelha, a ser lida pela câmera do controle Wii Remote. Essa caneta pode ser comprada ou confeccionada, utilizando-se de alguns materiais básicos:

a) Um LED emissor de infravermelho;

b) Uma bateria ou pilha AA ou AAA;

c) Uma chave liga/desliga;

d) Fios para fazer as conexões;

e) Um tubo para armazenar os componentes

Durante o projeto da caneta, observou-se que, para o bom funcionamento:

➔ Sobre a alimentação do circuito: a bateria de alimentação deve possuir uma capacidade de atender a voltagem máxima do LED infravermelho, o que pode acabar acarretando o uso de mais de uma pilha AA ou AAA de 1,2V (considerando que essas pilhas têm uma voltagem mínima de 0,8V);

➔ Inclusão de um resistor: não é regra, mas pode ser utilizado um resistor para aumentar a vida útil da bateria e do LED infravermelho;

➔ Polaridade do LED infravermelho: atentar-se que o fio mais curto é o negativo (ânodo) e o mais longo é o positivo (cátodo);

➔ Escolha do LED infravermelho: prefira os LEDs infravermelhos com uma boa potência de emissão de infravermelho e um maior ângulo de propagação, para possibilitar uma melhor visibilidade da câmera do WII REMOTE;

➔ Em relação à junção dos materiais: pode ser realizada com fita isolante ou solda, porém o uso da solda dá mais qualidade à confecção da caneta. A Figura 2 ilustra o circuito para a interligação desses elementos.

Destacamos que esta não é a única forma de deixar o dispositivo funcionando e a discussão sobre a melhor forma de construir este dispositivo é uma boa oportunidade de promover uma discussão produtiva com os estudantes.

Figura 2. Simulação de circuito

Fonte: Os autores

Para visualização da radiação infravermelha do LED, que está fora do espectro visual do olho humano, uma câmera de celular pode ser de grande valia para avaliar o perfeito funcionamento da caneta.

Estima-se um custo em torno de R$10,00 para confecção dessa caneta (este valor pode variar dependendo da região do país em que sejam comprados os componentes).

2. Um adaptador Bluetooth (caso o computador não possua bluetooth interno): A tecnologia bluetooth é um tipo de rede sem fio presente na maioria dos equipamentos modernos e será utilizada para comunicação entre o controle do Wii e o computador. Alguns modelos de computadores podem não possuir essa tecnologia de fábrica, daí a necessidade do adaptador ilustrado na Figura 3.

Figura 3. Adaptador

Fonte: Os autores

Esse adaptador é encontrado em média por R$15,00.

3. Um controle Wii Remote: Informalmente conhecido como wiimote, é o controle do console Wii da Nintendo. Trata-se de um dispositivo sem fio, que possui uma câmera capaz de detectar LEDs emissores de infravermelho e usa a tecnologia Bluetooth para comunicação, ilustrado na Figura 4.

Figura 4. Controle Wii Remote

Fonte: https://www.mercadolivre.com.br/controle-joystick-sem-fio-nintendo-wii-remote-plus-white/p/MLB15123412

Seu custo médio é de R$80,00.

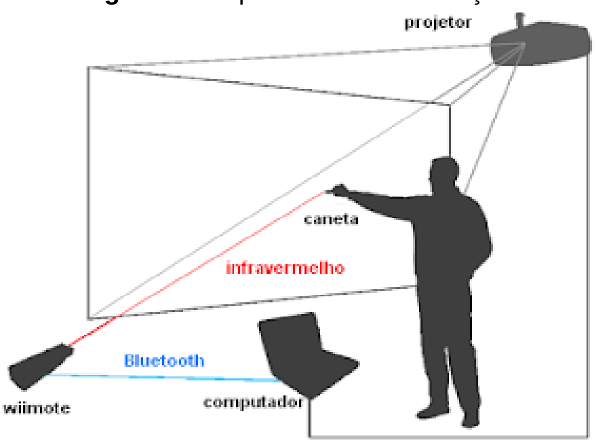
4. Um software (ou programa): Considerado "o cérebro" dentre todos os elementos da LDBC, cabe ao software interpretar as informações obtidas pelo controle Wii Remote e possibilitar a interação do usuário com os programas existentes no computador. No projeto original, proposto por Lee (2018), o software construído foi o Wiimote Whiteboard, com uma interface e recursos suficientes para o funcionamento da LDBC, mas com características mais simples e limitadas. Por esse motivo, optamos pela série Smoothboard do Boon Jin, que possui capacidade para uso de até duas canetas, dois wiimotes, além da possibilidade de compartilhamento e interação com smartphones, tablets e outros dispositivos com navegador HTML5, contribuindo para colaboração em sala de aula. Por outro lado, apesar do acesso gratuito a todas as funcionalidades, o Smoothboard exibe uma mensagem, Smoothboard Air Unregistered, para as versões não registradas, o custo do registro do produto completo é de US$49,99 (quarenta e nove dólares americanos e 99 centavos).

Com isso, observamos que os valores dos componentes da LDBC estão bem abaixo das LD profissionais, consolidando a ideia do projeto inicial de ser uma ótima alternativa de baixo custo. Resta entender como deve funcionar coletivamente essas ferramentas para uma boa interação usuário-lousa.

Funcionamento

O processo de funcionamento da lousa digital de baixo custo baseia-se principalmente em um componente, o controle Wii Remote da Nintendo. Segundo Lee (2018, tradução nossa): "Ele contém uma câmera infravermelha de 1024x768 com rastreamento de blob de hardware integrado de até 4 pontos a 100Hz.". Isso significa que a câmera do wiimote possui uma boa resolução de imagens e é capaz de acompanhar o movimento de um a quatro emissores de infravermelho. Esse infravermelho pode ser emitido por um LED acoplado a uma caneta, responsável por movimentar-se à frente da superfície de projeção. O wiimote ao fazer a leitura desse sinal transmite imediatamente ao computador, onde o software interpretará a informação em termos de coordenadas e relacionará ao movimento do cursor do mouse, por meio de uma transformação geométrica. Com isso, é possível tornar qualquer superfície em uma área interativa. A Figura 5 ilustra bem como funciona a comunicação entre os elementos do projeto.

Figura 5. Esquema de comunicação



Fonte: http://lab-entremeios.blogspot.com/2011/03/lousa-digital-de-acesso-remoto-e-mesa.html

Na Figura 5, observa-se a importância do usuário identificar a melhor posição para o controle wiimote, pois a colocação do usuário diante da superfície de projeção e o campo de visão horizontal de aproximadamente 45º, de sua câmera, podem dificultar o reconhecimento do sinal emitido pela caneta. Além disso, o uso de uma superfície sensível a reflexos ou luminosidade solar podem provocar um mau reconhecimento da câmera. Por isso, recomenda-se ao usuário atentar-se para todas as características do ambiente, além de realizar adequadamente a calibração, configuração e instalação do software, conforme será visto a seguir.

Instalação do software

O software escolhido para ilustrar as atividades na LDBC é o Smoothboard Air With Duo, uma junção do Smoothboard Air e do Smoothboard 2. Seus recursos comportam ferramentas para auxiliar nas atividades da lousa e para incentivar a colaboração na sala de aula. Sua instalação necessita de alguns requisitos do computador:

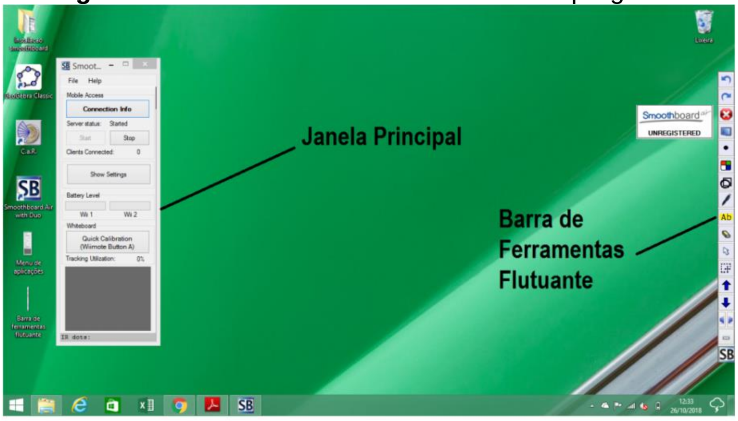
• Sistema operacional Windows (Windows 7);

• Processador de 1,6 GHz e superior (processador dual core recomendado);

• Microsoft.Net Framework 3.5 SP1

A instalação do programa é baseada em quatro etapas extremamente simples: a aceitação dos termos de uso do software; a confirmação dos elementos do software a serem instalados, possibilitando a inclusão de um atalho ao menu iniciar; a escolha do local de armazenamento e a realização da instalação propriamente dita, ativada pelo botão INSTALAR. Daí, findada essa etapa, é só conhecer melhor o programa e desfrutar de todos os seus recursos disponíveis. A Figura 6 nos dá um primeiro contato com esse programa, através da barra de ferramentas flutuante e da janela principal.

Figura 6. Janela e barra de ferramentas do programa

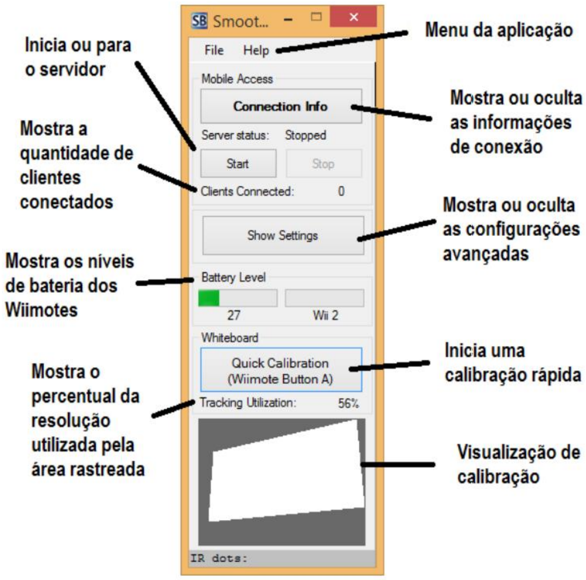


Fonte: Os autores

Configurando o software

A partir de agora, o nosso objetivo é configurar as principais funcionalidades do software, visando obter os melhores resultados no uso da LDBC. Entretanto, observaremos que excetuando a comunicação wiimote e computador, que é realizada no início da aplicação, na janela SmoothConnect, as demais funcionalidades serão encontradas na janela principal, Figura 7, ou a partir dela.

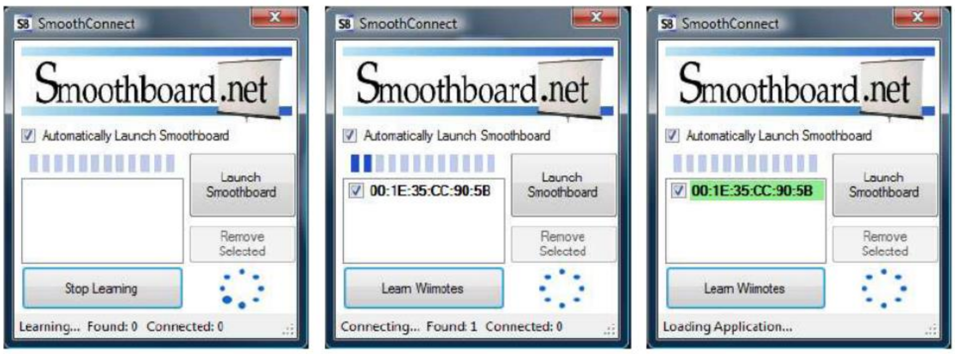
Figura 7. Janela principal



Fonte: Os autores

1. Comunicação bluetooth entre o wiimote e o computador: esse processo talvez seja o primeiro passo a ser realizado com o software, e ocorre ao pressionar simultaneamente os botões 1 e 2 do wiimote, onde o carregamento será realizado na janela SmoothConnect, conforme ilustra a Figura 8.

Figura 8. Janela SmoothConnect

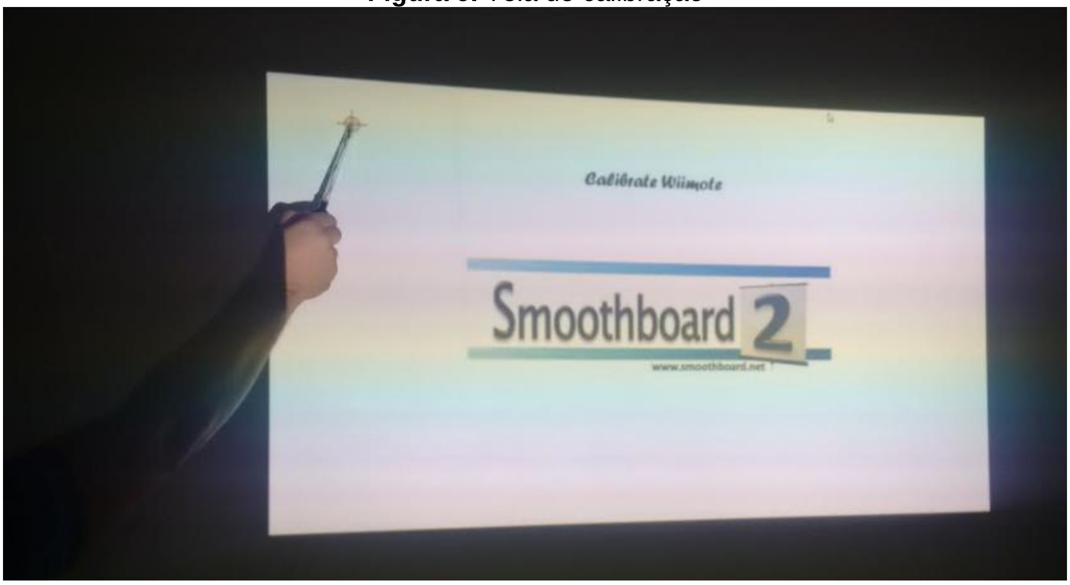


Fonte: Os autores

Nesse processo de procura, descoberta e conexão, a faixa esverdeada confirma o sucesso do vínculo entre os dispositivos. Por outro lado, caso o usuário decida utilizar um controle wiimote adicional, deverá acessar a janela principal, Show Settings, guia General e escolher a opção Twoo wiimotes. Daí, a comunicação será realizada com cada controle especificamente.

2. Calibração: Uma das principais etapas, a calibração será responsável por consolidar ou não a posição do wiimote escolhida pelo usuário. Funciona em quatro pontos, organizados em cada canto da tela de projeção, sendo exibido um por vez. Acionamos através da opção Quick Calibration, presente na janela principal, vista na Figura 7, ou por meio do botão A do controle do Wii Remote. A Figura 9 exibe a tela de calibração.

Figura 9. Tela de calibração



Fonte: Os autores

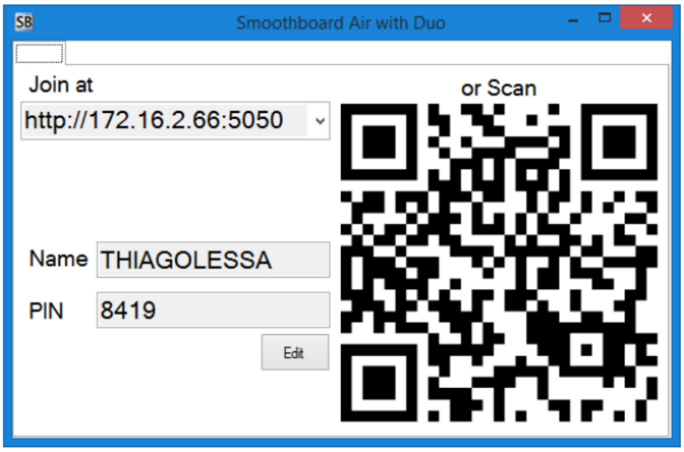
Presentes na janela principal, Figura 7, algumas ferramentas, podem auxiliar na otimização dessa calibração:

a) Visualizador de calibração: nessa ferramenta o usuário verifica se a região branca está presente em sua totalidade na área retangular escura, a ideia é garantir a leitura da caneta pelo wiimote em qualquer ponto da tela.

b) Utilização de rastreamento (tracking utilization): essa informação possibilita analisar se toda a resolução da câmera do Wii está sendo utilizada, de acordo com a área de projeção capturada na calibração. Logicamente, quanto maior a porcentagem, melhores são os níveis de interação na LDBC.

3. Janela Informações de Conexão: é responsável por permitir o compartilhamento e a interação das ações da lousa com outros dispositivos (tablets, smartphones, por exemplo). Através dessa ferramenta, conforme Figura 10, os alunos podem obter um endereço IP diretamente ou por um QR code fornecido pelo programa. Ao acessar esse endereço IP em seus navegadores e incluírem o número PIN informado, seus dispositivos irão firmar uma conexão com a LDBC. Daí, todas as atividades realizadas na lousa serão simultaneamente vistas em seus dispositivos e, não só isso, os alunos poderão interagir individualmente com seus dispositivos, pois suas modificações serão também refletidas na LDBC. A exibição ou ocultação da janela Informações de Conexão se dá pelo botão Connecting Info, da janela principal, Figura 7.

Figura 10. QR Code



Fonte: Os autores

Esse compartilhamento com outros dispositivos pode ser restringido através do Painel de Controle de Acesso. Para acessá-lo o usuário deve clicar em Hide Settings na janela principal, guia General, aba Mobile Access, botão Access Control Panel. Também é possível iniciar ou parar o compartilhamento através dos botões Start ou Stop, respectivamente, presentes na janela principal.

4. Acompanhamento dos níveis de bateria: essa é outra ferramenta de grande utilidade por permitir ao usuário a verificação constante dos níveis de bateria do wiimote. Com isso, o

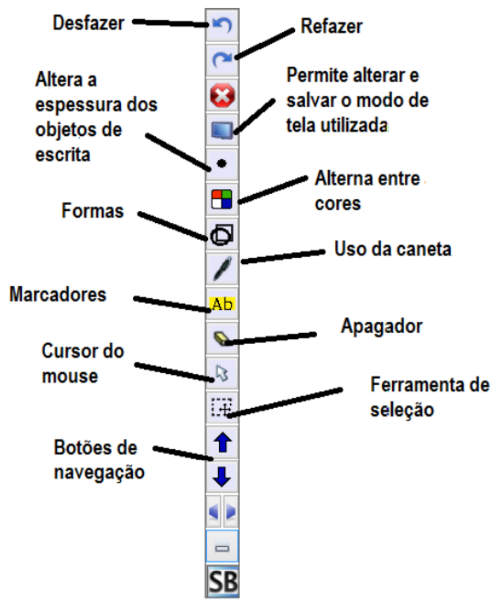
usuário consegue se planejar para realizar a troca das pilhas e evitar interrupções, durante suas apresentações na LDBC.

Uma vez preparado todo o cenário para implementação do programa da lousa digital de baixo custo, chegou o momento de o usuário conhecer melhor as ferramentas práticas disponíveis. Para isso, daremos um enfoque na Barra de Ferramentas Flutuante, cujo objetivo é auxiliá-lo nas atividades desenvolvidas na lousa.

O Aspecto Prático do software

Tida como uma ferramenta para auxiliar nas ações do usuário na LDBC, a Barra de Ferramentas Flutuante traz à tona um grande diferencial no aspecto prático da lousa digital, quando comparada ao quadro ou lousa comum. Essa barra envolve ferramentas desde as mais tradicionais, como a caneta e o apagador, até as mais sofisticadas, como desfazer, refazer, reduzir, aumentar ou mover objetos na lousa, onde as ações podem ser todas registradas e impressas para o público-alvo. A Figura 11 traz uma melhor visão sobre essa barra:

Figura 11. Barra de ferramentas



Fonte: Os autores

A seguir, iremos destacar as principais funcionalidades dessa barra:

1. Divisão de tela: com essa ferramenta é permitida a interação de duas pessoas simultaneamente na lousa, cada um com sua caneta de infravermelho. Em uma sala de

aula, por exemplo, os alunos podem resolver, paralelamente, um determinado problema proposto na lousa e partilhar ou discutir as diferentes soluções atingidas. Em uma apresentação, dois usuários podem expor, simultaneamente, ideias opositivas e permitirem uma comparação do público, vislumbrando uma tomada de decisões. Com isso, abre-se um leque de opções e ideias para o estímulo à colaboração entre os membros de um grupo qualquer. Esse recurso pode ser acessado a partir da barra de ferramentas flutuante, botão tela, Figura 11.

2. Comentando, marcando e manipulando comentários e marcações em documentos ou apresentações: os botões apagador, marcador, selecionar e caneta são ferramentas capazes de enriquecer o conteúdo explorado, pois se sobrepõem a qualquer objeto presente na tela e criam a sensação de manuseio de uma lousa comum munida de alguns recursos. Com eles é possível destacar pontos chaves, comentar em apresentações de slides, selecionar, mover e apagar comentários, criando uma série de observações que podem ser salvas e compartilhadas com o público-alvo.

3. Instantâneo de parte ou de todas as ações na lousa: essa ferramenta auxilia o usuário a manter um histórico das observações realizadas no item anterior, durante uma apresentação ou aula interativa. Além disso, unidas aos recursos de partilhar e imprimir as ações na lousa dispensa o ato de escrever e possibilitam aos alunos maior concentração e participação no seu aprendizado e dos demais colegas.

4. O botão grade: obtido a partir da expansão do botão tela, na barra de ferramentas flutuante, Figura 11, este botão possibilita a inserção de linhas verticais e horizontais na lousa comum. Com isso, é possível explorar conceitos de áreas de figuras geométricas ou realizar um estudo de gráficos em um sistema de eixo previamente construído (o botão forma auxilia na construção dos eixos direcionais).

Dessa forma, observamos que a LDBC fornece uma série de benefícios para a sala de aula, que podem ser complementados, pelo professor, com outros aplicativos específicos, seja para o estudo da geometria (como é o caso do Geogebra), para conversão da escrita manual para digital, tornando a escrita mais legível (Ferramenta de Inserção de Texto - Plugin do Google Chrome), dentre outras ferramentas disponíveis na plataforma Windows ou na própria Web.

Aplicabilidade da Construção da Lousa Digital na Sala de Aula

No entanto, os benefícios da construção de uma Lousa Digital própria, na sala de aula, não se restringem apenas ao seu baixo custo, mas também à compreensão do potencial existente por trás da ferramenta para a exploração de conteúdos matemáticos.

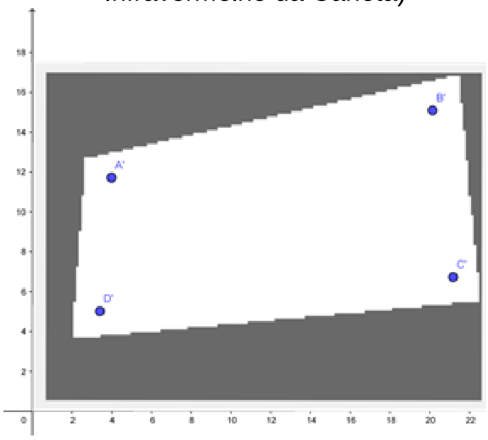
Nesse sentido, a nossa Base Nacional Comum Curricular revela a importância em aplicar a matemática em diferentes contextos e enaltece o uso das tecnologias digitais como meio para investigação matemática, sendo competência específica do currículo de Matemática e suas Tecnologias:

> “Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.” (BRASIL,2018, p. 534).

Nossa proposta, aqui, é utilizar o processo de calibração, realizado pelo software, como um meio de aplicar a matemática em turmas do ensino médio e trazer para o estudante a possibilidade de ser parte do processo de construção da sua própria Lousa Digital, pensando como desenvolvedores.

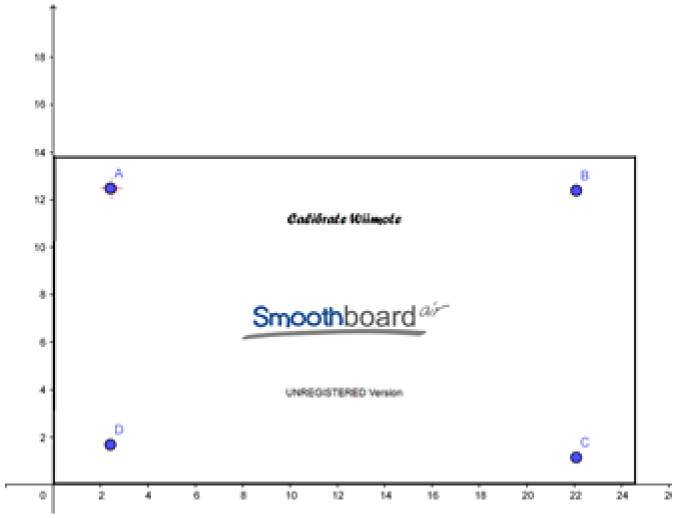
Na verdade, a calibração do wii remote consiste especificamente em um mapeamento de 4 pontos do plano físico (plano do infravermelho da caneta) para o plano virtual (plano do cursor do mouse). Esse processo de sincronização entre os dois planos (físico e virtual) é realizado por meio de uma técnica matemática chamada de Transformação Geométrica. Graças a essa técnica é possível mover a caneta e o cursor ao mesmo tempo e no mesmo ponto na tela de projeção. Nas Figuras 12 e 13 podemos observar que aos pontos A’, B’, C’ e D’ do plano físico correspondem, respectivamente, os pontos A, B, C e D do plano virtual.

Figura 12: Plano Físico (Visão do Wii Remote do Plano do Infravermelho da Caneta)



Fonte: autores

Figura 13: Plano Virtual (Plano do Cursor do Mouse)

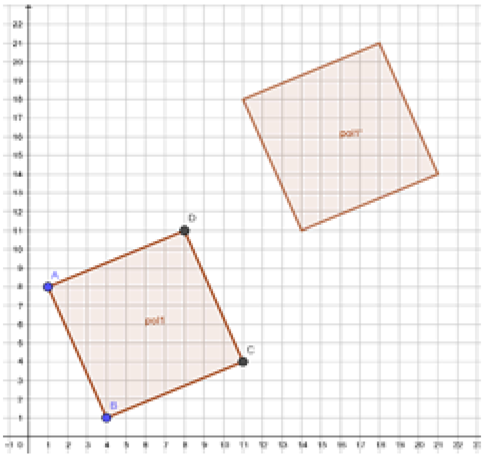


Fonte: Os autores

Mas o que seria uma transformação geométrica? Uma Transformação Geométrica é "uma correspondência, um a um, entre pontos de um mesmo plano ou de planos diferentes.". Isto é, para cada ponto do plano físico corresponde um único ponto do plano virtual.

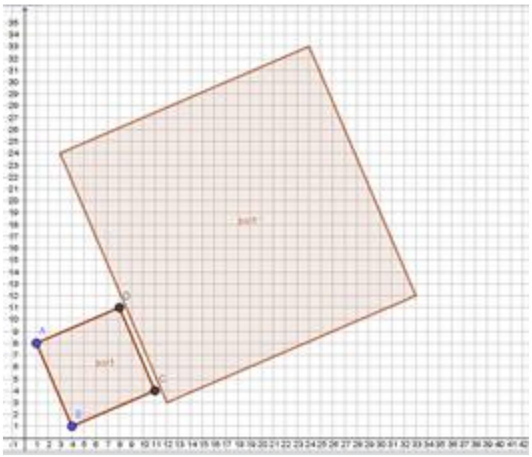
Abaixo ilustraremos alguns tipos de transformações geométricas produzidas no software Geogebra e que podem ser exploradas em sala de aula:

Figura 14: Translação



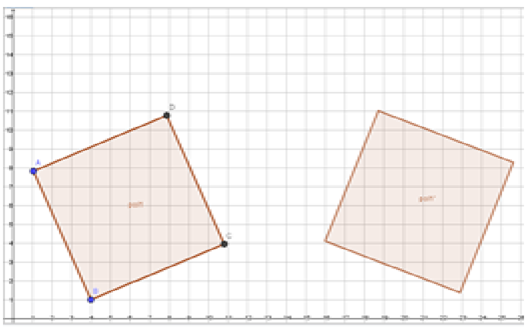
Fonte: Os autores

Figura 15: Homotetia



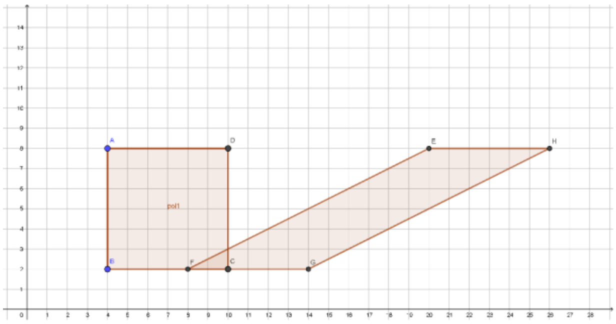
Fonte: Os autores

Figura 16: Rotação



Fonte: Os autores

Figura 17: Cisalhamento



Fonte: Os autores

Essas transformações possibilitam a exploração de conteúdos como matrizes e determinantes, sistemas lineares, funções, dentre outros. Com isso, conseguimos unir Álgebra e Geometria concretizando conteúdos que por muito tempo foram entendidos como essencialmente abstratos.

Transformação Geométrica é uma técnica matemática muito utilizada na computação gráfica para transformar figuras em outras (especificamente transladar, refletir, rotacionar, dilatar), em um mesmo plano ou em planos distintos, por meio de uma correspondência biunívoca com a figura original. A título de conhecimento, sugerimos a leitura do livro Hartley e Zisserman (2004)

Outras situações, onde é possível encontrar transformações geométricas são:

- Em uma maquete de um prédio a ser construído;
- Nas escalas utilizadas na produção de mapas;
- No layout de um projeto para elaboração de circuitos elétricos ou hidráulicos de uma casa;
- No projeto para criação de móveis em uma marcenaria;
- Dentre outras.

A própria Base Nacional Comum Curricular entende as transformações geométricas como habilidade para a área de Matemática e suas Tecnologias:

> (EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras). (BRASIL, 2018, p.535).

As transformações isométricas e homotéticas são, na verdade, tipos de transformações geométricas, a primeira (isométrica) trata das transformações que preservam a mesma distância entre os pontos da figura original, enquanto a segunda (homotética) trata das transformações entre figuras semelhantes, onde uma é uma ampliação ou redução da outra, muito utilizada em escalas.

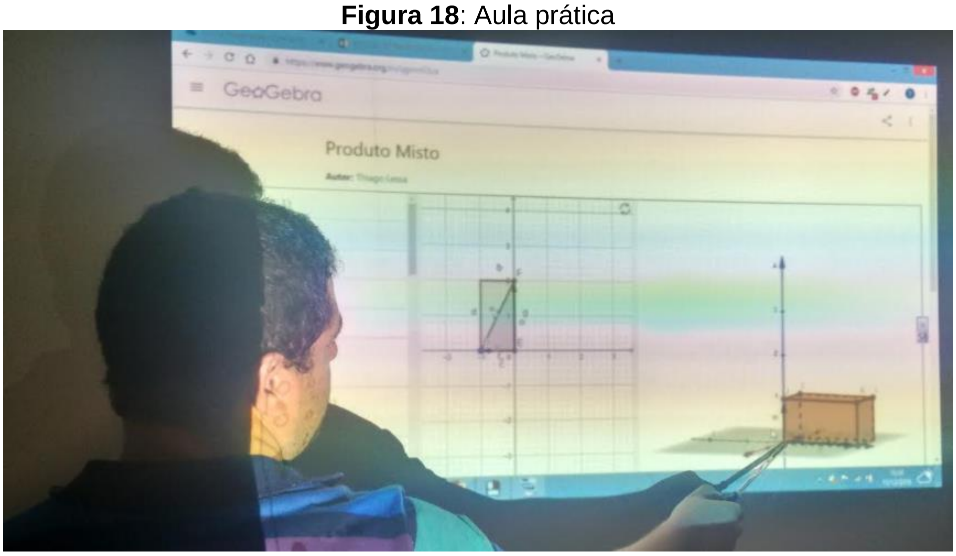
Com isso, o professor tem um leque de possibilidades e estratégias que podem ser exploradas, cujo produto, a Lousa Digital de Baixo Custo, é uma ferramenta colaborativa e com grandes recursos para o aprendizado da matemática na sala de aula, tanto durante, quanto após o seu processo de criação.

Considerações Finais

Finalizamos o trabalho do PROFMAT demonstrando a aplicabilidade da Lousa Digital como recurso educacional de baixo custo em aulas de diferentes níveis, mas o que nos chamou mais a atenção foi a facilidade com que os próprios estudantes conseguiam reproduzir a adaptar o uso da LD em suas próprias casas. A possibilidade de interagir nas aulas contribuindo dinamicamente na tela que o professor projetava foi outro ganho que merece destaque aqui.

A imagem que compartilhamos abaixo é uma situação real onde um dos autores ministrava aula fazendo uso dos recursos construídos por ele mesmo.

Figura 18: Aula prática



Fonte: autores

Destacaremos a seguir algumas dificuldades enfrentadas durante a construção do projeto e utilização em sala de aula.

Para construir a caneta de IR, por exemplo, um LED de um controle velho de TV e um botão reset de um roteador (não mais utilizados e em funcionamento), podem ser uma alternativa mais acessível para os professores, já que encontrar um LED específico, com boa potência e ângulo de projeção, não é tarefa das mais simples. O LED Vishay TSAL 6400, cujas especificações seriam mais adequadas para o projeto, não é tão simples de encontrar e o frete, a depender da região, pode acabar deixando o produto superfaturado. Uma solução para quem deseja adquiri-lo seria comprar os componentes elétricos em maior quantidade, pensando em outros projetos, ou juntar-se com um grupo de amigos com o mesmo interesse.

Por outro lado, escolha o melhor ambiente possível para sua Lousa Digital de Baixo Custo. Se o seu LED ficar mais visível ao posicionar de maneira direta para o wiimote, isto é, possuir um pequeno ângulo de propagação, então aposte em superfícies escuras ou bem pouco iluminadas. Quanto menos interferência externa você tiver no seu projeto, melhores serão os resultados.

Por último, como todo processo de mudança e evolução, a LDBC exige uma adaptação do professor não somente no uso do software, mas também na escrita com a caneta de infravermelho, no movimento de construção dos objetos geométricos, que podem ser aperfeiçoados com o tempo.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018. [Online; Acesso em: 08-setembro-2021]. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>

HARTLEY, R.; ZISSERMAN, A. Multiple view geometry in computer vision. Second edition. Nova Iorque, USA: Cambridge University Press, 2004.

HERVÁS, C. T.; GONZÁLES, P.; CARMEN, M. La utilización conjunta de la pizarra digital interactiva y el sistema de participación senteo: una experiencia universitaria. Pixel-Bit, Revista de Medios y Educación, Universidad de Sevilla, Sevilla, España., n. 36, p. 203–214, 2010.

LEE, J. C. Projetos Wii. 2018. [Online; Acesso em: 27-agosto-2021]. Disponível em: http://johnnylee.net/.

REIS, A. Q. M. A contextualização da matemática como princípio educativo no desenvolvimento do pensamento teórico: exploração de contextos no movimento do pensamento em ascensão do abstrato ao concreto. 2017. Tese (Doutorado em Educação nas Ciências) - Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí, RS, 2017.

NOTAS

IDENTIFICAÇÃO DE AUTORIA
Thiago Lessa dos Santos Melo. Mestre em Matemática pela Universidade Federal de Alagoas (UFAL). Instituto Federal de Alagoas (IFAL), Maceió, AL, Brasil.
E-mail: thiago.melo@ifal.edu.br
https://orcid.org/0000-0001-6204-9318

Isnaldo Isaac Barbosa. Doutor em Matemática pela Associação UFAL-UFBA, Instituto de Matemática UFAL. Professor Adjunto. Universidade Federal de Alagoas, Maceió, AL, Brasil.
E-mail: isnaldo@pos.mat.ufal.br
https://orcid.org/0000-0003-3147-1780

Arlyson Alves do Nascimento. Doutor em Matemática Aplicada. Professor EBTT - D IV. Instituto Federal de Alagoas (IFAL), Maceió, AL, Brasil.
E-mail: arlyson.nascimento@ifal.edu.br
https://orcid.org/0000-0002-0631-3273

AGRADECIMENTOS
O primeiro autor agradece aos professores Dr. Arlyson e Dr. Isnaldo, coautores do trabalho, pelo incentivo e participação no projeto.

FINANCIAMENTO
Não se aplica.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Não se aplica.

EDITORES
Patricia Helena Mirandola Garcia, Eugenia Brunilda Opazo Uribe, Gerson dos Santos Farias.

HISTÓRICO
Recebido em: 21/08/2021 – Aprovado em: 23/11/2021 – Publicado em: 15/12/2021.

COMO CITAR
MELO, T. S. L; BARBOSA, I. I; NASCIMENTO, A. A. Processo de Construção e Calibração de uma Lousa Digital de Baixo Custo. **Revista ENSIN@ UFMS**, Três Lagoas, v. 2, número especial, p. 354-373. 2021.

A MATEMÁTICA DO QR CODE

THE QR CODE'S MATH

Alberto Renan Dias da Silva[1]
Silas Fantin[2]

RESUMO: O artigo é um recorte da dissertação de conclusão do Mestrado Profmat desenvolvido na Universidade Federal do Rio de Janeiro (UNIRIO), apresentada em Agosto de 2021 (SILVA, 2021). O objetivo deste trabalho é mostrar que códigos podem ser utilizados nas aulas de matemática básica com a finalidade de manter os alunos interessados na disciplina e desenvolvermos alguns conteúdos de forma concreta, com a finalidade de trazer a realidade para dentro da sala de aula. Mostraremos aqui as características dos QR codes e como eles podem ser relacionados com conteúdos matemáticos, algumas maneiras de criarmos e lermos um QR code. Apresentaremos também atividades de aplicação em sala de aula que envolvam o tema deste trabalho.

PALAVRAS-CHAVE: Tecnologia. QR Code. Atividades.

ABSTRACT: The article is an excerpt from the Profmat Master's thesis concluded at the Federal University of Rio de Janeiro (UNIRIO), presented in August 2021. The objective of this work is to show which codes can be used in basic mathematics classes in order to maintain students interested in the discipline and develop some content in a concrete way, with the purpose of bringing reality into the classroom. Here we will show the characteristics of QR codes and how they can be related to mathematical content, some ways we can create and read a QR code. We will also present application activities in the classroom that involve the theme of this work.

KEYWORDS: Technology. QR Code. Activities.

Introdução

O Código de Barras foi criado há mais de 70 anos onde a necessidade de automação na hora da venda de produtos em supermercados fez com que o CEO de uma grande rede procurasse um aluno do Instituto de Tecnologia Drexel (atual Universidade Drexel), na Filadélfia em 1948. A ideia era ter uma identificação do produto na hora em que o mesmo passasse no caixa, facilitando e agilizando as vendas. Segundo o site GS1BR, os alunos Bernard Silver e Joseph Woodland trabalharam juntos e desenvolveram vários tipos de códigos até chegarem no código de barras. Mas apenas vinte anos depois a evolução da tecnologia permitiu que fosse desenvolvido um leitor prático para a aplicação dos códigos de barras em supermercados. Já o QR code foi criado em 1994 pela empresa Denso Wave, uma subsidiária da Toyota, que produzia peças de automóveis, com o intuito de ter um código à mão que pudesse conter as características das peças produzidas.

[1] Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro. E-mail: alberto.renan.dias@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-4889-9532
[2] Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro. E-mail: silas.fantin@uniriotec.br
https://orcid.org/0000-0002-2183-6806

● Informações completas da obra no final do artigo

Uma grande diferença entre o código de barras e o QR Code é que o segundo código possui a licença livre tal qual qualquer empresa pode utilizá-lo livremente, ao contrário do código de barras que é gerenciado por uma empresa no mundo todo.

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma proposta de abordagem sobre o QR Code para professores da Educação Básica, com o propósito de inseri-lo nas aulas de matemática trazendo seu contexto histórico e cultural como forma de um agente lúdico para melhor desenvolvimento dos conteúdos e mostraremos algumas aplicações no dia a dia. "Utilizar dispositivos móveis (celular) e o aplicativo QR Code como recurso pedagógico para potencializar o ensino e aprendizagem da matemática" (PINTO; FELCHER; FERREIRA, 2016, p. 5).

No decorrer do texto será necessária a compreensão sobre notação binária, como, por exemplo, o número 5 em binário é representado por $(101)_2$, e no desenvolvimento sobre o QR code mostraremos como reconhecer alguns padrões associados ao código e suas funções, exporemos também algumas maneiras de ler um QR code com o auxílio de um aparelho celular.

A ideia é criar uma linha de conhecimento acerca do QR Code para embasar o foco deste trabalho que será um conjunto de atividades que poderão ser desenvolvidas em sala de aula do Ensino Básico, que, segundo Silva e Bezerra (2016), pode diminuir a dificuldade dos alunos com relação a matérias ministradas pelos educadores.

Como funciona o QR Code

Neste trabalho utilizaremos como modelo de estudo o QR Code Model 2 Version 1, embora haja outras variações do QR code, como o iQR Code e o Micro QR Code. Neste capítulo vamos mostrar suas subdivisões, quais os seus elementos e funções. Pode parecer à primeira vista ser de difícil compreensão a mecânica envolvida na sua construção, mas mostraremos passo a passo cada detalhe envolvido neste código mensageiro.

Quantidade de pixels

O QR Code é um quadrado subdividido em pequenos quadradinhos chamados pixels, que vão nos dar uma noção da capacidade de armazenagem de informação que a imagem terá. Um código é separado em versões e possui de 21×21 = 441 pixels na versão 1 até 177×177 = 31329 pixels na versão 40 (versão máxima).

Figura 2: Versão 1 e Versão 40.

Fonte: autores.

Acima podemos ver a diferença de tamanho entre a menor e a maior versão do código QR e abaixo temos uma tabela com todas as versões do QR e seus respectivos pixels (linha x coluna). Note que a quantidade de pixels por versão cresce de quatro em quatro.

Tabela 1: quantidade de pixels.

Versão	Pixels	Versão	Pixels	Versão	Pixels	Versão	Pixels
1	21x21	11	61x61	21	101x101	31	141x141
2	25x25	12	65x65	22	105x105	32	145x145
3	29x29	13	69x69	23	109x109	33	149x149
4	33x33	14	73x73	24	113x113	34	153x153
5	37x37	15	77x77	25	117x117	35	157x157
6	41x41	16	81x81	26	121x121	36	161x161
7	45x45	17	85x85	27	125x125	37	165x165
8	49x49	18	89x89	28	129x129	38	169x169
9	53x53	19	93x93	29	133x133	39	173x173
10	57x57	20	97x97	30	137x137	40	177x177

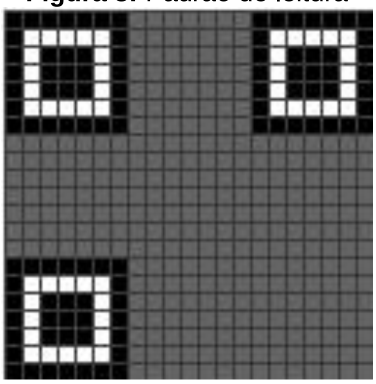
Fonte: autores.

Neste trabalho utilizaremos a versão 21x21 do QR Code como base para a maioria dos exemplos, já que é a menor delas e mais simples e com isso facilitará a explicação e o entendimento dos leitores e que ao falarmos de um determinado bit (10, 16), por exemplo, estamos falando sobre o bit da linha 10 e coluna 16.

Padrão de localização

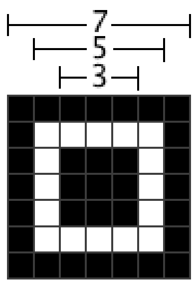
Uma forma de identificar um QR Code é olhando os padrões que ficam em três dos quatro cantos do quadrado, esses padrões distintivos possuem o mesmo tamanho e aparecem em qualquer tipo de QR Code para detectar a posição de rotação da imagem.

Figura 3: Padrão de leitura



Fonte: Thonky, 2021.

Figura 4: Pixels do padrão



Fonte: Thonky, 2021

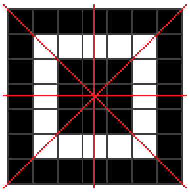
Esta é a posição padrão do QR Code, um padrão no vértice esquerdo inferior, um padrão no vértice esquerdo superior e um padrão no vértice direito superior, com isso, o leitor de código, por exemplo a câmera do celular, consegue fazer a leitura mesmo se a imagem estiver rotacionada. Outra função do padrão é determinar o tamanho do pixel. Cada padrão é formado por 7×7 pixels, ou seja, são 49 pixels divididos em 3 grupos.

- Grupo preto externo com 24 pixels;
- Grupo branco com 16 pixels;
- Grupo preto interno com 9 pixels.

Segundo ISO/IEC 18004, o padrão de localização foi feito para ser um padrão que provavelmente não aparecerá nas outras seções do QR Code. As larguras dos módulos do padrão do localizador têm uma proporção de 1: 1: 3: 1: 1. Os leitores de QR Code podem pesquisar essa proporção de módulos claros para escuros para detectar os padrões do localizador e orientar corretamente o QR Code para decodificação.

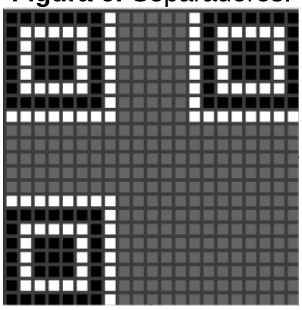
A imagem na Figura 5, abaixo mostra a proporção citada, com as linhas vermelhas mostrando a seguinte sequência de pixels em qualquer direção: 1 preto - 1 branco - 3 pretos - 1 branco - 1 preto.

Figura 5: Padrão 1:1:3:1:1.



Fonte: autores.

Figura 6: Separadores.



Fonte: Thonky, 2021.

Separadores

Os chamados separadores (Figura 6) são linhas brancas que são colocadas ao lado dos padrões distintivos para separá-los do restante do QR Code.

A função deste elemento do código é separar o padrão do restante do código, dando destaque aos três padrões citados na seção anterior e evitar erros de leitura. São compostas de três partes em formatos de L e cada parte é formada por 15 pixels brancos.

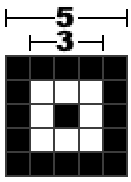
Padrão de alinhamento

QR Codes cuja imagem é muito grande precisam de um padrão de alinhamento para orientar o programa a fazer a leitura. Esse padrão é composto por um quadrado de tamanho $5 \times 5 = 25$ pixels também subdividido em três grupos.

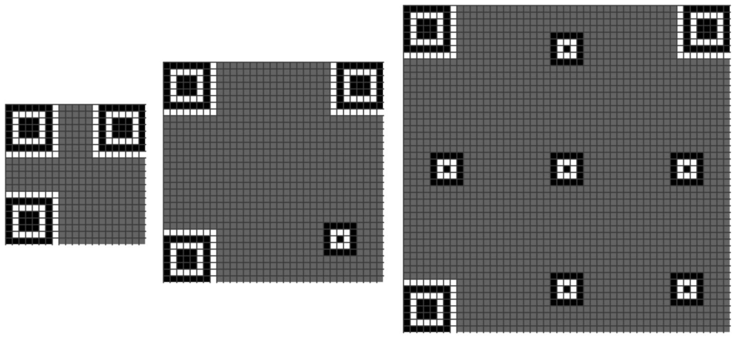
- Grupo preto externo com 16 pixels;
- Grupo branco com 8 pixels;
- Grupo preto interno com 1 pixel.

Figura 7: Estrutura de alinhamento.

Figura 8: Estrutura de alinhamento no QR Code.



Fonte: Thonky, 2021.



Fonte: autores.

Na versão 1 (21×21), que é o foco deste texto, esse elemento da estrutura do código não aparece, conforme abaixo.

Na Figura 8, temos três versões do QR Code que são versão 1 (21x21), versão 4 (33x33) e versão 8 (49x49), note que quanto maior for a versão do QR Code maior será a quantidade de estruturas de alinhamento para orientar o escâner.

Este padrão possui uma localização específica dentro de cada QR Code dependendo de sua versão, vide tabela a seguir.

Tabela 2: coordenadas dos padrões de alinhamento.

Versão	Linha e coluna				Versão	Linha e coluna						
QR Versão 2	6	18			QR Versão 21	6	28	50	72	94		
QR Versão 3	6	22			QR Versão 22	6	26	50	74	98		
QR Versão 4	6	26			QR Versão 23	6	30	54	78	102		
QR Versão 5	6	30			QR Versão 24	6	28	54	80	106		
QR Versão 6	6	34			QR Versão 25	6	32	58	84	110		
QR Versão 7	6	22	38		QR Versão 26	6	30	58	86	114		
QR Versão 8	6	24	42		QR Versão 27	6	34	62	90	118		
QR Versão 9	6	26	46		QR Versão 28	6	26	50	74	98	122	
QR Versão 10	6	28	50		QR Versão 29	6	30	54	78	102	126	
QR Versão 11	6	30	54		QR Versão 30	6	26	52	78	104	130	
QR Versão 12	6	32	58		QR Versão 31	6	30	56	82	108	134	
QR Versão 13	6	34	62		QR Versão 32	6	34	60	86	112	138	
QR Versão 14	6	26	46	66	QR Versão 33	6	30	58	86	114	142	
QR Versão 15	6	26	48	70	QR Versão 34	6	34	62	90	118	146	
QR Versão 16	6	26	50	74	QR Versão 35	6	30	54	78	102	126	150
QR Versão 17	6	30	54	78	QR Versão 36	6	24	50	76	102	128	154
QR Versão 18	6	30	56	82	QR Versão 37	6	28	54	80	106	132	158
QR Versão 19	6	30	58	86	QR Versão 38	6	32	58	84	110	136	162
QR Versão 20	6	34	62	90	QR Versão 39	6	26	54	82	110	138	166
					QR Versão 40	6	30	58	86	114	142	170

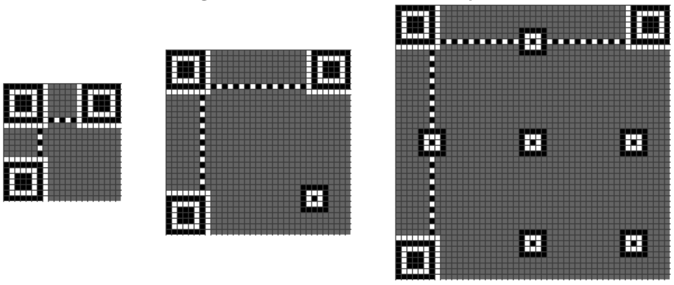
Fonte: autores.

Os números no lado direito desta tabela devem ser usados como ambas as coordenadas de linha e coluna. Por exemplo, a versão 2 tem os números 6 e 18. Isso significa que os centros dos padrões de alinhamento devem ser colocados em (6, 6), (6, 18), (18, 6) e (18, 18). A versão 1 não possui este elemento, por isso a sua ausência na tabela, e a versão 40 possui 46 padrões de alinhamento pois sempre são removidos os padrões que se sobrepuserem aos padrões de localização ou separadores.

Padrões de tempo

Esta parte do código é formada por duas linhas que são feitas de pixels de cores alternadas, sempre começando e terminando por um pixel preto.

Figura 9: Padrão de tempo.



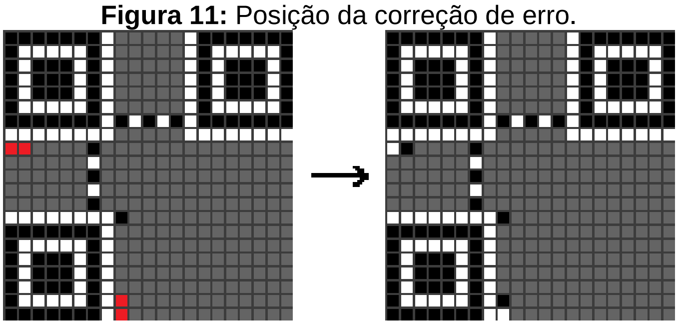
Fonte: Thonky, 2021.

Esta estrutura sempre é colocada na sexta coluna da esquerda para a direita e na sexta linha de cima para baixo. Isso permite ao programa leitor confirmar a versão do código assim como o tempo de cada pixel ao longo da imagem além de auxiliar na percepção do posicionamento das linhas e colunas.

Correção de erro

O próximo item da estrutura da imagem é onde fica armazenado o nível de correção de erro que será adotado na construção dos dados. Cada nível de correção de erro reserva uma parte do código para repetição dos dados da imagem, a fim de corrigir qualquer falha de leitura da mensagem original ou parte do código que esteja faltando ou danificada. Este elemento ocupa dois bits da mensagem e fica posicionado na parte vermelha da imagem, como mostrando na figura 11, a seguir.

Figura 11: Posição da correção de erro.



Fonte: autores.

Acima, vemos a posição onde esses pixels dever ser marcados (em vermelho) e, ao lado, vemos um QR Code com o nível L de correção de erro.

São quatro níveis de correção a serem escolhidos (L, M, Q, H).

Tabela 3: Correção de erro.

NÍVEL DE CORREÇÃO DE ERRO	BITS	PIXELS	INTEIRO EQUIVALENTE
L (LOW)	01	■□	**1**
M (MEDIUM)	00	□□	**0**
Q (QUARTILE)	11	■■	**3**
H (HIGH)	10	□■	**2**

Fonte: autores.

Note, na tabela 3 acima, que os valores associados aos níveis de correção de erro não seguem a ordem dos números inteiros. Os níveis de correção de erro estão ordenados do menor para o maior nível, porém os valores inteiros equivalentes seguem a ordem 1, 0, 3 e 2. A figura 12 abaixo nos mostra um exemplo de como mesmo a imagem do QR Code sendo danificada ainda será possível ler a mensagem contida nele.

Veja a tabela 4 abaixo com as porcentagens aproximadas de redundância da mensagem.

Figura 12: QR Code danificado.

Fonte: Wikipedia, 2021.

Tabela 4: Porcentagem da correção de erro.

$$\boldsymbol{L(LOW) \approx 7\%}$$
$$\boldsymbol{M(MEDIUM) \approx 15\%}$$
$$\boldsymbol{Q(QUARTILE) \approx 25\%}$$
$$\boldsymbol{H(HIGH) \approx 30\%}$$

Fonte: autores.

Tipos de dados armazenado

Os quatro primeiros bits da mensagem do código são para identificar o tipo de caracteres contidos na informação, que são: numéricos, alfanuméricos, byte, kanji, ECI, entre outros, além da possibilidade de combinação de tipos. Vamos mostrar os cinco principais abaixo.

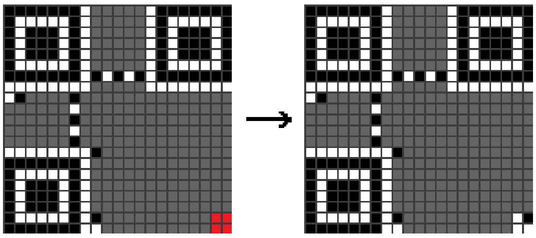
Tabela 5: Tipos de dados.

TIPO	BITS	PIXELS
NUMÉRICO	0001	
ALFANUMÉRICO	0010	
BYTE	0100	
KANJI	1000	
ECI	0111	

Fonte: autores.

Esses quatro bits ficam posicionados no canto inferior direito como podemos ver, a seguir, na figura 13.

Figura 13: Posição dos tipos de dados armazenados.



Fonte: autores.

Acima, à esquerda, vemos em vermelho os quatro bits destinados a este elemento e, à direita, vemos um QR Code preenchido com o tipo alfanumérico.

Segundo ISO/IEC 18004, os quatro modos de codificação incluem os seguintes caracteres:

O numérico é para dígitos decimais de 0 a 9.

O modo alfanumérico é para os dígitos decimais de 0 a 9, bem como letras maiúsculas e os símbolos $,%, *, +, -,., / e o espaço.

Tabela 6: Codificação alfanumérica.

0	0	F	15	U	30
1	1	G	16	V	31
2	2	H	17	W	32
3	3	I	18	X	33
4	4	J	19	Y	34
5	5	K	20	Z	35
6	6	L	21	Espaço	36
7	7	M	22	$	37

8	8	N	23	%	38
9	9	O	24	*	39
A	10	P	25	+	40
B	11	Q	26	-	41
C	12	R	27	.	42
D	13	S	28	/	43
E	14	T	29	:	44

Fonte: autores.

Na tabela acima, temos nas colunas em branco os caracteres supracitados e nas colunas em cinza os valores que cada caractere assumirá na codificação. Por exemplo, se um byte da mensagem carregar como informação a letra A então na sua codificação aparecerá o número 10. Todas as informações sobre bytes e codificações serão expostas nas seções a seguir.

O modo byte, por padrão, é para caracteres do conjunto de caracteres ISO-8859-1 (codificação de caracteres do alfabeto latino). No entanto, alguns scanners de QR Code podem detectar automaticamente se UTF-8 (tipo de codificação binária para caracteres) é usado no modo byte.

E, finalmente, o modo Kanji (Os kanji são caracteres da língua japonesa adquiridos a partir de caracteres chineses) é para caracteres de byte duplo do conjunto de caracteres Shift JIS, que é uma codificação de caracteres para o idioma japonês, originalmente desenvolvido por uma empresa japonesa chamada ASCII Corporation[3] em conjunto com a Microsoft.

Segundo ISO/IEC 18004, se a mensagem consistir apenas em dígitos decimais (0 a 9), será utilizado o modo numérico, se o modo numérico não for suficiente para cobrir toda a informação então será aplicado o modo alfanumérico conforme a tabela 10, se houver um caractere que não está na tabela anterior, mas pode ser codificado em ISO 8859-1, aplicar-se-á o modo byte ou, caso ainda seja necessário, a mensagem será codificada em modo Kanji.

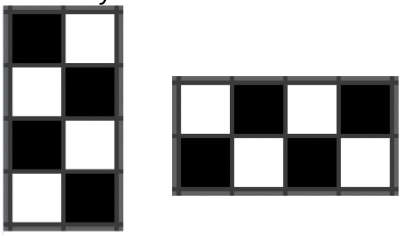
O modo Byte será decodificado pela tabela ASCII que possui 256 caracteres, e é o modo de codificação mais utilizado. Ele precisa de 8 bits para escrever um caractere.

Byte

Os bytes são responsáveis por carregar a mensagem contida na imagem do QR Code, são blocos de 8 bits, como mostra a figura 14, mas dependendo da versão e tipo de dados armazenados a quantidade de bits em um byte pode mudar. Neste trabalho iremos utilizar o 8-bit-byte, ou seja, os bytes de tamanho 8.

[3] A origem da tabela ASCII - Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/ASCII> Acesso em: 05 dez, 2021.

Figura 14: Bytes.



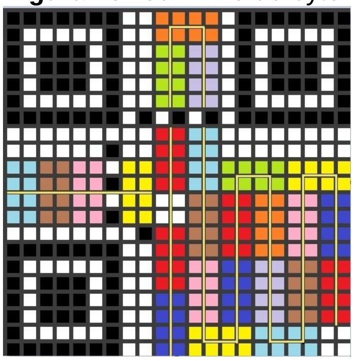
Fonte: autores.

Este elemento do QR Code pode aparecer na posição vertical (4 linhas e 2 colunas) ou horizontal (2 linhas e 4 colunas).

Por padrão, o primeiro byte do QR Code é responsável por carregar a informação sobre a quantidade total de bytes contidos na imagem, ou seja, se um QR Code carrega uma mensagem com 10 caracteres, a palavra "matemática" por exemplo, então o primeiro byte terá o número 11 como informação.

Os bytes da mensagem seguirão o padrão da imagem a seguir, sendo o primeiro byte (em vermelho) o que carrega a informação da quantidade total de bytes, e será alocado logo acima dos quatro primeiros bits no canto inferior direito.

Figura 15: Caminho do byte.



Fonte: autores.

A linha em dourado começa no primeiro byte (vermelho) e segue o caminho da informação dentro do QR Code, ou seja, o segundo byte está na cor azul-escuro, o terceiro na cor amarela e assim por diante, até chegar no último byte de cor azul-claro.
Veja a seguir a ordem dos bytes dentro da imagem nomeados pelas suas respectivas cores.

Tabela 7: Posições e cores dos bytes

1º	Vermelho	6 º	Azul Claro	11 º	Azul Escuro	16 º	Cinza	21 º	Azul
2 º	Azul Escuro	7 º	Cinza	12 º	Amarelo	17 º	Laranja	22 º	Amarelo
3 º	Amarelo	8 º	Laranja	13 º	Rosa	18 º	Verde	23 º	Rosa
4 º	Rosa	9 º	Verde	14 º	Marrom	19 º	Vermelho	24 º	Marrom
5 º	Marrom	10 º	Vermelho	15 º	Azul Claro	20 º	Vermelho	25 º	Azul Claro

Fonte: autores**.**

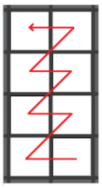
Note que, na figura 15, entre os 19º e 20º bytes existe um bloco com quatro bits brancos. Ele indica o fim da mensagem original, e após esse bloco a mensagem será repetida até que se complete todo o espaço restante do QR Code destinado aos bytes.

ISSN 2525-7056

Essa repetição é necessária para que o programa leitor possa fazer a restauração de alguma parte danificada do QR Code, como visto, na seção 1.7.

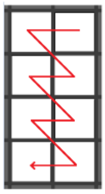
Dentro de cada byte, os bits serão alocados respeitando a ordem mostrada nas figuras 16 a 20, a seguir. Caso os bytes estejam sendo alocados no sentido de baixo para cima os bits serão alocados também de baixo para cima.

Figura 16: Caminho do bit 1.



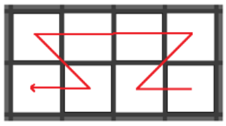
Fonte: autores.

Figura 17: Caminho do bit 4.



Fonte: autores.

Figura 18: Caminho do bit 3

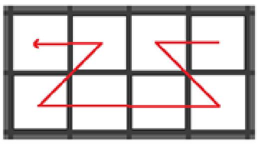


Fonte: autores.

Caso os bytes estejam sendo alocados de cima para baixo, os bits também serão alocados neste sentido.

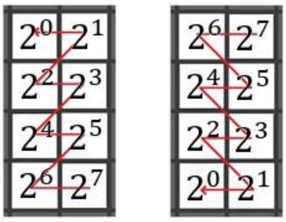
O byte também aparecerá na posição horizontal, com duas linhas e quatro colunas de bits, e será preenchido seguindo as orientações mostradas nas duas próximas figuras.

Figura 19: Caminho do bit 6.



Fonte: autores.

Figura 20: Potências de 2 nos bits



Fonte: autores.

Cada bit possuirá um valor diferente dentro dos bytes, sendo o primeiro bit o mais significativo e o último bit o menos significativo, conforme apresentado na Figura 20.

Exemplo:

Um byte terá como mensagem a letra “z” que na codificação do Modo Byte terá o valor de 01111010. Se sua escrita é de baixo para cima, como ficará o preenchimento?

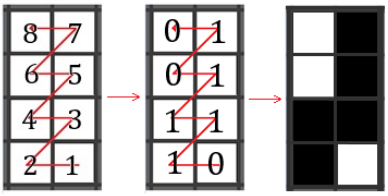
Primeiro, para facilitar, organizamos os bits de 1 a 8.

1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	1	1	1	0	1	0

Vamos agora preencher cada quadradinho da imagem a seguir, de acordo com a numeração da primeira linha da tabela anterior. De acordo com a segunda linha, cada bit que estiver relacionado com o dígito 1 será pintado de preto.

ISSN 2525-7056

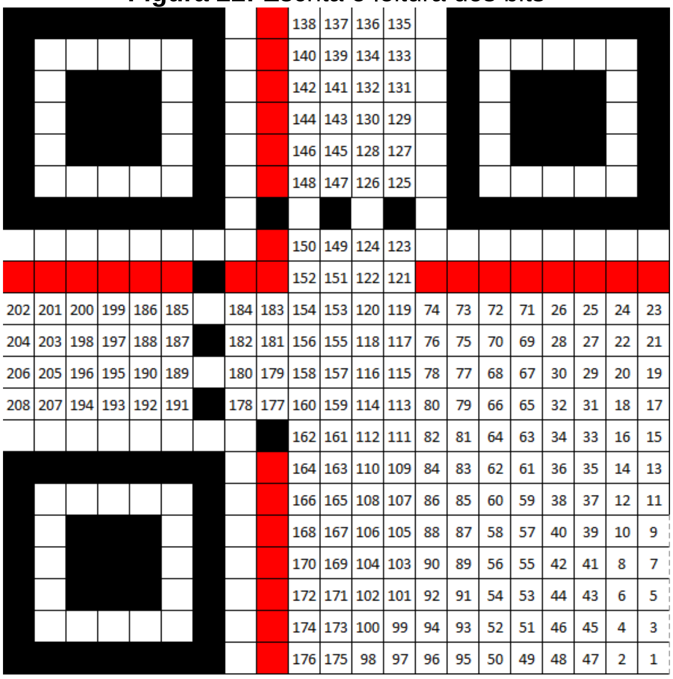
Figura 21: Completando um byte.



Fonte: autores.

A seguir, poderemos ter uma visão geral do comportamento de escrita e leitura dos bits na próxima figura.

Figura 22: Escrita e leitura dos bits



Fonte: autores.

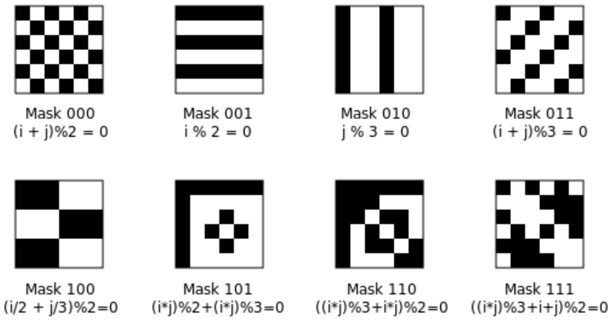
Iniciando pelo bit número 1 na parte inferior direita, que pertence ao bloco dos tipos de dados armazenados, a escrita da informação vai seguindo a ordem dos números naturais até atingir o último bit no número 208. Note que este tipo de escrita segue um padrão de "ziguezague" sempre alternando colunas.

Máscara

As máscaras têm como objetivo modificar a apresentação final do QR Code a fim de evitar grandes blocos de pixels de uma mesma cor, o que pode ocasionar dificuldades ao aplicativo leitor para escanear a imagem. Ela é uma camada de pixels que se sobrepõem ao código original, apenas a parte da mensagem. Além disso, ela evita a aparição do padrão de alinhamento "1011101" no corpo da mensagem. Abaixo temos os oito tipos de máscaras.

ISSN 2525-7056

Figura 23: Tipos de máscaras



Fonte: Wikimedia, 2021.

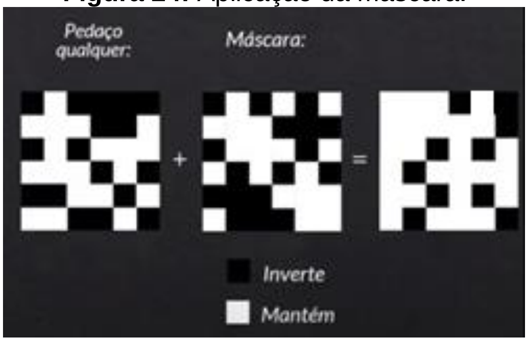
Cada máscara possui uma numeração que vai de 0 a 7 convertida para binário, como mostrado na imagem anterior.

Cada pixel da máscara tem uma função específica

- Pixel preto inverte a cor do pixel original.
- Pixel branco mantém a cor do pixel original.

Desta forma, se um pixel branco (ou preto) original do QR Code encontrar um pixel preto da máscara, o pixel mostrado na imagem final será preto (ou branco). Veja abaixo um exemplo.

Figura 24: Aplicação da máscara.



Fonte: Youtube 1, 2021.

Veja a seguir uma imagem contendo oito QR Codes onde foi codificada a mensagem "profmat 2021" e cada um foi sobreposto por um tipo de máscara diferente.

Figura 25: profmat 2021.

Fonte: autores.

ISSN 2525-7056

A partir daí surge uma pergunta, como o programa escolhe a máscara a ser utilizada?

O programa gerador do QR Code selecionará a imagem com a menor penalidade, sendo que as penalidades são definidas de quatro formas para melhor determinar a distribuição entre bits pretos e brancos.

Tabela 8: Penalidades.

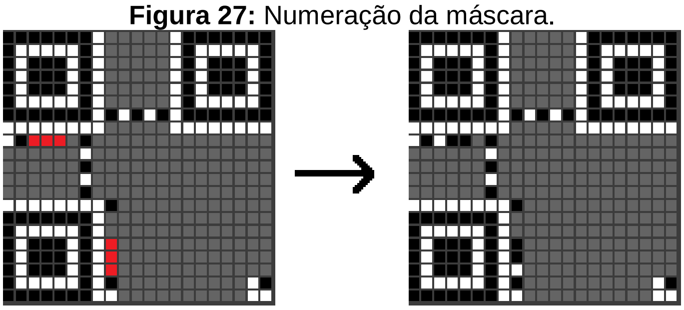
Penalidade	Característica	Condição	Pontos
1	Grupo de cinco ou mais bits da mesma cor em uma linha (ou coluna).	Número de bits $5 + i$	$3 + i$
2	Área de, pelo menos, 2×2 bits da mesma cor	Tamanho do bloco $m \times n$	$3 \times (m - 1) \times (n - 1)$
3	Existência da razão 1:1:3:1:1 que tenha quatro bits brancos em cada lado.	Existência do padrão	40
4	Proporção entre bits brancos e pretos	$50 \pm (5 \times k)\%$ a $50 \pm \big(5 \times (k+1)\big)\%$	$40 \times k$

Fonte: autores**.**

Na tabela acima k é o desvio da proporção de bits pretos em torno dos 50% esperados em passos de 5% e i é a quantidade de bits adjacentes de mesma cor que excede o valor 5.

Na figura 25 a máscara escolhida pelo programa foi a de valor 100 por possuir a menor penalidade entre todas. Cada máscara tem uma numeração de 3 dígitos e essa numeração ocupará os bits em vermelho na figura a seguir.

Figura 27: Numeração da máscara.



Fonte: autores.

Acima temos um QR Code com a máscara 011, ou seja, bits branco-preto-preto. A máscara é a última etapa a ser adicionada ao QR Code.

Após todos esses passos, o programa criador do QR Code irá, através de divisões polinomiais, codificar a informação de formato que terá 15 dígitos. A string de formato sempre tem 15 bits de comprimento.

> Para criar a string, primeiro você cria uma string de cinco bits que codifica o nível de correção de erros e o padrão de máscara em uso neste código QR. Em seguida, você usa esses cinco bits para gerar dez bits de correção de erro. Os quinze bits resultantes são XORed. (Thonky, 2021)

Abaixo temos a tabela completa com as 32 codificações possíveis através dos 4 tipos de nível de correção de erro (low, medium, quartile e high) e dos 8 tipos de máscaras possíveis numeradas de 0 até 7.

Tabela 9: Lista de todas as strings de informações de formato.

Nível de correção de erro	Padrão da Máscara	Tipo de bits de informação	Nível de correção de erro	Padrão da Máscara	Tipo de bits de informação
L	0	111011111000100	Q	0	011010101011111
L	1	111001011110011	Q	1	011000001101000
L	2	111110110101010	Q	2	011111100110001
L	3	111100010011101	Q	3	011101000000110
L	4	110011000101111	Q	4	010010010110100
L	5	110001100011000	Q	5	010000110000011
L	6	110110001000001	Q	6	010111011011010
L	7	110100101110110	Q	7	010101111101101
M	0	101010000010010	H	0	001011010001001
M	1	101000100100101	H	1	001001110111110
M	2	101111001111100	H	2	001110011100111
M	3	101101101001011	H	3	001100111010000
M	4	100010111111001	H	4	000011101100010
M	5	100000011001110	H	5	000001001010101
M	6	100111110010111	H	6	000110100001100
M	7	100101010100000	H	7	000100000111011

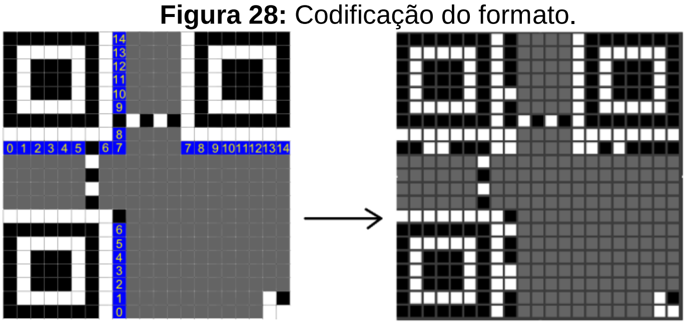
Fonte: autores.

Exemplo: Um QR Code com nível de correção de erro L e padrão de máscara 4 terá o número 110011000101111 como informação de formato de acordo com a tabela anterior. Numerando cada dígito, da esquerda para a direita, de 0 a 14 temos:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1

Na imagem a seguir poderemos ver o resultado final após o processo de escolha da correção de erro e da máscara e, enfim, a codificação do formato e o preenchimento de cada bit em azul de acordo com sua numeração. Note que os bits de 0 a 4 anteriormente preenchidos com o nível de correção e tipo de máscara serão sobrepostos pela nova numeração.

Figura 28: Codificação do formato.



Fonte: Thonky, 2021.

Aplicativos e sites de QR Code

Os novos smartphones já vem de fábrica com leitor de QR Code embutido na câmera do aparelho, porém, muitos ainda não possuem esta funcionalidade e, com isso, os usuários podem baixar alguns aplicativos gratuitos para a leitura. Veja abaixo alguns exemplos de apps.

Figura 29: Aplicativos de leitura de QR Code e Código de Barras.

Fonte: autores.

Esses aplicativos possuem as funções de criar e ler os códigos, além disso, alguns deles podem inserir logotipos nos QR Codes e muito mais. Alguns sites também disponibilizam essas funções gratuitamente.

- https://www.qrcodefacil.com/
- https://br.qr-code-generator.com/
- https://www.flowcode.com/
- https://br.qr-code-generator.com/

Outros sites disponibilizam até funções para fins de estudo onde é possível clicar na opção “Show Advanced Options” e escolher o tipo de máscara.

- https://www.thonky.com/qrcode/

Para criar um QR Code usando um aplicativo é fácil. Vamos utilizar o aplicativo QRTiger como exemplo. Na primeira imagem temos a página principal do aplicativo, clicando em “Texto” abre-se a segunda tela onde digitamos a mensagem desejada e clicamos em “GERAR CÓDIGO QR”. Na terceira imagem há opções de personalização do código, como cores, formatos do módulo, inserção de logotipo.

Figura 30: Criando um QR Code.

Fonte: autores.

Finalmente, clicamos em “Baixe gratuitamente” e a imagem será salva na galeria de fotos do celular. Veja abaixo um exemplo de QR Code personalizado feito como o passo a passo anterior.

Figura 31: QR Code customizado.

Fonte: autores.

Este possui personalizações como padrão de alinhamento, pixels em formatos diferentes e coloridos, e logotipo no centro.

Atividades em Sala de Aula

Neste capítulo vamos mostrar algumas atividades sugeridas para aplicação em sala de aula. Alguns dos exercícios são dos principais vestibulares nacionais e outros são de criação própria do autor sobre algumas características dos códigos que possam ser exploradas em uma turma.

Atividade 1. Um QR Code Model 2 é uma figura quadrada, pois cada linha e cada coluna possui a mesma quantidade de pixels (quadradinhos). Este modelo de QR Code é dividido em quarenta versões que vão de 1 a 40. Na Versão 1, temos 21 por 21 pixels totalizando 441 quadradinhos, na Versão 2, temos 25 por 25 e, para cada versão maior, a quantidade de pixels, por linha e coluna, aumenta sempre 4 unidades.

ISSN 2525-7056

Ao lado, vemos a Versão 1 (21x21 pixels), à esquerda, e a Versão 40 (177x177 pixels), à direita. Com base no crescimento da quantidade de pixels em um QR Code, podemos afirmar que é:

a) Linear
b) Exponencial
c) Quadrático
d) Logarítmico
e) N.R.A

Resolução:

Como foi dito no texto, partindo da Versão 1 (21x21), cada versão do QR Code aumenta de quatro em quatro a quantidade de pixels nas linhas e colunas.

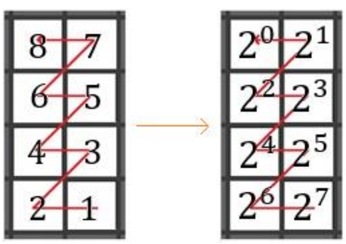
Versão1 - 21×21 – 441 pixels
Versão2 - 25×25 – 625 pixels
Versão3 - 29×29 – 814 pixels

Até

Versão40 - 177×177 – 31329 pixels

Logo, a quantidade de pixels em uma imagem de QR Code é sempre um quadrado perfeito e, com isso, seu crescimento ao longo das versões é quadrático.

Atividade 2. Em um QR Code, um byte pode ser um bloco de 8 bits (quadradinhos) que contém um caractere como mensagem cada. Cada bit pode receber a cor branca ou preta que correspondem, respectivamente, a zero ou um. Dentro de cada byte a pintura das cores correspondem a seguinte ordem.



Ao lado, vemos que o primeiro bit pintado corresponde a potência 2^7, o segundo a 2^6, e assim por diante até chegarmos a potência 2^0 que corresponde ao oitavo bit.
Vamos utilizar a tabela de codificação abaixo para consulta dos valores associados a cada caractere que utilizaremos.

Decimal	Caractere	Binário:	Decimal	Caractere	Binário:
48	0	00110000	105	i	01101001
49	1	00110001	106	j	01101010
50	2	00110010	107	k	01101011
51	3	00110011	108	l	01101100
52	4	00110100	109	m	01101101
53	5	00110101	110	n	01101110
54	6	00110110	111	o	01101111
55	7	00110111	112	p	01110000
56	8	00111000	113	q	01110001
57	9	00111001	114	r	01110010
97	a	01100001	115	s	01110011
98	b	01100010	116	t	01110100
99	c	01100011	117	u	01110101
100	d	01100100	118	v	01110110
101	e	01100101	119	w	01110111
102	f	01100110	120	x	01111000
103	g	01100111	121	y	01111001
104	h	01101000	122	z	01111010

Note que, a letra "a" está associada ao valor 97 que em binário corresponde a $(1100001)_2$,como este valor possui sete algarismos, adicionamos um caractere de valor zero à esquerda dele formando assim $(01100001)_2$. Pois, cada byte precisa ter "tamanho" de 8 bits.

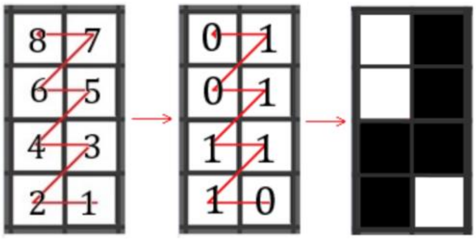
Agora, veja um exemplo de preenchimento de um byte.

Um byte terá como mensagem a letra "z" que na codificação do Modo Byte terá o valor de 01111010, se sua escrita é como foi mostrado anteriormente, como ficará o preenchimento?

Primeiro, para facilitar, organizamos os bits de 1 a 8, como a tabela a seguir.

1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	1	1	1	0	1	0

Vamos agora preencher cada quadradinho da imagem a seguir de acordo com a numeração da primeira linha da tabela anterior. Analisando a segunda linha, cada bit que estiver relacionado com o dígito 1 será pintado de preto.

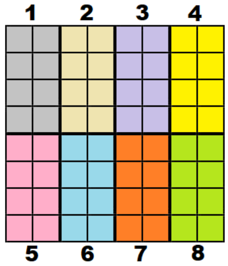


Agora, realizaremos a pintura de uma figura de 8 bytes com a mensagem "educador". Cada letra da palavra a ser codificada será associada ao byte cujo valor corresponde a sua posição dentro da palavra.

e (byte1), d (byte 2), u (byte 3), c (byte 4)

a (byte 5), d (byte 6), o (byte 7), o (byte 8)

ISSN 2525-7056



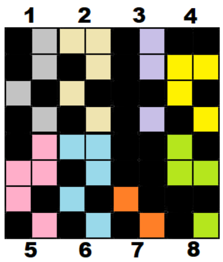
Os bits estão coloridos para facilitar a identificação de cada byte. Na resolução, vamos pintar apenas os bits de cor preta.

Resolução:

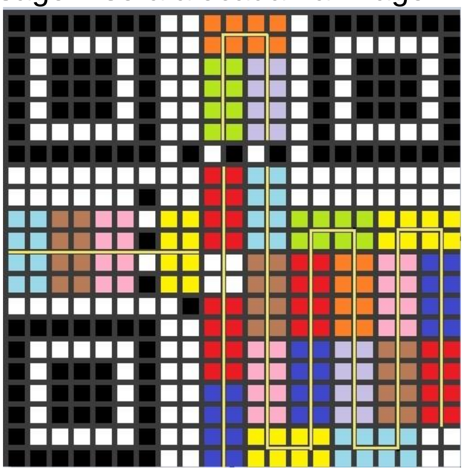
Primeiro verificamos o valor que cada letra está associada nos números decimais. Após isso fazemos a conversão de cada valor para binário. Veja a tabela a seguir.

e	101	01100101	a	97	01100001
d	100	01100100	d	100	01100100
u	117	01110101	o	111	01101111
c	99	01100011	r	114	01110010

Por último, cada letra será pintada seguindo a ordem posicional.



Atividade 4. O QR Code da versão 1 possui 21×21 = 441 pixels (bits), que são quadradinhos pretos ou brancos, sendo que o quadrado subdividido em quatro bits na parte inferior direita indica o conteúdo desta atividade que será letras e números no Modo Byte, nos bits 1, 2, 3 e 4, e serão marcados com os dígitos 0100, e a parte colorida indica onde a mensagem será alocada na imagem.

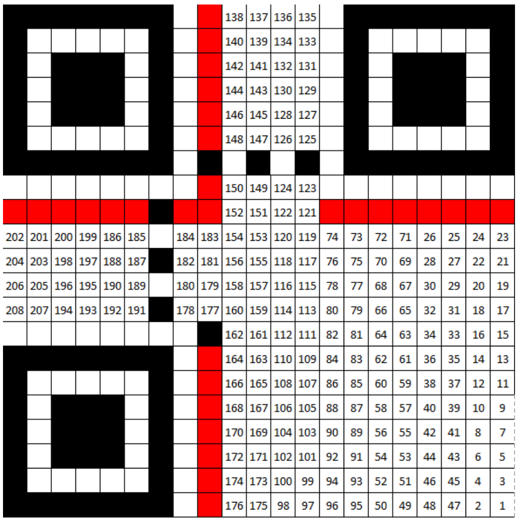


Decimal	Caractere	Binário:	Decimal	Caractere	Binário:
48	0	00110000	105	i	01101001
49	1	00110001	106	j	01101010
50	2	00110010	107	k	01101011
51	3	00110011	108	l	01101100
52	4	00110100	109	m	01101101
53	5	00110101	110	n	01101110
54	6	00110110	111	o	01101111
55	7	00110111	112	p	01110000
56	8	00111000	113	q	01110001
57	9	00111001	114	r	01110010
97	a	01100001	115	s	01110011
98	b	01100010	116	t	01110100
99	c	01100011	117	u	01110101
100	d	01100100	118	v	01110110
101	e	01100101	119	w	01110111
102	f	01100110	120	x	01111000
103	g	01100111	121	y	01111001
104	h	01101000	122	z	01111010

Cada parte da mensagem é subdividida em 8 quadradinhos (byte) que serão preenchidos de acordo com uma ordem específica (segunda imagem). Os bits brancos e pretos indicam os dígitos binários 0 e 1, respectivamente. Os bits de 5 a 12 (primeiro byte) indicam quantos caracteres estarão presentes na mensagem, por exemplo, se contém a palavra "escola " então o primeiro byte terá o número 7 como mensagem, que corresponde ao primeiro byte mais seis bytes da "escola".

Modo Byte	1º Byte (7)	e	s	c	o	l	a
0100	00110111	01100101	01110011	01100011	01101111	01101100	01100001

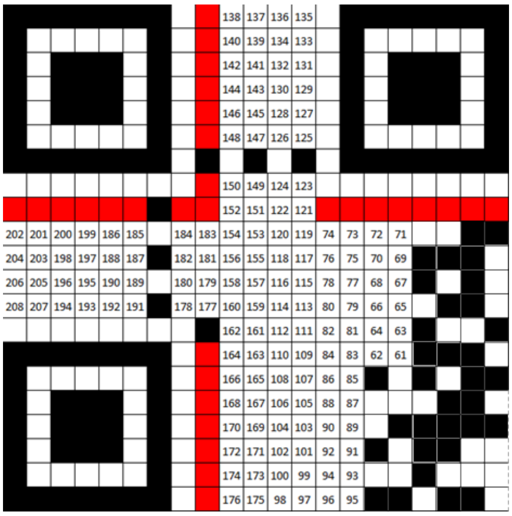
(Se o valor for maior do que 9 então basta transformar o decimal para binário e preenchê-lo à esquerda para ficar com 8 algarismos de tamanho). A partir do bit 13 em diante até o bit 208 será escrita a mensagem desejada. Por exemplo, codificando um QR Code com a mensagem "escola" no Modo Byte e com base na tabela ao lado, teremos a seguinte ordem dos bits.



Desta forma, utilizaremos os 60 primeiros bits do QR Code e pintaremos de preto os bits relacionados aos dígitos 1. A tabela abaixo está preenchida com os 60 algarismos da tabela anterior relacionando-os à numeração do bit correspondente.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1

O resultado será o QR Code pintado abaixo.



Com base nas informações apresentadas, preencha o QR Code a seguir com a mensagem “mestradoprofmatunirio” no Modo Byte (tabela de codificação da página anterior). Utilize as tabelas a seguir como guia para o preenchimento.

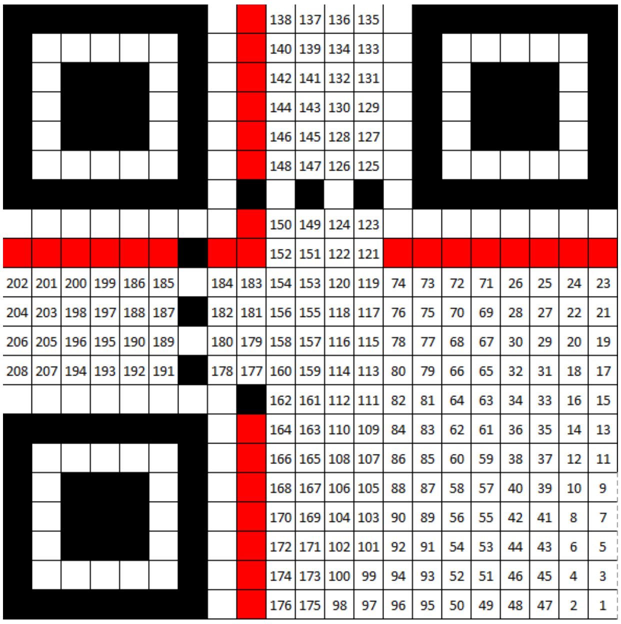
Preencha a tabela abaixo com os valores binários do Modo Byte, do primeiro byte e dos caracteres.

Modo Byte	1º Byte	m	e	s	t	r	a	d	o	p	r
o	f	m	a	t	u	n	i	r	i	o	

Complete a tabela abaixo com os valores de cada bit segundo a tabela acima.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180

Pinte de preto os quadradinhos do QR Code correspondentes ao algarismo 1.



Resolução: Vamos preencher a primeira tabela com os valores dos caracteres no modo binário.

1º) Preencher o valor do Modo Byte (0100)

2º) Preencher o primeiro byte com o valor correspondente ao número 23 em binário (10111), sendo que, como o número precisar ter tamanho de 8 bits, então adicionamos 3 zeros à esquerda, e finalmente temos (00010111).

3º) Preencher o restante da tabela com o valor correspondente as letras.

Modo Byte	1º Byte	m	e	s	t	r	a	d	o	p	r
0100	00010111	01101101	01100101	01110011	01110100	01110010	01100001	01100100	01101111	01110000	01110010
o	f	m	a	t	u	n	i	r	i	o	
01101111	01100110	01101101	01100001	01110100	01110101	01101110	01101001	01110010	01101001	01101111	

O passo seguinte é preencher a segunda tabela com os 180 bits da atividade.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1

Agora, vamos pintar de preto cada quadradinho correspondente ao algarismo 1 na tabela acima.

ISSN 2525-7056

Este será o resultado final da pintura, os bits brancos foram pintados apenas para ilustração.

Considerações Finais

Esperamos que esse trabalho possa contribuir para os docentes que se interessem por novas tecnologias nas salas de aula do Ensino Básico e que possa ajudar os alunos a compreenderem melhor os códigos que nos cercam diariamente e que possa ser uma proposta diferenciada para o ensino dos conteúdos de Matemática correlacionados ao QR code.

Estamos inseridos em uma sociedade onde o uso de tecnologias vem aumentando rapidamente e a educação precisa acompanhar essas evoluções, trazendo para dentro da sala de aula algumas inovações, com a finalidade de formar jovens capazes de compreender o mundo que o cerca e ter um diferencial no mercado de trabalho cada vez mais disputado. Além disso, uma aula com códigos poderá despertar no aluno a curiosidade de aprender mais sobre o tema e, assim, o discente terá a possibilidade de trilhar sua carreira no mundo matemático e/ou informático. Também esperamos que este trabalho sirva de material bibliográfico para os professores se aprofundarem no assunto e criarem outras atividades e que inspire novos estudos sobre a aplicação dos códigos na sala de aula.

Referências Bibliográficas

GS1BR - Disponível em: https://gs1br.org/codigos-e-padroes/captura/gs1-qr-code. Acesso em: 24 mai. 2021.

ISO/IEC 18004:2015 - Information technology - Automatic identification and data capture techniques - QR Code 2015 bar code symbology specification, 2015.

GS1BR - Disponível em: https://www.gs1br.org/codigos-e-padroes/captura/Paginas/GS1-QR-Code.aspx. Acesso em: 24 mai. 2021.

PINTO, A. C. M; FELCHER, C. D. O; FERREIRA, A. L. A. **Considerações sobre o uso do aplicativo QR CODE no ensino da matemática**: reflexões sobre o papel do professor, São Paulo, 2016.

Disponível em http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/8323_4386_ID.pdf. Acesso 20 jan. 2021.

SILVA, T. B. da; BEZERRA, S. M. C. B. **O Uso do Qr Code no Ensino De Matemática na Formação Inicial**. X Simpósio Linguagens e Identidades da/na Amazônia sul-ocidental VIII Colóquio Internacional "As Amazônias, as Áfricas na Pan-Amazônia", 2016.

SILVA, A. R. D; FANTIN, S. **A matemática do código de barras e Qr Code**. Programa De Pós-Graduação Matemática Em Rede Nacional (Profmat) UNIRIO, 2021.

Referências das imagens
Thonky - Disponível em: https://www.thonky.com/qr-code-tutorial/. Acesso em: 23 jan. 2021.
Wikipedia - Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/C%C3%B3digo_QR. Acesso em: 23 jan. 2021.
Wikimedia - Disponível em: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:QR_Code_Mask_Patterns.svg. Acesso em: 31 jan. 2021.
Youtube - Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=142TGhaTMtI. Acesso em: 25 jan. 2021.

NOTAS

IDENTIFICAÇÃO DO TEXTO
O presente texto é um recorte de A Matemática do Código de Barras e QR Code, dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat) apresentada na Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro (UNIRIO), em 12/08/2021, elaborada sob orientação do Professor Dr. Silas Fantin.

IDENTIFICAÇÃO DE AUTORIA
Alberto Renan Dias da Silva. Mestre em Matemática pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat). Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro (UNIRIO), Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
E-mail: alberto.renan.dias@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-4889-9532

Silas Fantin. Doutor em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP). Professor associado da Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro (UNIRIO), Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
E-mail: silas.fantin@uniriotec.br
https://orcid.org/0000-0002-2183-6806

AGRADECIMENTOS
Os autores agradecem à Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro (UNIRIO).
O primeiro autor agradece em especial ao professor Dr. Silas Fantin, orientador e coautor do artigo.

FINANCIAMENTO
Não se aplica.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Não se aplica.

EDITORES
Patricia Helena Mirandola Garcia, Eugenia Brunilda Opazo Uribe, Gerson dos Santos Farias.

HISTÓRICO
Recebido em: 28/08/2021 – Aprovado em: 04/12/2020 – Publicado em: 15/12/2021.

COMO CITAR
SILVA, A. R. D; FANTIN, S. A Matemática do QR Code. **Revista ENSIN@ UFMS**, Três Lagoas, v. 2, número especial, p. 374-399. 2021.

.

UFMS