

Ensino de Logaritmos: um Diagnóstico da Apropriação do Conceito Discutido à Luz da Teoria Histórico-Cultural

Teaching Logarithms: a Diagnosis of Appropriation of the Concept Discussed in the Light of Historical-Cultural Theory

Djalma Gonçalves Pereira¹

Marilene Ribeiro Resende²

RESUMO

No contexto de mudanças no Ensino Médio, devido à aprovação da Lei nº 13.415/2017, que propõe a Reforma do Ensino Médio e a aprovação da Base Nacional Comum Curricular - BNCC/2018, que têm como princípios, o desenvolvimento de competências, investigações sobre a organização do ensino da matemática, que se apoiem em outros pressupostos, fazem-se necessárias. Neste artigo, apresenta-se um recorte de pesquisa, cujo objetivo foi analisar as contribuições do sistema zankoviano para organização do ensino dos logaritmos, visando à apropriação desse conceito. A partir de estudos bibliográficos, são tratados os princípios do sistema didático de L. V. Zankov, alguns elementos do movimento lógico-histórico do conceito de logaritmos e, com base em pesquisa de campo, discute-se o diagnóstico da apreensão do conceito de logaritmo, realizado com seis alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola da rede privada de ensino de Uberaba-MG. Foi possível constatar, neste diagnóstico, evidências de um conhecimento empírico do conceito, baseado em elementos externos, que indicam a necessidade de outras aproximações para novas sínteses, visando à construção do conhecimento teórico.

PALAVRAS-CHAVE: Ensino de Logaritmo. Teoria Histórico-Cultural. Zankov. Ensino de Matemática.

ABSTRACT

Within the context of the modification of high school, due to the approval of the Law nº 13.415/2017, which proposes the Reform of High School and the approval of the Common National Curriculum

¹ Doutor em Educação pela Universidade de Uberaba - UNIUBE, Vice-diretor Educacional do Colégio Marista Diocesano - Uberaba/MG. E-mail: djalma.goncalves@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3368-3544>.

² Doutora em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC/SP, Docente permanente do Programa de Pós Graduação em Educação da Universidade de Uberaba - UNIUBE/MG. E-mail: marilene.resende@uniube.br. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6740-1787>.



Base - BNCC/2018; which holds as principles the development of capabilities and the development of enquiries concerning the organization of the teaching of mathematics supported by other presuppositions, which is indeed necessary. In this article, it is presented a research fragment which had as an objective the analysis of the contributions of the zankovian system for the organization of the teaching of logarithms. From bibliographical research, the principles of the didactic system of L.V. Zankov are addressed. We address some elements of the logico-historical movement of the concept of logarithms and, basing ourselves in field research, we discuss the diagnosis of the apprehension of the concept of logarithm by six students of the 2nd year of high school in a private school in Uberaba-MG. From the diagnosis it was possible to indicate evidence of empirical knowledge of the concept based on external elements, which indicate the necessity of new approximations for new synthesis, aiming at the construction of theoretical knowledge.

KEYWORDS: Logarithm Teaching. Historical-Cultural Theory. Zankov. Teaching of Mathematics.

Introdução

No contexto atual de mudanças no ensino médio brasileiro, com ênfase no desenvolvimento de competências (saber-fazer), e de conseqüente desvalorização do ensino com foco na formação de conceitos, fazem-se necessárias investigações e discussões a respeito da organização “adequada” do ensino-aprendizagem da matemática, fundamentada teoricamente em pressupostos epistemológicos e didáticos claros, consistentes e coerentes, que vão além do caráter utilitarista, que vem marcando os dispositivos legais e os discursos nesta segunda década do século XXI. Uma das perspectivas é a da Teoria Histórico-Cultural e de teorias a ela relacionadas, que propõem a humanização do aluno, a partir do desenvolvimento das capacidades psíquicas superiores.

Assumimos que o saber produzido historicamente pelo homem no processo de transformação da vida e de suas características, provê os meios necessários para que o aprendiz se situe no mundo e estabeleça com ele um elo que o humanizará, fazendo com que seja um elemento transformador de sua vida e da comunidade onde está inserido. Sendo assim, o currículo escolar precisa prever a presença desses conhecimentos e, não, omiti-los, por não serem considerados conteúdos de aplicação imediata. Os conteúdos escolares podem ser apresentados aos estudantes de forma que provoquem sentimentos positivos e estimulantes, capazes de gerar necessidades nos estudantes, condição para que esse entre em atividade, ou seja, para que exerçam seu protagonismo no processo de ensino-aprendizagem.

Vigotski (1998), um dos precursores da Teoria Histórico Cultural, afirma que a aprendizagem não implica necessariamente em desenvolvimento, mas a sua organização de forma adequada é requisito necessário para que isso ocorra.

Essa necessidade relacionada ao ensino-aprendizagem de matemática no Ensino Médio, motivou uma pesquisa que tomou como objeto a organização do

ensino-aprendizagem do conceito de logaritmos na perspectiva da Teoria Histórico Cultural, mais especificamente do sistema didático de L. V. Zankov. Teve como objetivo geral: analisar as contribuições do sistema zankoviano para organização do ensino dos logaritmos, visando à apropriação desse conceito, na perspectiva do ensino desenvolvimental.

Neste artigo, temos o objetivo de apresentar um recorte desta pesquisa. Inicialmente, expomos os princípios do sistema didático de L. V. Zankov, em seguida, elementos do movimento lógico-histórico do conceito de logaritmo e, por fim, discutimos o diagnóstico, envolvendo o conceito de logaritmo realizado com seis alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola da rede privada de ensino de Uberaba-MG, que já haviam estudado o assunto “Logaritmo”.

O diagnóstico é etapa imprescindível ao trabalho de organização científica dos processos de ensino-aprendizagem na perspectiva vigotskiana e dos sistemas didáticos que nela se fundamentaram. Vigotski (2010, p. 114), ao abordar a questão da aprendizagem e do desenvolvimento na idade escolar, afirma que “o único bom ensino é o que se adianta ao desenvolvimento”. Esse pressuposto indica a importância de se conhecer o “nível atual” de desenvolvimento do aluno para o planejamento do ensino, pois um ensino orientado para aquilo que o aluno já atingiu não produz novas aprendizagens e não promove o desenvolvimento.

Trata-se de um estudo bibliográfico e de campo, envolvendo a apropriação dos princípios do sistema didático L. V. Zankov e a aplicação e discussão da atividade de diagnóstico sobre o conceito de logaritmo.

Aspectos da Teoria Histórico-Cultural e os princípios do sistema didático de L. V. Zankov

Ao ingressar na escola, o sujeito é inserido em um universo no qual suas capacidades, ainda em desenvolvimento, serão estimuladas e aprimoradas. A escola é o lugar onde a apropriação da cultura é intencional e estruturada, buscando levar o sujeito ao desenvolvimento de suas funções psicológicas superiores com vista a tornar-se um membro criativo, capaz de participar e de produzir concretamente uma vida mais humana, na qual todos tenham condições de se desenvolver.

Esse desenvolvimento das funções psíquicas superiores, que ocorre, inicialmente, no plano interpsicológico, e, depois no intrapsicológico tem na escola um espaço propício, pois, nela, as relações sociais se intensificam. Vigotski (1993),

em sua lei genética geral do desenvolvimento cultural, explica o desenvolvimento nestes dois planos – o interpsicológico e o intrapsicológico.

Qualquer função presente no desenvolvimento cultural da criança aparece duas vezes, ou em dois planos distintos. Primeiro, aparece no plano social, e depois, então, no plano psicológico. Em princípio, aparece entre as pessoas e como uma categoria interpsicológica, para depois aparecer na criança, como uma categoria intrapsicológica. Isso é válido para atenção voluntária, memória, lógica, formação de conceitos e o desenvolvimento da vontade. [...] a internalização transforma o próprio processo e muda sua estrutura e funções. As relações sociais ou relações entre as pessoas estão na origem de todas as funções psíquicas superiores (VIGOTSKI, 1993, p. 163).

Essa lei vigotskiana tem um caráter seminal, pois formula os pressupostos do desenvolvimento humano numa outra perspectiva, estabelecendo que a sua origem se dá no social, no interpsicológico, para depois ser internalizado, num movimento, que modifica o indivíduo e também o objeto para si. Ela esteve na base de sistema didáticos implantados longitudinalmente na ex-União Soviética, fundamentado nas teorias vigotskianas e na perspectiva do Ensino Desenvolvimental na década de 1960.

Leonid Vladimirovich Zankov (1901-1977), um psicólogo soviético desenvolveu um desses sistemas didáticos, no início dos anos de 1960. No sistema zankoviano, são valorizadas as esferas da emoção e da vontade no desenvolvimento do pensamento. Trata-se de um sistema didático que, não apenas integra pessoas e expressa os conceitos relacionados ao conteúdo a ser estudado, mas que pretende viabilizar o desenvolvimento integral do aluno. São princípios do sistema didático zankoviano: o papel diretor dos conhecimentos teóricos; o ensino a um alto grau de dificuldade; avanço em grande ritmo; compreensão pelos escolares do processo de estudo; planejamento cuidadoso das aulas para promover a aprendizagem de cada aluno em particular (ZANKOV, 1984).

A formação de conceitos teóricos ou do pensamento teórico é uma preocupação de Vigotski e de seus seguidores, como Zankov, Davíдов, Elkonin, Repkin e Talízina, que estiveram envolvidos na experimentação de sistemas didáticos na extinta União Soviética, no século passado. Eles enfatizam que o papel do ensino é promover a formação do pensamento teórico e não do pensamento empírico.

Resende (2019, p. 307) faz um paralelo entre tipos de pensamento com base em Davidov (1988), o que fundamentou teoricamente as análises do diagnóstico realizado nesta pesquisa.

Quadro 01 – Paralelo entre o pensamento empírico e o pensamento teórico sob a perspectiva de Davidov

	PENSAMENTO EMPÍRICO	PENSAMENTO TEÓRICO
PONTO DE PARTIDA	Elaborado no processo de comparação entre os objetos e as representações sobre ele, o que permite separar as propriedades iguais, comuns. A coisa isolada aparece como uma realidade autônoma. É derivado da atividade objetivo-sensorial dos homens, que se traduz no conhecimento direto na realidade e não apenas da realidade.	Surge no processo de análise do papel e da função de certa relação peculiar dentro do sistema integral que, ao mesmo tempo, serve de base genérica inicial de todas as suas manifestações. A coisa aparece como meio de manifestação de outra coisa dentro de um todo, evidenciando sua conexão interna a partir da transformação mental dos objetos.
FINALIDADE	O pensamento empírico cataloga, classifica os objetos e fenômenos.	O pensamento teórico busca a essência.
CONTEÚDO	Os movimentos visíveis e aparentes da coisa observada, ou seja, as propriedades comuns dos objetos. O conhecimento empírico é o movimento na esfera da exterioridade, a assimilação do aspecto da realidade descrito pela categoria da existência. Os conhecimentos empíricos apoiando-se nas observações, refletem em representações as propriedades externas dos objetos. A cognição empírica é o movimento na esfera da aparência, que se expressa pela categoria de ser, de quantidade, de qualidade, de atributo, de medida.	Movimentos reais e interiores. Área dos fenômenos objetivamente inter-relacionados. Refere-se a um sistema de interação de fenômenos articulados, constituindo um todo organizado. O conteúdo específico do pensamento teórico expressa a relação objetiva do universal e do particular (o integral e o diferente), isto é, descobrem-se as inter-relações de objetos isolados dentro do todo. Os conhecimentos teóricos, que surgem sobre a base da transformação mental dos objetos, refletem suas relações e conexões internas, “saindo” assim dos limites das representações. A cognição teórica tem como conteúdo o ser mediatizado, refletido e essencial.

Fonte: Resende (2019, p. 307). Elaborado com base em DAVIDOV (1988, p. 154-155).

Fica claro que o pensamento empírico se baseia em aspectos externos, aparentes do objeto, fica na esfera da aparência e tem a finalidade de catalogar, de classificar, enquanto o pensamento teórico visa as conexões internas, surge a partir da transformação mental dos objetos, em busca da essência, dentro de um todo, de um sistema integral.

Embora L. V. Zankov tenha se mostrado preocupado com a formação de conceitos científicos, dando-lhes o papel de “reitor” no sistema didático proposto, ele destacou, também, a importância de se considerar a esfera da emoção e da vontade dos alunos, com o intuito de obter o desenvolvimento integral do aluno.

Zankov (1984) associa esse princípio aos outros, afirmando que o alto grau de dificuldade supõe chegar ao conhecimento da interdependência dos fenômenos, à sua relação interna substancial, o que nos permite dizer à essência, ultrapassando o nível empírico do pensamento. Trabalhar com alto grau de dificuldade não significa exigir em demasia dos alunos, mas incentivá-los a sempre superar obstáculos e impor a seu cérebro um trabalho “não preguiçoso”, fugindo assim da mera repetição e reprodução, próprias do ensino tradicional.

No sistema zankoviano, os alunos são incentivados a verbalizar suas observações sobre o tema estudado, enquanto o professor direciona a atenção para os padrões e conexões evidenciados por eles, conduzindo-os à dedução e explicação da natureza das relações.

O modelo zankoviano tem como prerrogativa a apresentação dos conteúdos que formam a teia de conhecimentos essenciais para a formação do conceito em forma de espiral. Os conceitos tidos como simples são previamente introduzidos e gradativamente revistos através de questões invariavelmente mais abstratas, sendo observadas dentro de um novo contexto. Essa característica da aula concretiza o princípio do avanço rápido no estudo do material do programa, assim como a formação dos conceitos teóricos.

Para que esse processo aconteça, é preciso que as aulas sejam cuidadosamente planejadas, visando incorporar e relacionar o que foi aprendido com o que está prestes a ser introduzido. Assim, cada atividade amplia a compreensão sobre o conteúdo anterior para um nível superior de generalização. Esse movimento ascendente de construção do conceito supõe ter em mente os seus aspectos lógicos e históricos.

Aspectos lógicos e históricos do conceito dos logaritmos

Na organização do ensino numa perspectiva dialética, considerando as leis do movimento do pensamento, torna-se fundamental, ao nos aproximarmos de um objeto, conhecermos os aspectos histórico-lógicos desse objeto. Esses aspectos, segundo Sousa (2018), estão relacionados a conceitos que estão na base da dialética materialista do conhecimento, como o de totalidade, de movimento, de fluência e de interdependência.

Para Kopnin (1978, p. 183),

Por histórico subentende-se o processo de mudança do objeto, as etapas de seu surgimento e desenvolvimento. O histórico atua como objeto do pensamento, o reflexo do histórico como seu conteúdo. O

pensamento visa à reprodução do processo histórico real em toda a sua objetividade, complexidade e contrariedade. O lógico é o meio através do qual o pensamento realiza essa tarefa, mas é o reflexo do histórico em forma teórica, vale dizer, é a reprodução da essência do objeto e da história do seu desenvolvimento no sistema de abstrações.

Assim, podemos falar no par histórico-lógico, constituindo uma unidade, em que o histórico é o objeto do pensamento e o lógico, os modos de operar com ele, na sua complexidade e contradições, na busca de sua essência. No processo de formação de conceitos estão presentes a indução e a dedução – a análise, que parte do concreto real ao abstrato, e a síntese, que parte do abstrato ao concreto pensado, num movimento de ascensão do abstrato ao concreto. “O conceito é a confluência, a síntese das mais diversas ideias, o resultado de um longo processo de conhecimento” (KOPNIN, 1978, p. 191).

“Logaritmo” é um conceito importante na matemática escolar, para modelar o pensamento matemático e eventos da natureza. Essa importância é ressaltada por Lima *et al.* (2004, p. 191), quando afirmam que:

O uso generalizado das calculadoras, cada vez mais desenvolvidas, fez com que essa utilidade inicial dos logaritmos perdesse o sentido. Entretanto, a função logarítmica continua extremamente importante na Matemática e em suas aplicações. *Essa importância é permanente; jamais desaparecerá* porque, sendo a inversa da exponencial (portanto equivalente a ela), a função logarítmica está ligada a um grande número de fenômenos e situações naturais, onde se tem uma grandeza cuja taxa de variação é proporcional à quantidade da mesma existente no instante dado. (Grifos nossos)

É um conceito que tem, também, uma importância histórica e um longo desenvolvimento. As necessidades que levaram ao seu surgimento e uso, operar com números muito grandes ou com números muito pequenos, já não se justificam mais com o uso das calculadoras, como o afirmam Lima *et al.* (2004), mas os fenômenos que podem ser modelados pela função exponencial e pela função logarítmica continuam a existir.

Situar historicamente os logaritmos não é uma tarefa simples, pois se trata de uma longa história, com contribuições de muitos matemáticos, envolvendo conhecimentos que extrapolam o nível do Ensino Médio e os objetivos da pesquisa realizada. Esse é o caso do número e , que, segundo Precioso e Pedroso (2013, p. 31), ao tratar da sua história, afirmam que as suas origens são um pouco incertas, mas sua presença é inevitável em vários ramos da ciência. Abordaremos, portanto, alguns desses aspectos históricos que embasaram a pesquisa.

Perto do início do século XVII, John Napier revelou sua criação dos logaritmos, associando-os à necessidade de executar cálculos numéricos de forma

mais rápida e precisa, tendo em conta demandas sociais daquele tempo, em especial, da Astronomia e da Navegação.

Muitos campos nos quais os cálculos numéricos são importantes, como a astronomia, a navegação, o comércio, a engenharia e a guerra fizeram com que as demandas para que esses cálculos se tornassem cada vez mais rápidos e precisos crescessem sempre e continuamente. Quatro notáveis invenções vieram atender sucessivamente essas demandas crescentes: a notação indo-arábica, as frações decimais, os logaritmos e os modernos computadores (HOWARD, 2004, p. 341).

O poder dos logaritmos como instrumento de cálculo numérico repousa no fato de que eles reduzem multiplicações e divisões a simples operações de adição e subtração.

É sabido que Napier estava a par do método da prostaférese (uso de fórmulas da trigonometria para calcular um produto, a partir de somas), e é possível que tenha sofrido influência dele, pois, segundo os livros de história da matemática, teria sido muito difícil explicar o motivo de Napier ter restringido seus logaritmos inicialmente aos senos de ângulos.

Mas a abordagem de Napier para eliminar o fantasma das longas multiplicações e divisões difere consideravelmente da prostaférese, e se baseia no fato de que, associando-se aos termos de uma progressão geométrica $b, b^2, b^3, b^4, \dots, b^m$...os da progressão aritmética $1, 2, 3, 4, \dots, m, \dots, n, \dots$ então o produto $b^m \cdot b^n = b^{m+n}$ de dois termos da primeira progressão está associado à soma $m + n$ dos termos dos termos correspondentes da segunda progressão (HOWARD, 2004, p. 344).

Por meio das sequências, geométrica e aritmética, e da propriedade indicada na citação, podemos transformar multiplicações em soma. Por exemplo: seja $b = 10$, então;

Progressão geométrica - PG: $10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6 \dots$

$10, 100, 1000, 10\ 000, 100\ 000, 1\ 000\ 000$

Progressão aritmética - PA: $1, 2, 3, 4, 5, 6 \dots$ (expoentes)

Se desejarmos calcular $100 \times 10\ 000$, como $100 = 10^2$ e $10\ 000 = 10^4$, podemos escrever $100 \times 10\ 000 = 10^2 \times 10^4 = 10^{2+4} = 10^6 = 1\ 000\ 000$.

E se desejássemos calcular 25×30 ? Esses números não estão nas sequências. Os matemáticos da época utilizavam um processo chamado de interpolação, que não será tratado aqui, pois foge ao escopo deste texto. Neste processo, Napier chegou a um número irracional, que é o inverso do número e , base dos logaritmos, chamados naturais.

Nas progressões geométricas crescentes, os termos crescem rapidamente. Para manter os termos da progressão geométrica suficientemente próximos, de modo que se pudesse usar um número menor de interpolações para preencher as lacunas entre os termos nas correspondências precedentes, dever-se-ia escolher o número b bem próximo de 1. Com essa finalidade, Napier tomou $1 - 1/10^7 = 0,9999999$ para o valor de b . Para evitar decimais, ele multiplicava cada potência por 10^7 . Então, se $N = 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L$, ele chamava L de “logaritmo” do número N . Portanto o logaritmo já aparece como um expoente. Assim, o logaritmo de Napier de 10^7 é 0, e o de $10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L$ é 1.

Vejamos, conforme explica Soares (2011, p. 42), o que ocorre:

$$\text{Se } N = 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L, \text{ então, } N = 10^7 \left[\left(1 - \frac{1}{10^7}\right) 10^7\right]^{\frac{L}{10^7}}.$$

Observando a expressão que está dentro do colchete, é possível perceber que quanto mais a potência inteira de dez cresce, mais essa expressão se aproxima de um número, cujo valor é, aproximadamente, 0,3679. Por exemplo: $\left(1 - \frac{1}{10^1}\right)^{10} = 0,3486$; $\left(1 - \frac{1}{10^2}\right)^{100} = 0,3660$; $\left(1 - \frac{1}{10^3}\right)^{1000} = 0,3677$; $\left(1 - \frac{1}{10^4}\right)^{10000} = 0,3678$.

Esse número, para o qual essa sequência tende, é o inverso do número e chamado “número de Euler”, também conhecido como número neperiano. Com a linguagem da álgebra, no século XIII, essa constatação, pôde ser, assim, sintetizada:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

Embora Napier, tivesse “construído” o inverso do número e , ele foi explorado e formalizado por outros cientistas e matemáticos ao final do século XVII e no decorrer do século XVIII, com o desenvolvimento do Cálculo, introduzidas por Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried W. Leibniz (1646 – 1716).

Leonhard Euler (1707-1783), matemático com extensa e variada produção científica, foi quem “pela primeira vez, chamou a atenção para o papel central do número e da função e^x ao dizer: ‘Para o número cujo logaritmo é a unidade, anotemos e que é 2, 718281...’”. (PRECIOSO; PEDROSO, 2013, p. 42). Desta forma, o número e é a base dos logaritmos naturais, o que não foi estabelecido por Napier, uma vez que ele não trabalhou com a ideia de base e e o número escolhido por ele é o inverso de e . O número e foi tratado como um número irracional, tendo

vido, posteriormente, considerado um número transcendente (não é raiz de nenhuma equação polinomial a coeficientes inteiros). Assim:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

No ano seguinte à publicação de Napier, Henry Briggs (1561-1631), professor de geometria de Gresham College de Londres e, posteriormente, professor de Oxford, viajou até Edimburgo para dar o tributo de seu reconhecimento ao grande inventor dos logaritmos. Foi durante essa visita que Napier e Briggs concordaram que as tábuas seriam mais úteis se fossem alteradas de modo que o logaritmo de 1 fosse 0 e o logaritmo de 10 fosse uma potência conveniente de 10, nascendo assim os logaritmos briggsianos ou comuns. Esses logaritmos, que são essencialmente os logaritmos de base 10, devem sua superioridade em cálculos numéricos, ao fato de que nosso sistema de numeração é decimal.

Briggs dedicou-se a construir a tábua dos logaritmos na base 10 e publicou em 1624 sua *Arithmetica logarithmica*, que contemplava uma tábua dos logaritmos comuns, com quatorze casas decimais, dos números de 1 a 20.000 e de 90.000 a 100.000. O espaço entre 20.000 e 90.000 foi preenchido posteriormente com a ajuda de amigos e colaboradores. Junto com Vlacq, Briggs publicou quatro tábuas dos logaritmos fundamentais, superadas recentemente, pois, entre 1924 e 1949, foram publicadas tábuas dos logaritmos com vinte casas decimais como parte da comemoração dos trezentos anos de descoberta dos logaritmos.

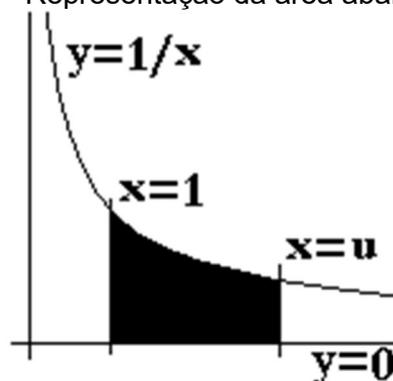
Tem-se que a palavra logaritmo significa “número de razão” e foi adotada por Napier depois de ter usado inicialmente a expressão número artificial. A invenção de Napier foi recebida com entusiasmo por toda a Europa. Na astronomia, Laplace afirmou que a descoberta dos logaritmos “ao diminuir o trabalho, dobrou a vida dos astrônomos”.

Desse modo, o logaritmo é universalmente considerado como um expoente, essa é a essência que pretendemos que os alunos do Ensino Médio apreendam, isto é, se $n = b^x$, dizemos que x é o logaritmo de n na base b com algumas restrições, que serão tratadas mais adiante dessa definição, as leis dos logaritmos decorrem imediatamente das leis dos expoentes.

O logaritmo como função está ligado ao estudo da quadratura (cálculo de áreas) da hipérbole, que tem em Pierre Fermat (1601-1665) um dos matemáticos que se dedicou a esses estudos. Porém foi um jesuíta belga, Saint-Vincent quem, em 1665, conseguiu resolver o problema, usando a integral de Riemann.

(PRECIOSO; PEDROSA, 2013). O logaritmo natural de um número u , muitas vezes, denotado por $\ln(u)$, pode ser definido do ponto de vista geométrico, como área da região plana localizada sob o gráfico da curva $y = 1/x$, acima do eixo $y = 0$, entre as retas $x=1$ e $x=u$, que pode ser vista no desenho figura:

Figura 1 - Representação da área abaixo da curva.



$\ln(u) = \text{área}(1, u)$
 Fonte: Sodré (UEL/sd)

Desse modo, de acordo com Soares (2011), podemos falar em três concepções básicas: a concepção geométrica, elaborada por Napier, porque partiu das razões entre medidas de segmentos de retas; a aritmética, também desenvolvida por Napier e Bürgi; a algébrico-funcional, estabelecendo a relação entre função exponencial e logarítmica.

Os logaritmos são ensinados na educação básica e no início dos cursos superiores há muito tempo, variando a profundidade com que se adentra o assunto. O uso da tábua dos logaritmos era comum nesses cursos, mas, hoje, com o advento das calculadoras, não há mais a necessidade da utilização deste instrumento para executar cálculos. Também um instrumento antecessor da máquina de calcular, denominado “régua de cálculo”, cuja base de construção, era o conceito dos logaritmos, desapareceu de nosso cotidiano, com o advento das tecnologias digitais nas décadas finais do século XX, tornando-se uma peça de museu, embora tenha sido bastante utilizada, principalmente, pelos engenheiros, no século passado.

Hoje, no ensino de matemática, dá-se ênfase ao conceito de “função”, considerado um conceito fundamental da matemática. Assim, o estudo dos logaritmos aparece associado ao de “função logarítmica”, que é parte vital na análise e modelagem matemática de muitos eventos naturais. O estudo da função logarítmica e da sua “inversa”, a função exponencial, permanecem como parte importante do ensino da matemática. De modo especial, o seu conceito e,

consequentemente, as suas aplicações, embora como instrumento de cálculo aritmético, já não tenha mais utilidade.

Já sabemos que a função logarítmica é inversa da função exponencial definida como $f(x) = a^x$, onde ($a \in \mathbb{R}, a > 0$ e $a \neq 1$), no conjunto dos números reais. Lima *et al.* (2001, p. 53), assim caracterizam a função exponencial:

Se a é um número positivo, diferente de 1, então a função exponencial $f(x) = a^x$ é a única função monótona (Uma função é dita monótona se ela preservar a relação de ordem no seu domínio, ou seja, se ela é crescente, permanece crescente no domínio, se não, permanece decrescente) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x+h) = f(x) \cdot f(h)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ e $f(1) = a$. E as funções do tipo exponencial $f(x) = b \cdot a^x$ são as únicas funções monótonas com a propriedade de que, para h fixo, o valor $f(x+h)$ é proporcional a $f(x)$ e o coeficiente de proporcionalidade $\frac{f(x+h)}{f(x)} = c$ depende apenas de h mas não de x .

Desse modo, a função exponencial é uma ferramenta importante para numerosas aplicações técnicas e cotidianas, como também no campo da matemática. Com ela, podemos calcular, por exemplo, valores financeiros ligados a juros, datar elementos arqueológicos e minerais através do carbono-14, calcular o crescimento de bactérias da população de um lugar, meia-vida, dentre outras aplicações práticas.

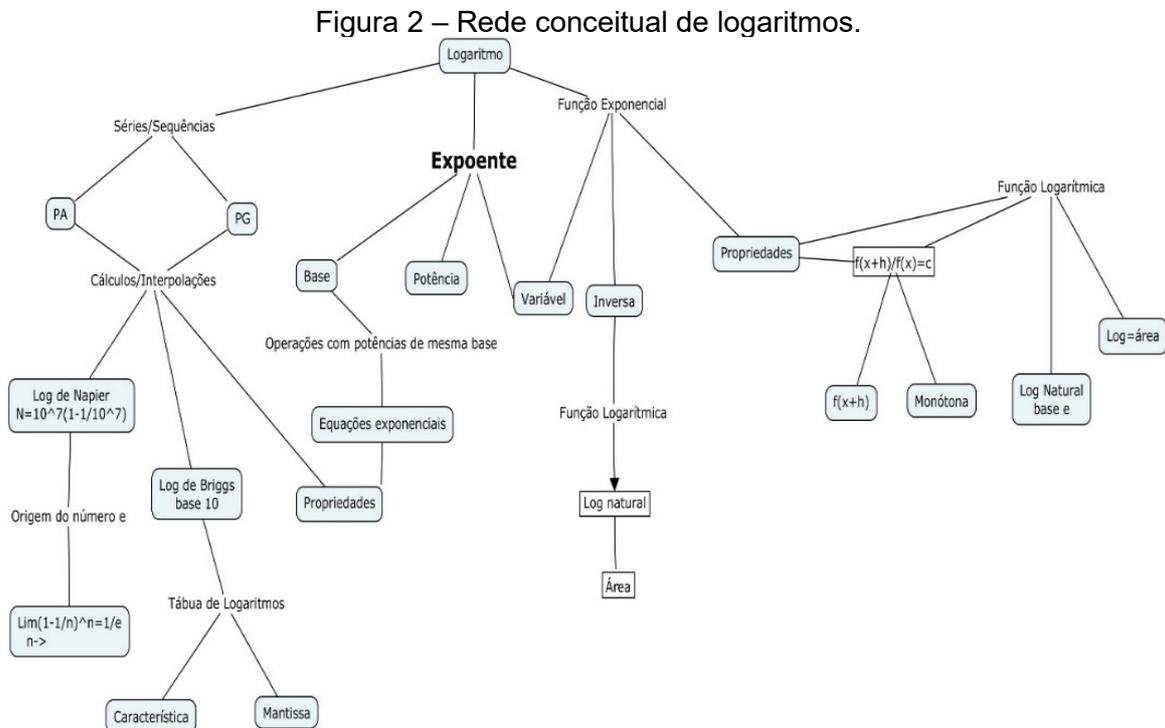
Atualmente (2020), em tempos de pandemia da COVID 19, causada pelo coronavírus, denominado SARS-CoV-2, o crescimento do número de infectados, em alguns momentos, apresentou crescimento exponencial e muito se falou sobre essa função. O jornal Folha de São Paulo trouxe uma matéria sobre esse assunto no dia 17 de março de 2020, na qual se lê: “Na Itália, que já superou a marca dos 24 mil infectados, o gráfico de como a epidemia se desenrolou tem a seguinte função ajustada: $y = 3,28 \cdot 0,2^x$, em que x é o número de dias e y é o número de infectados” (ALVES, 2020, p. 84).

Na definição da função logarítmica, sua inversa, devemos levar em consideração algumas condições que são decorrentes das características da função exponencial. Assim, a função logarítmica é uma função definida para números reais maiores do que zero, portanto, o seu domínio é \mathbb{R}^+ e o seu contradomínio é \mathbb{R} , isto é, o logaritmo pode ser qualquer número real.

$$f(x) = \log_a x \text{ para } (a \in \mathbb{R}, a > 0 \text{ e } a \neq 1) . \text{ Se } \log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

Esse estudo do histórico-lógico dos logaritmos nos permitiu perceber que se trata de uma rede de conceitos que se conectam para dar sentido ao conceito dos logaritmos. Entendemos como rede conceitual dos logaritmos, aqueles conceitos

elementares que auxiliam na compreensão, apresentação e operação com os logaritmos. Para sintetizar o nosso entendimento, apresentamos o esquema a seguir (Figura 2).



Fonte: Elaborada pelos autores

Assim a essência do conceito de logaritmo, a ser explorado no ensino médio, está associada ao conceito de expoente, isto é, encontrar o logaritmo de um número numa dada base é determinar o expoente que se deve dar à base para obter o número dado. Pensando na função exponencial e também na logarítmica, elementos importantes constituem essa essência, como a interdependência entre duas variáveis de modo que a razão entre $f(x+h)/f(x)$ para h , fixo, é constante, isto é, existe uma proporcionalidade entre as grandezas representadas por essas variáveis.

Análise do diagnóstico

O objetivo da aplicação do diagnóstico inicial foi o de identificar a Zona de Desenvolvimento Proximal – ZDP dos alunos, ou seja, averiguar quais conhecimentos acerca do conceito de logaritmos eles traziam consigo depois de ter estudado o assunto na primeira série, o desenvolvimento atual, para depois organizar o ensino, na zona de desenvolvimento proximal, visando avançar, em direção à zona de desenvolvimento potencial.

Ao tratar a ZDP, L. V. Zankov lembra que o ensino deve atuar não em funções já maduras (zona de desenvolvimento atual), mas sobre aquelas ainda em

processo de maturação (zona de desenvolvimento potencial), criando-se, assim, uma zona de desenvolvimento resultado da distância entre a atual e a potencial (zona de desenvolvimento proximal). Na ZDP, ocorrem processos internos e externos, ambos relevantes para o desenvolvimento

Além disso, queríamos verificar em suas falas, vestígios de como foi sua apreensão do caráter geral do conceito dos logaritmos, a experiência com o conteúdo e o professor, as emoções experimentadas neste processo, bem como suas impressões sobre a organização do ensino utilizada na ocasião, e, ainda, a importância do assunto para suas vidas.

Cada aluno recebeu uma folha (Figura 3) com algumas questões, que foram respondidas individualmente e cujas respostas foram socializadas no grupo.

Figura 3 – Atividade de diagnóstico proposta aos alunos participantes

Diagnóstico inicial
 No ano anterior, na primeira série do Ensino Médio, você estudou os logaritmos. Nesse estudo, você deve ter utilizado modelos matemáticos de várias áreas para exercitar e compreender esse conteúdo.
 Relate aqui o que você se lembra desse estudo, tal como: o que é o logaritmo? Como foi estudá-lo? Qual(is) sua(s) aplicação(s)? Sua importância? Como foram as aulas? Dê exemplos.

Fonte: Arquivo dos autores

Apresentaremos a seguir, trechos dos principais registros realizados pelos participantes, referentes às questões levantadas no diagnóstico.

Figura 4 - Aluno1

Logaritmo é composto por 3 fatores, são eles: logaritmo, logaritmando e o outro eu não lembro.
 O que eu me lembro é que existe um número, e que junto a ele constitui-se a base e um número que é elevado. Depois após identificar sobre 3 fatores que eu chamo, falado no começo é necessário fazer algumas mudanças para resolver a equação, podemos ao longo do exercício fazer o MAE para achar o valor dos expoentes até igualar as bases. Mediante a isso existem várias outras de substituir e resolver a equação. Eu me lembro também que antes disso estudamos a função para compreendermos melhor uma matéria

Fonte: Arquivo dos autores

Nas respostas do Aluno1, o que também foi constatado nas dos demais de modo geral, percebemos um conceito de logaritmos, ainda empírico. É possível verificar que se recordam de boa parte da estrutura, porém são elementos externos, aparentes. Isso fica claro, quando o Aluno1 escreve: *“Lembrei! Tem o logaritmo, o logaritmando, e aí, tem um que é elevado, e o outro é a base”*. Novamente, quando se refere à resolução de equações: *“é necessário fazer algumas mudanças para resolver a equação, [...] fazer o MMC para achar o valor dos expoentes até igualar as bases”*, os nexos externos prevalecem.

O pensamento empírico prevalece na formação do conceito, indicando que não houve a apreensão das suas relações essenciais, o que permitiria a abstração teórica do conceito de logaritmos. L. V. Zankov (1984) não despreza o conhecimento empírico e considera que o objetivo de seu sistema de ensino visa ao “desenvolvimento geral ótimo” dos estudantes para o qual também concorre o conhecimento empírico. Afirma ele: “O conhecimento empírico é o ponto de partida do complexo caminho que conduz à abstração”. (ZANKOV, 1984, p. 36). O ensino para ele não deve se limitar nem ao conhecimento empírico nem ao teórico, o importante é que se avance rumo à elevação do abstrato ao concreto.

A referência do Aluno1 a MMC (mínimo múltiplo comum), no lugar de fatoração, é um indício do tipo de aprendizagem que valoriza os procedimentos e, não, os conceitos, pois o aluno se atem a um procedimento, que não é MMC, mas “fatoração”, para tentar igualar as bases das potências. Consegue associar o uso das equações exponenciais para a obtenção dos logaritmos, apesar de não conseguir explicitar de que maneira esta operação está associada ao conceito dos logaritmos.

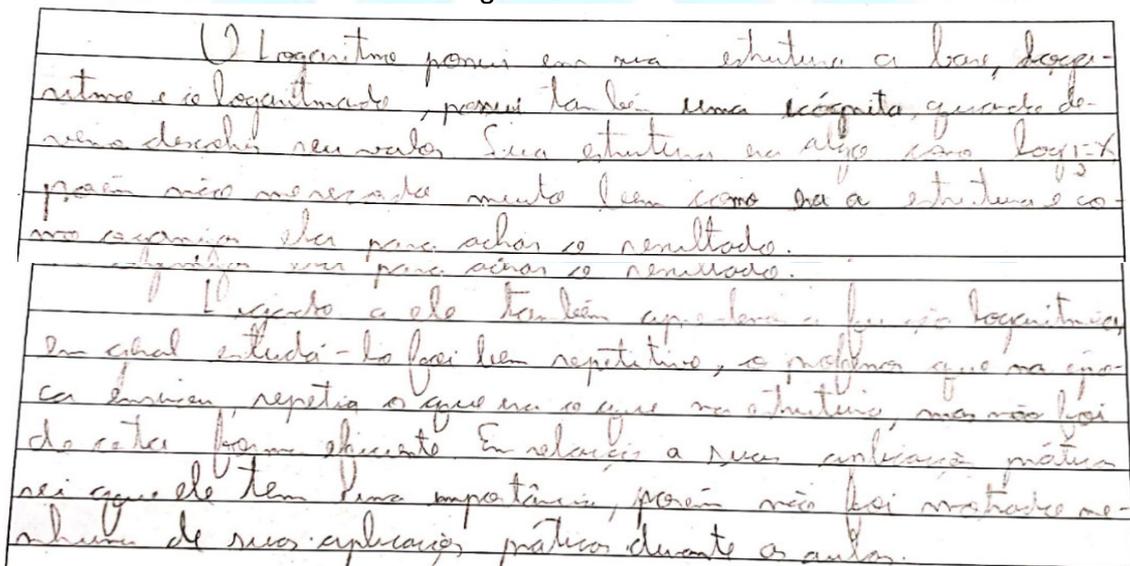
No geral, nas respostas dos alunos foram usadas com frequência, palavras como: “base”, “logaritmando”, “função”, “aplicação” e “fórmula”, porém, estas palavras não traduzem, isoladamente, a compreensão do conceito dos logaritmos, pois são fragmentos empíricos, oriundos da repetição de algoritmos sem a atribuição de sentido. Essas palavras, quando usadas adequadamente, compõem uma rede de conceitos importantes para que seja alcançada a essência do conceito dos logaritmos. Junto a elas, há outras palavras que também compõem essa rede, tais como: “potência”, “expoente” e “inverso”.

Assim, encontramos indícios de que os participantes podem não ter chegado à essência do conceito dos logaritmos e desconhecem as possibilidades de suas aplicações no mundo real. Em todos os registros, é possível perceber, como os

participantes tangenciam as características dos logaritmos, suas propriedades e condições de existência. Tal percepção nos possibilita afirmar que, no contato que tiveram com o assunto “logaritmos” na série anterior, estes alunos apropriaram parcialmente do conceito, mas não chegaram a sua essência, que é percebê-lo como expoente, pois entendemos que a habilidade de resolver situações problemas vai além da reprodução de algoritmos aplicado a uma expressão matemática. Para que o aluno reconheça que uma dada situação se resolve por logaritmo, é necessário que ele perceba que nela está presente a determinação de um expoente.

Apesar de existirem alguns elementos do conceito na produção do Aluno1, os Alunos5 e Aluno6 sinalizaram de alguma forma, a ideia central do conceito dos logaritmos, que é a noção da potência que se procura, ao citarem a importância do expoente desconhecido.

Figura 5 - Aluno5³



Fonte: Arquivo dos autores

O Aluno5 recusou-se a manifestar verbalmente junto a seus colegas, porém em seu registro escrito, apresenta clareza na ideia da importância de se encontrar um valor para a potência desconhecida. Com relação ao processo didático, percebemos que a repetição ocorreu, porém não contribuiu para a apreensão do conceito. A este processo de repetições, o aluno se refere como “não eficiente”.

³ O logaritmo possui em sua estrutura a base, logaritmo e o logaritmando, possui também uma incógnita, quando devemos descobrir seu valor. Sua estrutura tem algo como $\log = x$, porém não me recordo muito bem como era a estrutura e como organizar ela para achar o resultado. Ligado a ele também aprendemos a função logarítmica, em geral estudá-la foi bem repetitivo, o professor que na época ensinava, repetia o que era o que na estrutura, mas não foi de certa forma eficiente. Em relação a sua aplicação prática sei que ele tem uma importância, porém não foi mostrada nenhuma de suas aplicações práticas durante as aulas.

Essa observação do aluno corrobora o que afirma Vigotski, quando propõe que a organização do ensino deve atuar sobre o que o aluno ainda não atingiu. Também, Zankov, ao formular o princípio "Avanço em grande ritmo", postula que os alunos se sentem mais estimulados pela variedade do que pela repetição. Chega a afirmar que a repetição provoca preguiça mental e impede o desenvolvimento.

Figura 6 - Aluno6⁴

O logaritmo envolve potências em conjunto com incógnitas. É constituído do logaritmando e do logaritmo. Estudá-lo é utilizar os conceitos matemáticos já estudados como ... fração, ... o expoente, fatorar potência, etc. Era necessário sempre identificar a base e expoente, para assim organizar a equação com incógnita. As aplicações, suponho, eu que podem

Fonte: Arquivo dos autores

O Aluno6 se aproxima do conceito quando demonstra clareza no entendimento da existência de uma relação estreita dos expoentes para a solução das equações exponenciais ao afirmar que “era necessário sempre identificar o expoente, para assim organizar a equação com incógnita.” Percebemos na fala do aluno, a tentativa de manifestar uma rede de conhecimentos que alicerçariam as relações essenciais do conceito dos logaritmos, mas que não chegaram a uma síntese, ascensão do abstrato ao concreto.

Com relação à função logarítmica, a transcrição de parte do diálogo do aluno Aluno3 afirmando que “- Eu lembro de que tinha alguma coisa que era o inverso do logaritmo. Mas não lembro o que é. Acho que era uma função... É um b elevado ao quadrado.” Ou ainda, na fala do Aluno4 “- *Acho que começou mesmo foi por função quadrática, depois foi pra sua inversa que é a logarítmica... O gráfico eu sei que é ao contrário da quadrática.*”

Estas falas mostram-se encobertas por dúvidas, associadas à essência do conceito dos logaritmos e da função logarítmica. Quando associam a ideia de “inverso” e destacam para isso, “aquele que se eleva”, identificamos vestígios do uso das potências, porém, ela vem associada à função quadrática, cujo potência é fixa, desqualificando tal associação. Percebemos uma confusão gerada pela presença de

⁴O logaritmo envolve potências em conjunto com incógnitas. É constituído do logaritmando e do logaritmo. Estudá-lo é utilizar os conceitos matemáticos já estudados como ... fração, ... o expoente, fatorar potência, etc. Era necessário sempre identificar a base, expoente, para assim organizar a equação com incógnita. As aplicações, suponho...

potências nas duas funções. – a potência 2 na função quadrática e “x” na função exponencial.

Há vestígios de que os alunos percebem de alguma forma que a função é um ente matemático importante no estudo de logaritmos, porém nenhum deles conseguiu definir qual, dentre as funções estudadas, é a adequada à associação como inversa da função logarítmica, citando a quadrática, a exponencial e a afim. Dentre os relatos dos participantes, a ideia de opostos, de inverso ou de algo que é o contrário dos logaritmos aparece, porém não conseguem distinguir ou apresentar de maneira correta tal ideia. Dois deles classificam as propriedades operatórias dos logaritmos como fórmulas para achar o resultado, porém, não sabem descrever onde ou como aplicá-las.

Quanto ao ritmo das aulas os alunos Aluno6 e Aluno4 registram.

Figura 7 - Aluno4

As aulas eram voltadas para resolução de exercícios, principalmente de vestibulares. Não lembro de ter visto quais sejam suas aplicações na vida real e qual sua importância, mas sei que tem grande importância nos vestibulares.

Fonte: Arquivo dos autores

Figura 8 - Aluno6⁵

com incógnita. As aplicações, suponho eu, que podem ser usadas na química, visto que lembro de uma questão de prova, além de escalas (como a Richter). Sua importância é de aprofundar sobre as equações envolvendo incógnitas. As aulas eram sempre repetindo a “fórmula” do logaritmo e a terminando, com um ou outro exercício mais complexo.

Fonte: Arquivo dos autores

Nos registros acima, são encontradas evidências de que os conteúdos escolares no ensino médio são tratados como recursos para os processos de seleção dos vestibulares, desprivilegiando sua cientificidade ou aplicabilidade na vida real, ou para o desenvolvimento de capacidades psíquicas superiores, como se lê no registro do Aluno4, ao declarar que “sei que tem grande importância nos vestibulares”. Essa afirmação revela uma representação social do papel da escola e

⁵ As aplicações, suponho que podem ser usadas na química, visto que lembro de uma questão de prova, além de escalas (como a Richter). Sua importância é de aprofundar sobre as equações envolvendo incógnitas. As aulas eram sempre repetindo a “fórmula” do logaritmo e a terminando, com um ou outro exercício mais complexo.

dos conteúdos escolares que prevalece no Ensino Médio, mas que não revela o que se poderia esperar deles, para além desse caráter utilitário e reducionista.

Conclusão

Em síntese, a partir desse diagnóstico, podemos inferir que os alunos participantes se aproximam da compreensão de elementos presentes no conceito dos logaritmos, porém com a presença de marcas evidentes de um conhecimento empírico, baseado em elementos externos. Pela análise de seus registros e falas, constatamos que os alunos se apropriaram de partes do conceito, não tendo atingido, ainda, uma visão de totalidade, de síntese. Várias são as hipóteses para o desempenho apresentado pelos alunos na atividade diagnóstica, como a questão da memória, que necessita de elementos mediadores para ser ativada, a forma de questão apresentada, porém não podemos descartar que tais resultados apontam para uma aprendizagem que não promoveu a apreensão do conceito de logaritmo como expoente, e da função logarítmica como possibilidade de modelar fenômenos em que há proporcionalidade entre os valores de $f(x+h)$ e $f(x)$ e esse depende apenas de h , mas não de x , para um h fixo. Acrescenta-se, ainda, que o valor atribuído pelos alunos participantes aos conteúdos desenvolvidos está na preparação para as provas dos vestibulares, o que denota um esvaziamento de sentidos do papel da escola e dos próprios conteúdos escolares, fortalecendo o ensino que decora e reproduz.

Assim, a partir do diagnóstico da zona de desenvolvimento atual em relação a esse conceito, pode-se afirmar que outras aproximações se fazem necessárias, na zona de desenvolvimento proximal, com outras formas de organização do ensino, que evitem as repetições e o desinteresse, para fazer o aluno avançar em seu desenvolvimento integral.

Neste sentido, entendemos que os princípios do sistema didático de Zankov podem ser uma alternativa científica, pois se atrelam a uma teoria de ensino-aprendizagem consistente e traz elementos importantes para a organização do ensino, tais como: a interdisciplinaridade, a apresentação gradativa aumentada dos temas, a promoção da curiosidade e a inclusão de todos os envolvidos no processo. Essa forma de organização do ensino poderá ser testada e avaliada, como o foi por Zankov.

Referências

ALVES, Gabriel. Afinal, o que é crescimento exponencial de casos? **Folha de São Paulo**. São Paulo, 17 mar. 2020. Seção B4.

DAVIDOV, Vasily Vasilyevich. **La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico**: investigación psicológica teórica y experimental. Moscú: Editorial Progreso, 1988. 278p.

HOWARD, Eves. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas (SP): Editora da Unicamp, 2004. 843p.

KOPNIN, Pável Vassílyevitch. **A dialética como lógica e teoria do conhecimento**. Rio de Janeiro, RJ: Civilização Brasileira, 1978. Coleção Perspectivas do homem. v. 123. 353 p.

LIMA, Elon Lages *et al.* **A Matemática do Ensino Médio**: v. 1. Rio de Janeiro: SBM, 2004. 233p.

LIMA, Elon Lages *et al.* **Exame de textos**: análise de livros de Matemática para o Ensino Médio. Rio de Janeiro: SBM, 2001. 467p.

PRECIOSO, Juliana Conceição; PEDROSO, Hermes Antônio. História do número e: gênese e aplicações. **Revista Eletrônica Matemática e Estatística em Foco**. 2013, p. 31-44.

RESENDE, Marilene Resende. O pensamento teórico segundo Davídov: abstração e generalização substantivas e a educação matemática. *In*: PUENTES, Roberto Valdés; LONGAREZI, Andréa Maturano (orgs). **Ensino Desenvolvimental**: sistema Elkonin-Davídov-Repkin. Campinas, SP: Mercado de Letras; Uberlândia, MG: Edufu, 2019. 483p.

SOARES, Evanildo Costa. **Uma investigação histórica sobre os logaritmos com sugestões didáticas para a sala de aula**. 2011. 141f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal, 2011.

SODRÉ, Ulysses. **Matemática essencial: ensino médio - logaritmo**. Disponível em: <http://www.uel.br/projetos/matessencial/basico/medio/logaritmos.html>. Acesso em: 09 de maio. 2019.

SOUSA, Maria do Carmo. O movimento lógico-histórico enquanto perspectiva didática para o ensino de matemática. **Obutchénie**: Revista de Didática e Psicologia Pedagógica, n.1, v. 4, p. 40-68.

VIGOTSKI, Lev. Semionovitch. **Pensamento e Linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 1993.

VIGOTSKI, Lev. Semionovitch. Aprendizagem e desenvolvimento na Idade Escolar. *In*: VIGOSTKY, Lev. Semionovitch; LURIA, Aleksander Romanovitch e LEONTIEV, Alexei Nikolaevitch. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. 11. ed. São Paulo: Ícone, 2010, p. 103-116.

ZANKOV, Leonid Vladimirovitch. **La enseñanza e el desarrollo**: investigación pedagógica experimental. URSS: Progreso, 1984. 236p.

Submetido em dezembro de 2020.

Aceito em março de 2021.

