PERSPECTIVAS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

REVISTA DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL (UFMS)

ISSN 2359-2842 Volume 13, número 32 – 2020 DOI: 10.46312/pem.v13i32.10165

Diferentes tipos de raciocínio na Geometria dos Livros Didáticos de Matemática

Different types of reasoning in Geometry in Mathematics Textbooks

Lucas Carato Mazzi[1]

Rúbia Barcelos Amaral-Schio[2]

RESUMO

No que diz respeito ao ensino da Matemática, o uso de diferentes tipos de raciocínio é relevante para que o aluno tenha um panorama completo de como a Matemática é construída. Neste artigo compartilhamos resultados de uma pesquisa cujo objetivo foi compreender se, e de que modo, diferentes tipos de raciocínio – dedutivo, indutivo, abdutivo e analógico – se fazem presentes nos capítulos de Geometria de 21 Livros Didáticos de Matemática do Ensino Médio, aprovados pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) de 2018. Assumimos uma abordagem qualitativa de cunho documental e, como referencial teórico, utilizamos as ideias de raciocínio propostas por David Reid e Christine Knipping. As conclusões indicaram que nem todos os livros apresentam os quatro tipos de raciocínio e que há uma maior abordagem dedutiva e indutiva, em detrimento dos outros tipos. Concluímos, também, que nenhuma coleção analisada propõe uma conexão entre os diferentes raciocínios, assim como não defendem a importância de seus usos.

PALAVRAS-CHAVE: Dedução. Indução. Provas. Ensino Médio.

ABSTRACT

Regarding to the teaching of Mathematics, the use of different types of reasoning is relevant so that the student has a complete picture of how Mathematics is constructed. In this article, we intended to understand whether, and in what way, different types of reasoning - deductive, inductive, abductive, and analogical - are present in the Geometry chapters of 21 High School Mathematics Textbooks, approved by the National Textbook Program. (PNLD) of 2018. This research adopted a qualitative approach and a documentary nature. As a theoretical framework, we use the ideas of reasoning proposed by David Reid and Christine Knipping. The conclusions indicated that not all textbooks present the four types of reasoning and that there is a greater deductive and inductive approach, to

[1] Doutor em Ensino de Ciências e Matemática (UNICAMP). Professor colaborador do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (Unesp - Rio Claro). E-mail: lucas.mazzi@unesp.br. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3395-3724.

[2] Doutora em Educação Matemática (Unesp - Rio Claro). Docente do Departamento de Matemática (Unesp - Rio Claro). E-mail: rubia.amaral@unesp.br. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4393-6127.

the detriment of the other types. It was also concluded that no analyzed collection proposes a connection between the different reasonings, just as they do not defend the importance of their uses.
KEYWORDS: Deduction. Induction. Proof. High School.

Introdução

O Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) entrou em vigor pelo Decreto-Lei nº 91.542, de 19 de agosto de 1985, com o intuito, inicialmente, de distribuir livros escolares aos estudantes matriculados no Ensino Fundamental das Escolas Públicas de todo o país. Após várias ampliações e reformas, o PNLD[3], atualmente, tem como finalidade "avaliar e a disponibilizar obras didáticas, pedagógicas e literárias, entre outros materiais de apoio à prática educativa, de forma sistemática, regular e gratuita" (BRASIL, 2017), desde a Educação Infantil até o Ensino Médio da rede pública de Educação Básica do país.

Desde o início dessa política, o livro vem ganhando cada vez mais espaço dentro das escolas, despertando os olhares curiosos de pesquisadores de diversas áreas, inclusive da Educação Matemática. Tendo em vista a magnitude deste programa, pesquisas que discutam acerca dos livros se fazem necessárias para garantir que os investimentos sejam realizados da melhor forma possível.

De acordo com Howson (2013), os livros, além de ajudar a moldar o currículo, são importantes guias para os professores.

> Os livros didáticos desempenharam um importante papel não só no desenvolvimento do currículo, mas mais importante ainda, propiciaram aos professores um quadro coerente para guiar seus trabalhos. Dentre outros fatores, eles têm procurado fornecer aos professores sugestões para desenvolver seus trabalhos; e têm ajudado a definir a matemática a ser ensinada. (HOWSON, 2013, p. 648).

No que diz respeito ao Livro Didático de Matemática, Fan (2013) destaca que ele tem alcançado cada vez mais espaços em reuniões e congressos internacionais, culminando, em 2014, na realização da 1ª Conferência Internacional em Pesquisa e Desenvolvimento de Livros Didáticos de Matemática (I ICMT[4]). Este encontro reuniu pesquisadores de 30 países diferentes com o objetivo de refletir e discutir sobre suas pesquisas acerca de tal material.

No entanto, segundo Fan (2013, p. 766), mesmo com esse crescimento significativo de pesquisas relacionadas aos livros didáticos, esse ainda "[...] é um

---

[3] Passou a se chamar Programa Nacional do Livro e do Material Didático, pelo Decreto nº 9.099, de 18 de julho de 2017.
[4] O II ICMT aconteceu em 2017 no Brasil, e o III ICMT, em 2019, na Alemanha.

campo de pesquisa que se encontra em estágio inicial de desenvolvimento, comparado a outros campos de pesquisa da Educação Matemática", tendo espaço amplo para novas pesquisas e discussões. Neste sentido, dentre as inúmeras possibilidades temáticas passíveis de serem investigadas, optamos por focar as demonstrações e provas presentes nos capítulos de Geometria, visto que é um tema de comum interesse de ambos os autores e que, em uma revisão de literatura feita em (MAZZI, 2018), mostrou-se ser um tema escasso na área. Mais especificamente, temos o objetivo de compreender de que modo os livros abordam diferentes tipos de raciocínio ao longo de seus capítulos de Geometria.

Segundo Reid e Knipping (2010), na História da Matemática é possível encontrar diferentes formas de abordagens de raciocínios. Os autores lembram que, em vários momentos da história, tinha-se apenas a distinção entre raciocínios dedutivos e raciocínios não dedutivos, mas essa dicotomia não era suficiente para classificar essas ideias. Outros pesquisadores optavam por classificar os raciocínios dependendo da certeza, ou não, de suas conclusões. Ainda para os autores, os raciocínios podem ser caracterizados como: raciocínio dedutivo, raciocínio indutivo, raciocínio abdutivo e raciocínio por analogia (ou analógico). Cada tipo possui suas características próprias e sua importância no ensino e na aprendizagem da Matemática.

Para compartilhar os resultados da pesquisa realizada, estruturamos esse artigo iniciando com algumas questões teóricas que dão suporte às discussões aqui propostas. Na sequência, expomos as características da metodologia de pesquisa qualitativa, abordagem assumida, além de exibir a fonte de dados utilizada. Logo após seguem a apresentação e a discussão dos dados, com base no referencial teórico adotado e, por fim, encerramos com as considerações finais, nas quais elencamos algumas conclusões relevantes acerca dos raciocínios presentes nos capítulos de Geometria.

Referencial Teórico

Segundo o dicionário de Abbagnano (2007, p. 832), raciocinar, em um sentido amplo, significa "[...] inferir uma proposição de uma ou mais proposições precedentes, e crer ou pretender que se creia nela como conclusão de qualquer outra coisa". Ainda para o autor, raciocínio compreende "[...] qualquer procedimento de inferência ou prova; portanto, qualquer argumento, conclusão, inferência, indução, dedução ou analogia".

Para Arslan, Gocmencelebi e Tapan (2009), a importância da habilidade de raciocinar vai além de apenas utilizá-la na Matemática, tendo um papel relevante na vida do estudante como um todo. Segundo os autores,

> A capacidade de raciocínio pode ajudar os alunos a entender e avaliar a sociedade científica e tecnológica. Porque o raciocínio é altamente eficaz para a capacidade dos alunos de analisar novas situações que são enfrentadas em todos os aspectos; fazer suposições lógicas, explicar seus pensamentos, chegar a conclusões e defender suas conclusões. (TAPAN, GOCMENCELEBI, TAPAN, 2009, p. 2460).

Nesta seção, optamos por discutir quatro tipos de raciocínio: dedutivo, indutivo, abdutivo e analógico. Segundo Reid e Knipping (2010, p. 83), uma das formas de distingui-los é observando o modo como eles utilizam os "casos, regras e resultados".

> Caso é uma observação específica que uma condição possui. Uma condição descreve um atributo de algum objeto ou a relação entre dois objetos. Regra é uma proposição geral que afirma que se uma condição ocorre, então outra também ocorrerá. Resultado é uma observação específica, similar ao caso, mas que se refere à condição que está conectada à outra por uma regra. (REID; KNIPPING, 2010, p. 83).

De modo a clarear essas ideias, observe o exemplo que segue (Figura 01). Temos que o "caso" é a sentença 1; o fato de “ser um cachorro” é a condição e a regra é dada pela sentença 2, visto que “ser um cachorro” e “ser um animal” estão conectados. Com base nesses dados, o resultado seria a sentença 3, visto que é uma observação realizada a partir do *link* entre as informações previamente apresentadas - caso e regra (MAZZI, 2018, p. 70).

Figura 01 - Exemplo de Raciocínio

Pluto é um cachorro. $\boxed{1}$

Cachorros são animais. $\boxed{2}$

Pluto é um animal. $\boxed{3}$

Fonte: MAZZI, 2018, p. 70

Entretanto, dependendo do modo como se organizam essas informações, pode-se ter diferentes tipos de raciocínio. Essa alteração na ordem produz diferentes implicações na lógica matemática[5].

---

[5] Para mais detalhes nessa direção, ver Reid e Knipping (2010) e Mazzi (2018).

Raciocínio Dedutivo

A importância desse raciocínio se encontra não só na Matemática. Aristóteles, no século IV a.C., já havia notado que "[...] uma pessoa que possui a habilidade dedutiva é capaz de compreender o universo de maneiras mais profundas e abrangentes" (AYALON; EVEN, 2010, p. 1134). Outros autores enfatizam a importância desse tipo de raciocínio na ciência, na tecnologia e no sistema legal, além de facilitar a tomada de decisões sábias relacionadas à política e à economia (JOHNSON-LAIRD; BYRNE, 1991; WU, 1996).

O raciocínio dedutivo desempenha um papel importante na explicação e previsão científica. Dadas leis causais gerais e declarações descrevendo a condição inicial, o raciocínio dedutivo pode ser visto como um domínio específico do conhecimento. O raciocínio dedutivo pode ajudar os alunos a reconhecer conflitos cognitivos e resolvê-los (PARK; HAN, 2002).

Esse tipo de raciocínio é utilizado ao elaborar uma demonstração e é o único, dentre os outros, que garante certeza de uma proposição matemática. Segundo Reid e Knipping (2010, p. 84), "[...] o raciocínio dedutivo é a base da demonstração, sendo um dos principais focos do estudo da lógica formal". De acordo com Ayalon e Even (2008, p. 01),

> O raciocínio dedutivo é único na medida em que é o processo de inferir conclusões a partir de informações conhecidas (chamadas premissas) baseadas em regras lógicas formais, em que conclusões são necessariamente derivadas da informação dada e não há necessidade de validá-las por experimentos.

Ainda segundo esses autores, os argumentos dedutivos válidos preservam a verdade no sentido que, se as premissas são verdadeiras, a conclusão também deve ser verdadeira.

Ao se utilizar o raciocínio dedutivo na Matemática, parte-se de informações prévias (definições, axiomas, postulados, proposições já demonstradas) e, por meio de inferências lógicas, conclui-se algum resultado novo. Na prática matemática, esse tipo de abordagem se torna diferente devido à quantidade de informações prévias que, às vezes, se tem à mão durante a demonstração de algum resultado, isto é, nem sempre se utilizam apenas duas informações para concluir uma terceira. Geralmente, tem-se uma cadeia de inferências e, a partir dela, chega-se ao teorema. Quanto ao ensino da Matemática, esse tipo de abordagem é necessário para que o aluno consiga compreender o caráter rigoroso e confiável da Matemática.

Raciocínio Indutivo

Com base nas ideias de Haverty *et al.* (2000) e Reid e Knipping (2010), tem-se que o raciocínio indutivo pode ser definido como o processo de inferir uma regra geral por observação e análise de instâncias específicas e, portanto, "[...] é um processo vital para a vida cotidiana e para a investigação científica em particular" (PAPAGEORGIO, 2009, p. 313). Em outras palavras,

> A indução, então, é aquela operação da mente, pela qual inferimos que o que sabemos ser verdadeiro em um caso ou casos particulares, será verdadeiro em todos os casos que se assemelham ao primeiro, em certos aspectos designáveis. Em outras palavras, a indução é o processo pelo qual nós concluímos que o que é verdadeiro sobre certos indivíduos de uma classe é verdadeiro para toda a classe. A indução, assim definida, é um processo de inferência que prossegue do conhecido para o desconhecido. (MILL, 1884, p. 210 *apud* REID; KNIPPING, 2010, p. 89).

O raciocínio indutivo no ensino da Matemática está conectado com a observação de padrões e relações existentes entre números e figuras (PAPAGEORGIO, 2009; NEUBERT; BINKO, 1992). Tendo como base essas características, pode-se elaborar diversas atividades matemáticas comuns que possuem um caráter indutivo.

O raciocínio indutivo é de grande importância no ensino da Matemática, pois possibilita e mostra que o fazer matemática possui um caráter construtivo. Isto é, utilizar esse tipo de raciocínio pode proporcionar um espaço de discussão sobre a importância das tentativas e erros, da elaboração de conjecturas e de generalizações na Matemática.

> O raciocínio indutivo na Matemática difere do raciocínio indutivo nas ciências empíricas, na medida em que há um teste final, embora não necessariamente um procedimento de decisão, que pode ser usado para determinar o que é uma indução correta. Isto é, se o que é induzido é verdadeiro, isto é: se pode ser deduzido pelo sistema dedutivo, então deve ser correto. (BROWN; TARNLUND, 1977, p. 1).

Em outras palavras, para ser validado matematicamente, esse tipo de raciocínio necessita passar por um processo dedutivo. Trabalhar com ambos os raciocínios – dedutivo e indutivo – pode gerar momentos ricos de discussões no que concerne ao ensino da Matemática.

Raciocínio Abdutivo

Segundo Reid e Knipping (2010, p. 100), "[...] o raciocínio abdutivo pode ser considerado como o inverso do raciocínio dedutivo ou chamado de raciocínio de trás para frente". Os autores utilizam um trecho de um romance protagonizado por Sherlock Holmes, *Study in Scarlet*, para ilustrar esse raciocínio:

> A maioria das pessoas, se você descrever uma série de eventos para eles, dirá qual seria o resultado. Eles podem reunir esses eventos em suas mentes e argumentar com eles que algo acontecerá. Há poucas pessoas, no entanto, que, se lhes disserem o resultado, poderiam evoluir a partir de sua própria consciência interior, quais foram os passos que conduziram a esse resultado. Esse poder é o que quero dizer quando falo de raciocinar de trás para frente. (DOYLE, 1887 *apud* REID; KNIPPING, 2010, p. 100).

Em outras palavras, o raciocínio abdutivo é responsável por tentar compreender as causas que levaram determinado fato a ocorrer, ou seja, tenta inferir a melhor explicação para determinado fato ter ocorrido. Esse tipo de raciocínio se faz presente no cotidiano, por exemplo, no diagnóstico médico. A partir de alguns sintomas, o médico cria hipóteses sobre suas possíveis causas.

Peirce (2003, p. 207) afirma que "todas as ideias da ciência a ela advêm através da abdução. A abdução consiste em estudar os fatos e projetar uma teoria para explicá-los". Com base nesse autor, Souza (2015, p. 79) destaca que a abdução "[...] consiste em observar um aglomerado de elementos (de uma mesma natureza) que formam um conjunto de fatos e em permitir que esses fatos sugiram uma teoria"; no entanto, essa teoria possui um caráter falível, isto é, sua validade pode ser refutada.

Apesar de a Matemática ser uma ciência dedutiva, sua produção perpassa os diferentes tipos de raciocínio. De acordo com Souza (2015, p. 83), a produção do conhecimento matemático

> [...] pode ser fruto do método investigativo, iniciando com o raciocínio abdutivo como um ato inferencial, uma hipótese provisória que tem origem na pergunta (ou no ato de questionar), uma maneira de se iniciar esse processo de produção [...]. Isso nos leva à ideia da abdução como um raciocínio que abre possibilidades de uma nova inteligibilidade daquilo que se vê e do que se pode expressar quando elaboramos uma explicação acerca do que é visto.

Ainda segundo o autor, pode-se compreender que o raciocínio abdutivo está presente no processo de produção do conhecimento matemático e que, talvez, por esse motivo, não é percebido quando se observa a Matemática já pronta e formalizada.

Raciocínio Analógico

O raciocínio por analogia é bem frequente no ensino da Matemática. Ele consiste em "[...] elaborar conjecturas baseadas nas semelhanças entre dois casos, um bem conhecido (fonte) e um menos compreendido (alvo)" (REID; KNIPPING, 2010, p. 110), ou seja, consiste em observar um caso sobre o qual se conhecem informações suficientes e tentar inferir possíveis resultados em uma outra situação, visto que existem semelhanças entre os casos analisados. Segundo Polya (1968, p. 13),

> A analogia é uma espécie de semelhança. Podemos dizer, semelhança em um nível mais definido e mais conceitual. [...] A diferença essencial entre analogia e outros tipos de semelhança reside, me parece, nas intenções do pensador. Objetos semelhantes concordam um com o outro com conceitos definidos, você considera esses objetos similares como análogos.

Reid e Knipping (2010) exemplificam esse tipo de raciocínio a partir de uma entrevista que eles fizeram com um aluno de escola básica. Os autores pediram que a criança explicasse por que a soma de dois números ímpares é um número par. A resposta do aluno foi "porque negativo vezes negativo é positivo".

Nota-se que o aluno relacionou dois conceitos distintos da Matemática – números pares/ímpares e números positivos/negativos. Pode parecer estranha tal relação, mas, de fato, esses conceitos possuem suas semelhanças. Observe o Quadro 01, a seguir.

Quadro 01 – Exemplo de Analogia

Fonte	Abstração	Alvo
Um número negativo vezes um número negativo resulta em um número positivo.	$a * a = \sim a$	Um número ímpar mais um número ímpar resulta em um número par.
Multiplicação	Operação binária	Adição
Positivo/Negativo	Metade dos inteiros	Par/ímpar
Positivo	Bom	Par
Negativo	Mau	Ímpar

Fonte: Reid e Knipping (2010, p. 112, tradução nossa)

A analogia feita pelo aluno é coerente, tendo em vista os aspectos apresentados no quadro anterior. O primeiro fato a se considerar é a abstração $a{*}a{=}{\sim}a$. Essa sentença é válida em ambos os casos, seja uma multiplicação de números negativos, seja a soma de números ímpares. Tem-se, também, que ambos os tipos de números dividem os inteiros em dois conjuntos disjuntos (com exceção do zero, que não é considerado positivo/negativo). Na linguagem, ambos os termos positivo e par podem possuir conotações boas, enquanto os termos negativo e ímpar podem possuir conotações pejorativas.

Na sequência apresentamos a metodologia de pesquisa assumida neste artigo, assim como a fonte de dados selecionada. Após, com base no referencial teórico, introduzimos e discutimos os dados à luz dos quatro tipos de raciocínio aqui elencados.

Metodologia e Procedimentos Metodológicos

Assumimos uma abordagem de pesquisa qualitativa. Em linhas gerais, esse tipo de abordagem tem como preocupação fornecer informações descritivas sobre os fenômenos investigados – no caso, os livros didáticos – de modo a elaborar uma compreensão sobre eles. No que concerne ao termo qualitativo, Bicudo (2012, p. 116) discorre que ele

> [...] engloba a ideia do subjetivo, passível de expor sensações e opiniões. O significado atribuído a essa concepção de pesquisa também engloba noções a respeito de percepções de diferenças e semelhanças de aspectos comparáveis de experiência.

Dentro da pesquisa qualitativa, existem distintas caracterizações de formas de se conduzir determinada investigação, como por exemplo o estudo de caso, a etnografia, a pesquisa-ação, a pesquisa participante, dentre várias outras. Visto que a fonte de dados são coleções de livros didáticos, consideramos que esta seja uma pesquisa do tipo documental.

Segundo Godoy (1995), devido ao fato de a pesquisa qualitativa possuir um caráter mais flexível, cabe, nesse tipo de abordagem, a investigação de documentos técnicos – no caso, os livros didáticos – de modo a elaborar uma interpretação possível sobre eles. A autora defende que

> [...] a pesquisa documental representa uma forma que pode se revestir de um caráter inovador, trazendo contribuições importantes no estudo de alguns temas. Além disso, os documentos normalmente são considerados importantes fontes de dados para outros tipos de estudos qualitativos, merecendo, portanto, atenção especial. (GODOY, 1995, p. 21).

Ainda, a autora afirma que um dos pontos positivos de trabalhar com esse tipo de pesquisa se deve ao fato da imutabilidade dos dados, ou seja, mesmo após longos períodos, os dados continuarão do mesmo modo, visto que são “dados estáveis”. Apesar desta característica, a interpretação criada acerca dos livros vai depender de vários fatores – o olhar do investigador, o referencial teórico adotado, o objetivo da pesquisa, entre outros. Não é, então, passível de uma mesma interpretação sempre (MAZZI, 2018).

A fonte de dados de nosso trabalho consiste em sete coleções de Livros Didáticos do Ensino Médio aprovadas no PNLD 2018. Cada coleção possui três livros, cada um referente a uma série de tal nível. A capa do volume 1 de cada coleção está apresentada na figura 02 abaixo.

Figura 02 - Coleções Analisadas

Fonte: Elaborado pelos autores (2020)

Para a análise dos livros, identificamos, a priori, cada um dos capítulos de Geometria de cada volume. Em um segundo momento, foram pontuadas todas as provas e demonstrações realizadas ao longo das coleções, assim como foram investigadas as tarefas propostas em cada capítulo. Por fim, foram selecionadas as situações nas quais os quatro raciocínios - dedutivo, indutivo, abdutivo e analógico - foram encontrados.

Apresentação e Discussão dos Dados

Gostaríamos de iniciar a apresentação e a discussão dos dados destacando que, devido a limitação de páginas, restringimo-nos a exibir apenas um exemplo de cada tipo de raciocínio[6].

Como já dito previamente, o raciocínio dedutivo é a base da Matemática, visto que, dentre os raciocínios elencados, é o único que garante certeza (REID; KNIPPING, 2010; AYALON; EVEN, 2008). Essa característica faz com que todas as coleções utilizem este tipo de abordagem constantemente e que este seja o tipo de raciocínio mais utilizado pelos autores.

[6] Para uma análise mais ampla, ver (MAZZI, 2018).

Na figura 03, abaixo, temos um exemplo da utilização desse raciocínio na demonstração de um resultado da Geometria Espacial.

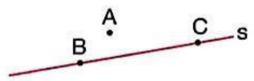
Figura 03 - Exemplo de raciocínio dedutivo

Teorema 1

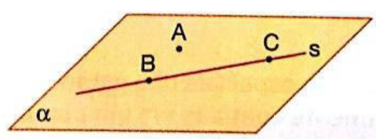
Uma reta e um ponto não pertencente a ela determinam um único plano.

Demonstração

Considere uma reta *s* e um ponto *A* não pertencente a ela. Sejam ainda os pontos *B* e *C* pertencentes à reta *s*.



Pelo postulado 5, existe um único plano α determinado por *A*, *B* e *C*. O postulado 6 nos permite concluir que *s* está contida em α, pois *B* e *C* pertencem a *s* e também a α. Portanto, α é o único plano que contém a reta *s* e o ponto *A*.



Ilustrações: Acervo da editora

Fonte: Souza e Garcia (2016b, p. 180)

O resultado enunciado na figura acima está presente em cinco das sete coleções analisadas (DANTE, 2017a; SOUZA; GARCIA, 2016a; LEONARDO, 2016a; BALESTRI, 2016a; CHAVENTE; PRESTES, 2016a). Apesar de a imagem ter sido retirada da coleção #Contato Matemática, o estilo de demonstração para esse resultado foi o mesmo nos demais livros. Observe que os autores, a partir de conceitos primitivos como ponto e reta, assim como com base nos Postulados 5 e 6[7], concluíram o resultado desejado, demonstrando a validade do teorema.

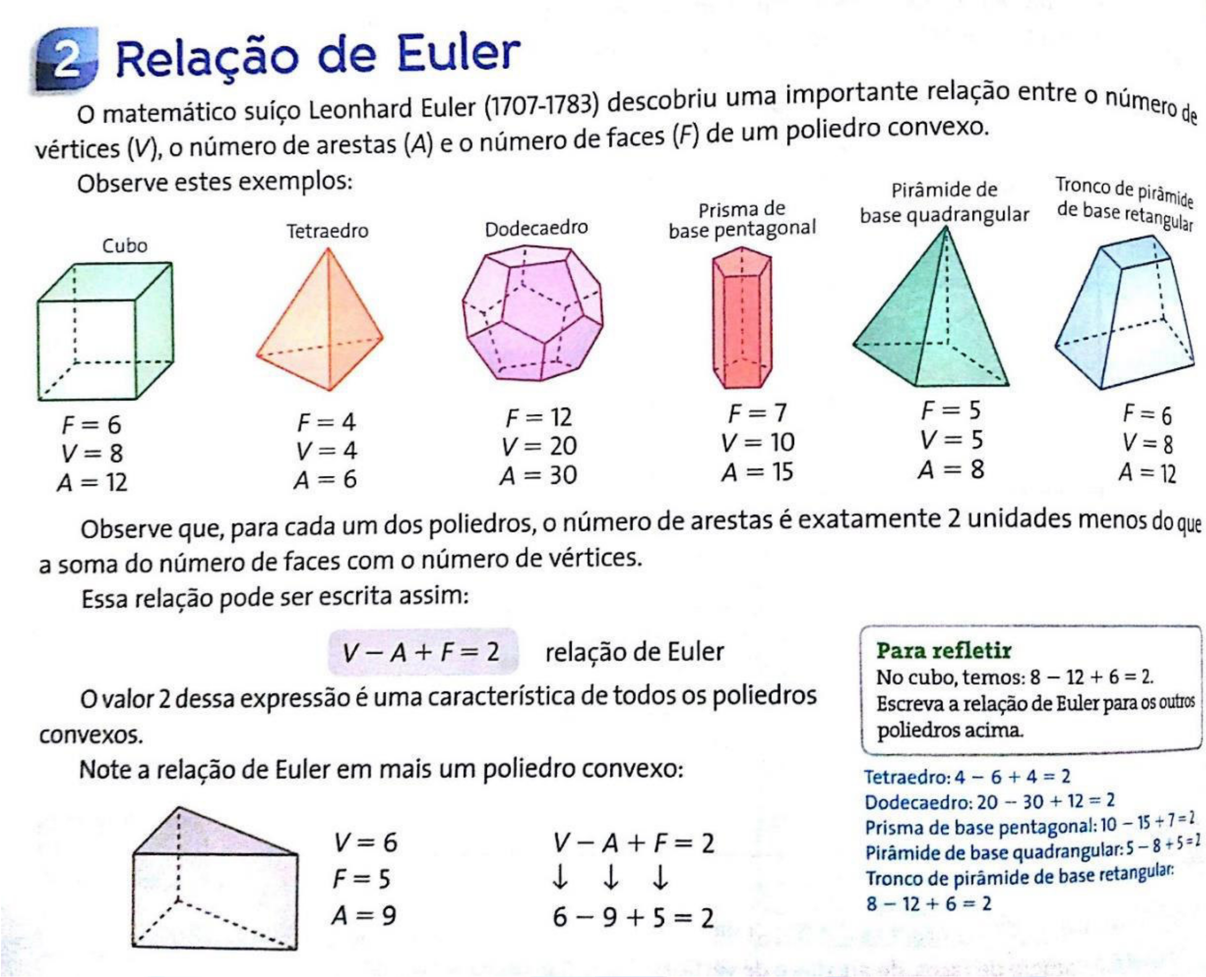
O estudo do Teorema de Tales, Teorema de Pitágoras, Teorema Fundamental da Proporcionalidade e os capítulos de Geometria Espacial, são os principais tópicos em que o raciocínio dedutivo é utilizado nas coleções (MAZZI, 2018).

Quanto ao raciocínio indutivo, o segundo mais presente nos livros, optamos por trazer o exemplo (Figura 04) que mais se repetiu nas distintas coleções - que é o estudo da Relação de Euler para poliedros convexos.

---

[7] P5. Três pontos não colineares determinam um único plano. P6. Se dois pontos distintos de uma reta pertencem a um plano, então essa reta está contida nesse plano (SOUZA; GARCIA, 2016b, p. 180).

Figura 04 - Exemplo de raciocínio indutivo



2 Relação de Euler

O matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) descobriu uma importante relação entre o número de vértices (V), o número de arestas (A) e o número de faces (F) de um poliedro convexo.

Observe estes exemplos:

Cubo	Tetraedro	Dodecaedro	Prisma de base pentagonal	Pirâmide de base quadrangular	Tronco de pirâmide de base retangular
$F = 6$	$F = 4$	$F = 12$	$F = 7$	$F = 5$	$F = 6$
$V = 8$	$V = 4$	$V = 20$	$V = 10$	$V = 5$	$V = 8$
$A = 12$	$A = 6$	$A = 30$	$A = 15$	$A = 8$	$A = 12$

Observe que, para cada um dos poliedros, o número de arestas é exatamente 2 unidades menos do que a soma do número de faces com o número de vértices.

Essa relação pode ser escrita assim:

$V - A + F = 2$ relação de Euler

O valor 2 dessa expressão é uma característica de todos os poliedros convexos.

Note a relação de Euler em mais um poliedro convexo:

$V = 6$
$F = 5$
$A = 9$

$$\begin{array}{c} V - A + F = 2 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 6 - 9 + 5 = 2 \end{array}$$

Para refletir
No cubo, temos: $8 - 12 + 6 = 2$.
Escreva a relação de Euler para os outros poliedros acima.

Tetraedro: $4 - 6 + 4 = 2$
Dodecaedro: $20 - 30 + 12 = 2$
Prisma de base pentagonal: $10 - 15 + 7 = 2$
Pirâmide de base quadrangular: $5 - 8 + 5 = 2$
Tronco de pirâmide de base retangular: $8 - 12 + 6 = 2$

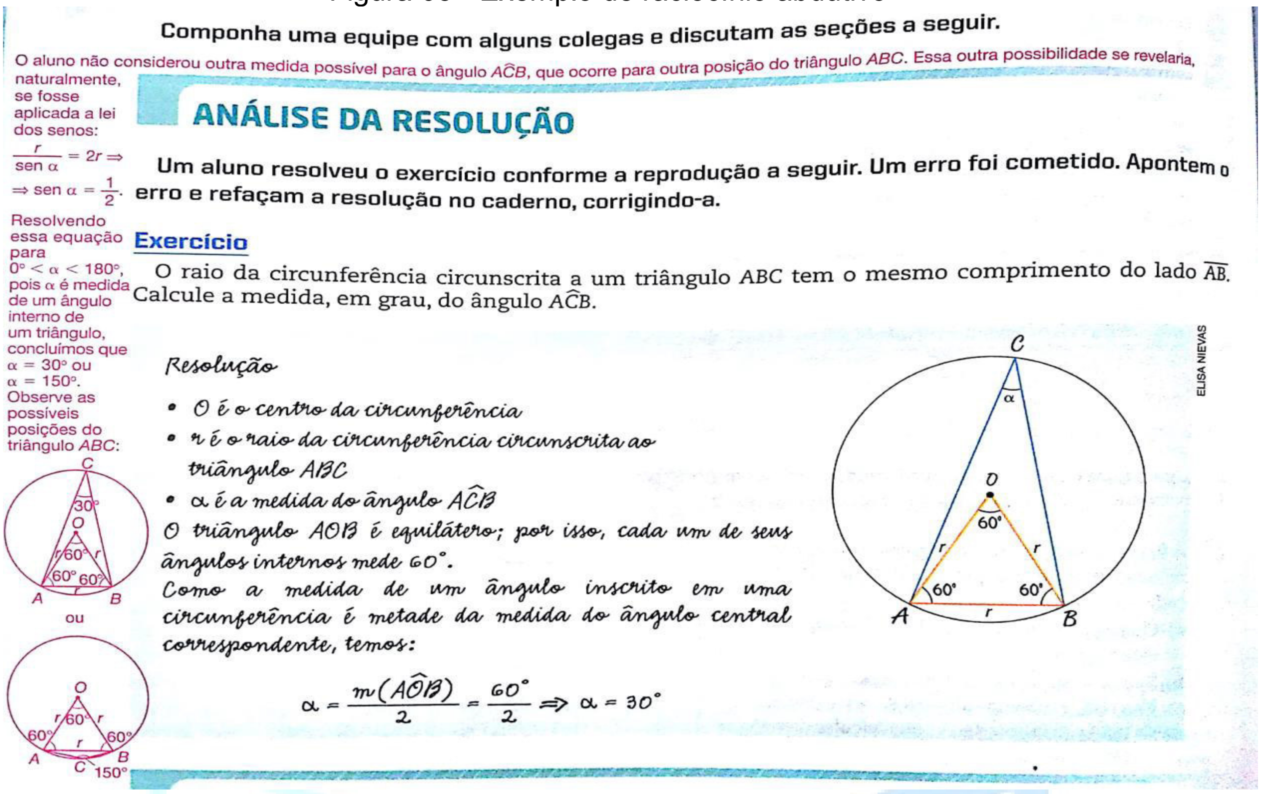
Fonte: Dante (2017b, p. 169)

As sete coleções analisadas utilizam o raciocínio indutivo para tratar da discussão desse resultado matemático. Observe que, em particular, Dante (2017b) apresenta, inicialmente, alguns exemplos de poliedros convexos e destaca as quantidades de faces, vértices e arestas de cada um deles. Após, destaca a Relação de Euler, e pede que seja observada a validade desse resultado para cada caso ilustrado.

Observe que o raciocínio utilizado por Dante (2017b), assim como pelos demais autores, não garante certeza do resultado. O que foi feito é a validação de tal relação para os casos selecionados. O que o autor fez foi, a partir de poucos exemplos, indicar a veracidade de tal propriedade (PAPAGEORGIO, 2009; NEUBERT; BINKO, 1992). O raciocínio indutivo também é utilizado no cálculo de área de retângulos e de volume de paralelepípedos (MAZZI, 2018).

Como apresentado anteriormente, o raciocínio abdutivo se faz presente no fazer matemática, ou seja, no cotidiano de se praticar a Matemática. Dentre as coleções, ele foi identificado na forma de atividades cujo objetivo era encontrar o erro em alguma atividade proposta, como é possível observar na figura 05 abaixo.

Figura 05 - Exemplo de raciocínio abdutivo



Componha uma equipe com alguns colegas e discutam as seções a seguir.

O aluno não considerou outra medida possível para o ângulo $A\hat{C}B$, que ocorre para outra posição do triângulo ABC. Essa outra possibilidade se revelaria, naturalmente, se fosse aplicada a lei dos senos: $\frac{r}{\text{sen } \alpha} = 2r \Rightarrow$ $\Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{1}{2}$. Resolvendo essa equação para $0° < \alpha < 180°$, pois α é medida de um ângulo interno de um triângulo, concluímos que $\alpha = 30°$ ou $\alpha = 150°$. Observe as possíveis posições do triângulo ABC:

ANÁLISE DA RESOLUÇÃO

Um aluno resolveu o exercício conforme a reprodução a seguir. Um erro foi cometido. Apontem o erro e refaçam a resolução no caderno, corrigindo-a.

Exercício

O raio da circunferência circunscrita a um triângulo ABC tem o mesmo comprimento do lado $\overline{AB}$. Calcule a medida, em grau, do ângulo $A\hat{C}B$.

Resolução

- O é o centro da circunferência
- r é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC
- α é a medida do ângulo $A\hat{C}B$

O triângulo AOB é equilátero; por isso, cada um de seus ângulos internos mede 60°.

Como a medida de um ângulo inscrito em uma circunferência é metade da medida do ângulo central correspondente, temos:

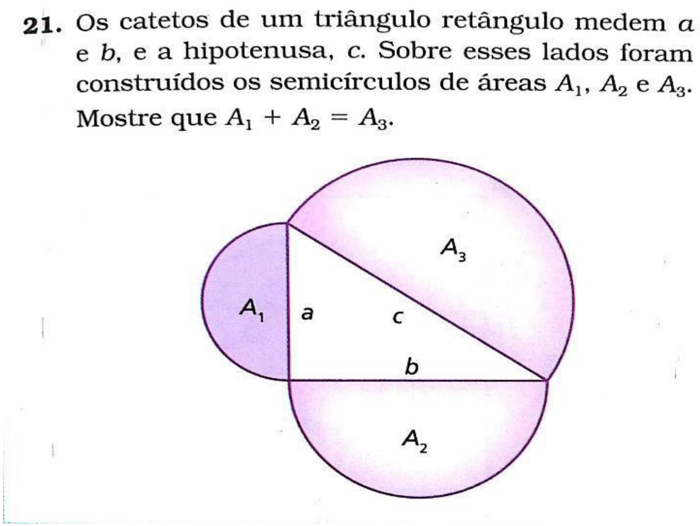
$$\alpha = \frac{m(A\hat{O}B)}{2} = \frac{60°}{2} \Rightarrow \alpha = 30°$$

Fonte: Paiva (2015b, p. 126)

Nesse tipo de exercício o aluno é convidado a percorrer a resolução apresentada, com o intuito de encontrar o erro cometido. Situações assim estão presentes em todos os capítulos de Geometria da coleção Paiva (2015), no entanto não foram propostas nas demais obras analisadas. Isto é, apenas na coleção Paiva (2015) é possível identificar o raciocínio abdutivo.

Por fim, o raciocínio por analogia foi identificado em algumas tarefas propostas por duas coleções analisadas (SOUZA; GARCIA, 2016a, 2016b; LEONARDO, 2016b). Na figura 06 podemos observar uma delas.

Figura 06 - Exemplo de raciocínio por analogia



21. Os catetos de um triângulo retângulo medem a e b, e a hipotenusa, c. Sobre esses lados foram construídos os semicírculos de áreas A_1, A_2 e A_3. Mostre que $A_1 + A_2 = A_3$.

Fonte: Leonardo (2016b, p. 77)

Podemos observar que existe uma correspondência entre o resultado proposto na atividade e o Teorema de Pitágoras. Assim como Reid e Knipping (2010) pontuam, a analogia se dá pela utilização de um resultado bem conhecido (fonte) como meio para conhecer novas ideias de uma propriedade desconhecida (alvo). Outras duas tarefas propostas, que recorriam ao raciocínio por analogia, foram identificadas acerca do cálculo da altura de um cone equilátero (SOUZA; GARCIA, 2016b).

Considerações Finais

O objetivo deste artigo era identificar e discutir os tipos de raciocínio - dedutivo, indutivo, abdutivo e por analogia - presentes nos capítulos de Geometria de sete coleções de Livros Didáticos do Ensino Médio aprovados pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) de 2018. Para alcançar essa meta, assumimos uma metodologia de pesquisa qualitativa, de cunho documental, e nos baseamos nas ideias teóricas propostas por Reid e Knipping (2010) acerca dos tipos de raciocínios relevantes no Ensino da Matemática.

Os resultados apontaram que todos os raciocínios foram identificados, no entanto com frequências diferentes, sendo os raciocínios dedutivo e indutivo os mais comuns, em detrimento dos raciocínios abdutivo e por analogia, que foram utilizados em apenas uma e duas coleções, respectivamente.

O raciocínio dedutivo esteve presente em todas as coleções, especialmente nos capítulos de geometria espacial, nos quais os autores se dedicavam a definir, também, conceitos correlatos, como método axiomático, hipótese, tese e teoremas. Já o raciocínio indutivo foi utilizado com certa frequência e em momentos semelhantes nas diferentes coleções. Utilizou-se esse raciocínio na discussão da relação de Euler, no cálculo de áreas e de volumes.

O raciocínio abdutivo foi identificado em apenas uma das coleções, na forma de exercício resolvido, cujo objetivo era identificar o erro cometido na resolução apresentada. Dado que esse tipo de raciocínio faz parte do fazer matemática e não da Matemática “pronta”, isto é, no cotidiano do trabalho do matemático, torna-se complicado perceber sua presença nos capítulos (MAZZI, 2018).

Por fim, o raciocínio por analogia, nas poucas coleções que o abordaram, foi identificado ao longo dos exercícios. Foi percebido que alguns deles estavam conectados a outros, isto é, a partir das noções discutidas em uma questão, situações semelhantes – análogas – eram abordadas em outros momentos, sugerindo que os alunos fizessem uma relação com resoluções anteriormente realizadas. Esse tipo de raciocínio, no entanto, não se fez presente em nenhuma prova e/ou demonstração proposta pelos autores.

Defendemos que cada um desses raciocínios possui seu papel no Ensino da Matemática e, portanto, devem ser considerados no cotidiano escolar, com o intuito de contribuir para a aprendizagem dos alunos. Felder (1996) defende que alunos diferentes reagem de forma distinta ao ensino, aprendendo de variadas maneiras, sendo necessário que diversos estilos de aprendizagem e tipos de raciocínio sejam utilizados com o intuito de não gerar desânimo por parte dos alunos.

Sugere-se, por fim, que os autores de Livros Didáticos, em geral, elaborem atividades que articulem os diferentes tipos de raciocínio e destaquem para o professor, ao longo do material, a importância de se utilizar cada um desses raciocínios ao longo da jornada escolar.

Referências

ABBAGNANO, N. **Dicionário de filosofia**. Tradução de Alfredo Bosi e Ivone Castilho Benedetti. 5. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

ARSLAN, C.; GOCMENCELEBI, S. I.; TAPAN, M. S. **Learning and reasoning styles of pre service teachers':** inductive or deductive reasoning on science and mathematics related to their learning style. Procedia - Social and Behavioral **Sciences**, v. 1, n. 1, p. 2460-2465, 2009.

AYALON, M.; EVEN, R. **Deductive reasoning**: in the eye of the beholder. Educational Studies in Mathematics, v. 69, n. 3, p. 235-247, 2008.

AYALON, M.; EVEN, R. **Mathematics educators' views on the role of mathematics learning in developing deductive reasoning**. International Journal of Science and Mathematics Education, v. 8, n. 6, p. 1131-1154, 2010.

BALESTRI, R. **Matemática**: interação e tecnologia. 2. ed. São Paulo: Leya, 2016a. v. 1.

BALESTRI, R. **Matemática**: interação e tecnologia. 2. ed. São Paulo: Leya, 2016b. v. 2.

BALESTRI, R. **Matemática**: interação e tecnologia. 2. ed. São Paulo: Leya, 2016c. v. 3.

BICUDO, M. A. V. **Pesquisa qualitativa e pesquisa qualitativa segundo a abordagem fenomenológica.** In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.). Pesquisa qualitativa em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2012. p. 111-124.

BRASIL. **Decreto nº 9.099**, de 18 de julho de 2017. Dispõe sobre o Programa Nacional do Livro e do Material Didático. Diário Oficial da União, Brasília, DF, 2017.

BROWN, F. M.; TARNLUND, S. A. **Inductive reasoning in Mathematics**. In: INTERNATIONAL JOINT CONFERENCE ON ARTIFICIAL INTELLIGENCE, 5., 1977, Cambridge, Massachusetts, USA. Proceedings… Cambridge, Massachusetts, USA: Massachusetts Institute of Technology, 1977. v. 2. p. 844-850.

CHAVANTE, E.; PRESTES, D. **Quadrante**: Matemática. São Paulo: SM, 2016a. v. 1.

CHAVANTE, E.; PRESTES, D. **Quadrante**: Matemática. São Paulo: SM, 2016b. v. 2.

CHAVANTE, E.; PRESTES, D. **Quadrante**: Matemática. São Paulo: SM, 2016c. v. 3.

DANTE, L. R. **Matemática**: contexto & aplicações. 3. ed. São Paulo: Ática, 2017a. v. 1.

DANTE, L. R. **Matemática**: contexto & aplicações. 3. ed. São Paulo: Ática, 2017b. v. 2.

DANTE, L. R. **Matemática**: contexto & aplicações. 3. ed. São Paulo: Ática, 2017c. v. 3.

FAN, L. **Textbook research as scientific research**: towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. ZDM Mathematics **Education**, v. 45, p. 765-777, 2013.

FELDER, R. M. **Matters of style**. ASEE Prism, v. 6, n. 4, p. 18-23, 1996.

GODOY, A. S. **Pesquisa qualitativa**: tipos fundamentais. Revista de Administração de Empresas, São Paulo, v. 35, n. 3, p. 20-29, 1995.

HAVERTY, L. A. *et al.* **Solving inductive reasoning problems in Mathematics**: not-so-trivial pursuit. Cognitive Science, v. 24, n. 2, p. 249-298, 2000.

HOWSON, G. **The development of mathematics textbooks: historical reflections from a personal perspective**. ZDM Mathematics Education, v. 45, p. 647-658, 2013.

IEZZI, G. *et al*. **Matemática**: ciência e aplicações. 9. ed. São Paulo: Saraiva Educação, 2017a. v. 1.

IEZZI, G. *et al*. **Matemática**: ciência e aplicações. 9. ed. São Paulo: Saraiva Educação, 2017b. v. 2.

IEZZI, G. *et al*. **Matemática**: ciência e aplicações. 9.. ed. São Paulo: Saraiva Educação, 2017c. v. 3.

JOHNSON-LAIRD, P. N.; BYRNE, R. M. J. **Deduction**. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 1991.

LEONARDO, F. M. **Conexões com a Matemática**. 3. Ed. São Paulo: Moderna, 2016ª. v. 1.

LEONARDO, F. M. **Conexões com a Matemática**. 3. Ed. São Paulo: Moderna, 2016b. v. 2.

MAZZI, L. C. **As demonstrações matemáticas presentificadas nos livros didáticos do ensino médio**: um foco nos capítulos de Geometria. Tese de doutorado em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, São Paulo, 2018.

LEONARDO, F. M. **Conexões com a Matemática**. 3. Ed. São Paulo: Moderna, 2016c. v. 3.

NEUBERT, G.; BINKO, J. B. **Inductive reasoning in the secondary classroom**. Washington, D.C.: National Education Association, 1992. 127 p. (Aspects of Learning Series).

PAIVA, M. **Matemática** - Paiva. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2015a. v. 1.

PAIVA, M. **Matemática** - Paiva. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2015b. v. 2.

PAIVA, M. **Matemática** - Paiva. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2015c. v. 3.

PAPAGEORGIO, E. **Towards a teaching approach for improving Mathematics inductive reasoning problem solving**. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 33., 2009, Cidade: Thessaloniki, Grécia. Proceedings… Cidade: Thessaloniki, Grécia, 2009. p. 313-320. v. 4.

PARK, J.; HAN, S. **Using deductive reasoning to promote the change of students' conceptions about force and motion**. International Journal of Science **Education**, v. 24, n. 6, p. 593-609, 2002.

PEIRCE, C. S. **Semiótica**. 3. ed. São Paulo: Perspectiva, 2003. 337 p

REID, D.; KNIPPING, C. **Proof in mathematics education**: research, learning and teaching. Canada: Sense Publishers, 2010.

SOUZA, J. S. **A abdução em Peirce**: um estudo hermenêutico. 2015. 92 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2015.

SOUZA, J.; GARCIA, J. **#Contato Matemática**. São Paulo: FTD, 2016a. v. 1.

SOUZA, J.; GARCIA, J. **#Contato Matemática**. São Paulo: FTD, 2016b. v. 2.

SOUZA, J.; GARCIA, J. **#Contato Matemática**. São Paulo: FTD, 2016c. v. 3.

WU, H. **The role of Euclidean geometry in high school**. Journal of Mathematical Behavior, v. 15, n. 3, p. 221-237, 1996.

Submetido em maio de 2020

Aceito em junho de 2020.