PERSPECTIVAS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

REVISTA DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL (UFMS)

ISSN 2359-2842 Volume 14, número 34 – 2021 DOI: 10.46312/pem.v14i34.10738

Análisis y Clasificación de Errores Cometidos por Alumnos de Cálculo Diferencial en Relación al Concepto de Derivada

Análise e Classificação dos Erros Cometidos por Alunos de Cálculo Diferencial Em Relação ao Conceito de Derivada

Analysis and Classification of Errors Made by Differential Calculus Students in Relation to the Concept the Derivative

Andres David Pinto Hurtado[1]

RESUMEN

Este artículo presenta los resultados de una investigación de pregrado, cuyo objetivo es analizar y clasificar los errores cometidos por alumnos de Cálculo Diferencial, de una universidad pública colombiana, al resolver preguntas en relación al concepto de la derivada. Este trabajo es de tipo exploratorio y descriptivo, en el marco de la teoría de errores de Rico (1995) y las categorías de respuestas de López (2005) y categorías de errores propuesta por Radatz (1979). Como instrumento de investigación, fui utilizado una prueba aplicada a 23 alumnos sobre contenidos relacionados a los procesos de derivación y aplicaciones de la derivada. A partir del instrumento fueron analizadas y clasificadas 207 respuestas. Con base en los resultados, fue posible reconocer y detectar algunas causas de los errores al trabajar con el concepto de la derivada. Se encontró que gran parte de los errores fueron cometidos por deficiencias o vacíos conceptuales de los alumnos con respecto a conocimientos matemáticos propios de los niveles de educación media. El análisis de los errores, en una perspectiva que combine lo cuantitativo y lo cualitativo, podría ser utilizado como una valiosa herramienta de diagnóstico e intervención en la Educación Superior.

PALABRAS-CLAVE: Error. Derivada. Análisis de errores. Cálculo Diferencial.

RESUMO

Este artigo apresenta os resultados de uma pesquisa de graduação, cujo objetivo é analisar e classificar os erros cometidos por alunos de Cálculo Diferencial, de uma universidade pública colombiana, na resolução de exercícios em relação ao conceito de derivada. Este trabalho é exploratório e descritivo, dentro do referencial da teoria do erro de Rico (1995) e das categorias de

[1] Mestrando em Educação pela Universidade Federal de Juiz de Fora. Licenciado em Matemáticas e Física pela Universidad del Valle, Cali, Colômbia. E-mail: andrespinto0327@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0187-2305.

resposta de López (2005) e categorias de erro propostas por Radatz (1979). Como instrumento de pesquisa, foi utilizada uma prova aplicada a 23 alunos sobre conteúdos relacionados aos processos de derivação e aplicações derivadas. Do instrumento, 207 respostas foram analisadas e classificadas. Com base nos resultados, foi possível reconhecer e detectar algumas causas de erros ao trabalhar com o conceito de derivada. Constatou-se que grande parte dos erros foi cometida por deficiências ou lacunas conceituais dos alunos com relação aos conhecimentos matemáticos típicos do ensino médio. A análise dos erros, numa perspectiva que combina o quantitativo e o qualitativo, pode ser utilizada como um valioso instrumento de diagnóstico e intervenção no Ensino Superior.

PALAVRAS-CHAVE: Erro. Derivada. Análise de erros. Cálculo Diferencial.

ABSTRACT

This article presents the partial results of an undergraduate work investigation, whose objective was to analyze and classify the errors made by Differential Calculus students, from a Colombian public university, when solving exercises in relation to the concept of the derivative. This work is exploratory and descriptive, within the framework of Rico's error theory (1995) and the response categories of López (2005) and error categories proposed by Radatz (1979). As a research instrument, a test applied to 23 students on content related to the derivation processes and derivative applications was used. From the instrument, 207 responses were analyzed and classified. Based on the results, it was possible to recognize and detect some causes of errors when working with the concept of the derivative. It was found that a large part of the errors were made by deficiencies or conceptual gaps of the students with respect to mathematical knowledge typical of high school levels. The analysis of errors, in a perspective that combines the quantitative and the qualitative, could be used as a valuable diagnostic and intervention tool in Higher Education.

KEYWORDS: Error. Derivative. Analysis of errors. Diferential Calculus.

Introducción

El Cálculo Diferencial es una rama del análisis matemático que tiene su interés en estudiar las cantidades que varían con el tiempo. Su principal concepto es la derivada, la cual permite cuantificar y predecir las variaciones entre variables relacionadas y modelar situaciones problemáticas en particular. Así mismo, la derivada desde el punto de vista de la física se define como la rapidez de cambio y desde la geometría como la pendiente de la recta tangente a una curva (STEWART, 2012).

En ese contexto el concepto de la derivada es de gran utilidad e interés para desarrollo de matemáticas y otras áreas del conocimiento. Por esta razón, parte del Cálculo Diferencial es enseñando en una disciplina llamada Cálculo I, el cual es un curso obligatorio en algunos currículos de los programas académicos de la Universidad del Valle. Sin embargo, este curso presenta un alto índice de deserción estudiantil, bajos desempeños, y repitencia. Debido a estas y otras problemáticas asociadas a los procesos de enseñanza y aprendizaje del Cálculo I, investigadores como Tall, 1992; Artigue, 1995; Hitt, 2003; Cury, 2004; López, 2005; Cavassato & Lorí, 2011) han mostrado la gran preocupación en la Educación Matemática por analizar y clasificación de los errores cometido por los alumnos de Cálculo Diferencial.

Estudio sobre errores

Los errores, asunto clave en este trabajo, están relacionados con las dificultades y obstáculos que se presenta en el aprendizaje de las matemáticas. Según Socas (1997) las dificultades se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan, en la práctica, bajo la forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos como errores. Además, señala que el error debe ser comprendido como "la presencia de un esquema cognitivo inadecuado en el alumno y no sólo la consecuencia de una falta específica de conocimiento o una distracción" (SOCAS, 1997, p. 125).

De esta manera, el concepto de error parte de una valoración dicotómica: verdadero y falso, correspondiendo a este último carácter. Por tanto, "hablamos de error cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar" (GODINO; BATANERO; FONT, 2003, p. 73). Asimismo, "cuando un alumno proporciona una respuesta incorrecta a una cuestión matemática que se le plantea se puede decir que su respuesta es errónea, y la solución proporcionada es un error en relación con la cuestión propuesta" (RADATZ, 1980, *apud* RICO, 1995, p. 76).

Por otra parte, el error es constitutivo de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, puesto que, todo proceso de instrucción es potencialmente generador de errores. Aunque comúnmente resulta ser indeseable tanto para el alumno como para el docente, algunas de sus causas son inevitables, pero pueden ser comprendidas, abordadas y superadas (ABRATE; POCHULU; VARGAS, 2006). En este sentido, es importante diagnosticarlos y tratarlos seriamente, discutiendo con los alumnos sus concepciones erróneas, y presentando luego situaciones matemáticas que les permitan ajustar sus ideas (MINNARD; SEMINARA, 2006).

Retomando a Radatz (1979), es preciso reconocer que existe una pluralidad de aproximaciones teóricas y de intentos de explicación sobre las causas de los errores. Además, señala la importancia del estudio sobre errores y su implementación en los sistemas educativos. De tal manera, que tanto los docentes como alumnos puedan identificar los errores en diferentes contextos matemáticos y organizar estrategias con el fin de superalos y obtener logros de aprendizaje (ENGLER *et al*. 2002).

Clasificación de respuestas y errores

Rico (1995) señala que los errores son una fuente inagotable de conocimientos que podemos explotar para profundizar en el pensamiento matemático. Entre esas fuentes destaca cuatro líneas de investigación: en una primera línea estaría el análisis de sus elementos constitutivos, sus causas y la construcción de taxonomías para clasificarlos. En la segunda se ubicaría el abordaje curricular de los errores. Luego la formación de los docentes para su detección, análisis, interpretación y abordaje; Y finalmente el análisis de los errores a través de técnicas estadísticas para contrastar hipótesis.

Considerando esta última línea de investigación señalada por Rico, nos proponemos analizar y clasificar los errores que cometen alumnos de Cálculo diferencial al trabajar con el concepto de la derivada. Así, se llevó a cabo una primera clasificación de las respuestas de los alumnos propuesta por López (2005) la cual considera las categorías de respuestas: Correctas: cuando el alumno presenta un razonamiento y un resultado valido argumentado por operaciones y reglas matemáticas. Incorrectas: cuando el alumno presenta un razonamiento y resultado equivocado. Tiene idea, pero finalmente no es correcto: cuando el alumno presenta un razonamiento válido, pero el resultado no corresponde al valor esperado. No contestó: cuando el alumno presenta una respuesta en blanco o su razonamiento no está contemplado en los otros casos.

Así mismo, realizamos una segunda clasificación a partir de la propuesta de Radatz (1979, *apud* Rico, 1995), la cual se centra en una teoría del procesamiento de la información, considerando las siguientes cinco categorías de errores:

Errores debidos a dificultades de lenguaje: se presentan en el uso de conceptos, símbolos y términos matemáticos, debidos a una falta de comprensión semántica al efectuar una traducción del lenguaje natural al lenguaje matemático.

Errores debidos a dificultades para obtener información espacial: son producidos en la representación espacial inadecuada de una situación matemática o de un problema geométrico.

Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos: En este tipo de errores se incluyen todas las deficiencias de conocimiento sobre contenidos y procedimientos específicos para la realización de una tarea matemática. Estas deficiencias incluyen la ignorancia de los algoritmos, conocimiento inadecuado de hechos básicos, procedimientos incorrectos en la aplicación de técnicas y dominio insuficiente de símbolos y conceptos necesarios.

Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento: son causados por la falta de flexibilidad en el pensamiento para adaptarse a situaciones nuevas.

Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes: son producidos por aplicación de reglas o estrategias similares en contenidos diferentes.

Metodología

Esta investigación es de tipo exploratoria y descriptiva, la cual involucra algunos alumnos que ingresaron a los programas académicos de la Universidad del Valle y estaban matriculados en el curso de Cálculo I del primer semestre de 2017. Para la selección de los alumnos participantes se utilizó un muestreo no probabilístico, por conveniencia, en el cual, de un total de 265 alumnos matriculados (distribuidos en 11 grupos de aproximadamente 24 alumnos) en un curso diurno ofrecido por el departamento de Matemáticas. Se eligió un grupo de 23 alumnos donde el rango de edad estaba entre 16 y 19 años. Este grupo recibía una carga horaria de cuatro horas semanales, repartidas en una clase teórica, y una clase taller destinada a la resolución de ejercicios y realización de las evaluaciones.

Instrumento de recolección de información

La información fue recolectada utilizando un instrumento de evaluación diseñado y aplicado en el grupo seleccionado por el docente a cargo del curso. Este instrumento está compuesto por nueve preguntas sobre contenidos relacionados a los procesos de derivación y aplicaciones de la derivada.

Procedimiento de análisis y clasificación de los errores

A partir del instrumento de evaluación fueron recolectas 207 respuestas incluyendo las que no fueron marcadas (respuestas en blanco), con las cuales se desarrolló la clasificación y análisis de los errores. Inicialmente, se realizó una clasificación siguiendo la propuesta de López (2005) en la cual, las respuestas fueron clasificadas en: correctas, incorrectas, tiene idea, pero finalmente no es correcto y no contestó. A partir de esta información, se realizó una segunda clasificación en base a las categorías de errores propuestas por Radatz (1979). En esta clasificación no fueron consideradas las respuestas correctas. Además, se estableció el hecho de que un error puede clasificarse en más de una categoría de Radatz según su naturaleza. Así mismo, las respuestas en blanco fueron clasificadas por la ausencia de conocimientos y se clasificó dentro de los Errores debidos a el aprendizaje de hechos y conceptos previos.

Análisis y clasificación de los errores

A partir del análisis y clasificación de las 207 respuestas de los alumnos, describimos algunos de los errores más comunes cometidos por los alumnos en cada una de las preguntas. Y presentamos una respuesta para ejemplificar la producción de los alumnos.

Pregunta 1: Calcule los valores máximo y mínimo absolutos de la función

$$f(x) = \frac{16}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 1, \text{ en el intervalo } [-1,1].$$

A continuación, se enuncian los errores cometidos por los alumnos:

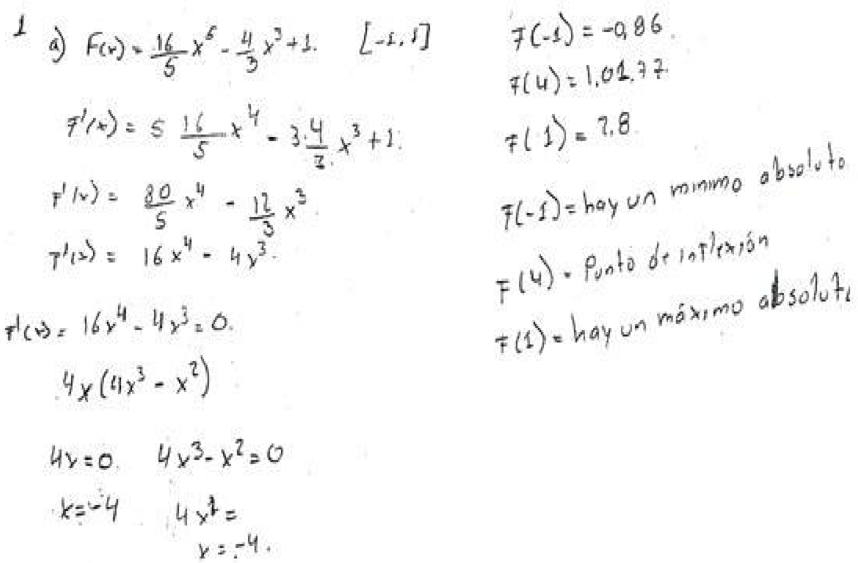
Factorización de polinomios y productos notables: este error se presentó en seis ocasiones, debido a la aplicación incorrecta del factor común de un polinomio y la diferencia de cuadrados.

Aplicación de cálculos accidentales o incorrectos: este error se evidenció en seis casos al sustituir y realizar operaciones elementales con los valores candidatos a máximos y mínimos en la función.

Aplicación de algoritmos para derivar: este error se presentó en cuatro casos, al aplicar las reglas de derivación de forma inadecuada, como es el caso de la derivada de una potencia y expresar los exponentes de las fracciones algebraicas incorrectamente.

Aplicación de operaciones algebraicas: este error se contempló en tres casos al realizar las operaciones de suma, resta, multiplicación o división de las expresiones algebraicas. También se observaron errores al transponer términos y usar las leyes de los exponentes en la función presentada en la pregunta.

Figura 1 - Respuesta donde se cometen errores en la pregunta 1


1 a) $F(x) = \frac{16}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 1.$ $[-1,1]$

$f'(x) = 5\,\frac{16}{5}x^4 - 3\cdot\frac{4}{3}x^3 + 1.$

$f'(x) = \frac{80}{5}x^4 - \frac{12}{3}x^3$

$f'(x) = 16x^4 - 4x^3.$

$f'(x) = 16x^4 - 4x^3 = 0.$

$4x(4x^3 - x^2)$

$4x = 0$ $\quad 4x^3 - x^2 = 0$

$x = -4$ $\quad 4x^2 =$

$x = -4.$

$f(-1) = -0,86$

$f(4) = 1,0177$

$f(1) = 7,8$

$f(-1)$ = hay un minimo absoluto

$f(4)$ - Punto de inflexión

$f(1)$ = hay un máximo absoluto

Fuente: datos del investigador

En esta respuesta podemos observar errores al utilizar incorrectamente el algoritmo de la derivada de una potencia. En este caso el alumno procede a realizar la derivada de la función polinómica $f(x) = \frac{16}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 1$. Sin embargo, al derivar el término $\frac{4}{3}x^3$el coeficiente de x^3 es multiplicado por 3. Pero, no fue restado una unidad al exponente, llegando a la siguiente respuesta: $f'(x) = 16x^4 - 4x^3$. Posteriormente se calcula $f'(x) = 0$ y al factorizar obtiene $4x(4x^3 - x^2) = 0$. Al encontrar el valor de x se infiere que $x = -4$ es la solución para ambos casos. Finalmente se procede a evaluar los candidatos a máximos y mínimos llegando a la respuesta correcta: $f(1)$ y $f(-1)$ respectivamente. Los errores cometidos en esta respuesta se clasificaron en la categoría de: errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.

Pregunta 2: Halle una ecuación de la recta tangente a la curva $\boldsymbol{y = f(x)}$, definida implícitamente por la ecuación $\boldsymbol{2xy^3 + y + 1 = x - 3}$, en el punto en que $\boldsymbol{y = 0}$.

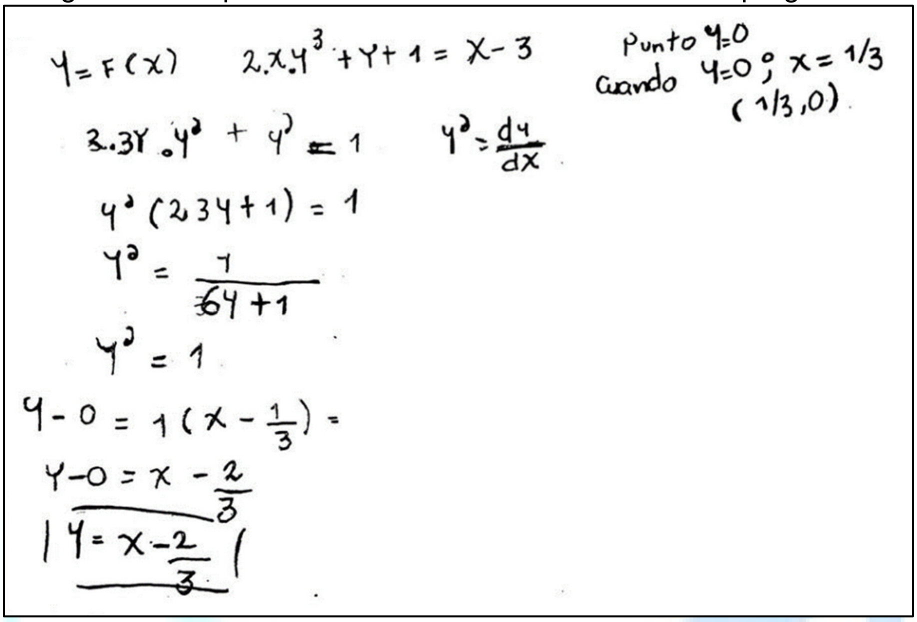
Al responder esta pregunta se cometieron los siguientes errores:

Aplicación incorrecta del algoritmo para derivar: este error se presentó en cuatro casos al realizar la derivada de la función implícita $2xy^3 + y + 1 = x - 3$, alterando la fórmula o presentando una incoherencia en la respuesta.

Aplicación de cálculos accidentales o incorrectos: este error se evidenció en tres casos al encontrar la coordenada x del punto en que $y = 0$, dando como resultados los puntos $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$, $(-2, 0)$ y $(0, 3)$. También, errores al encontrar la pendiente de la recta tangente en el punto en que $y = 0$.

Aplicación de operaciones algebraicas: este error se contempló en dos casos al realizar las operaciones con las expresiones algebraicas, al transponer términos y usar las leyes de los exponentes para encontrar la pendiente.

Figura 2 - Respuesta donde se cometen errores en la pregunta 2



Fuente: datos del investigador

Este error fue contemplado al realizar la derivación implícita de la función, puesto que, el término $2xy^3$ es derivado usando incorrectamente la regla del producto. Después es evaluado el punto en la función derivada llegando a la respuesta correcta $\frac{dy}{dx} = 1$. Este error se considera en la categoría: errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento.

Por otro lado, Al calcular la coordenada equis del punto se da como respuesta $(\frac{1}{3}, 0)$. Aunque se desconoce el origen de este punto, mediante el análisis de otras respuestas posiblemente al evaluar la función en $y = 0$ lleguemos a la ecuación $1 = x - 3$, de donde se hace una transposición de términos equivocada para despejar x, confundiendo la operación resta con el producto dando resultado $x = \frac{1}{3}$.

A partir de los resultados anteriores, el alumno utiliza la ecuación punto pendiente para expresar la ecuación de la recta tangente, la cual no es correcta. Este error se considera en la categoría: errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.

Pregunta 3: Si $\boldsymbol{y^2 = 3x^2 + 4z}$, $\boldsymbol{\frac{dz}{dt} = -2}$ y $\boldsymbol{\frac{dy}{dt} = 2}$, calcule $\boldsymbol{\frac{dx}{dt}}$ cuando $\boldsymbol{y = 1}$ y $\boldsymbol{x = 1}$.

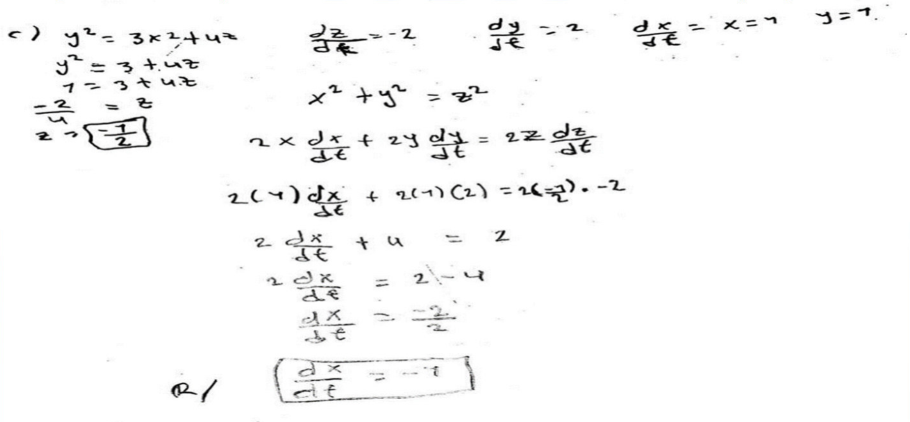
Los errores más frecuentes al responder esta pregunta son:

Aplicación incorrecta del algoritmo para derivar: este error se presentó en tres casos al realizar la derivación implícita de la función $y^2 = 3x^2 + 4z$ de forma inadecuada, alterando la fórmula y presentando una incoherencia en la respuesta.

Aplicación de cálculos accidentales o incorrectos: este error se presentó en tres casos cuando se realizaron los cálculos al evaluar los valores de las derivadas.

Aplicación de operaciones algebraicas: este error se cometió en dos casos al realizar las operaciones de suma, resta, multiplicación o división de las expresiones algebraicas. También al transponer términos y usar las leyes de los exponentes.

Figura 3 – Respuesta donde se cometen errores en la pregunta 3


c) $y^2 = 3x^2 + 4z$
$y^2 = 3 + 4z$
$7 = 3 + 4z$
$\frac{-2}{4} = z$
$z = \boxed{\frac{-1}{2}}$
$\frac{dz}{dt} = -2$ $\frac{dy}{dt} = 2$ $\frac{dx}{dt} =$ $x = 4$ $y = 7$
$x^2 + y^2 = z^2$
$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 2z\frac{dz}{dt}$
$2(4)\frac{dx}{dt} + 2(-1)(2) = 2(\frac{-1}{2}) \cdot -2$
$2\frac{dx}{dt} + 4 = 2$
$2\frac{dx}{dt} = 2 - 4$
$\frac{dx}{dt} = \frac{-2}{2}$
R/ $\boxed{\frac{dx}{dt} = -1}$

Fuente: datos del investigador

Con base a los datos suministrados en el ejercicio se encuentra el valor de la variable z dada por la ecuación $y^2 = 3x^2 + 4z$ Seguido de esto, aplica el teorema de Pitágoras llegando a $x^2+y^2 = z^2$ como resultado (se desconoce la razón por la cual es usado este teorema). Este error se considera en la categoría de: errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes. Posteriormente, se realiza la deriva implícita la función con respecto a la variable t y se evalúan las condiciones iniciales, para finalmente despejar $\frac{dx}{dt}$. Este error se considera en la categoría de: errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento.

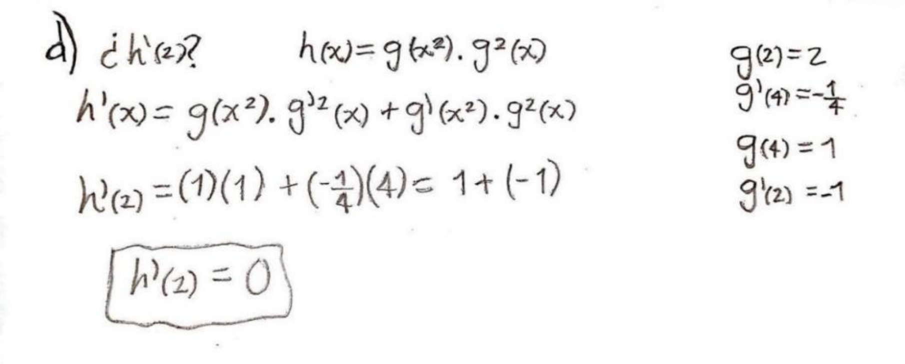
Pregunta 4: Calcule el valor de $\boldsymbol{h'(2)}$, si se sabe que $\boldsymbol{h(x) = g(x^2).g^2\,(x)}$, $\boldsymbol{g(2) = 2}$, $\boldsymbol{g'(4) = -\frac{1}{4}}$, $\boldsymbol{g'(2) = -1}$.

Los errores presentados en esta pregunta fueron:

Aplicación incorrecta del algoritmo para derivar: este error se presentó en siete casos al aplicar se presentó al realizar la derivada de forma incorrecta usando la regla de la cadena de la función $h(x) = g(x^2).g^2\,(x)$.

Aplicación de cálculos accidentales o incorrectos: este error se presentó en cinco casos, cuando se realizaron los cálculos con las condiciones iniciales en la función derivada. Entre las respuestas incorrectas destacan resultados como $h'(2) = 0$ con tres casos, y $h'(2) = -5$ con dos casos.

Figura 4 – Respuesta donde se comenten errores en la pregunta 4



Fuente: datos del investigador.

En esta respuesta, se observa que al derivar la función $h(x)$ se utilizó el algoritmo del producto. No obstante, se cometió un error al aplicar la regla de la cadena con los términos $g(x^2)$ y $g^2(x)$, puesto que, al tratarse de funciones compuestas, no fueron calculadas las derivadas internas en el primer caso faltó el coeficiente 2 y el término $g'(x)$ y en el segundo término $2x$ dando como resultado $h'(x) = g(x^2).g'^2(x) + g'(x^2).g^2(x)$. Finalmente se calcula el valor de $h'(2)$ con las condiciones iniciales del ejercicio y se llega a una respuesta incorrecta. Este error se considera en la categoría de: errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.

Pregunta 5: un avión que vuela horizontalmente a una altura de 3 millas a una velocidad de 480 millas por hora, pasa directamente sobre un observador en el piso. ¿Qué tan rápido aumenta la distancia del observador al avión una hora después?

En esta pregunta se presentaron los siguientes errores:

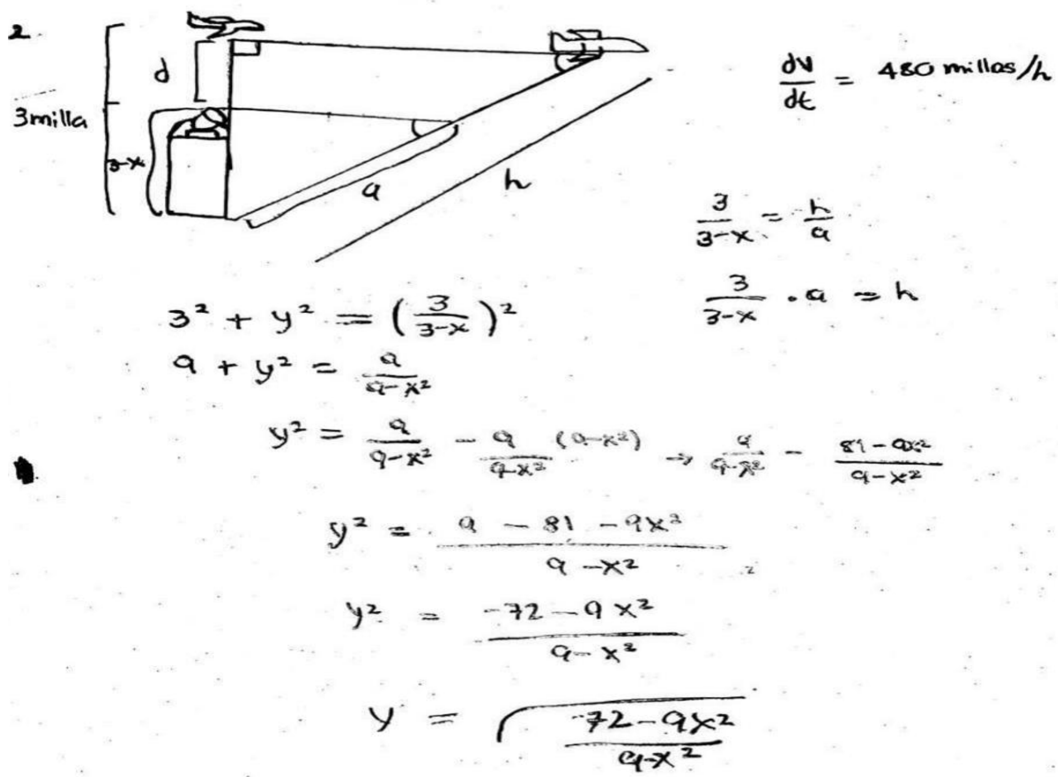
Aplica incorrectamente el teorema de Pitágoras: este error se presentó en tres casos al aplicar el teorema de Pitágoras con relación a la situación planteada. Es importante recalcar que fueron usadas diferentes notaciones para las derivadas.

Interpretación incorrecta del lenguaje: se incluyen aquí tres casos de errores, debido a la traducción del lenguaje natural al lenguaje simbólico.

Aplicación de operaciones algebraicas: este error se contempló en tres casos al realizar las operaciones con expresiones algebraicas y al transponer términos.

Traducción incorrecta al realizar una representación geométrica: Este error se presentó en tres casos al relacionar las variables de manera gráfica en la situación.

Figura 5 – Respuesta donde se cometen errores en la pregunta 5



Fuente: datos del investigador

En esta respuesta se realiza un gráfico que representa la situación entre el observador y el avión, formando dos triángulos rectángulos mediante semejanza de triángulos y establece la siguiente relación: $\frac{3}{3-x} = \frac{h}{a}$.

En la ecuación anterior la distancia del suelo al avión es igual a 3. Y la altura del observador está dada por$3 - x$. Además, la hipotenusa del triángulo más grande está dada por la variable h y en el triángulo más pequeño es representado por la variable a. Estos errores se consideran en las categorías de: errores debidos a dificultades de lenguaje. Y errores debidos a dificultades para obtener información espacial.

Siguiendo con el razonamiento se despeja la variable $h = \frac{3a}{3-x}$ y se aplica el teorema de Pitágoras llegando a la ecuación: $3^2 + y^2 = (\frac{3a}{3-x})^2$. A partir de este resultado se despeja la variable y de la cual no se tiene información. Por esta razón el alumno realizó asociaciones incorrectas, aplicando reglas y propiedades que son válidas en contextos parecidos, pero no funciona en esta situación. Esta respuesta se considera en la categoría de: errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento.

Pregunta 6: ¿Cuáles son las dimensiones de la lata cilíndrica de menor área superficial, sabiendo que su volumen es de $\boldsymbol{350cm^3}$?

Los errores presentados en las respuestas de los alumnos fueron:

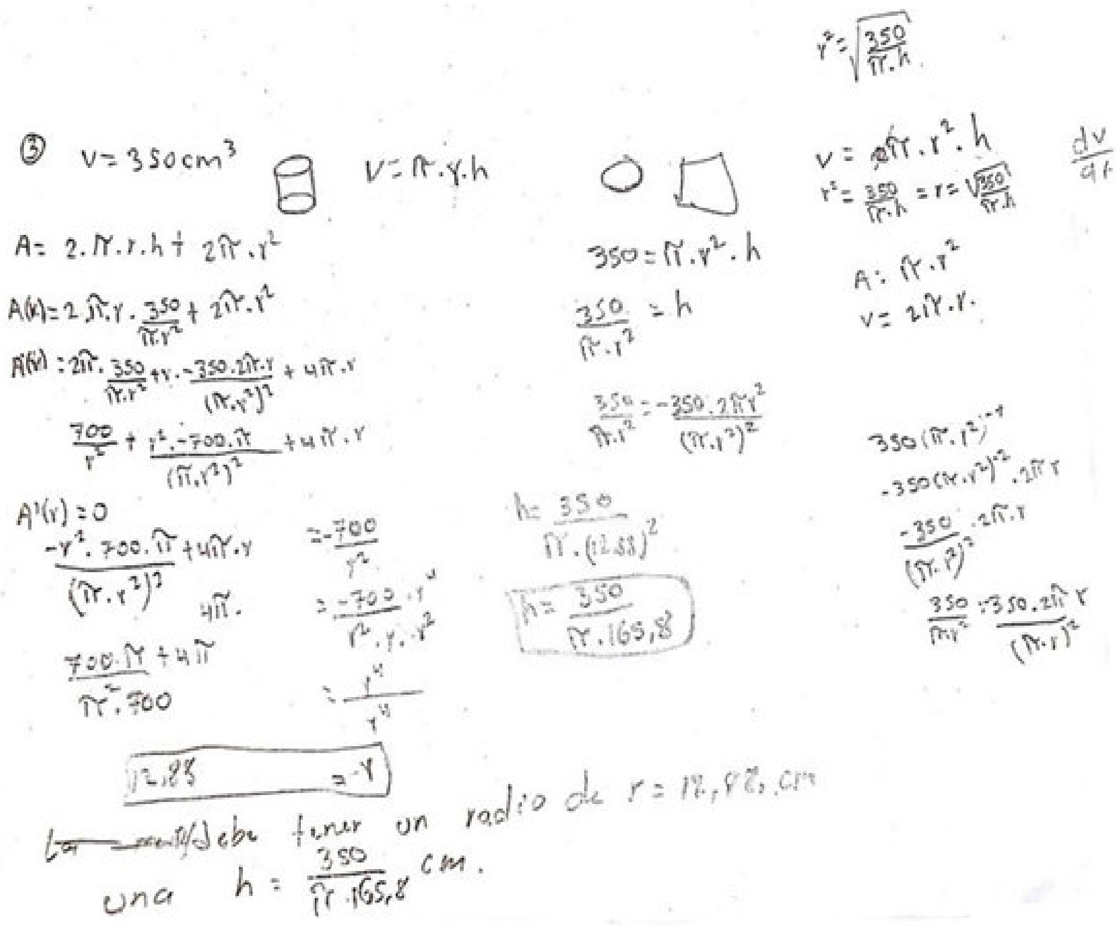
Interpretación incorrecta del lenguaje: este error se presentó en ocho casos, al intentar relacionar la información del problema con las ecuaciones de área y volumen.

Aplicación incorrecta del algoritmo para derivar: este error se presentó en cinco casos al aplicar una propiedad, regla o definición de forma inadecuada, alterando la fórmula o presentando una incoherencia en la respuesta. En este caso, se presentó al realizar la derivada de la función del área superficial del cilindro, en términos del radio r .

Aplicación de cálculos accidentales o incorrectos: este error se presentó en cuatro casos, donde los alumnos realizaron la sustitución de la información numérica conocida. Sin percatarse que la sustitución se realiza después la derivación.

Aplicación de operaciones algebraicas: este error se contempló en tres casos al realizar las operaciones de suma, resta, multiplicación o división de las expresiones algebraicas y al transponer términos. Y realizar operaciones con las fracciones algebraicas y leyes de los exponentes.

Figura 6 – Respuesta donde se cometen errores en la pregunta 6



Fuente: datos del investigador

En esta respuesta el alumno hace una interpretación correcta del problema y relaciona las fórmulas de volumen y el área superficial del cilindro en función del radio r. De esta forma se llega al siguiente resultado: $A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r(\frac{350cm^3}{\pi r^2})$. Sin embargo, se comete un error al realizar la derivada de la función $A(r)$, específicamente en la expresión $2\pi r(\frac{350cm^3}{\pi r^2})$, en donde se observa el uso de los algoritmos del producto y cociente para derivar.

Posteriormente, se despeja la variable r de la ecuación $A'(r) = 0$, obteniendo una respuesta incorrecta. En consecuencia, el valor de la altura h encontrado tampoco corresponde. Este error se considera en la categoría de: errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.

Pregunta 7: calcular la derivada de la función $\boldsymbol{f(x) = cos^3(2x^3 + x)}$.

Los errores presentados en las respuestas de esta pregunta son:

Aplicación incorrecta del algoritmo para derivar: este error se presentó en un caso al realizar la derivada de la función $f(x) = cos^3(2x^3 + x)$ mediante la regla de la cadena.

Figura 7 - Respuesta donde se cometen errores en la pregunta 7

4) $f(x) = \cos^3(2x^3 + x)$

$\cos^3(6x^2) + \cos^3(2x^3 + x)$.

Fuente: datos del investigador

En esta respuesta, se presenta un error al usar el método de la regla de la cadena para derivar. Aunque el error puede tener diferentes causas, me inclinare por decir que este error surge al no reconocer la semántica $cos^3(x)$ y a partir de allí se realiza la derivada con un algoritmo impropio. Este error se considera en la categoría de: errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento.

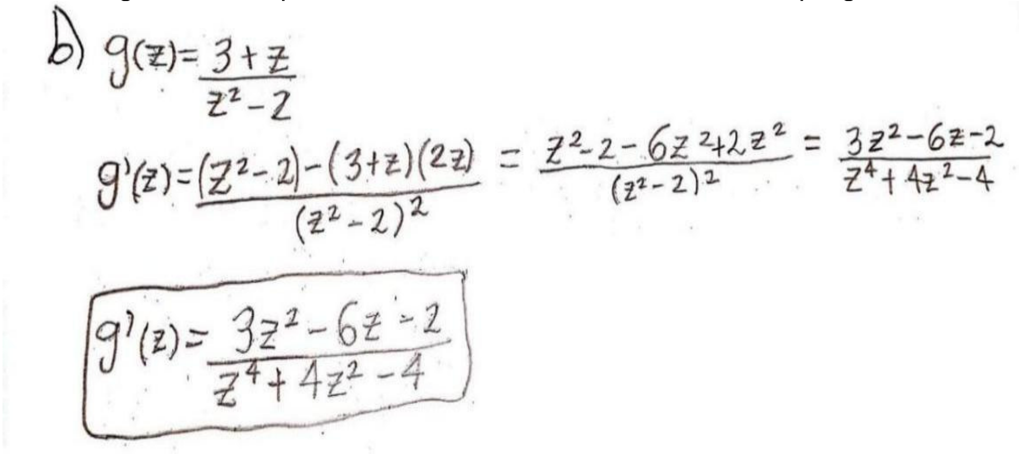
Pregunta 8: calcular la derivada de la función $\boldsymbol{g(z) = \frac{3+z}{z^2-2}}$.

Los errores que cometidos al resolver este ejercicio fueron:

Aplicación incorrecta del algoritmo para derivar: este error se presentó en cinco casos al aplicar una propiedad, regla o definición de forma inadecuada, alterando la fórmula o presentando una incoherencia en la respuesta. En este caso al realizar la derivada de un cociente.

Aplicación de operaciones algebraicas: este error se contempló en cuatro casos al realizar las operaciones con expresiones algebraicas.

Figura 8 - Respuesta donde se cometen errores en la pregunta 8



Fuente: datos del investigador

En esta situación, podemos observar que la derivada del cociente es realizada de forma correcta llegando a la respuesta $g'(z) = \frac{(z^2-2)-(3+z)(2z)}{(z^2-2)^2}$. No obstante, se presenta un error al realizar las operaciones entre los paréntesis. En el numerador se realiza la propiedad distributiva en el término $(3+z)(2z)$, pero el signo negativo que precede la operación es distribuido solamente en el primer término, dando como resultado $-6+2z^2$. Este error se considera en la categoría de: errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.

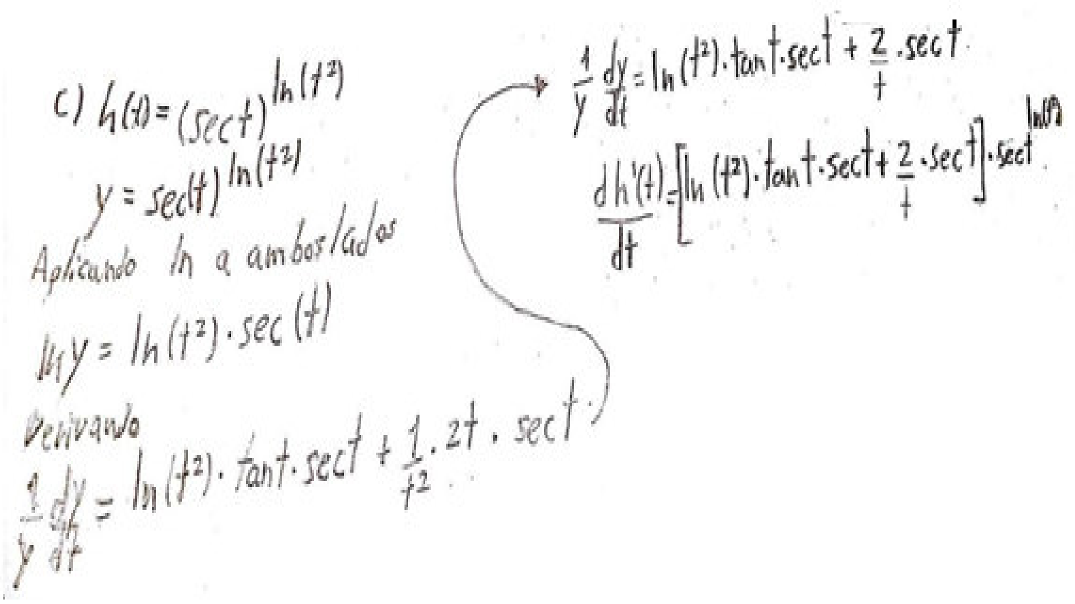
Pregunta 9: calcular la derivada de la función $\boldsymbol{h(t)} = (\boldsymbol{sec(sect)})^{\boldsymbol{ln(t^2)}}$.

Los errores que cometieron los alumnos en esta pregunta fueron debido a:

Aplicación incorrecta del algoritmo para derivar: este error se presentó en cinco casos al aplicar una propiedad, regla o definición de forma inadecuada, alterando la fórmula o presentando una incoherencia en la respuesta, específicamente al realizar la derivada mediante la regla de la cadena, donde están involucradas las derivadas de los logaritmos y las funciones trigonométricas tangente y secante.

Aplicación de operaciones algebraicas: este error se contempló en cuatro casos al aplicar el logaritmo natural en la función $h(t) = (sec(sect))^{ln(t^2)}$ y realizar las reglas correspondientes a los logaritmos.

Figura 9 - Respuesta donde se cometen errores en la pregunta 9



Fuente: datos del investigador

En esta respuesta observamos que la función es reescrita como $y = (sec(sect))^{ln(t^2)}$ y se aplica el logaritmo natural a ambos lados de la función. Sin embargo, se aprecia una inconsistencia al escribir la expresión del lado derecho como un solo logaritmo (este error puede ser causado por un cálculo accidental o un desconocimiento de la propiedad).

Seguido de esto, se realiza correctamente la derivada, pero no llega a la respuesta esperada condicionada por el error cometido anteriormente. Este procedimiento erróneo se considera en las categorías de: errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos y errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento.

Discusión de los resultados

Al realizar el análisis de la información recolecta, se realizó una tabla de frecuencias con los errores totales que se analizaron y clasificaron en la investigación. Esta información se muestra en la siguiente tabla.

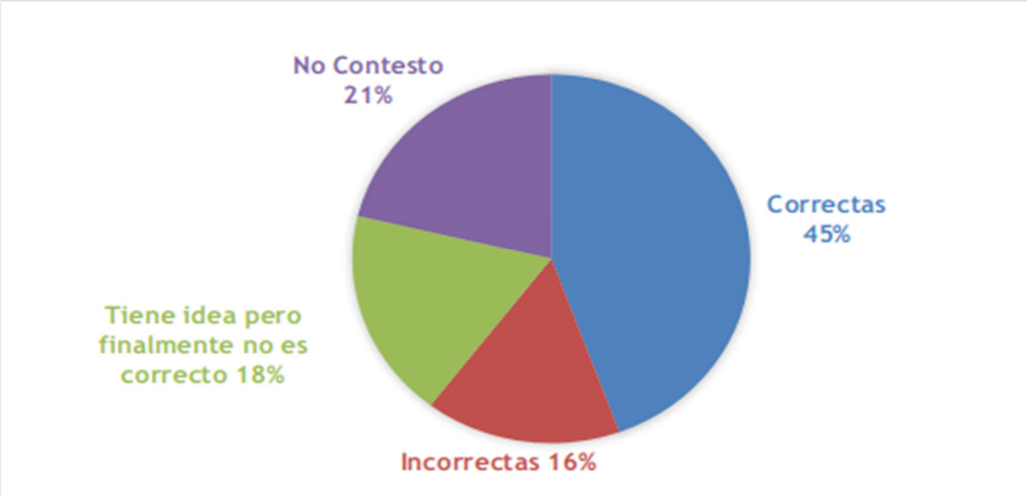
Tabla 1 - Análisis global de errores según las categorías de Radatz y López

PREGUNTAS DEL INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN	CATEGORÍAS DE ERRORES (RADATZ)					RESPUESTAS (LÓPEZ)			
	Al lenguaje matemático	A dificultades para obtener información espacial	A el aprendizaje de hechos y conceptos previos	A asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento	A la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes	Correctas	Incorrectas	Tiene idea pero finalmente no es correcto	No Contesto
1	1	0	16	3	0	9	7	3	4
2.	1	0	10	3	0	12	2	4	5
3	1	0	7	3	1	14	4	3	2
4	0	0	18	2	0	5	3	7	8
5	8	7	10	1	1	9	5	4	5
6	2	2	17	1	0	5	1	9	8
7	1	0	4	1	0	18	1	0	4
8	2	0	6	6	0	12	5	4	2
9	2	0	13	5	0	8	5	4	6
TOTALES	18	9	101	25	2	92	33	38	44

Fuente: Elaborado por el autor

De las 207 respuestas analizadas, 92 fueron correctas, 33 incorrectas, 38 tenían idea, pero finalmente no fue correcto y 44 no contestaron. Por lo tanto, las respuestas erradas representan el 55% que es un porcentaje alto, lo cual muestra la gran cantidad de errores que cometen los alumnos al enfrentarse a problemas relacionados con la derivación. El siguiente gráfico (Figura 10) muestra la distribución de los resultados en la clasificación de López (2005).

Figura 10 - Distribución global de respuestas por pregunta

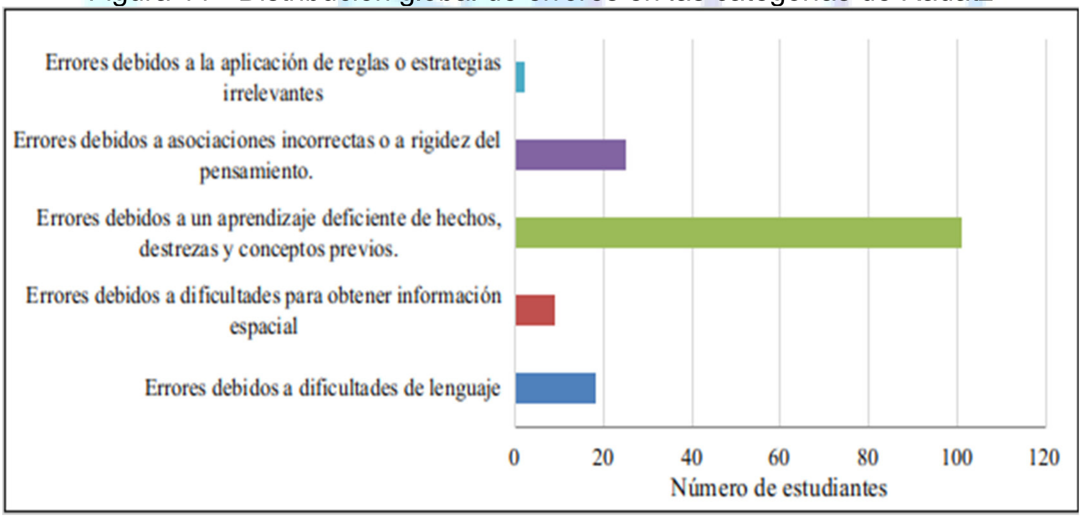


Fuente: datos del investigador

En relación a las categorías propuestas por Radatz (1979), se identificaron 155 errores en totales. En el cual se observó que el tipo de error más frecuente fue errores debidos al aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos, con 101 incidencias principalmente en las preguntas 1, 2 y 6.

De la misma manera los errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento se presentaron en 25 ocasiones. Además, los errores debidos a dificultades del lenguaje obtuvieron una frecuencia de 18 casos. Por otro lado 9 casos fueron errores debidos a dificultades para obtener información espacial. Y finalmente los errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes se cometieron en 2 oportunidades. El siguiente gráfico (Figura 11) muestra la distribución global de los errores dentro de las categorías de Radatz.

Figura 11 - Distribución global de errores en las categorías de Radatz



Fuente: datos del investigador

Algunos de los errores que sobresalen son el uso inadecuado al aplicar casos de factorización, productos notables, aplicación de las operaciones básicas para realizar cálculos aritméticos y con expresiones algebraicas. Asimismo, el uso inadecuado de las propiedades de los logaritmos, la representación gráfica de una situación al expresar características de un triángulo rectángulo mediante el teorema de Pitágoras y la expresión incorrecta del área superficial y del volumen de un cilindro de radio r y altura h.

En relación a las preguntas 5 y 6, se observó que en gran parte de los errores son debidos a una inadecuada interpretación de razones relacionadas y al no reconocimiento de las variables que intervienen en una situación que varía con el tiempo.

Consideraciones finales

De acuerdo a los resultados presentados en esta investigación se cumplió con el objetivo de analizar y clasificar los errores que presentaron los alumnos al resolver preguntas en relación al concepto de la derivada. El análisis de los errores realizado a través de técnicas estadísticas para contrastar puede ser utilizado como una valiosa herramienta de diagnóstico para que los alumnos reconozcan y detectar las posibles causas de los errores cometidos al trabajar con el concepto de la derivada. Además, para que los docentes propongan estrategias de aprendizaje y enseñanza a partir del error.

En cuanto a las limitaciones de este trabajo debe considerarse que en la clasificación de Radatz (1979) algunos errores fueron clasificados en varias categorías, esto se debe en gran parte a la proximidad que tienen algunos errores y el modo de resolución de los alumnos. Otro aspecto a tener en cuenta, se refiere al instrumento de evaluación. Él cual fue diseñado por el docente del curso con ciertas expectativas específicas. Y este trabajo no consideró la forma en que fue realizado, ni observó si las condiciones de aplicación podían o no inducir en errores.

A partir de los resultados, se observó que gran parte de los errores fueron cometidos por deficiencias o vacíos conceptuales de los alumnos en relación a conocimientos matemáticos de los niveles de educación media, anteriores a su ingreso a la Educación Superior. Sin embargo, estas causas no son suficientes para para entender el ¿por qué? de los bajos rendimientos en el curso de Cálculo. ¿Será por causa de los errores? ¿cómo afectan el rendimiento de los alumnos de Cálculo?, pero rastrear estos asuntos supera los objetivos de esta investigación.

Finalmente considerando los aportes de este estudio se proponen algunas cuestiones para abrir nuevas vías de investigación. Comenzando por cambiar la mirada sobre el error y priorizando su lugar el aula de Cálculo Diferencial: ¿Qué lugar ocupa el error en el aprendizaje y enseñanza de la derivada? ¿qué sentidos son producidos con el error? Y ¿cómo crear estrategias de enseñanza y aprendizaje a partir del error?

Referencias

ABRATE, Raquel.; POCHULU, Marcel.; VARGAS, José. **Errores y dificultades en Matemática**: Análisis de causas y sugerencias de trabajo, 1ª ed. Buenos Aires: Universidad Nacional de Villa María, 2006.

ARTIGUE, Michèle. La enseñanza de los principios del Cálculo: problemas epistemológicos cognitivos y didácticos. *In:* ARTIGUE Michèle; DOUADY, Régine; MORENO, Luis; GÓMEZ, Pedro. **Ingeniería Didáctica para la Educación Matemática**. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. México. Grupo Editorial Iberoamérica. p. 97-140, 1995.

CAVASOTTO, Marcelo; LORÍ, Viali. Dificuldades na aprendizagem de cálculo: o que os erros podem informar. **Boletim GEPEM**, v. 59, p. 15-25. 2011. Disponible en: http://hdl.handle.net/10923/11894. Acceso en: 26 de jul de 2020.

CURY, Helena Noronha. “Professora, eu só errei um sinal”!: como a análise de erros pode esclarecer problemas de aprendizagem. *In:* CURY, Helena. Noronha. (Org.). **Disciplinas matemáticas em cursos superiores**: reflexões, relatos, propostas. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004. p. 111-138.

DEL PUERTO, Silvia Mónica; MINNAARD, Claudia Lilia; SEMINARA, Silvia Alejandra. Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas. **Revista Iberoamericana De Educación**, 38(4), 1-13. 2006.

ENGLER, Adriana; GREGORINI, María Inés; MÜLLER, Daniela; VRANCKEN, Silvia; HECKLEIN, Marcela. **Los Errores en el Aprendizaje de Matemática**. 2002. Disponible en: http://www.soarem.com.ar/Documentos/23%20Engler.pdf. Acceso en: 26 de jul 2020.

GODINO, Juan; BATANERO, Carmen; FONT, Vicenç. **Fundamentos de la enseñanza y aprendizaje de la Matemática para maestros**. 2003. Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/1_Fundamentos.pdf. Acceso en 26 de jul 2020.

HITT, Fernando. **Dificultades en el aprendizaje del cálculo**. XI Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia (Mexico), pp. 81-108, 2003.

LÓPEZ, Ana Dulcelina. **Deficiencias Matemáticas que afectan el aprendizaje del cálculo diferencial en alumnos de ingeniería de una universidad privada**. Universidad Industrial de Santander, Escuela de Educación, Maestría en Pedagogía, Bucaramanga, 2005.

RADATZ, Hendrik. Error Analysis in Mathematics Education. **Journal for Research in Mathematics Education**. Vol. 9, pp. 163-172, 1979.

RICO, Luis. Errores y dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas, cap. 3. pp. 69-108. *In:* KILPATRIK, Jeremy; GÓMEZ, Pedro; RICO, Luis. **Educación Matemática**. Grupo Editorial Iberoamérica, Colombia, 1995.

SOCAS, Martín. Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria, cap. 5., pp. 125-154. *In:* RICO, Luis *et al*. **La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria**. Editorial Horsori, Barcelona, 1997.

STEWART, James. **Cálculo de una Variable Trascendentes Tempranas**. Ed 7. México: Cengage Learning Latinoamericana, 2012.

TALL, David. **Students' Difficulties in Calculus**, 1992. Disponible en: http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1993k-calculus-wg3-icme.pdf. Acceso en: 26 de jul de 2020.

Submetido em julho de 2020.

Aceito em março de 2021.