

Interpretação do Ensino de Frações em Livros do GRUEMA

Interpretation of the Teaching of Fractions in GRUEMA

Book

Relicler Pardim Gouveia¹

RESUMO

O objetivo deste artigo é apresentar uma interpretação do ensino de frações, a partir da análise do “Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1.º grau”, de Manhúcia Perelberg Liberman, Lucília Bechara Sanchez e Anna Franchi. Pretende-se compreender que matemática para ensinar pode ser interpretada ao analisar as orientações contidas nesta obra. O texto que aqui apresentamos apoia-se nos conceitos elaborados pela Equipe de Pesquisa em História Social da Educação, da universidade de Genebra – *saberes a ensinar* e *saberes para ensinar* –, bem como as apropriações desses conceitos assumidos pela equipe do GHEMAT-SP, que colocam o saber profissional como tema para análise do ensino e da formação em contexto histórico. Para análise documental, se admitiu como fontes de pesquisa os livros do ensino primário da coleção GRUEMA, dos anos de 1974 e 1975. Os resultados da análise realizada, apontam que uma matemática para ensinar foi objetivada no período do Movimento Matemática Moderna, a partir da construção e do desenvolvimento da obra, e das diversas representações utilizadas para ensinar frações, colocando em foco a *expertise* das autoras.

PALAVRAS-CHAVE: Matemática Moderna. Matemática para ensinar. GRUEMA. Fração.

ABSTRACT

The aim of this article is to present an interpretation of the teaching of fractions, based on the analysis of the “Modern Mathematics Course for the teaching of 1st degree”, by Manhúcia Perelberg Liberman, Lucília Bechara Sanchez and Anna Franchi. It is intended to understand that mathematics for teaching can be interpreted by analyzing the guidelines contained in this work. The text presented here is based on the concepts elaborated by the Research Team in Social History of Education, from the University of Geneva - *knowledge to teach* and *knowledge to teach* -, as well as the appropriations of these concepts assumed by the GHEMAT-SP team, which place professional knowledge as a theme for analyzing teaching and training in a historical context. For document analysis, primary school books from the GRUEMA collection from 1974 and 1975 were accepted as research sources. The results of the analysis carried out point out that a mathematics for teaching was objectified in the period of the Modern Mathematics Movement, from the construction and development of the work, and from the various representations used to teach fractions, focusing on the *expertise* of the authors.

KEYWORDS: Modern Mathematics. Mathematics to teach. GRUEMA. Fraction.

¹Doutorando em Ciências: Educação e Saúde na Infância e na Adolescência pela Universidade Federal de São Paulo – Campus Guarulhos. E-mail: reliclerpardim@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1604-6276>.



Considerações iniciais

Este estudo é proveniente de uma pesquisa² de doutorado em desenvolvimento que busca "analisar como os elementos provenientes do Movimento da Matemática Moderna se fizeram presentes na formação dos professores que ensinavam matemática nos primeiros anos escolares, no período compreendido entre os anos de 1960 e 1990, na cidade de São Paulo". Tal pesquisa se insere em um projeto temático³, desenvolvido pelo Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática no Brasil (GHEMAT), que "tenciona investigar processos e dinâmicas de produção do saber profissional do professor que ensinava matemática entre os anos de 1890 e 1990" (VALENTE *et al.*, 2017).

A época focalizada na pesquisa de origem – segunda metade do século XX – é emblemática por ter a educação como um instrumento de mobilidade social. Este período também foi marcado pelas discussões acerca da organização do ensino de 1.º grau, o qual, a partir da década de 1970, passou a ser de oito anos.

Como destacado nos estudos de França (2007), França e Duarte (2017), Oliveira *et al.* (2011), Soares (2014) e Villela (2009), (2011), a partir de 1950, emergiu o que ficou conhecido como Movimento da Matemática Moderna (MMM), o qual tinha a intenção de buscar estabelecer um equilíbrio entre o desenvolvimento da ciência Matemática e o que era ensinado, a matemática escolar.

Assim sendo, a propagação das ações de modernização do ensino da matemática aconteceu por meio de cursos de formação de professores, palestras e materiais didáticos. Essa ampla divulgação oportunizou a circulação de publicações com orientações que estabeleciam mudanças e uniformização das ações escolares. Dentre elas, destacam-se as do Grupo de Ensino de Matemática Atualizada (GRUEMA).

Uma matemática para ensinar

Como este estudo se debruça na formação de professores, mediante o ideário do MMM, o foco, portanto, é a matemática para formar o professor ou *matemática para ensinar*. Esta expressão tem suas origens nas definições

² Processo FAPESP 2019/13630-9.

³ "A Matemática na Formação de Professores e no Ensino: processos e dinâmicas de produção de um saber profissional, 1890-1990". Esse projeto está sendo financiado pela FAPESP, na área de auxílio a pesquisa – projeto temático. Maiores informações podem ser lidas no link: <http://bv.fapesp.br/pt/auxilios/98879/a-matematica-na-formacao-de-professores-e-no-ensino-processos-e-dinamicas-de-producao-de-um-saber-p/?q=17/15751-2>.

defendidas pela Equipe de Pesquisa em História das Ciências da Educação⁴ (ERHISE), da Universidade de Genebra, a qual vem há algum tempo produzindo investigações, com o objetivo de compreender os saberes profissionais necessários na formação do professor e de indicar novos caminhos para uma historiografia a respeito dos processos de profissionalização do professor que ensina matemática (LIMA; VALENTE, 2019).

A centralidade das discussões da ERHISE está nos saberes objetivados – saberes formalizados, didatizados, comunicados – que podem ser premissas da identificação das características desses saberes em um dado período histórico, “tentando conceitualizar o seu papel nas profissões do ensino e da formação” (HOFSTETTER; SCHNEUWLY, 2017, p. 131).

Hofstetter e Schneuwly (2017) apontam dois tipos de saberes presentes no ensino e na formação do professor: *saberes a ensinar e saberes para ensinar*. Os primeiros são aqueles emanados do campo disciplinar matemático, saberes que constituem objeto do trabalho do professor; por sua vez, os *saberes para ensinar* são originários de saberes do campo pedagógico e destacam-se como ferramentas do trabalho do professor, que se articulam ao objeto. Entretanto, esses saberes *a e para ensinar* se articulam. Assim,

esses saberes constituem ferramentas de trabalho, neste caso saberes *para* formar ou saberes *para* ensinar (por simplificação utilizaremos aqui o segundo termo). Tratam-se principalmente de saberes sobre “o objeto” do trabalho de ensino e de formação (sobre os saberes *a* ensinar e sobre o aluno, o adulto, seus conhecimentos, seu desenvolvimento, as maneiras de aprender etc.), sobre as práticas de ensino (métodos, procedimentos, dispositivos, escolha dos saberes *a* ensinar, modalidades de organização e de gestão) e sobre a instituição que define o seu campo de atividade profissional (planos de estudos, instruções, finalidades, estruturas administrativas e políticas etc.) (HOFSTETTER; SCHNEUWLY, 2017, p. 133-134, grifos dos autores).

A partir deste referencial, no ano de 2017, a equipe do Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática em São Paulo (GHEMAT-SP) elaborou novos conceitos mais próprios para o trato do ensino e para a formação de professores em matemática – *matemática a ensinar e matemática para ensinar* –, por perceber que a dupla escolha adotada pela ERHISE se distanciava de abordagens que tratam dos

⁴ Dentre os pesquisadores desta equipe, podemos destacar Rita Hofstetter, Bernard Schneuwly, Valérie Lussi Borer. Essa equipe de pesquisadores suíços vale-se de estudos oriundos da sociologia – Pierre Bourdieu e da história das ciências – Claude Blanckaert e Dominique Pestre – para produzir suas investigações de cunho histórico-social (LIMA; VALENTE, 2019).

saberes na prática e voltava sua atenção para os saberes sobre a ação do professor,

mas não aqueles ligados ao cotidiano, construídos para resolver problemas e que não são passíveis de serem compreendidos fora do contexto em que ocorreram, os quais chamaram de *conhecimento*, marcando a diferença com o termo *saber* (LIMA; VALENTE, 2019, p. 933, grifos dos autores).

Bertini, Morais e Valente (2017, p. 68-69, grifos do autor) sustentam que *matemática a ensinar* e *matemática para ensinar* compõem duas categorias para o estudo dos processos e das dinâmicas de produção do saber profissional.

O uso como hipótese teórica de trabalho das categorias *matemática a ensinar* e *matemática para ensinar* faz avançar a compreensão dos movimentos de constituição dos saberes profissionais dos professores, dos saberes profissionais dos professores que ensinam matemática. A mútua dependência dos saberes disciplinares – *matemática a ensinar* – e dos saberes para ensinar – *matemática para ensinar* – coloca em nível de superação as análises que congelam o saber matemático, cercando-o de didáticas especiais que não têm *status* epistemológico de saber. Faz-nos atentar de modo mais acurado para o movimento de produção e transformação de saberes profissionais. Indica-nos que os denominados saberes pedagógicos, didáticos, representam uma etapa histórica de promoção do conhecimento matemático com didáticas específicas de conteúdos. Apontam para a necessidade de consolidação de rubricas na formação de professores que sejam objetivadas como saberes, saberes *para ensinar*, *matemática para ensinar*, *matemática a ensinar*.

Assim, neste texto buscamos pela *matemática para ensinar*, partindo da análise de livros da coleção GRUEMA, o *Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1.º grau*, volume 2, de Manhúcia Perelberg Liberman, Lucília Bechara Sanchez e Anna Franchi, publicado em 1974, e os volumes 3 e 4, de Manhúcia Perelberg Liberman e Lucília Bechara Sanchez, publicados, respectivamente, em 1974 e 1975, todos pela Companhia Editora Nacional. Esses livros, elaborados com base em um estudo que se estendeu por dez anos de pesquisa efetiva no cotidiano do ensino da matemática (LIBERMAN, SANCHEZ, FRANCHI, 1974), tinham a intenção de atender inteiramente tanto as necessidades dos alunos quanto as dos professores que ensinam matemática no 1.º grau. Essa coleção GRUEMA foi objeto de análise também de outras pesquisas, tais como as de Miorim (2005), Oliveira (2019), Rios (2010), Sanchez (2018), Villela (2009, 2010), dentre outras.

Neste estudo, concentramo-nos nas orientações das autoras para o ensino de frações nas primeiras séries do 1.º grau. Que *matemática para ensinar* surge nas orientações das autoras, no *Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1.º grau*, ao introduzir o ensino de frações?

A coleção Curso Moderno de Matemática para o Ensino de 1.º Grau – GRUEMA

O que é o GRUEMA? O GRUEMA surgiu na década de 1970 e, de acordo com Sanchez (2018), como eram muitos os autores envolvidos na edição da coleção *Curso Moderno de Matemática para o Ensino de 1.º grau*, foi feita uma opção por identificá-la como GRUEMA – Grupo de Ensino de Matemática Atualizada. Villela (2010, p. 398) destaca que para esta escolha, segundo a fala de Manhúcia Liberman, a preferência pelo nome se deu “[...] porque na verdade nenhuma de nós queria seu nome divulgado, e essa é a história do nome GRUEMA, e inspirada no Grupo Bourbaki que já existia, mas não sabíamos quem eram as pessoas”.

O *folder* de divulgação da coleção GRUEMA esclarece que a coleção nasceu a partir da inspiração de múltiplos autores, motivados pelo parecer 853/71, aprovado pelo Conselho Federal de Educação em 12 de novembro de 1971, que indicava que, no ensino de matemática, não poderia ser dispensado o ensino de cálculo mental e que esta habilidade deveria ser incluída em mais amplas construções lógicas e delas resultar.

Segundo Chartier (1990), a dinâmica de constituição de um livro didático é oriunda de várias práticas culturais e representações, o que depois de pronto também poderá expressar significativas representações, produzindo, assim, novas práticas.

O essencial é, portanto, compreender como os mesmos textos – sob formas impressas possivelmente diferentes – podem ser diversamente aprendidos, manipulados, compreendidos [...] A leitura não é somente uma operação abstrata de inteligência: é pôr em jogo o corpo, é inscrição num espaço, relação consigo ou com o outro. Por isso devem ser reconstruídas as maneiras de ler próprias a cada comunidade de leitores (CHARTIER, 1990, p. 27).

Valente (2008, p. 141) discorre em seu texto que desde as

origens de seu ensino como saber técnico-militar, passando por sua ascendência a saber de cultura geral escolar, a trajetória histórica de constituição e desenvolvimento da matemática escolar no Brasil pode ser lida nos livros didáticos.

E complementa que, ao se investigar uma obra, vários novos elementos são apresentados, os quais devem ser investigados para melhor entendermos o que contém este material. Neste sentido, acreditamos que, conhecendo o que veio a ser o GRUEMA, dar-se-ão mais alguns passos no traçado histórico do contexto do MMM brasileiro.

A coleção GRUEMA (Figura 1) é composta por oito livros, que compreendia a nova estruturação proposta pelo disposto na Lei de Diretrizes e Bases da Educação

– LDB – n.º 5.692, de 11 de agosto de 1971⁵. Foi produzida por Anna Franchi⁶, Lucília Bechara Sanchez⁷, Manhúcia Perelberg Liberman⁸, Anna Averbuch⁹ e Franca Cohen Gottlieb¹⁰, e publicada pela Companhia Editora Nacional.

Em se tratando de ações para a escola primária em tempos do MMM no estado de São Paulo, cumpre destacar os trabalhos realizados pelas professoras Manhúcia Perelberg Liberman, Lucília Bechara, Anna Franchi, as quais produziram, conjunta ou isoladamente, livros didáticos, cursos de formação, documentos oficiais, subsídios para professores etc. (FRANÇA, 2007).

Figura 01 - Coleção GRUEMA



Fonte: Villela (2009, p. 225)

Anna Franchi, Lucília Bechara Sanchez, Manhúcia Perelberg Liberman faziam parte do lado paulista de composição da obra, enquanto Anna Averbuch e Franca C. Gottlieb eram do lado carioca. A aproximação das escritoras de São Paulo com as do Rio de Janeiro ocorreu por conta do convite realizado por Manhúcia P. Liberman, a qual conhecia Anna Averbuch e Franca C. Gottlieb.

Na página de abertura do livro destinado à 5.^a série, as autoras contam:

Para a elaboração dos quatro últimos volumes, destinados às 5.^a, 6.^a, 7.^a e 8.^a séries, as professoras Lucília B. Sanchez e Manhúcia P. Liberman, autoras da coleção citada, julgaram necessário unir-se a elementos representativos de outros grupos, ampliando a equipe que

⁵ Após bastante tempo de discussões, em 1961 foi promulgada a Lei n.º 4.024/61, que estabelecia diretrizes e bases para a educação nacional. No ano de 1971, portanto dez anos depois, foi publicada a Lei n.º 5.692/71, que unificava o ensino de 1.º e 2.º grau em uma escola de 8 anos, passando a etapa dos 7 aos 14 anos ser entendida como ensino de 1.º grau.

⁶ Anna Franchi, licenciada e bacharel em Matemática pela Universidade de São Paulo, mestre em Educação (1977) e doutora em Educação pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (1995).

⁷ Lucília Sanchez, licenciada em Matemática pela Universidade Católica de Campinas, mestre em Educação pela Universidade de São Paulo (1991), doutora em Educação pela Universidade de São Paulo (1997), membro fundador do GEEM.

⁸ Manhúcia P. Liberman, licenciada e bacharel em Matemática pela Universidade Federal do Rio de Janeiro, membro fundador do Grupo de Estudos do Ensino da Matemática - GEEM.

⁹ Anna Averbuch, licenciada e bacharel em Matemática pela Universidade Federal do Rio de Janeiro, sócia fundadora do Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática (GEPEN) (RIOS, 2010).

¹⁰ Franca Cohen Gottlieb, licenciada e bacharel em Matemática pela Universidade Federal do Rio de Janeiro, sócia fundadora do GEPEN (RIOS, 2010).

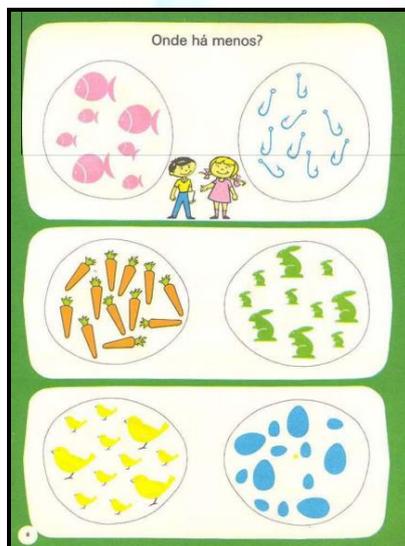
agora conta com a presença de Anna Averbuch e Franca Cohem Gottlieb, para os trabalhos de elaboração de textos, experimentação e controle de resultados, a fim de que a preocupação com a linguagem adequada ao nível dos alunos não sacrifique a precisão de conceitos, para que os alunos não sejam mais tarde forçados a destruir para construir (LIBERMAN *et al.*, 1977, p. 1).

De acordo com Villela (2009, p. 171-172), Anna Franchi colaborou apenas com a edição dos livros correspondentes à 1.^a e à 2.^a série do 1.^o grau, ou seja,

Anna Franchi participou apenas da elaboração dos volumes iniciais. Aqui começam as divergências nos depoimentos das entrevistadas, colhidos separadamente e em datas diferentes, pois para Manhucia estes dois volumes seriam os da 1.^a série, apesar de terem concordado em incluí-la como autora no da 2.^a série. Para Lucília, Anna Franchi participou das discussões também do livro da 2.^a série, sendo que “depois a Anna saiu para trabalhar com a Antonieta num outro livro e ficamos, a Manhucia e eu no primário...” (p. 171-172).

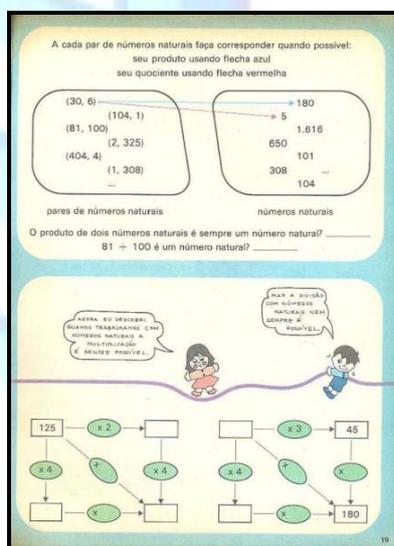
Para Villela (2009, p. 178), “A Coleção Curso Moderno de Matemática para o Ensino de 1.^o Grau recebeu um tratamento gráfico que a diferiu radicalmente dos demais didáticos de matemática produzidos até então”. Os livros eram impressos em quatro cores, e, conforme podemos observar na Figura 1, a qual apresenta a capa dos livros, eles tinham um tratamento diferente em termos visuais.

Figura 02 - Página do livro 1.^a série



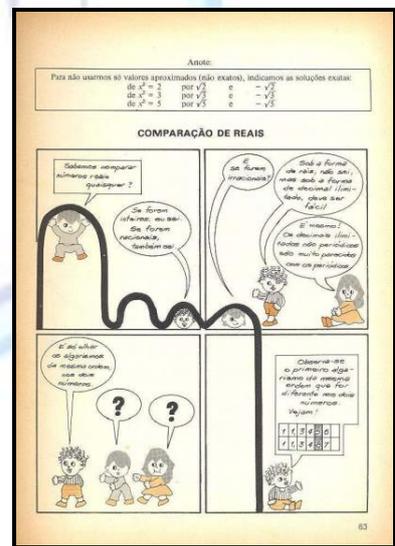
Fonte: Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1.^o grau, 1.^a série. p. 6, 1974a.

Figura 03 - Página do livro 4.^a série



Fonte: Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1.^o grau, 4.^a série. p. 19, 1975a.

Figura 04 - Página do livro 7.^a série



Fonte: Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1.^o grau, 7.^a série. p. 63, 1975b.

O estudo de frações era dado na 2.^a, na 3.^a e na 4.^a série do 1.^o grau, ou com o nome frações ou como números racionais. O Quadro 1 sintetiza os conteúdos abordados em cada volume da coleção GRUEMA.

Quadro 01 - Conteúdos abordados na Coleção GRUEMA

1. ^a Série	conceito de número; relações; adição; subtração; sistema de numeração decimal; adição com 3 parcelas; adição e subtração (técnica operatória); multiplicação; divisão; cubo, cilindro e esfera.
2. ^a Série	fatos fundamentais da adição; fatos fundamentais da subtração; soma de três parcelas; fatos fundamentais da multiplicação e da divisão de resultados menores ou iguais a 20; sistema de numeração: introdução de centena; adição e subtração com números menores que 1.000; geometria: curvas e regiões; multiplicação: fatos fundamentais de produto maior que 20; multiplicação com um dos fatores menor que 10 e o outro menor que 100; divisão: quociente, resto; segmento de reta: medida; frações.
3. ^a Série	representação decimal dos números naturais; adição e subtração de números naturais; multiplicação com números naturais; divisão com números naturais; geometria: ponto, segmento de reta, polígonos, reta, retas paralelas e concorrentes, classificação dos quadriláteros. relações: ser múltiplo, ser fator, ser divisor, ser igual, ser menor, ser maior, gráfico cartesiano; representação dos números racionais sob a forma de fração: comparação, adição e subtração; representação decimal dos números racionais: comparação, adição e subtração; medidas de comprimento, massa e capacidade – escala.
4. ^a Série	representação decimal dos números naturais; operações com números naturais; conjuntos: fatores e divisores; geometria, ângulos e perpendiculares; números racionais: equivalência e ordem: adição e subtração; multiplicação e divisão de números racionais; operações na representação decimal de números racionais; porcentagem; medida, sistema legal de unidades de medida: medida de tempo, medida de superfície.
5. ^a Série	simbologia; conjuntos; operações com conjuntos: intersecção e reunião, adição de números naturais, diferença de conjuntos, subtração de números naturais; relações: pares ordenados, como usar gráficos cartesianos em outras áreas, relações com números e linguagem matemática, produto cartesiano, multiplicação com números naturais, divisão de números naturais, árvore das possibilidades, potenciação, potências de base 10, quadrado e cubo; trabalhando em \mathbb{N} : relacionando adição e subtração, relacionando multiplicação e divisão, o zero na divisão, quociente aproximado, dispositivo prático da divisão, relacionando dividendo, divisor, quociente e resto; funções: bijeção, sistemas de numeração: sistema de numeração decimal; outros sistemas de numeração; medidas em bases diferentes de 10: medida de tempo, medidas de ângulos, cálculos com medidas na base 60, adição e subtração, multiplicação, divisão.
6. ^a Série	partição de um conjunto; relações; relações de ordem e de equivalência; conectivos: “e” e “ou”; relação de ordem em \mathbb{N} ; conjunto \mathbb{Z} ; adição em \mathbb{Z} ; propriedades de adição em \mathbb{Z} ; subtração em \mathbb{Z} ; multiplicação em \mathbb{Z} ; divisão em \mathbb{Z} ; potenciação em \mathbb{Z} ; radiciação em \mathbb{Z} ; o conjunto dos números racionais; operações em \mathbb{Q} ; multiplicação em \mathbb{Q} ; divisão em \mathbb{Q} ; número racional no sistema de numeração decimal; compreender o expoente negativo em \mathbb{Q} ; potenciação em \mathbb{Q} ; razões e proporções; equações e inequações.
7. ^a Série	relações; grupos; implicação e equivalência; paralelismo e direção; comparação de racionais sob a forma decimal; números reais; cálculo literal: produtos notáveis, fatoração; função polinomial de \mathbb{R} ; sistema de equações; circunferência; simetria; congruência.
8. ^a Série	técnicas operatórias em \mathbb{R} ; relação de ordem em \mathbb{R} ; funções; função quadrática; equações do 2. ^o grau; axioma de Tales; homotetia; semelhança de polígonos; circunferência; polígonos regulares; área.

Fonte: elaborado pelo autor

Ao analisarmos os livros da coleção GRUEMA, percebemos serem eles objetos culturais segundo indica Chartier (1990), pois eles produziam cultura, que seria adquirida pelos alunos, ao manuseá-los. Isso reporta à função instrumental que

a coleção explícita por meio dos conteúdos escolares, ao apresentar exercícios, sugestões de trabalhos, métodos de trabalhos, entre outras características próprias de um livro didático.

Colocando acento no tema frações, trabalhado no livro do GRUEMA, na próxima seção, buscamos discutir e analisar o conteúdo de frações destinado ao ensino das primeiras séries do 1.º grau, para responder à questão: que “frações para ensinar” pode ser sistematizada, a partir da análise do *Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1.º grau*.

Orientações sobre o ensino de frações

Pretendemos, nesta seção, discutir e apresentar o estudo de frações, proposto por Manhúcia Perelberg Liberman, Lucilia Bechara Sanchez e Anna Franchi, ao longo da 2.ª, da 3.ª e da 4.ª série do 1.º grau. Para tanto, faz-se interessante percebermos como esses livros foram estruturados. Através de seu índice, podemos ver que não era feita menção ao estudo de conjuntos, o qual perfaz a estrutura objetivada pelo MMM.

Os livros da coleção *Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1.º grau* são constituídos pelo guia do professor e pelo livro do aluno. No caso do livro destinado à 2.ª série, ele é dividido em 11 seções, distribuídas em: guia do professor, com 43 páginas, e livro do aluno, com 135 páginas, conforme nos mostra o Quadro 2.

Quadro 02 - Ordem dos conteúdos no livro *Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1.º grau – 2.ª série*

Título	Página Guia do Professor	Página Livro do Aluno
Fatos fundamentais da adição; fatos fundamentais da subtração; soma de três parcelas	5	1
Fatos fundamentais da multiplicação e da divisão de resultados menores ou iguais a 20	11	12
Adição e subtração com números menores que 100	12	19
Sistema de numeração: Introdução de centena	17	43
Adição e subtração com números menores que 1.000	21	57
Geometria: curvas e regiões	24	72
Multiplicação: fatos fundamentais de produto maior que 20	30	79
Multiplicação com um dos fatores menor que 10 e o outro menor que 100	35	103
Divisão: quociente, resto	36	111
Segmento de reta: medida	39	123
Frações	41	129

Fonte: Liberman; Sanchez; Franchi, 1974b

O livro da 3.ª série é estruturado em 9 seções, distribuídas em 40 páginas no guia do professor e 169 páginas no livro do aluno, como explicitado no Quadro 3.

Quadro 03 - Ordem dos conteúdos no livro *Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1.º grau – 3.ª série*

Título	Página Guia do Professor	Página Livro do Aluno
Representação decimal dos números naturais	1	1
Adição e subtração dos números naturais	6	18
Multiplicação com números naturais	6	35
Divisão com números naturais	8	50
Geometria: ponto; segmento de reta; polígonos; reta; retas paralelas e concorrentes; classificação dos quadriláteros	10	63
Relações: ser múltiplo; ser fator; ser divisor; ser igual; ser menor; ser maior; gráfico cartesiano	18	79
Representação dos números racionais sob a forma de fração: comparação; adição; subtração	27	102
Representação decimal dos números racionais: comparação; adição; subtração.	33	129
Medidas de comprimento, massa e capacidade – escala	37	146

Fonte: Liberman; Sanchez, 1974c

O livro da 4.ª série é organizado em 9 seções, distribuídas em 31 páginas no guia do professor e 161 páginas no livro do aluno, tal como apresenta o Quadro 4.

Quadro 04 - Ordem dos conteúdos no livro *Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1.º grau – 4.ª série*

Título	Página Guia do Professor	Página Livro do Aluno
Representação decimal dos números naturais	1	1
Operações com números naturais	3	13
Conjuntos: fatores e divisores	6	29
Geometria; Ângulo e perpendiculares	9	46
Números racionais: equivalência e ordem. Adição e subtração	13	62
Multiplicação e divisão de números racionais	15	89
Operações na representação decimal de números racionais	20	102
Porcentagem	23	122
Medida. Sistema legal de Unidades de medida	24	128
Medida de tempo	25	128
Medida de superfície	25	133

Fonte: Liberman; Sanchez, 1975a

Como podemos observar pelos quadros explicativos, as autoras vão diluindo o estudo de frações ao longo de três anos do estudo do 1.º grau, tendo o cuidado de apresentá-lo de forma gradual.

No caso da 2.ª e da 3.ª série, as autoras apresentam de forma inicial algumas informações básicas para o professor – regras/definições matemáticas que descrevem o conteúdo –, ligadas aos números racionais.

No caso da 2.^a série, elas lembram o professor que, no conjunto dos números naturais, vale a propriedade do fechamento ¹¹ para operações de adição e multiplicação, porém essa propriedade não pode ser aplicada para a subtração e divisão.

$$(2,4) \xrightarrow{+} 6$$

$$(2,4) \xrightarrow{\times} 8$$

$$(12,30) \xrightarrow{+} 42$$

$$(12,30) \xrightarrow{\times} 360$$

$$(2,5) \xrightarrow{-} ?$$

$$(2,5) \xrightarrow{\div} ? \text{ (LIBERMAN; SANCHEZ; FRANCHI, 1974b, p. 41).}$$

A partir dessa observação, as autoras indicam ao professor que deve ficar entendido que, para operação de subtração, faz-se necessário o conjunto dos números relativos, não estudado na escola primária. E que, para o caso da divisão, deve-se considerar o conjunto dos números racionais, os quais elas assim os definem:

Chama-se número racional a todo número n , solução da equação:
 $n \times b = a$, onde a e b são números naturais e b diferente de zero.

O número n pode ser expresso na forma $\frac{a}{b}$ com $b \neq 0$ (LIBERMAN; SANCHEZ; FRANCHI, 1974b, p. 42).

Elas ainda complementam que “Todo número racional pode ser escrito na forma de fração ou de número decimal (isto é, representação de base 10)” (LIBERMAN; SANCHEZ; FRANCHI, 1974b, p. 42).

Para a 3.^a série, as autoras partem da definição de que “um número é racional absoluto, se e somente se pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$ onde a e b são números naturais e $b \neq 0$ ” (SANCHEZ; LIBERMAN, 1974c, p. 28). Com base nesta construção realizada, as autoras definem fração, designando que “a representação do número racional na forma $\frac{a}{b}$, onde a e b são números naturais e $b \neq 0$ ” (p. 28) recebe o nome de fração. Seguem definindo frações equivalentes e classe de equivalência, no qual “duas frações são equivalentes quando representam o mesmo número racional... Ao conjunto das frações equivalentes damos o nome de classe de

¹¹ A propriedade do fechamento diz que, dado dois números naturais, existe sempre a soma ou produto deles.

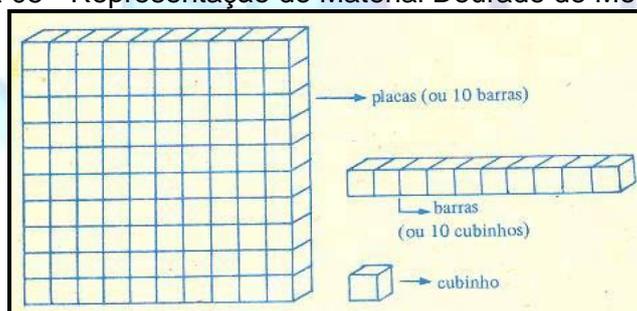
equivalência” (p. 28). Como forma de fechamento do tópico de informações ao professor, elas citam a reta numerada como sendo uma maneira para visualizar os números racionais, onde se faz a associação dos números racionais a pontos da reta.

Ao propor os procedimentos para ensinar números fracionários, para a 2.^a série, elas dizem ao professor para pedir à criança para comparar por superposição figuras de mesma forma; comparar $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \dots$; recomposições utilizando figuras. Para esta série, elas indicam que o professor deve ter o objetivo de preparar o aluno para compreensão do conceito de fração – número racional –, que apenas será dado na 3.^a série.

Quanto à 3.^a série, podemos perceber que as orientações apresentadas pelas autoras procuram contribuir para o desenvolvimento visual, uma vez que, ao visarem à associação de frações e à construção da representação dos números na reta, criam situações que levam os alunos a fazer descobertas, utilizando gráficos e ilustrações, bem como propõem situações com o uso de material concreto, sugerindo, para isso, o Material Dourado de Montessori¹².

Ao fazer uso desse material, o professor pode trabalhar situações, como: “de quantas barras são necessárias para completar 1 placa? Quantos $\frac{1}{10}$ são necessários para formar 1 unidade? Quantos $\frac{1}{100}$ para formar $\frac{1}{10}$? Quantos $\frac{1}{100}$ para completar 2 décimos?” (SANCHEZ; LIBERMAN, 1974c, p. 34) (Figura 5).

Figura 05 - Representação do Material Dourado de Montessori



Fonte: Liberman; Sanchez, 1974c, p. 34.

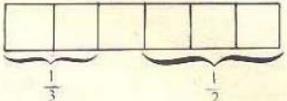
Para a 4.^a série, são objetivadas situações que envolvem as operações com frações, encarregando-se de revisar adição e subtração de denominadores iguais e

¹² O Material elaborado por Maria Montessori tem por premissa partir do concreto para o abstrato. O material dourado, ou como inicialmente era conhecido: material das contas douradas, foi elaborado para o trabalho com aritmética. É composto por um cubo grande, cuja representação é o milhar; placas cuja representação é a centena; barras cuja representação é a dezena; e cubinhos que representa a unidade.

introduzindo o estudo com denominadores diferentes. Durante o processo de revisão da adição com bases iguais, é introduzida a forma mista, por exemplo, $1\frac{1}{3}$ que representa $1 + \frac{1}{3}$. Para a passagem de adições ou diferenças com frações com denominadores diferentes, é proposto que sejam utilizadas as representações gráficas, ou trabalhar com material concreto. Como sugestão, é indicada, por exemplo, a seguinte atividade, exemplificada na Figura 6.

Figura 06 - Sugestão de atividade para a 4ª série

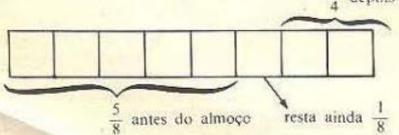
Sugestão de atividades: Fazer a criança determinar somas como $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ com material concreto.



O aluno perceberá que $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ precisam ser "trocados em miúdos", isto é, em sextos para determinar a soma, assim $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ (trocados em sextos) é o mesmo que $\frac{3}{6} + \frac{2}{6}$, isto é, $\frac{5}{6}$.

Depois de realizar várias somas com o material, o professor mostrará ao aluno que $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$ e $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12}$ e daí a criança escolhe as frações que têm mesmo denominador, isto é, $\frac{3}{6}$ e $\frac{2}{6}$. Nesta série o professor tomará o cuidado de escolher frações que tenham para denominador números que permitam encontrar sem grandes dificuldades o denominador comum através de classes de equivalência. Para a subtração o professor fará o mesmo.

Os problemas apresentados na página 83 envolvem adições ou subtrações com frações. Sugerimos que o aluno, depois de ler cada um, faça um gráfico a fim de compreender a solução e não queira adivinhar a operação a ser realizada. Assim, para o primeiro problema:



As propriedades comutativa e associativa da adição com números racionais são apresentadas, nas páginas 84 e 85, apenas em situações práticas.

Fonte: Liberman; Sanchez, 1975a, p. 14

As autoras orientam o professor que, com o uso do material concreto, os alunos perceberão a existência de frações equivalentes de denominadores iguais e, assim, conseguirão realizar as operações propostas. Entende-se que o aluno, num primeiro momento, manuseará o material concreto até obter um resultado, e, posteriormente, o professor mostrará na lousa o método para que os alunos possam entender as construções. As autoras advertem que o professor deve tomar cuidado em escolher frações que tenham para denominadores números que não manifestem muitas dificuldades através de classes de equivalência.

Alguns elementos de síntese

De modo geral, o livro, elaborado pelas professoras Manhúcia Perelberg Liberman, Lucília Bechara Sanchez e Anna Franchi trazia orientações, significativas, ao professor que ensinava matemática para as primeiras séries do primeiro grau, num contexto de MMM. Por certo, muitas das práticas delas, como professoras e

muito do cotidiano do aluno estavam presentes nesta coleção do GRUEMA, que reflete a dedicação e os esforços empreendidos para ser produzida. Um material tão rico, capaz de entrosar as experiências para a sala de aula e o conteúdo apresentado. Com efeito, as autoras, em meio às práticas propostas, queriam dar um maior entendimento da matemática vivenciada pelos alunos.

Em se tratando do caso da fração, podemos perceber, no livro, que as autoras tiveram o cuidado de propor que os conceitos referentes a cada ano fossem apresentados de modo progressivo, primeiro a compreensão do que era uma fração, suas equivalências, e as operações que poderiam ser executadas.

As autoras buscaram inovar em suas ações propostas na coleção GRUEMA, uma vez que, mesmo fazendo o professor uso do rigor matemático, ele construía seu trabalho, valendo-se de materiais concretos, para auxiliar o aluno a encontrar soluções por questões propostas pelo professor. Ou seja, elas enxergavam a necessidade do uso de materiais manipuláveis/concretos para melhor aprimoramento dos conteúdos apresentados em suas obras, fazendo indicações muito pontuais quanto a este uso.

Ademais, a despeito de o estudo de conjuntos não ser mobilizado entre as orientações durante o estudo de frações, percebemos pelo arranjo, no qual as atividades eram propostas, que a ideia de grupos se fazia muito presente, por mais que não estivesse explícito o uso do ideário de conjuntos, que era uma objetivação clara do MMM.

Vemos que a dinâmica dada ao estudo de frações induzia o aluno a compreender o que estava sendo ensinado pelo professor, e essa percepção pode ser verificada nas solicitações recorrentes do professor para que o aluno fizesse representações ou observasse as representações que uma fração pode tomar.

A validação do processo abordado na coleção se dá no momento em que o aluno conseguia caminhar pelas diversas formas de representações, seja a localização da fração na reta numerada, seja da adição de um número fracionário para a compreensão de que uma sentença pode ser escrita na forma mista até a decomposição de imagem em frações equivalentes que teriam sido ensinadas em outros anos escolares.

Remontando a nossa questão de investigação: que matemática para ensinar surge nas orientações das autoras, no *Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1.º grau*, ao introduzir o ensino de frações?, podemos indicar que ela – a matemática para ensinar – estava presente na construção e no desenvolvimento da

obra, que parte de uma experimentação e das práticas das autoras para melhor conduzir o desenvolvimento dos alunos nas diversas escolas. Ou ainda, nas diversas representações de figuras conhecidas dos alunos e figuras geométricas, realizadas por meio do Material Dourado de Montessori, para a construção das frações ao longo dos três anos iniciais de estudo. O professor, a despeito do rigor matemático, fazia inserções de situações concretas e, assim, ia desenvolvendo o processo de aprendizagem de frações.

Por fim, é possível dizer que a Coleção GRUEMA, ao propor o estudo de frações, se revela como um documento importante que objetivava uma *matemática para ensinar* em tempos do MMM. Ela significou um guia de orientação para o professor e para o aluno, o que coloca em foco a *expertise* das professoras Manhúcia Perelberg Liberman, Lucília Bechara Sanchez e Anna Franchi, ao sistematizarem saberes para ensinar matemática.

Referências

BERTINI, Luciane de Fátima; MORAIS, Rosilda dos Santos; VALENTE, Wagner Rodrigues. **A matemática a ensinar e a matemática para ensinar**: novos estudos para a formação de professores. São Paulo: Editora Livraria da Física. 2017.

CHARTIER, Roger. **A história cultural**: entre práticas e representações. Lisboa: Difel, 1990.

FRANÇA, Denise Medina de Almeida. **A produção oficial do Movimento Matemática Moderna para o ensino primário do estado de São Paulo (1960-1980)**. 2007. 272f. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

FRANÇA, Denise Medina de Almeida; DUARTE, Aparecida Rodrigues Silva. A implementação do movimento da matemática moderna nos anos iniciais no estado de São Paulo. **Em Teia - Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, Universidade Federal de Pernambuco. [s.l.], v. 8, n. 3, p. 1-15, 10 nov. 2017. Disponível em: <https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/23315>. Acesso em: 05 de mar. 2020.

HOFSTETTER, Rita; SCHNEUWLY, Bernard. Saberes: um tema central para as profissões do ensino e da formação. In: HOFSTETTER, Rita; VALENTE, Wagner Rodrigues. (org.). **Saberes em (trans)formação**: tema central da formação de professores. São Paulo: Livraria da Física, p. 113-172, 2017.

LIBERMAN, Manhucia Perelberg; SANCHEZ, Lucilia Bechara; FRANCHI, Anna. (GRUEMA). **Curso moderno de matemática para o ensino de 1.º grau**. 1.ª série. Ilustrações de Luiz Noviani e Gilberto Marchi Ferreira; Capa de Maria Teresa Ayoub Jorge e Regina B. Tracanella. São Paulo. Companhia Editora Nacional, 1974a.

LIBERMAN, Manhucia Perelberg; SANCHEZ, Lucilia Bechara; FRANCHI, Anna. (GRUEMA). **Curso moderno de matemática para o ensino de 1.º grau**. 2.ª série.

Capa e ilustrações de Maria Teresa Ayoub Jorge e Regina B. Tracanella. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1974b.

LIBERMAN, Manhucia Perelberg; SANCHEZ, Lucilia Bechara. (GRUEMA). **Curso moderno de matemática para o ensino de 1.º grau**. 3.ª série. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1974c.

LIBERMAN, Manhucia Perelberg; SANCHEZ, Lucilia Bechara. (GRUEMA). **Curso moderno de matemática para o ensino de 1.º grau**. 4.ª série. Capa e ilustrações de Maria Teresa Ayoub Jorge e Regina B. Tracanella São Paulo. Companhia Editora Nacional, 1975a.

LIBERMAN, Manhucia Perelberg; SANCHEZ, Lucilia Bechara; AVERBUCH, Anna; GOTTLIEB, Franca Cohen. (GRUEMA). **Curso moderno de matemática para o ensino de 1.º grau**. 7.ª série. Supervisão de MONTEIRO, L. H. J.; Capa e ilustrações de Maria Teresa Ayoub Jorge e Regina B. Tracanella São Paulo. Companhia Editora Nacional, 1975b.

LIBERMAN, Manhucia Perelberg; SANCHEZ, Lucilia Bechara; AVERBUCH, Anna; GOTTLIEB, Franca Cohen. (GRUEMA). **Curso moderno de matemática para o ensino de 1.º grau**. 5.ª série, 5. ed. Capa e ilustrações de Maria Teresa Ayoub Jorge e Regina B. Tracanella. Exemplar do professor. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1977.

LIMA, Eliene Barbosa; VALENTE, Wagner Rodrigues. O saber profissional do professor que ensina matemática: considerações teórico-metodológicas. **Argumentos Pró-Educação**, Pouso Alegre, v. 4, n. 11, p. 928-943, maio / ago. 2019. Disponível em: <http://ojs.univas.edu.br/index.php/argumentosproeducacao/issue/view/28>. Acesso em: 31 de maio 2020.

MIORIM, Maria Ângela. Livros didáticos de Matemática do período de implantação do Movimento da Matemática Moderna no Brasil. In: CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5, 2005, Porto. **Anais [...]**, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2005.

OLIVEIRA, Alexandre Souza. Linguagem, imagens e os contextos visuais e figurativos na construção do saber matemático que norteiam os livros didáticos de matemática. In: GONÇALVES, Felipe Antonio Machado Fagundes. (org.). **Educação Matemática e suas Tecnologias 4**. Paraná: Atena, p. 164-175, 2019

OLIVEIRA, Maria Cristina Araujo; LEME DA SILVA, Maria Célia; VALENTE, Wagner Rodrigues. **O Movimento da Matemática Moderna**: história de uma revolução curricular. Juiz de Fora: UFJF, 2011. 192 p.

RIOS, Maria Silva Braga. **A Proposta de Ensino da Geometria nos Livros do GRUEMA**. 2010. 179f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Educação Matemática, Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2010. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/186654>. Acesso em 13 de maio 2020.

SANCHEZ, Lucilia Bechara. Autoria de Livros Didáticos: uma experiência e uma vida. **Histemat**, v. 4, n. 2, p. 242-262, 2018. Disponível em: <http://www.histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/225>. Acesso em: 10 de abr. 2020.

SOARES, Elenir Terezinha Paluch. **Zoltan Paul Dienes e o Sistema de Numeração Decimal na cultura Escolar Paranaense (1960-1989)**. 2014. 288 f. Tese (Doutorado) - Curso de Doutorado em Educação, Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2014. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/117008>. Acesso em: 20 de fev. 2020.

VALENTE, Wagner Rodrigues. Livro Didático e Educação Matemática: uma história inseparável. **Zetetiké**, Campinas, v. 30, n. 16, p.139-162, jul./dez. 2008a. Disponível em: <https://www.fe.unicamp.br/revistas/ged/zetetike/article/viewFile/2518/2277>. Acesso em: 24 de mar. 2015.

VALENTE, Wagner Rodrigues et al. **A matemática na formação de professores e no ensino**: processos e dinâmicas de produção de um saber profissional, 1890-1990. Projeto de Pesquisa. São Paulo: FAPESP, 2017. Disponível em: <http://bv.fapesp.br/pt/auxilios/98879/a-matematica-na-formacao-de-professores-e-no-ensino-processos-e-dinamicas-de-producao-de-um-saber-p/?q=17/15751-2>. Acesso em: 01 de mar 2019.

VILLELA, Lucia Maria Aversa. **GRUEMA**: uma contribuição para a história da educação matemática no Brasil. 2009. 230 f. Tese (Doutorado) - Curso de Doutorado em Educação Matemática, Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2009. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/161992>. Acesso em: 20 de fev. 2020.

VILLELA, Lucia Maria Aversa. Revivendo o GRUEMA: da memória das autoras à produção de uma história. **Bolema**, v. 23, n. 35B, p. 387-403, abr. 2010. Disponível em: <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/issue/view/820>. Acesso em: 31 de mai. 2020.

Submetido em agosto de 2020.

Aceito em junho de 2021.