

***Lesson Study* como Processo de Desenvolvimento
Profissional de Professores de Matemática sobre o
Conceito de Volume**

**Lesson Study as a Process of Professional Development of
Mathematics Teachers on the Concept of Volume**

Roger Artur Jähring Wanderley¹

Maria Alice Veiga Ferreira de Souza²

RESUMO

Este artigo descreve, analisa e discute resultados de uma investigação do tipo observação participante sobre o conceito de volume e de seu ensino defendidos pela comunidade científica da Educação Matemática, mobilizados em uma formação de professores à luz do *Lesson Study*. O estudo foi apoiado em referências da Educação Matemática sobre *Lesson Study*, formação de professores e volume. Os dados emergiram de diário de bordo, planos de aula, entrevista focal e gravação de áudio e imagem. Os principais resultados mostraram que os professores ampliaram e aprofundaram seus conhecimentos de volume, antes limitados a fórmulas, ao estabelecerem relações deste conceito com os de área, massa e densidade, a partir de situações de comparação, medição e produção, além de compreenderem as diferenças entre os conceitos de volume e capacidade. A colaboração, a negociação e a elaboração grupal de diferentes estratégias de ensino foram insumos para os professores apreenderem conhecimentos pedagógicos sobre volume.

PALAVRAS-CHAVE: *Lesson Study*. Formação de Professores de Matemática. Volume. Conceito. Ensino.

ABSTRACT

This article describes, analyzes and discusses the results of a participant observation investigation on the concept of volume and its teaching defended by the scientific community of Mathematics Education, mobilized in teacher training in the light of the Lesson Study. The study was supported by

¹ Professor de Matemática da Secretaria Municipal da Serra/ES. Mestre em Educação pelo Instituto Federal do Espírito Santo (Ifes). E-mail: wanderley.roger@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3272-8245>.

² Graduada em Matemática (Ufes), Doutora em Psicologia da Educação Matemática (Unicamp), Pós-doutora em resolução de Problemas (Univ. Lisboa - Portugal) e Números Racionais (Rutgers University - US). Professora titular do Programa de Pós-graduação em Ciências e Matemática do Instituto Federal do Espírito Santo (Ifes). E-mail: alicevfs@gmail.com. ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-2038-813X>.



references from Mathematical Education on Lesson Study, teacher training and volume. The data emerged from the logbook, lesson plans, focal interview and audio and image recording. The main results showed that teachers expanded and deepened their knowledge of volume, previously limited to formulas, by establishing relations of this concept with those of area, mass and density, from situations of comparison, measurement and production, in addition to understanding the differences between the concepts of volume and capacity. Collaboration, negotiation and group elaboration of different teaching strategies were inputs for teachers to learn pedagogical knowledge in volume.

KEYWORDS: Lesson Study. Mathematics Teacher Training. Volume. Concept. Teaching.

Introdução

Lesson Study constitui um processo de desenvolvimento ou aperfeiçoamento de profissionais da educação surgido há cerca de 150 anos no Japão, impulsionado pela necessidade de atender a demandas educacionais daquele país para sua integração no mundo ocidental (SOUZA, 2019; BABA; IWASAKI; UEDA, 2012; SOUZA; WROBEL; BALDIN, 2018). Essa maneira de construir e executar aulas e de refletir sobre elas está fortemente pautada na participação ativa de estudantes na(para) aprendizagem de conteúdos curriculares nucleares e vem ganhando crescente atenção e lugar nas pesquisas mundiais de Educação Matemática (SOUZA; WROBEL; GAIGHER, 2017; FERNÁNDEZ; CANNON; CHOKSHI, 2003; PERRY; LEWIS, 2009; GAIGHER, 2017; MELLO, 2018; BEZERRA, 2017).

Volume é um desses conteúdos centrais da Matemática que interessa desenvolver uma formação de professores, tal como preconizada por um *Lesson Study*, principalmente justificado nos seguintes argumentos: (1) volume parece constituir-se em uma dificuldade de ensino na construção conceitual para a aprendizagem de alunos e não costuma ser privilegiado no trabalho docente, por figurar em capítulos finais dos livros didáticos brasileiros de matemática (MORAIS; BELLEMAIN, 2010; BATTISTA, 2003), ficando a mercê do tempo e da prioridade particular que cada professor atribui aos conteúdos curriculares; (2) alunos apresentam dificuldades epistemológicas relatadas pelo primeiro autor deste artigo e corroboradas por investigadores da Educação Matemática (MELLO, 2018; FIGUEIREDO, 2013; MORAIS; BELLEMAIN, 2010); (3) o conteúdo de volume integra o desenvolvimento de outros conceitos da Matemática (e.g., números e operações, geometria geral, por exemplo) e compõe conceitos de outras áreas do conhecimento (e.g., Física, Astronomia, Meteorologia, Química).

Diante desse contexto, este artigo descreve, analisa e discute resultados de uma investigação que busca atender a uma agenda acadêmico-científica defendida pela comunidade científica da Educação Matemática sobre o conceito de volume e

de seu ensino, mobilizados em uma formação de professores à luz do *Lesson Study*, particularmente nas seguintes questões de pesquisa:

1- Que potencialidades e conhecimentos do conteúdo o *Lesson Study* fez emergir para a construção ampla e profunda do conceito de volume por professores de Matemática?

2- Que potencialidades e conhecimentos pedagógicos o *Lesson Study* favoreceu para o ensino e construção de aulas sobre o conceito de volume por professores de Matemática?

A estrutura conceitual e teórica do *Lesson Study* como um processo de formação de professores e do conteúdo matemático de volume, seguida de indicações para este ensino, inauguram os próximos tópicos.

***Lesson Study* e a Formação de Professores**

O *Lesson Study* é um processo voltado para produção de desenvolvimento de profissionais da educação – professores, pedagogos, gestores, orientadores, psicólogos educacionais, etc. - cada vez mais utilizado em diferentes níveis de ensino, disciplinas e países (MACEDO; BELLEMAIN; WISLOW, 2020; BALDIN; SILVA; SOUZA; WROBEL, 2018; FUJII, 2014). Esse processo é iniciado com alguma demanda identificada geralmente por professores sobre algum problema relevante na aprendizagem dos alunos e(ou) de seu ensino. Na sequência, os profissionais estudam como o tema demandado se comporta no currículo escolar, traçam metas e planejam aula(s) considerando as dificuldades, reações, equívocos e questionamentos dos alunos, constroem tarefas e atividades a partir de estudos teóricos e de materiais, instrumentos ou meios que apoiem suas ações de ensino (FERNANDEZ; YOSHIDA, 2004).

A(s) aula(s) é(são) lecionada(s) por um dos professores do grupo desenvolvedor do *Lesson Study*, enquanto os outros observam e tomam notas a respeito da aprendizagem dos alunos, sendo orientados pelo plano elaborado colaborativamente, com base nos objetivos propostos. Logo após a conclusão de cada aula, os profissionais se reúnem para analisar e refletir os resultados das ações planejadas sobre a aprendizagem dos alunos. Essa análise pode levar à reformulação do plano de aula(s), com alterações e enriquecimentos que busquem superar insuficiências, defeitos ou pontos frágeis do planejamento visando à aprendizagem dos alunos (FERNANDEZ, 2002; LEWIS; PERRY; HURD, 2009; MURATA, 2011; FUJII, 2014; BJULAND; MOSVOLD, 2015). Todo o processo acaba por se constituir em uma investigação (*research lesson* – TAKAHASHI;

MCDUGAL, 2014) cujos dados são coletados no momento da execução da aula e os resultados podem ser gatilho para futuras ações e pesquisas (Figura 1).

Figura 1 - Ciclo de um *Lesson Study*.



Fonte: Imagens extraídas de uma série de vídeos construídos pela segunda autora sobre *Lesson Study* no Japão (SOUZA, 2020a).

Embora todo *Lesson Study* esteja preocupado com as aprendizagens dos alunos, há muito o que dizer e investigar sobre o trabalho dos profissionais envolvidos, neste caso, dos professores, como um processo formativo que se distingue de outros por não se centrar na figura do professor, mas fortemente no ensino construído colaborativamente. O *Lesson Study* se diferencia de outras formações por congregar aspectos do conteúdo matemático e de como praticá-lo em sala de aula, levando-se em conta requisitos do conhecimento pedagógicos do currículo, dos estudantes e do ensino associados aos conhecimentos especializados do conteúdo. Nesse sentido, não basta saber muito do "o quê", é preciso saber "como" conduzi-lo e vice-versa.

No esteio de um *Lesson Study*, para além da mera divisão, compartilhamento ou cooperação de um trabalho, a colaboração exige apoio mútuo para alcance de um objetivo comum que deve ser negociado, ou seja, o grupo deve primar pela comunicação recíproca, ofertas e contraofertas de ideias e contribuições na busca por uma solução ou resultado que seja aceitável por todos os membros. A

negociação na colaboração requer renúncia a qualquer condição que lhes atribua superioridade de qualquer natureza - *e.g.*, maior tempo de magistério, maior quantidade de títulos acadêmicos - inexistindo, portanto, hierarquia ou líder(es). A atmosfera no grupo deve ser pautada pela confiança mútua e corresponsabilidade sobre o trabalho, não importando quem execute o planejamento. Cada membro deve se despir de quaisquer tentativas de disputas e vaidades, bem como concentrar suas atenções e esforços sobre o “quê” e “como” pode contribuir para os melhores resultados.

Nessa perspectiva, profissionais da educação formados com ênfase no isolamento, e(ou) que creem ser bastante ao professor de matemática conhecer apenas “o quê” a ser ensinado, e(ou) que dissociam conteúdo curricular de sua prática de ensino (“como”), distanciam-se do que seja construir um trabalho baseado no *Lesson Study*, cujo extremo oposto se apresenta como um *modus vivendi* profissional que demandará (re)construção por um processo de desenvolvimento formativo cujas potencialidades e condições de realização para ampliação de conhecimentos propomos conhecer.

De modo mais teórico, Ball, Thames e Phelps (2008), integrantes do grupo Hill *et al.* (2011), estudaram os conhecimentos necessários à formação e prática do professor, em especial do professor de matemática. Esses autores se inspiraram nos trabalhos de Shulman (1986) para formularem sua teoria, que foi motivada pelo seguinte questionamento: que conhecimentos são necessários à profissão de professor? Responder a esse questionamento não é trivial.

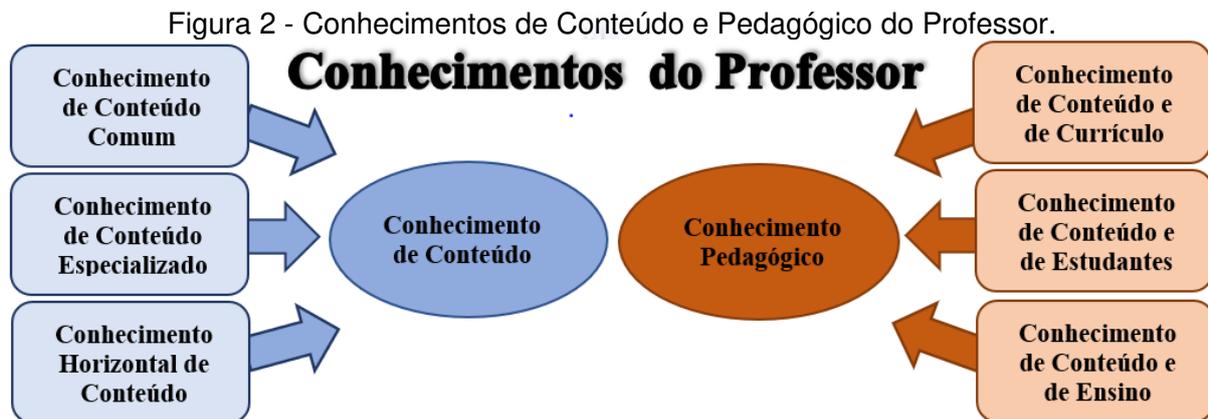
Shulman (1986) iniciou o trabalho de investigação identificando, selecionando e mensurando os conhecimentos e habilidades inerentes ao trabalho do professor. Suas discussões instigaram diversos pesquisadores a encontrar os detalhes e especificidades que poderiam responder àquela pergunta. Detalhes que Ball, Thames e Phelps (2008) contribuíram por meio de suas investigações referentes aos conteúdos exigidos à tarefa de ensinar, mas principalmente em como o professor precisa apreender esses conteúdos. Buscando ampliar e detalhar o trabalho iniciado por Shulman (1986), esses autores identificaram seis conhecimentos necessários à profissão de professor:

- Conhecimento de Conteúdo Comum;
- Conhecimento de Conteúdo Especializado;
- Conhecimento Horizontal de Conteúdo;
- Conhecimento de Conteúdo e Currículo;

Conhecimento de Conteúdo e Estudantes;

Conhecimento de Conteúdo e Ensino.

Os três primeiros correspondem ao conhecimento do conteúdo a ser ministrado, ou seja, os conhecimentos de matemática que todo professor deve dominar. Os outros três correspondem ao conhecimento pedagógico de conteúdo, que se referem à tarefa de ensino (Figura 2).



Fonte: Adaptado de Ball, Thames e Phelps (2008, p. 5).

Ball, Thames e Phelps (2008) consideram Conhecimento de Conteúdo Comum como os conhecimentos básicos de matemática que outras pessoas também possuem, pois também são usados em outras profissões que não a de professor. O Conhecimento de Conteúdo Especializado refere-se aos conhecimentos aprofundados de matemática que possibilitam ao professor conhecer detalhes a respeito da matemática que o instrumentaliza saber, o porquê e como funcionam os aspectos mais internos dessa disciplina. Esses conhecimentos permitem analisar os trabalhos dos alunos, estratégias, raciocínios, livros-textos e validá-los ou não à luz da matemática. O Conhecimento Horizontal de Conteúdo é o olhar sobre tópicos e ideias matemáticas e como tratá-los ao longo dos anos de estudo e suas relações com outros campos e conceitos.

Com respeito ao Conhecimento Pedagógico de Conteúdo, muito se discute em como defini-lo de forma menos ampla. Para Ball, Thames e Phelps (2008), o consenso entre os pesquisadores, como Berg e Greive (1999), Lowery (2002), Niess (2005), Magnusson, Krajcik, e Borko (1999), sugere que seria a forma de agregar o conhecimento específico de matemática com a tarefa de tornar esse conhecimento acessível ao aluno, ou seja, como criar meios para potencializar a apropriação desse conhecimento pelo aluno. Para tal, é essencial saber como ensinar os alunos, tendo em conta o que os documentos oficiais dizem que é necessário o estudante saber, ou seja, ter Conhecimento de Conteúdo e Currículo.

Saber como os alunos pensam, aprendem, quais são os erros cometidos mais comuns, quais estratégias eles mais utilizam, como antecipar essas ações de modo a compreendê-las e aproveitá-las de forma construtiva seria o Conhecimento de Conteúdo e Estudantes. O ensino desenhado a partir do conhecimento dos estudantes vem a constituir o Conhecimento de Conteúdo e Ensino que se refere ao melhor meio de ensinar, saber utilizar os melhores exemplos e metáforas, as melhores técnicas, os materiais adequados e o melhor momento de usá-los. O conhecimento do ensino combina a compreensão do conteúdo matemático com o conteúdo pedagógico.

Pelo lado do ensino, educadores japoneses se preocuparam com pormenores em um *Lesson Study* direcionados para cada um dos conhecimentos pedagógicos. O estudo do currículo (CARVALHO, 2015) deve esclarecer como determinado conteúdo se comporta ao longo da escolaridade, quais requisitos e necessidades levam ao seu nascimento e quais impactos e consequências ele terá sobre outros assuntos da matemática e de outras disciplinas. Essa trajetória deve ser iniciada por uma problematização ou pela contextualização de um problema que estimule os alunos a pensar, a "mergulhar" no universo oferecido pelas ações de ensino.

O planejamento do ensino, por sua vez, deve projetar a figura do professor como o de um orquestrador, um mediador, pois, na verdade, os alunos é que deverão ter maiores manifestações. Nessa perspectiva, o professor não deve dar-lhes respostas prontas, mas conduzir seus raciocínios por meio de questionamentos (em japonês, *hatsumon*), sempre promovendo a maior interação entre eles. Há que se disponibilizar na lousa toda a produção de seus conhecimentos da aula (em japonês, *bansho*). Há que se considerar a síntese pelos alunos do que produziram em cada aula (em japonês, *neriage*) e, em seguida, a síntese do professor, resgatando pontos importantes a serem sublinhados (em japonês, *matome*) (SOUZA, 2020a, 2020b).

No *Lesson Study*, o ensino deve fluir tal como em uma história - com começo, meio e fim. As aulas não devem ser interrompidas por questões externas visando evitar "quebra" do raciocínio a construir. O grupo de profissionais deve prever reações, dúvidas e constrangimentos dos alunos, idealizando como lidar em cada situação a fim de minimizar quaisquer imprevisibilidades. O estudo do conteúdo deve contemplar diferentes estratégias que ampliem a visão do aluno sobre o mesmo objeto sob diferentes ângulos. No caso da matemática, sempre que possível, é indicado oferecer possibilidades algébricas, aritméticas, geométricas, por

esquemas, tabelas ou associações (TAKAHASHI; YOSHIDA, 2004; TAKAHASHI, 2006).

Sumariamente, uma formação de professores à luz do *Lesson Study* deve buscar garantir que os professores tenham domínio dos conhecimentos do conteúdo e pedagógicos para que tenham condições de desenvolver um trabalho profissional de qualidade. Para tanto, é útil aliar teoria e prática, o "o quê" ao "como", pois a simples exposição e(ou) transmissão de conteúdos sem articulações, problematizações e análises de sua prática de ensino podem gerar pouco ou nenhum significado delineados nos objetivos educacionais, caindo, possivelmente, em um viés de conteúdo sem sentido.

Volume: teoria e ensino

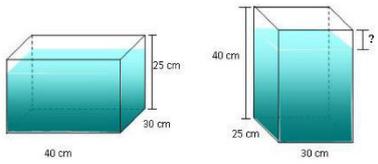
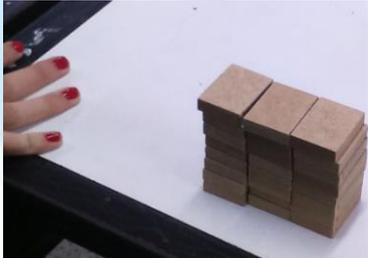
O desenvolvimento do conceito de volume é indicado na literatura da Educação Matemática (LIMA; BELLEMAIN, 2010) como devendo ser visto tal qual um modelo de classificação em quadros, defendidos por Douady e Perrin-Glorian (1989), adaptado por Figueiredo (2013) ao conceito de volume. Essa adaptação considera o conceito de volume como sendo objeto do quadro das grandezas, os sólidos correspondendo ao quadro geométrico e os números reais positivos referentes às medidas das grandezas que correspondem a objetos do quadro numérico (MELLO, 2018).

Para o desenvolvimento do conceito de volume, Figueiredo (2013) trabalhou com três tipos de situações a serem desenvolvidas nesta ordem: situações de comparação, de medição e de produção. Estas situações foram pesquisadas por Morais e Bellemain (2010) para a grandeza volume, cujos resultados geraram aprendizagem ampla e profunda desse conceito para alunos. Além disso, Figueiredo (2013) identificou e descreveu as principais estratégias a serem utilizadas pelos alunos em cada uma das três situações que passamos a descrever.

As situações de comparação consistem em determinar sólidos que tenham volumes iguais ou não, ordenando-os. As estratégias desenhadas podem ser visuais (perceptivas), de inclusão, de decomposição-recomposição, de imersão, de medida e comparação de modo intuitivo e sem uso de fórmulas, e de comparação de massas (e.g. Quadro 1a). As situações de medição estimulam a articulação entre os quadros numérico, geométrico e das grandezas. As estratégias geralmente utilizadas são a contagem de unidades, o uso de fórmulas, o princípio de Cavalieri, a imersão, o preenchimento e transvasamento (e.g. Quadro 1b). Por fim, as situações de produção são as que se caracterizam pela construção de um sólido com volume

menor, maior ou igual a um volume dado. As estratégias para esse contexto podem ser: composição, decomposição-recomposição e Princípio de Cavalieri (e.g. Quadro 1c).

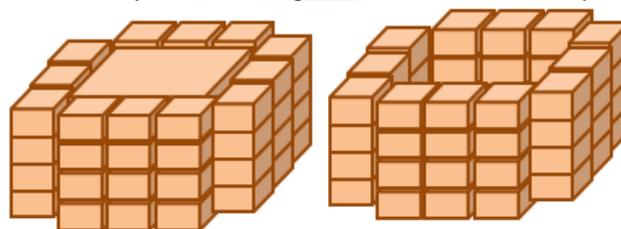
Quadro 1 - Exemplo de situações de (a) comparação, (b) medição e (c) produção, no estudo do conceito de volume

(a)	(b)	(c)
<p>Imagine uma esfera, um cubo e uma pirâmide de base quadrada como as das figuras abaixo. Coloque os objetos em ordem crescente de volume, sabendo que o diâmetro da esfera, as arestas do cubo, a aresta da base e a altura da pirâmide possuem todos o mesmo comprimento.</p>	<p>Imagine uma caixa de vidro inteiramente fechada e quase cheia de água, como mostra a figura. Observe que o nível da água está a 5cm abaixo do máximo. Agora, vamos colocar a caixa em pé, para que fique com 40cm de altura. Nesse caso, o nível da água ficará quantos centímetros abaixo do máximo?</p>	<p>Construa um empilhamento com 24 unidades de volume (24 u.v.).</p>
		

Fonte: Acervo dos autores.

Essas situações devem também promover compreensão sobre a relação de volume com massa e densidade, de modo discreto e contínuo, além de possibilitarem a distinção entre volume e capacidade cujos conceitos são diversos, mas relativos à mesma grandeza (Figura 3).

Figura 3 - Exemplo de distinção entre volume e capacidade.



Fonte: Acervo dos autores.

A Figura 3, apresenta duas imagens iguais, exceto pela presença de um bloco que preenche todo o interior do empilhamento da imagem da esquerda. A imagem

da esquerda difere da imagem da direita pela capacidade e ambas se igualam pelo volume. Em suma, duas figuras geométricas podem ter o mesmo volume, mas não necessariamente a mesma capacidade.

Metodologia de investigação

O estudo foi efetuado com 5 professores do Ensino Básico em meio ao planejamento de aulas para alunos do 7º ano do ensino fundamental de uma escola pública do estado do Espírito Santo. Foram 13 encontros semanais e presenciais de 2 horas cada, além de muitas interações virtuais intermediárias para a construção do planejamento. Esse grupo de professores se constituiu pelo aceite de um convite efetuado pelos autores deste artigo para o desenvolvimento de uma formação nos moldes de um *Lesson Study* justificado pelas dificuldades epistemológicas dos alunos do primeiro autor no conteúdo de volume. Esses professores desejavam conhecer e praticar o *Lesson Study* e concordaram com as razões para seu desenvolvimento por reconhecerem e vivenciarem as mesmas dificuldades em aulas no ensino básico sobre volume.

No primeiro encontro foi solicitado aos professores um plano escrito individual de uma ou mais aulas sobre o conceito de volume. Esses planos deveriam ser construídos do mesmo modo como habitualmente eram realizados por eles em suas escolas. Eles não seriam aplicados a quaisquer alunos, pois objetivávamos que servissem como base de comparação, reflexão e verificação sobre avanços no conhecimento pela via do *Lesson Study*. No segundo encontro foi realizada uma entrevista focal com os professores participantes sobre os planos elaborados. Em seguida, o terceiro encontro foi reservado para apresentação e debate iniciais sobre o *Lesson Study*. Essa sessão foi conduzida pelos autores deste artigo por possuírem experiência teórica e prática com o *Lesson Study* em formações anteriores e no desenvolvimento de investigações nesse tema. Os encontros seguintes foram pautados no estudo do currículo, na elaboração de metas de aprendizagem e no desenvolvimento do planejamento de aulas com estudos teóricos e práticos de volume a partir de autores da Educação Matemática. Em meio a esses encontros, mais requisitos do *Lesson Study* foram incorporados ou reforçados. Na semana posterior aos 13 encontros, e em uma mesma manhã, foram aplicadas 3 aulas de 50 minutos na turma de 7º ano por um dos professores, imediatamente seguida de uma reunião do grupo para reflexão sobre os resultados da aprendizagem daqueles alunos.

Os dados foram recolhidos por observação participante com elaboração de (1) um diário de bordo pelos autores deste artigo, (2) dos planos de aula inicialmente construídos pelos professores (àquela altura, não possuíam qualquer conhecimento sobre o *Lesson Study*), (3) de uma entrevista focal e, (4) de gravação em áudio e imagem dos 13 encontros de planejamento e do de reflexão.

Apesar de todo o trabalho com os professores e alunos do 7º ano ter sido efetuado sob autorização escrita de divulgação de suas produções, imagens e vozes, optamos por transcrevermos os protocolos dos 5 professores participantes simplesmente como “professor”, “professor A” e “professor B” em meio aos seus protocolos, não os distinguindo, e pelos formadores como “professor-formador” - autores deste artigo.

Resultados e análises

O *Lesson Study* se preocupa e congrega desenvolvimento do conteúdo matemático e de como praticá-lo em sala de aula. Tomando essa premissa, os resultados e análises serão apresentados de uma perspectiva que põe em relevo as potencialidades dessas duas vertentes - o conhecimento e o ensino - acerca da grandeza volume em uma formação de professores.

O conteúdo de volume

Todos os planos escritos e entregues pelos professores no primeiro encontro continham tarefas e atividades pautadas no uso de fórmulas para o cálculo de volume, desprezando integralmente a construção do conceito pelas perspectivas de comparação, produção e até de medição sem uso de fórmulas. O objetivo de um dos planos iniciais dá ideia do cenário geral: “Estimular e orientar os alunos a calcular o volume de sólidos”. A preocupação com os cálculos denunciou compreensão restrita ao uso de fórmulas matemáticas que declarassem o volume. Essa ideia foi confirmada quando, em meio ao planejamento do *Lesson Study*, os professores ainda apresentavam sugestões de atividades baseadas singularmente na medição com uso de fórmulas, apesar de o grupo já ter avançado com estudos teóricos sobre volume e que defendiam que esse conceito deveria ser abordado segundo as três perspectivas – comparação, medição e produção.

Esse fato leva a crer que o conceito de volume para esses professores ainda estava assentado no uso de fórmulas e que seria necessário mais tempo para ampliação e aprofundamento de suas compreensões e visões. A sequência de 13 encontros mostrou-se competente para esse alargamento. Sempre que um

professor apresentava alguma sugestão apoiada no uso de fórmulas, mas fora desse contexto - de comparação ou de produção -, o grupo imediatamente se manifestava em coro “Isso é medição com fórmulas”, seguida de muitos risos. O aspecto colaborativo do *Lesson Study* estava “vivo e atuante” para a compreensão potencial do conceito de volume desses professores. Um deles registrou o espírito colaborativo como um dos benefícios do *Lesson Study* para a compreensão de volume:

Professor - Isso que é legal no *Lesson Study*! Você não precisa carregar o mundo nas costas, pois todos colaboram abrindo um novo olhar, um ponto de vista que não tínhamos percebido [...] o nosso repertório e compreensão se ampliam e nos motivam a buscar maneiras de adequar a situação de forma a não descaracterizar o problema e torná-lo mais compreensivo.

Em outro momento após a execução da aula com os alunos, o diálogo entre dois professores trouxe outro registro sobre a diversidade de compreensão de volume por diferentes visões.

Professor - Acho que um dos grandes ganhos do *Lesson Study*, desse planejamento, é a gente conseguir alargar as possibilidades de respostas das estratégias dos alunos. A gente não dá conta de pensar em todas. Quando a gente [es]tá em grupo, surgem mais possibilidades. A gente os viu fazendo [os alunos] e, nossa, eles estão fazendo de todas as formas [pensadas colaborativamente durante o planejamento], né?

Professor-formador - Por isso é tão importante a gente estar junto. Cada um pensa de um jeito, então a diversidade “pintou” no nosso grupo.

Além disso, em meio aos encontros do *Lesson Study*, os professores também conseguiram ampliar seu conhecimento de volume (conhecimento de conteúdo especializado) pela associação com outros conceitos interligados a essa grandeza, como capacidade, área, massa e densidade. Também perceberam que não é necessário começar com unidades de medida padronizadas, pois o foco deve ser o conceito e o uso de unidades não padronizadas nesse momento pode contribuir para sua compreensão. Foi uma novidade “medirem” sem números, mas com “bloquinhos” como unidade de medida.

Durante o desenho de uma atividade para os alunos, o grupo desejava relacionar as grandezas massa e volume. Muitos professores ainda não haviam despertado para essa relação sugerindo que pedras fossem colocadas em recipientes com água para verificar o volume de água deslocada por cada uma (conhecimento de conteúdo especializado). Nesse momento, o diálogo entre dois professores sugerindo uma alternativa levou o grupo a esclarecer suas dúvidas.

Professor A - Podemos pesar as pedras, a de maior massa tem maior volume.

Professor B - Isso mesmo! Como são do mesmo material, as densidades são iguais. Portanto, a de maior massa tem maior volume. As grandezas massa e volume são diretamente proporcionais e a constante de proporcionalidade é, justamente, a densidade do material.

Em suma, inferimos que o *Lesson Study* contribuiu para a formação daqueles professores sobre o conceito do conteúdo matemático nos seguintes quesitos (conhecimento de conteúdo especializado): (1) alargamento do conceito de volume pelas situações de comparação, medição e produção; (2) compreensão de que figuras geométricas podem ter o mesmo volume, mas não necessariamente a mesma capacidade; (3) estreita relação entre volume, massa, área e densidade.

O ensino de volume

Os planos escritos individuais e iniciais de uma ou mais aulas sobre o conceito de volume revelaram carência de atenção, conhecimento e domínio sobre “como” a aula desenhada por cada professor seria levada a cabo e quais resultados com a aprendizagem dos alunos seriam obtidos. Esses planos continham o tema, objetivos, metodologia e avaliação, mas nenhum explicitava como as tarefas seriam desenvolvidas, quais pré-requisitos os alunos deveriam dominar e como conectá-los à aula em voga, além de quanto tempo seria necessário para o desenvolvimento. A entrevista focal confirmou que conhecimentos pedagógicos importantes sobre a condução da(s) aula(s) não estavam escritas porque, de fato, não faziam parte de seus repertórios profissionais.

Ao serem questionados sobre como iriam tratar o erro dos alunos e como os alunos iriam interagir entre si (conhecimento de conteúdo e estudantes), os professores não souberam responder ou, no máximo, ao solicitarmos explicações sobre como tratariam pré-requisitos da aula de volume (conhecimento de conteúdo e currículo), diziam que “Eu mesmo farei essa exposição [sobre área e perímetro], pois é muito importante que os alunos dominem certos conhecimentos prévios para dar bom andamento à aula”. Esse professor tem razão ao se preocupar com os conhecimentos prévios, mas também deve ter em conta como conectá-los ao novo conteúdo (conhecimento de conteúdo e currículo). Do mesmo modo, a mera exposição sem debate e interação denuncia um *modus vivendi* profissional que retira do aluno a oportunidade do protagonismo. A propósito do currículo, muitos professores possuíam a crença de que o conteúdo de volume somente poder-se-ia ser ministrado após as aulas de área e perímetro. Essa concepção foi superada ao

construírem atividades cujos entendimentos bidimensionais de figuras geométricas poderiam ser naturalmente mobilizados a partir das compreensões tridimensionais (conhecimento do conteúdo e currículo).

A diversificação de estratégias para estudo sobre o mesmo objeto foi tema de debates durante a entrevista focal. Os professores entenderam que o trabalho com diferentes figuras geométricas cumpriria com essa diversidade - e não deixa de ser verdade (conhecimento de conteúdo e estudantes) - entretanto, não consideraram que a mesma figura geométrica poder-se-ia ser estudada por modos diversos, remetendo-os à diversificação de estratégias de modo mais abrangente. Esse aspecto foi reconhecido ao longo dos encontros seguintes quando da construção do planejamento colaborativo (conhecimento de conteúdo e ensino). O seguinte debate esclarece:

Professor A - Um ponto que me chama muito atenção no *Lesson Study* é a preocupação em resolver um problema por várias vias: algébrica, esquemas, tabelas, desenhos. Penso ser importantíssimo o professor conhecer várias formas de resolução e estar aberto a reconhecer novas resoluções caso algum aluno a apresente. Uma aula assim é excelente para o aluno desenvolver sua criatividade e ser valorizado pelas suas conquistas durante o processo de resolução.

Professor B - Vários caminhos e representações têm maiores chances de atingir o objetivo de se fazer entender. Tem alunos que são mais visuais recorrendo a desenhos, esquemas, diagramas. Outros são mais algebristas, aritméticos. O importante é que cada um se sinta contemplado e não excluído por pensar diferente.

Professor-formador - Isso mesmo! Ver diferentes modos de resolver o mesmo problema aumenta o potencial matemático das pessoas. Muitas vezes a escola valoriza apenas um ou outro modo, mas essa prática é nociva e limitadora. Estimular a visualização por outros modos é o mesmo que treinar os músculos em uma academia, basta exercitar. Complemento dizendo que ninguém gosta do que não entende. Se alguém é mais algebrista, é provável que não se sinta confortável resolvendo um problema ou visualizando um conteúdo pela geometria ou outro modo. Mas para superar esse problema, nós, professores, devemos estimular o raciocínio por esses outros modos.

A entrevista focal revelou surpresa dos professores sobre antecipação de reações, dúvidas e equívocos dos alunos, levando a crer que essas descon siderações em seus planos seriam tratadas ao sabor do momento na aula. Em meio aos 13 encontros, o grupo se conscientizou da importância de planejarem as aulas com mais detalhamento e reflexão a fim de evitarem imprevisibilidades. Um deles se manifestou:

Professor - Essa etapa foi a mais trabalhosa. Foram tantos detalhes que pareciam não ter fim. Mas, foram necessárias cada intervenção e pontos destacados, pois ajuda a ter segurança na execução da aula. É muito importante estar preparado para diversas situações que possam surgir e ajudar os alunos na compreensão e na busca de uma estratégia para resolução sem induzir para o caminho que [eu] acho melhor, além de aclarar suas dúvidas para que eles percorram seu próprio caminho.

E no momento da reflexão pós-aulas, o professor que ministrou a aula sublinhou a importância do planejamento colaborativo ter sido tão detalhado:

Professor - Foi interessante perceber que os diversos equívocos que os alunos estavam cometendo na hora de fazer a medição do volume dos blocos foram antecipados por nós no planejamento. Isso me proporcionou uma segurança muito grande, pois eu sabia como deveria intervir para auxiliá-los. Se não tivéssemos antecipado esse tipo de situação, eu estaria perdida (conhecimento de conteúdo e estudantes).

Ao final do momento de reflexão pós-aulas, os professores-formadores pediram que os professores comparassem o planejamento inicial que apresentaram no primeiro encontro e o planejamento colaborativo. A maioria mencionou, principalmente, a distância entre os dois planejamentos em termos de riqueza de detalhamento, da abrangência do conteúdo e estratégias, e a valorização do aluno como protagonistas da aula (conhecimento pedagógico do conteúdo). Uma professora resumiu dizendo que:

Professor - Nunca mais conseguirei fazer planos de aula como o que fiz [no início, de forma isolada], depois desse *Lesson Study* [risos].

Em suma, a partir dos protocolos dos professores em meio à entrevista focal, aos encontros para construção do planejamento colaborativo, à reunião para reflexão pós-aula e aos planejamentos iniciais solicitados no primeiro encontro, inferimos que os requisitos e características do *Lesson Study* contribuíram para a formação daqueles professores sobre a prática de ensino de volume em todos os conhecimentos pedagógicos do conteúdo e especificamente nos seguintes aspectos: (1) pensar em uma aula requer conhecimento profundo e alargado do comportamento do conteúdo no currículo - volume pode ser ministrado antes ou depois do conteúdo de área, a depender de como será problematizado; (2) o mesmo objeto de estudo pode(deve) ser entendido e visto sob diferentes ângulos e conjugando aspectos conceituais e procedimentais que tragam ao primeiro plano a diversificação de estratégias (algébricas, geométricas, aritméticas, etc.); (3) os pré-requisitos, bem como conectá-los ao que vem de novo na aula, devem ser objeto de atenção e reflexão; (4) a antecipação de reações, dúvidas e equívocos dos alunos

oferece maior confiança e evita imprevisibilidades durante a aula; (5) a colaboração como insumo presente nas negociações do grupo para apreensão do novo modus operandi.

Balanco geral

O artigo descreveu, analisou e discutiu potencialidades de um *Lesson Study* que se colocaram mais evidentes em uma formação para professores de Matemática sobre o conceito de volume e de seu ensino para alunos do 7º ano de uma escola pública brasileira.

Todo *Lesson Study* congrega demandas sobre o conteúdo escolar (o quê) e o modo de ensiná-lo (como). Quanto ao conteúdo de volume, a pesquisa revelou alargamento desse conceito pelas situações de comparação, medição e produção. A expansão do conceito progrediu de entendimentos limitados a aspectos procedimentais pautados no uso de fórmulas para compreensões de comparação, produção e de medição com unidades de medida que extrapolam as convencionais - e.g., comprimento (metro e centímetro) e capacidade (litro). Em meio às discussões, os professores compreenderam que figuras geométricas podem ter o mesmo volume, mas não necessariamente a mesma capacidade. Além disso, relacionaram o conceito ampliado de volume aos de massa, área e densidade. Essas evidências proporcionaram alargamento de seus conhecimentos de conteúdo especializado, principalmente.

No que diz respeito à prática de ensino, o processo de desenvolvimento de aulas baseadas no *Lesson Study* promoveu o reconhecimento de que o mesmo conteúdo deve ser abordado sob diferentes ângulos e conjugando aspectos conceituais aos procedimentais que tragam ao primeiro plano a diversificação de estratégias (algébricas, geométricas, aritméticas, etc.). Os pré-requisitos, bem como conectá-los ao objeto da aula, devem ser objeto de atenção e reflexão. A antecipação de reações, dúvidas e equívocos dos alunos - aspectos preconizados pelo *Lesson Study* - oferecem maior confiança e evitam imprevisibilidades durante a aula. A experiência, portanto, parece ter movimentado os três conhecimentos pedagógicos do conteúdo - currículo, estudantes e ensino.

A colaboração, como insumo para a formação dos professores, se constituiu como importante suporte para incorporação gradual de um espírito de negociação e de conforto para exposição de limitações e dificuldades tanto no domínio do conteúdo de modo amplo e profundo, quanto de seu ensino, justificando o investimento de tempo e esforço em um *Lesson Study*.

Por fim, vale lembrar que a motivação inicial deste estudo foi originada de dificuldades epistemológicas de alunos relatadas pelo primeiro autor e corroboradas pelos demais professores. A investigação indicou limitações do conceito de volume e de seu ensino pelos professores participantes e, em algum grau, essa restrição pode estar influenciando as dificuldades epistemológicas dos alunos. Essa hipótese excede as fronteiras desta investigação, mas nos aponta para um olhar sobre as formações iniciais e continuadas, e nas abordagens dos livros didáticos, que ficam como sugestão de continuidade deste estudo.

Agradecimentos

Agradecemos o apoio e financiamento deste trabalho à Fapes – Fundação de Apoio à Pesquisa e Inovação do Espírito Santo, ao Ifes – Instituto Federal do Espírito Santo e à Secretaria de Educação do Município da Serra/ES.

Referências

- BABA, Takuya; IWASAKI, Hideki; UEDA, Atsumi; DATE, Fumiharu. Values in Japanese mathematics education: their historical development. **ZDM Mathematics Education**, v. 44, p. 21-32, 2012.
- BALDIN, Yuriko Yamamoto; SILVA, Aparecida F.; SOUZA, Maria Alice Veiga Ferreira de; WROBEL, Julia Schaezle. Understanding the Lesson Study in the Brazilian Cultural Context: Current Challenges and Perspectives for the Future. In: WORLD ASSOCIATION OF LESSON STUDIES Studies (WALS) International Conference, 2018, Beijing, People's Republic of China. **Anais...**, Beijing: Beijing Normal University, 2018.
- BALL, Deborah Loewenberg; THAMES, Mark Hoover; PHELPS, Geoffrey Charles. Content knowledge for teaching: What makes it special? **Journal of Teacher Education**, v. 59, n. 5, p. 389–407, nov. 2008.
- BATTISTA, Michael T. Understanding students' thinking about area and volume measurement. In CLEMENTS, Douglas H.; BRIGHT, George. (Org.) **Learning and Teaching Measurement: 2003 Yearbook**. Virginia: Reston, 2003. p.122-142.
- BERG, Kevin; GREIVE, Cedric. Understanding the siphon: An example of the development of pedagogical content knowledge using textbooks and the writings of early scientists. **Australian Science Teachers' Journal**, v. 45, n. 4, p. 19-26, 1999.
- BEZERRA, Renata Camacho. **Aprendizagens e desenvolvimento profissional de professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental no contexto da Lesson Study**. Tese (Doutorado em Educação) - Programa de Pós-graduação em Educação da Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual Paulista, Presidente Prudente, 2017. Disponível em <<http://hdl.handle.net/11449/151292>>. Acesso em 01 de set. 2019.
- BJULAND, Raymond; MOSVOLD, Reidar. Lesson Study in teacher education: Learning from a challenging case. **Teaching and Teacher Education**, v. 52, p. 83-90, sep. 2015.

- CARVALHO, Rodrigo da Silva. **Um estudo comparativo sobre educação matemática entre Brasil e Japão**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Pós Graduação em Educação da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, USP, São Paulo, 2015.
- DOUADY, Regine; PERRIN-GLORIAN, Marie-Jeanne. Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. **Educational Studies in Mathematics**. v. 20, n. 4, p. 387-424, 1989.
- FERNANDEZ, Clea. Learning from Japanese approaches to professional development: The case of Lesson Study. **Journal of Teacher Education**, v. 53, n. 5, p. 393-405, nov. 2002.
- FERNANDEZ, Clea; YOSHIDA, Makoto. Lesson Study: **A Japanese approach to improving mathematics teaching and learning**. New Jersey, US: Autores Associados, 2004.
- FERNANDEZ, Clea; CANNON, Joanna; CHOKSHI, Samrat. A US-Japan Lesson Study collaboration reveals critical lenses for examining practice. **Teaching and Teacher Education**, Cardiff, n. 19, p. 171-185, 2003.
- FIGUEIREDO, Ana Paula Nunes Braz. **Resolução de problemas sobre a grandeza volume por alunos do Ensino Médio**: um estudo sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Pós Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Centro de Educação, UFPE, Recife, 2013.
- FUJII, Toshiakira. Implementing Japanese Lesson Study in foreign countries: misconceptions reviewed. **Mathematics Teacher Education and Development**, v. 16, n. 1, p. 2-18, jun. 2014.
- GAIGHER, Vanessa Ribeiro. **Formação do professor de Matemática em aulas de resolução de problemas a partir de ações colaborativas e reflexivas**. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática, Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória, 2017.
- HILL, Heather *et al.* Measuring the Mathematical quality of instruction: Learning Mathematics for Teaching Project. **Journal for Mathematics Teacher Education**, v. 14, n. 1, p. 25-47, feb. 2011.
- LEWIS, Catherine; PERRY, Rebecca; HURD, Jacqueline. Improving mathematics instruction through Lesson Study: A theoretical model and North American case. **Journal of Mathematics Teacher Education**, Netherlands, v. 12, n. 4, p. 263-283, 2009.
- LIMA, Paulo Figueiredo; BELLEMAIN, Paula Moreira Baltar. Grandezas e Medidas. In: CARVALHO, João Bosco Pitombeira Fernandes de (Coordenação). **Matemática: Ensino Fundamental**. Brasília: Ministério da Educação/ Secretaria de Educação Básica, v. 17, Cap. 8, p. 167-200, 2010.
- LOWERY, Norene Vail. Construction of teacher knowledge in context: Preparing elementary teachers to teach mathematics and science. **School Science and Mathematics**, v. 102, n. 2, p. 68-83, 2002.

MACEDO, Aluska Dias Ramos. de; BELLEMAIN, Paula Moreira Baltar; WISLOW, Carl. Lesson Study with didactical engineering for student teachers in Brazil. **International Journal for Lesson and Learning Studies**, v. 9, n. 2, p. 127-138, 2020.

MAGNUSSON, Shirley; KRAJCIK, Joseph; BORKO, Hilda. Nature, sources and development of pedagogical content knowledge for science teaching. In Julie Gess-Newsome & Norman G. Lederman (Eds.). **Examining pedagogical content knowledge: The construct and its implications for science education**. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic, p. 95-132, 1999.

MELLO, Luanda Firme. **Formação do conceito de área e perímetro a partir de aulas baseadas no modelo Lesson Study**. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática, Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória, 2018.

MORAIS, Leonardo Bernardo; BELLEMAIN, Paula Moreira Baltar. Análise da abordagem do conceito de volume nos livros didáticos de Matemática para os anos finais do ensino fundamental sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais. **Congresso de Iniciação Científica** - UFPE, Recife, 2010.

MURATA, Aki. Introduction: conceptual overview of Lesson Study. In: HART, Lynn C.; ALSTON, Alice; MURATA, Aki. (Ed.). **Lesson Study research and practice in mathematics education**. New York, NY: Springer, 2011. p. 1-12.

NIESS, Margaret. Preparing teachers to teach science and mathematics with technology: Developing a technology pedagogical content knowledge. **Teaching and Teacher Education**, n. 21, p. 509-523, 2005.

PERRY, Rebecca; LEWIS, Catherine. What is Successful Adaptation of Lesson Study in the U.S.? **Journal of Educational Change**, Netherlands, v. 10, n. 4, p. 365-391, 2009.

SHULMAN, Lee S. Those who understand: Knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

SOUZA, Maria Alice Veiga Ferreira de. **Lesson Study** - parte 1 - origem e principais características - Maria Alice. 2019. Vídeo. Disponível em <<https://www.youtube.com/watch?v=z-S3g7Yup4c&t=1s>>. Acesso em: 30 de ago. 2020a.

SOUZA, Maria Alice Veiga Ferreira de. **Lesson Study** - parte 5 - bansho-neriage-matome - Maria Alice. 2019. Vídeo. Disponível em <<https://www.youtube.com/watch?v=BnaehYc-MU>>. Acesso em: 30 de ago. 2020b.

SOUZA, Maria Alice Veiga Ferreira de; WROBEL, Julia Schaetzle; GAIGHER, Vanessa Ribeiro. Planejamentos colaborativos e reflexivos de aulas baseadas em resolução de problemas verbais de matemática, **Vidya**, Santa Maria, v. 37, n. 1, p. 51-73, jan/jun., 2017.

SOUZA, Maria Alice Veiga Ferreira de; WROBEL, Julia Schaetzle; BALDIN, Yuriko. Yamamoto. *Lesson Study* como meio para formação inicial e continuada de professores de matemática - entrevista com Yuriko Yamamoto Baldin. **Boletim Gepem**, Rio de Janeiro, v. 73, p. 115-130, jul/dez., 2018.

TAKAHASHI, Akihiko; MCDOUGAL, Thomas. Implementing a new national curriculum: a Japanese public school's two years lesson-study project. In: KARP, Karen.; MCDUFFIE, Amy Roth. (Ed.). **Using research to improve instruction**. Reston, VA: NCTM, 2014. p. 13-22.

TAKAHASHI, Akihiko; YOSHIDA, Makoto. Ideas for establishing Lesson-Study communities. **Teaching Children Mathematics**, p. 436–443, may 2004.

TAKAHASHI, Akihiko. Characteristics of Japanese mathematics lessons. **Tsukuba Journal of Educational Study in Mathematics**, v. 25, p. 37–44, 2006.

Submetido em junho de 2020.

Aceito em setembro de 2020.

