REVISTA DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL (UFMS)

Volume 9, número 19 – 2016 - ISSN 2359-2842

O Número Racional nas Questões do Exame Nacional do Ensino Médio: um convite à exploração dos subconstrutos na escola

The Rational Number in the Questions of Exame Nacional do Ensino Médio: an invitation to explore the sub-constructs in school

João Paulo Godoy[1]

Maria de Fátima Teixeira Barreto[2]

Resumo

Este trabalho investiga os vários subconstrutos do número racional presentes em questões do Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM. O estudo parte do levantamento das questões do ENEM do ano de 2013, identificando quais objetos de conhecimento (definidos na matriz de referência do exame) estão presentes em cada uma das questões, solicitando uma compreensão do número racional, em seus diversos subconstrutos, para a sua resolução; e segue apresentando discussões em aula de cursinho preparatório para o ENEM, realizado por ONG, com estudantes de escola pública, nas quais os subconstrutos do número racional se mostraram a partir das soluções ou tentativas de soluções dos alunos e/ou professor. Nossa pesquisa evidencia que alguns subconstrutos do número racional se mostram recorrentes nas diversas questões e indica a exploração dos diversos subconstrutos desde o Ensino Fundamental como caminho facilitador para a interpretação e resolução de situações-problema que exigem o domínio do número racional.

Palavras-chave: Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Número Racional. Subconstrutos do Número Racional. Ensino Médio. Educação Matemática.

Abstract

This work investigates the subconstructs of the rational number that are in the questions of Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM. The study begins identifying which objects of knowledge (defined in the reference matrix of the exam) are in each questions, requiring a comprehension of the rational number, in its different subconstructs, to the solution; and goes on presenting discussions in public high school classes, in which the subconstructs of the rational number presented themselves from the solutions of the teacher and/or students. Our research shows that some of the rational number subconstruct appear more often than others in the questions, and indicates that the exploration of the different subconstructs since the beginning of elementary school could be an easier way to understand and solve mathematics questions that need knowledge of rational numbers.

---

[1] Graduado em Direito pela Universidade Federal de Goiás. Graduando em Pedagogia pela Universidade Federal de Goiás. Goiânia-GO, Brasil. Advogado e estagiário em educação. Endereço eletrônico: jpmgodoy@gmail.com

[2] Doutorado em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP), atualmente professor adjunto da Universidade Federal de Goiás (UFG). Goiânia-GO, Brasil. Endereço eletrônico para contato: fatofeno@gmail.com

Keywords: Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Rational Number. Subconstructs of the Rational Number. High School. Mathematics Education.

Introdução

O ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio – foi criado em 1998 e tem como objetivo "avaliar o desempenho do estudante ao fim da educação básica, buscando contribuir para a melhoria da qualidade desse nível de escolaridade" (BRASIL, [2009]). A partir do ano de 2009, o exame foi totalmente reestruturado, considerando eixos cognitivos, competências e habilidades previstas nos "Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio", publicado no ano 2000, e nas "Orientações Curriculares para o Ensino Médio", publicado em 2006, ambos documentos oficiais do Ministério da Educação. Chamado de "novo ENEM", a prova passou a ser utilizada para selecionar alunos para o ingresso em IES (instituições de ensino superior). Em 2015, o exame teve a adesão como critério de seleção de 128 instituições de ensino superior públicas, incluindo 59 das 63 universidades federais e todos os 38 institutos federais de educação, no chamado SISU – Sistema de Seleção Unificado (CANDIDATOS..., 2015). A prova também é utilizada atualmente como critério para concessão de bolsas em instituições particulares pelo PROUNI – Programa Universidade para Todos – que, em 2015, ofertou 213.113 bolsas em 1.117 instituições (INSCRIÇÕES..., 2015). Por sua vez, o FIES – Fundo de Financiamento Estudantil –, programa de financiamento, também do governo federal, que garante financiamento a cursos superiores de instituições particulares (BRASIL, [2010]), que, só no primeiro semestre de 2015, formalizou 252.442 novos contratos (MINISTRO..., 2015), também utiliza a prova do ENEM como critério para concessão do financiamento.

Assim, o ENEM se destaca atualmente como principal ferramenta para o ingresso no ensino superior no contexto brasileiro, utilizado por jovens e adultos de todas as camadas sociais. Isto indica a necessidade de os cientistas da educação compreenderem-no, analisarem suas consequências sobre a realidade educacional brasileira e ainda se posicionarem criticamente sobre este caminho de entrada para a universidade.

O exame se propõe a avaliar o aproveitamento escolar de estudantes que concluíram o Ensino Médio, nas seguintes áreas: Linguagens, Códigos e suas Tecnologias; Matemática e suas Tecnologias; Ciências da Natureza e suas Tecnologias e as Ciências Humanas e suas Tecnologias; além de uma redação do tipo dissertativo-argumentativo. A prova de

Matemática, objeto de estudo desta investigação, é constituída de 45 questões de múltipla escolha que, de acordo com o documento "Matriz de referência do exame", exigem do candidato o domínio de cinco eixos cognitivos (dominar linguagens, compreender fenômenos, enfrentar situações-problema, construir argumentação e elaborar propostas), trinta habilidades distribuídas em sete áreas de competências e cinco objetos de conhecimento *macro* que se desdobram em mais de cinquenta conteúdos. No documento, definem-se como objetos de conhecimento em matemática (BRASIL, 2009, p. 18):

> Conhecimentos numéricos: operações em conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais e reais), desigualdades, divisibilidade, fatoração, razões e proporções, porcentagem e juros, relações de dependência entre grandezas, sequências e progressões, princípios de contagem.
> Conhecimentos geométricos: características das figuras geométricas planas e espaciais; grandezas, unidades de medida e escalas; comprimentos, áreas e volumes; ângulos; posições de retas; simetrias de figuras planas ou espaciais; congruência e semelhança de triângulos; teorema de Tales; relações métricas nos triângulos; circunferências; trigonometria do ângulo agudo.
> Conhecimentos de estatística e probabilidade: representação e análise de dados; medidas de tendência central (médias, moda e mediana); desvios e variância; noções de probabilidade.
> Conhecimentos algébricos: gráficos e funções; funções algébricas do 1.º e do 2.º graus, polinomiais, racionais, exponenciais e logarítmicas; equações e inequações; relações no ciclo trigonométrico e funções trigonométricas.
> Conhecimentos algébricos-geométricos: plano cartesiano; retas; circunferências; paralelismo e perpendicularidade, sistema de equações.

As compreensões em torno do conceito de número racional estão em evidência, neste estudo, devido a sua importância para o avanço no estudo do número e na formação matemática do estudante. Tradicionalmente o seu estudo, no Ensino Fundamental, ocorre em torno da compreensão da relação parte-todo. Essa limitação é criticada por muitos autores (BOLEMA, 2008), visto que obscurece a compreensão de número racional em sua complexidade. Nos últimos anos, vivemos uma preocupação de educadores matemáticos em torno do estudo dos racionais na escola. Dentre as publicações, vale destacar os estudos de Damico (2007) e dos diversos pesquisadores que pulicaram seus estudos no dossiê Bolema (2008). Dentre os artigos publicados, trazemos o trabalho de Moreira e Ferreira (2008) que realizaram uma revisão dos estudos sobre números racionais realizados entre 1975 – 1995 e identificaram que há em comum em vários deles a ideia de que:

> [...] para que desenvolva uma compreensão efetiva desse sistema numérico, a criança deve ser exposta a uma diversidade de interpretações do que seja uma razão de inteiros (essas interpretações constituem os chamados subconstrutos da noção de número racional) (MOREIRA; FERREIRA, 2008, p.105)

De acordo com Damico (2007) e Moreira e Ferreira (2008), Kieren, em 1976, inaugurou um estudo apresentando os números racionais por meio de sete subconstrutos, redefinindo-os para cinco em 1980: relação parte-todo, quociente, medida, razão e operador. Nunes e Bryant (1997) defendem que o estudo de cinco subconstrutos (parte/todo, quociente, medida, operador e número – coordenada linear) seria suficiente para uma compreensão de números racionais com abertura para rever conceitos, tornando-os mais complexos.

A relação parte-todo está na origem do conceito de fração e dos números fracionários. Ela encaminha o pensamento para o conceito de medida quando no contexto de objetos contínuos e da dupla contagem em contextos de objetos discretos. Este conceito doa-se em todos os outros subconstrutos, por isto solicita um olhar aberto que identifique um “algo mais” que encaminha o pensamento a eles. Bertoni (2009) traz várias proposições pedagógicas que tornam possíveis esta abertura, já nos primeiros momentos de escolarização.

O subconstruto quociente está relacionado ao resultado de uma divisão, seja com a ideia de distribuição, seja com a ideia de cotas. Nesse subconstruto, o numerador diz do valor distribuído, o denominador informa em quantos grupos ocorreu a divisão e o quociente dará o resultado desta distribuição; ou o numerador e denominador dizem das quantidades de dois conjuntos da mesma natureza, tendo como questão quantas vezes um conjunto cabe em outro, o quociente será o resultado para esta questão. Todo quociente de uma divisão pode ser escrito na forma de *p/q*. Mais uma vez, recorremos ao estudo de Bertoni (2009) que traz exemplos simples e ricos para que esta ideia seja explorada nos anos iniciais da escolarização. Entender que o resultado de 5 dividido por 7 é 5/7 pode despertar uma afeição pelas regularidades matemáticas, relacionando-as as notações que as representam e que também se mostram regulares. Importante entender que, embora o subconstruto parte-todo se mostre em todos os demais, o contexto pode evidenciar quando o que está em jogo na interpretação é, para além dele, o resultado de uma divisão.

O subconstruto medida está relacionado tanto ao subconstruto parte-todo, enquanto quociente e coordenada linear, quando à compreensão explorada é a ideia de “quantas vezes cabe?”, no contexto espacial (linear, bi e tri-dimensional). Diz de um significado que se constrói quando uma unidade de medida cabe mais ou menos que uma vez em uma totalidade. A busca de uma quantidade de vezes, que uma unidade de medida cabe em outra, solicita uma redivisão da totalidade até que se encontre uma unidade de medida que possibilite a divisão do todo em partes iguais. A leitura desta situação, em contexto linear, e a representação desta divisão e medição em uma reta possibilitam explorar o subconstruto coordenada linear. Trata-se do subconstruto mãe do número racional, e não o parte-todo como usualmente se pensa, uma vez que foi a necessidade humana de medir que, em primeiro lugar, levou os homens a fracionarem uma unidade, criando, por consequência, a necessidade da parte/todo, e inaugurando um novo conjunto numérico. Isso porque os inteiros, sozinhos, não atendem à ação de medir, de modo que essa nova realidade econômica, social e política – a medição – exigia o avanço da ideia do número (CARAÇA, 1951, p. 29-37).

O subconstruto razão diz de uma relação entre duas quantidades. Nessa relação, o denominador (q) diz de um valor de referência e o numerador (p) a ele relacionado possibilita estabelecer uma relação de maior, igual, menor, n vezes esta unidade de referência. O número racional p/q diz o quanto desta relação.

O operador diz de um número que realiza uma ação sobre o outro, transformando-o. Na multiplicação com naturais, o multiplicador diz quantas vezes o multiplicando deve se repetir, mas quando é menor que uma vez ou maior que uma vez (sem que se complete um novo inteiro), o multiplicador solicitará que o todo seja repensado em sua totalidade como um conjunto de partes menores. Se com os números naturais o resultado da multiplicação é sempre maior que as partes, no conjunto dos racionais, pode ser igual, maior ou menor, a depender do valor do multiplicador.

O subconstruto probabilidade do número racional representa o número de chances de ocorrer determinado evento, em relação ao número total de eventos, sendo tal representação na forma p/q, em que o numerador p representa o primeiro e o denominador q o segundo, podendo ser considerado, em verdade, um desdobramento da relação parte/todo no contexto específico das probabilidades. Conforme afirma Romanatto (1999, p. 44): "A relação parte/todo em uma probabilidade deve ser entendida como uma comparação entre chances favoráveis ou necessárias e as chances possíveis".

Os subconstrutos representam, segundo Damico (2007, p. 67), as diversas significações ou interpretações do número racional – a "semântica das frações". Damico (2007) esclarece que após Kieren, outros autores, como Behr, Harel, Post e Lesh (1992 apud DAMICO, 2007, p. 20), abordaram tal ideia, apresentando outros subconstrutos. Todos os autores compreendem que a aprendizagem de um amplo conjunto de significados de número na forma p/q é necessária para se obter um melhor entendimento da natureza deste conjunto numérico.

Nosso estudo, fundamentado nos autores supracitados e em nossas compreensões sobre os subconstrutos ou a semântica das frações, assume a necessidade de, no ensino básico, serem explorados os vários subconstrutos do número racional e realiza a análise das questões do ENEM de 2013 e de vivências com alunos do Ensino Médio, com o intuito de solucioná-las. Nosso propósito é investigar a emergência dos subconstrutos parte-todo, quociente, medida, coordenada linear, razão e operador em questões do Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM, procurando responder as seguintes indagações: com que objetos de conhecimento eles se relacionam? Quais os subconstrutos mais explorados pelas questões? E como os alunos as solucionam, ou que conceitos e procedimentos mobilizam?

Caminho da investigação

Esta investigação, de natureza qualitativa, ocorreu por meio de estudo documental e de campo. O estudo documental teve como objeto a prova de matemática do ENEM de 2013 e o estudo de campo foi realizado a partir da vivência em sala de aula de curso preparatório para o ENEM. As questões da referida prova foram resolvidas nas aulas e, desse modo, para este trabalho, pôde-se selecionar algumas delas, que envolvem conhecimentos sobre o número racional, explorando as soluções ou tentativas de soluções dos alunos e/ou professor na vivência em sala e identificando momentos em que a discussão dos subconstrutos emerge.

As questões do Enem em estudo

Para esta fase da investigação, foram estudadas e resolvidas as 45 questões da prova “Matemática e suas tecnologias” do ENEM do ano de 2013, caderno amarelo (BRASIL, [2015]). Ao realizar essa atividade, buscou-se por mais de um modo de solução, com o intuito de identificar, em primeiro lugar, quais objetos de conhecimento (da matriz de referência da prova) pareciam estar contemplados em cada uma das questões e, depois, quais delas solicitavam compreensões de números racionais para a sua solução, de modo a identificar os subconstrutos de número racional que delas emergiam.

O resultado deste estudo é entendido como uma hermenêutica em que se entrelaçam o horizonte de possibilidades de interpretação dados pelo texto, no caso a prova, e o horizonte de compreensão dos pesquisadores, constituído a partir de sua trajetória existencial, em sua historicidade e temporalidade próprias (GADAMER, 1997). Embora se apresente como resultado dessa leitura, o quadro 1, “As questões do ENEM: os objetos de conhecimento identificados pelos autores em cada uma delas e o correlacionado subconstruto que se mostrou no momento em que se as resolvia” e o quadro 2, “Relação da quantidade de vezes em que cada subconstruto emergiu das questões, e os correspondentes objetos de conhecimento”, apresentados a seguir, não se põem como finalizados, nem como únicas possibilidades. Desta forma, os objetos de conhecimento e subconstrutos do número racional que os autores identificaram em cada uma das questões não podem e nem devem ser tomados como unívocos: outras interpretações poderiam identificar outros objetos e subconstrutos.

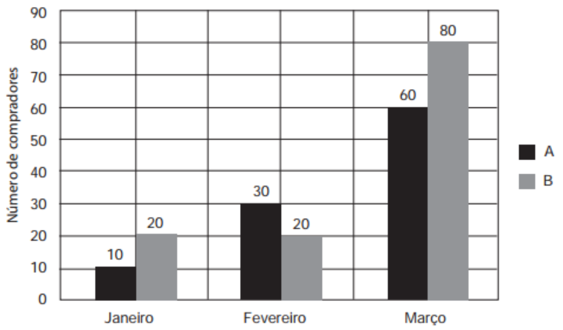
Parafraseando Vergnaud (1996) que, ao trabalhar com a ideia de campo conceitual, ressalta que um conceito pode estar em mais de uma situação e que uma situação pode contemplar mais de um conceito, podemos afirmar que um subconstruto se presentifica em mais de um objeto de conhecimento, e que de um objeto de conhecimento pode emergir mais de um subconstruto. Uma situação pode acolher mais de uma possibilidade “semântica” de número racional, resultando em uma multiplicidade de subconstrutos. O seu reconhecimento está na dependência da perspectiva daquele que o busca. Percebemos ser, em alguns casos, muito sutil esta semântica, e compartilhamos com Damico (2007, p. 21) que “o problema não reside apenas em conhecer cada um dos subconstrutos isoladamente de forma fragmentada e compartimentalizada, mas sim com uma visão de conjunto e de forma interrelacionada”.

A metodologia utilizada nesta primeira fase da investigação foi a seguinte: 1) líamos a pergunta, e circulávamos palavras, frases, desenhos, gráficos e quaisquer outros elementos que sinalizassem para determinado objeto de conhecimento e interpretações sobre o número racional, 2) buscávamos resolver a questão, a partir de caminhos não previamente escolhidos e se esforçando para nos desvincularmos ao máximo de qualquer tentativa de “fazer aparecer” determinado objeto de conhecimento ou “obrigar” o surgimento de uma dada interpretação do número racional, pois assumíamos como possibilidade o fato de, ainda que determinada questão contivesse elementos que “sinalizassem” para determinado objeto ou subconstruto, o caminho de solução por nós escolhido pudesse não confirmar as primeiras pressuposições (isso aconteceu, por diversas vezes, durante o processo); 3) analisávamos cada uma das etapas de resolução do problema, buscando perceber quais objetos de conhecimento estavam presentes em cada etapa e que interpretações do número racional cada objeto nos solicitava, e anotávamos o descoberto; 4) os autores ainda buscavam resolver a questão por caminhos alternativos, e quando novos objetos e subconstrutos se mostravam, estes também eram anotados.

Para deixar claro a metodologia usada nesta primeira fase da investigação, tome-se como exemplo a questão 141 da prova (BRASIL, [2015]).

QUESTÃO 141

Uma loja acompanhou o número de compradores de dois produtos, A e B, durante os meses de janeiro, fevereiro e março de 2012. Com isso, obteve este gráfico:



A loja sorteará um brinde entre os compradores do produto A e outro brinde entre os compradores do produto B.

Qual a probabilidade de que os dois sorteados tenham feito suas compras em fevereiro de 2012?

A $\frac{1}{20}$

B $\frac{3}{242}$

C $\frac{5}{22}$

D $\frac{6}{25}$

E $\frac{7}{15}$

Figura 1 – Questão 141 da prova "Matemáticas e suas tecnologias"
Fonte: ENEM 2013, caderno amarelo (BRASIL, [2015]).

Após a leitura do enunciado, os autores circularam a palavra "probabilidade", que indicava o objeto de conhecimento "noções de probabilidade" e as opções de resposta pareciam requerer do candidato a interpretação probabilidade do número racional. Por sua vez, o gráfico parecia exigir do candidato algum conhecimento sobre análise de dados, outro objeto de conhecimento previsto no edital do exame. Os autores buscaram resolver a questão da seguinte forma: a) somou-se o número total de compradores do produto A, no caso, 100; b) verificou-se qual a probabilidade de ser sorteado 30 destes compradores, no caso, 30/100; c) somou-se o número total de compradores do produto B, no caso 120; d) verificou-se qual a probabilidade de ser sorteado 20 destes compradores, no caso, 20/120; e) multiplicou-se as probabilidades; f) tornou-se irredutível a razão de inteiros. Analisamos então cada uma das etapas de resolução, e percebemos que, para a realização dos passos 1 a 4, que visava a busca das probabilidades de cada um dos dois, isoladamente considerados, fazia-se necessário, ao mesmo tempo, noções de probabilidade, análise de dados (interpretação de um gráfico de barras) e operações em conjuntos numéricos (adição de inteiros). Neste caso, o objeto noções de probabilidade pedia a interpretação probabilidade do número racional (razão de inteiros que representa as chances possíveis/total de chances). Para o passo 5, os autores mobilizaram outra noção de probabilidade (probabilidades simultâneas e a operação multiplicativa a ela associada) e operações em conjuntos numéricos (multiplicação de frações) e para o passo 6, operações em conjuntos numéricos (noção de equivalência e simplificação de fração). Em seguida, os autores buscaram resolver a questão por caminhos alternativos. No caso desta questão, poderia também ser possível considerar o conjunto total de eventos possíveis (100x120=12000), e após isso, o número de eventos em que o que se requeria no enunciado ocorria (30x20=600), para só então fazer a razão de inteiros que significasse probabilidade (600/12000), tornando-a irredutível (1/20). Nesta nova solução os mesmos objetos de conhecimento e subconstrutos foram requeridos que na solução anterior.

Seguindo esta metodologia, resolveu-se todas as questões da prova, e posteriormente os dados foram compilados para os quadros abaixo, para que as perguntas da investigação pudessem ser respondidas.

DISTRIBUIÇÃO DOS OBJETOS DE CONHECIMENTO E SUBCONSTRUTO DO NÚMERO RACIONAL POR QUESTÃO DO ENEM 2013 (CADERNO AMARELO)

N.	OBJETO(S) DE CONHECIMENTO EXIGIDO(S)	SUBCONSTRUTO
136	Funções algébricas do 2.º Grau	-
	Gráficos e Funções	-
	Equações	Coordenada linear
	Plano Cartesiano	-
	Operações em Conjuntos Numéricos	-
137	Relações de dependência entre grandezas	-
	Razões e Proporções	Razão
	Equações	-
	Operações em Conjuntos Numéricos	-
138	Gráficos e funções	-
	Plano Cartesiano	-
	Equações	Quociente
	Relações de dependência entre grandezas	-
139	Representação e análise de dados	-
	Operações em Conjuntos Numéricos	-
140	Razões	Parte-todo
141	Noções de probabilidade	Probabilidade
	Representação e análise de dados	-
	Operações em Conjuntos Numéricos	-
142	Plano cartesiano	-
	Equações	-
	Operações em Conjuntos Numéricos	-
143	Relações de dependência entre grandezas	-

N.	OBJETO(S) DE CONHECIMENTO EXIGIDO(S)	SUBCONSTRUTO
158	Razões	Razão
	Princípios de contagem	-
	Operações em Conjuntos Numéricos	-
159	Relação de dependência entre grandezas	-
	Proporções	-
	Unidades de Medida	-
160	Simetrias de figuras planas	-
161	Princípios de contagem	-
	Operações em Conjuntos Numéricos	-
162	Função exponencial e logarítmica	-
	Porcentagem	Operador
	Equações	Coordenada Linear
	Operações em Conjuntos Numéricos	-
163	Unidades de medida	-
	Relação de dependência entre grandezas	-
	Proporções	Medida
	Operações em Conjuntos Numéricos	-
164	Equações	Operador
	Operações em Conjuntos Numéricos	-
165	Funções algébricas do 2º grau	-
	Equações	-
	Fatoração	-
	Operações em Conjuntos Numéricos	-
166	Sequências e progressões	-
	Operações em Conjuntos Numéricos	-
167	Escalas	Razão

	Proporções	-
	Operações em Conjuntos Numéricos	-
144	Equações	Quociente
	Áreas	-
	Operações em Conjuntos Numéricos	-
145	Volumes	-
	Equações	Coordenada Linear
	Inequações	-
	Operações em Conjuntos Numéricos	-
146	Porcentagem	Operador
	Operações em Conjuntos Numéricos	-
147	Relação de dependência entre grandezas	Parte/todo
	Razões e Proporções	Operador
	Operações em Conjuntos Numéricos	-
148	Relação de dependência entre grandezas	-
	Proporções	Medida
	Representação e análise de dados	-
	Operações em Conjuntos Numéricos	-
149	Representação e análise de dados	-
	Operações em Conjuntos Numéricos	-
150	Medidas de tendência central	-
	Porcentagem	Operador
	Representação e análise de dados	-
	Operações em Conjuntos Numéricos	-
151	Porcentagem	Operador
	Operações em Conjuntos Numéricos	-
152	Comprimentos, Operações em Conjuntos Numéricos	
153	Relação de dependência entre grandezas	-
	Razões e Proporções	Medida, Razão
	Operações em Conjuntos Numéricos	Coordenada Linear
154	Sequências e progressões	-
	Representação e análise de dados	-
	Operações em Conjuntos Numéricos	-
155	Noções de probabilidade	Probabilidade
	Teoria dos conjuntos	-
	Operações em Conjuntos Numéricos	-
156	Trigonometria no ângulo agudo	-
	Características das figuras geométricas planas e espaciais	-
	Áreas	-
	Equações	-
	Operações em Conjuntos Numéricos	-
157	Representação e análise de dados	-
	Medidas de tendência central	-
	Operações em Conjuntos Numéricos	-

	Razões e Proporções	
	Áreas	-
	Operações em Conjuntos Numéricos	-
168	Plano cartesiano	-
169	Características das figuras geométricas espaciais	-
170	Representação e análise de dados	-
	Plano Cartesiano	-
171	Equações	Medida
	Razões	Quociente
	Características das figuras geométricas	-
	Operações em Conjuntos Numéricos	-
172	Semelhança de triângulos	-
	Equações	Coordenada Linear
	Sistema de equações	-
	Operações em Conjuntos Numéricos	-
173	Características das figuras geométricas espaciais	-
	Projeção Ortogonal	-
174	Porcentagem	Operador
	Áreas	
	Operações em Conjuntos Numéricos	Coordenada Linear
175	Porcentagem	Operador
	Inequações	-
	Noções de Probabilidade	Probabilidade
	Operações em Conjuntos Numéricos	-
176	Noções de Probabilidade	-
	Princípio de contagem	-
	Representação e análise de dados	-
	Operações em Conjuntos Numéricos	-
177	Porcentagem	Operador
	Proporções	-
	Representação e análise de dados	-
	Operações em Conjuntos Numéricos	Coordenada Linear
178	Circunferências	-
	Triângulos	-
	Fatoração	-
	Equações	-
	Operações em Conjuntos Numéricos	-
179	Equações	Quociente
	Representação e análise de dados	-
	Operações em Conjuntos Numéricos	Coordenada Linear
180	Escalas	Razão
	Razões	-

Quadro 1 – As questões do ENEM: os objetos de conhecimento identificados pelos autores em cada uma delas e o correlacionado subconstruto que se mostrou no momento em que se as resolvia.
Fonte: Análise Documental dos Autores.

NÚMERO DE VEZES EM QUE O SUBCONSTRUTO SE MOSTROU NAS QUESTÕES DO ENEM E OS OBJETOS DE CONHECIMENTO COM OS QUAIS SE RELACIONAM		
SUBCONSTRUTO	NÚMERO DE VEZES	OBJETOS DE CONHECIMENTO
Operador	9	Porcentagem (7), Equações (1), Razões e Proporções (1)
Coordenada Linear	8	Equações (4), Operações em Conjuntos Numéricos (4)
Razão	5	Razões e Proporções (3), Escalas (2)
Medida	4	Proporções (3), Equações (1)
Quociente	4	Equações (3), Razões (1)
Probabilidade	3	Noções de Probabilidade (3)
Parte/todo	2	Razões (1), Relação de dependência entre grandezas (1)

Quadro 2 – Relação da quantidade de vezes em que cada subconstruto emergiu das questões, e os correspondentes objetos de conhecimento.
Fonte: Análise Documental dos Autores.

Após realizado o estudo documental e tendo compilado os dados nestes dois quadros, acreditamos ter respondido as primeiras questões que mobilizavam a investigação. Concluiu-se pela leitura do quadro 1 que os objetos de conhecimento “operações em conjuntos numéricos”, “equações”, “representação e análise de dados”, “porcentagem” e “razões e proporções” foram os mais exigidos na prova de matemática do ENEM do ano de 2013. Pelo quadro 2, que sintetiza a primeira, é possível perceber uma preponderância do subconstruto operador na prova, em razão das diversas questões envolvendo o conteúdo porcentagem, em que ele especialmente emergia; logo em seguida, o subconstruto coordenada linear, haja vista a enorme quantidade de vezes que, na resolução das questões, se fazia necessário transformar um número fracionário em decimal, especialmente em questões que exigiam equações e operações em conjuntos numéricos. Na sequência, há a presença dos subconstrutos razão e medida, que emergiram especialmente em questões que envolviam razões e proporções. Em relação ao subconstruto quociente, pode ser encontrado mais abundantemente em questões que exigiam o conhecimento de equações; o subconstruto probabilidade apareceu quando a questão exigia efetivamente noções de probabilidade e, por fim, o subconstruto parte/todo, em menor evidência na prova, emergiu dos conteúdos razões e relação de dependência entre grandezas. Foi interessante perceber a existência de certa correlação entre determinados subconstrutos e determinados objetos de conhecimento. Outras conclusões alcançadas pelos autores foram: é alta e diversificada a exigência da compreensão dos conceitos do número racional na prova do ENEM (ao longo das 45 questões, subconstrutos variados emergiram por 35 vezes); tais subconstrutos aparecem em um conjunto reduzido de objetos de conhecimento da prova, considerando a totalidade dos diversos objetos de conhecimento presentes na prova (dos diversos objetos de conhecimento, apenas 7 deles pediam interpretações do número racional); não identificamos, na prova, a presença de todos os objetos de conhecimento exigidos em sua matriz de referência.

Novos estudos deverão ser feitos, pois as respostas para as nossas indagações iniciais nos levam a outras perguntas, por exemplo: por que de determinados objetos de conhecimento solicitam recorrentemente determinados subconstrutos do número racional? Em que medida estas interpretações do número racional são intrínsecas ao próprio objeto de conhecimento que se está a considerar? Por que é possível encontrar subconstrutos idênticos em objetos de conhecimento diferentes? E o contrário: por que é possível encontrar o mesmo objeto de conhecimento que, em situações diferentes, parecer requerem subconstrutos diferentes (pelo menos, nos caminhos de solução por nós encontrados)?

No entanto, a nossa pesquisa ainda buscava investigar como os alunos, em sala de aula, interpretavam as questões do ENEM e quais conhecimentos eles - e não nós - mobilizavam para a solução das questões que envolviam interpretações do número racional e, por isso, estas novas questões mereciam esperar futuras investigações.

A emergência dos subconstrutos da fração nas discussões em sala de aula

A vivência analisada ocorreu nas dependências da Sociedade Espírita Trabalho e Esperança (SETE), instituição educacional filantrópica, localizada no Setor Madre Germana II, conjunto habitacional da periferia da cidade de Goiânia. O bairro é composto por população de baixa renda e possui diversos problemas de infraestrutura e também problemas sociais. Na instituição mencionada, foram realizadas, entre agosto e novembro de 2014, aulas gratuitas preparatórias para o ENEM, destinadas a estudantes interessados em participar do ENEM-2014. O grupo foi constituído, predominantemente, por estudantes do Colégio Estadual Madre Germana II, colégio que atende a região, com IDEB 1,4, para o 9º ano em 2011.

O trabalho foi realizado em encontros semanais, aos sábados, por um período de três horas cada, sendo que as aulas foram conduzidas por um dos autores deste trabalho, identificado neste texto como “o professor”. Os encontros eram registrados no diário de campo, em que o pesquisador-professor relatava as discussões das resoluções das questões, os comentários e as dúvidas dos estudantes, os caminhos apontados por eles para a solução das questões etc. Os nomes dos alunos não foram citados neste trabalho, sendo identificados com letras maiúsculas (A, B, D, M...) para preservar sua identidade.

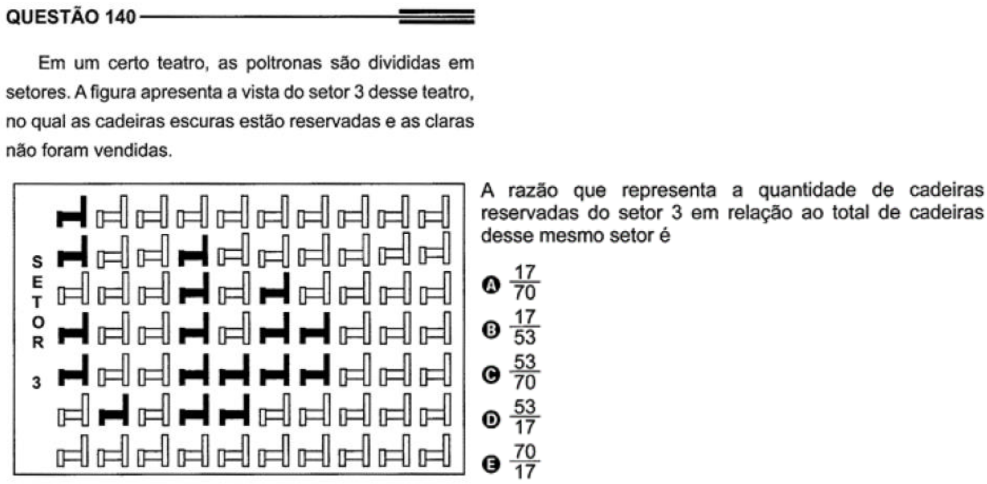
A partir das compreensões advindas das leituras de Freire (1974, 2015) e Vila e Callejo (2006), planejamos uma vivência que seguiria como metodologia: 1) os alunos buscam solucionar uma questão previamente selecionada no conjunto das questões da prova, individualmente ou em duplas ou grupos, por um período de 10 a 20 minutos; 2) o professor conduz uma leitura e interpretação coletiva com os alunos, buscando por compreensões e interpretações realizadas pelo grupo, seguida do compartilhamento pelos alunos dos caminhos ou tentativas de solução da questão, e tais procedimentos são analisados em sua validade conceitual por todo o grupo; 3) o professor apresenta outras possibilidades de solução, ampliando compreensões, retomando ou apresentando conceitos necessários a tal complexificação; 4) o problema proposto é retomado coletivamente com alteração de dados ou de perguntas, partindo de sugestões do professor e dos alunos, para que novas soluções possibilitem novas discussões, gerando novas compreensões e questões de investigação, dentro da mesma questão; 5) o professor organiza, com o auxílio dos alunos, uma síntese das regularidades percebidas, identificando também os objetos de conhecimento (definidos na matriz do exame) que o candidato precisava saber para resolver a questão; e, 6) ao final da aula, o professor distribui material de estudo, em geral capítulos de livro, que contêm os objetos de conhecimento explorados nas questões, com exercícios diversos. Com essa metodologia, ao longo dos 16 encontros, foram exploradas as 45 questões da prova. Tal metodologia foi mais bem fundamentada, descrita e discutida em outro trabalho (BARRETO; GODOY, 2015).

Com esse encaminhamento, procuramos proporcionar aos alunos uma experiência matemática em que a diversidade de interpretações e de soluções fosse percebida como importante para o desenvolvimento de uma atitude investigativa e colaborativa na sala de aula. A metodologia proposta se deu orientada pelo desejo de desestabilizar algumas crenças, comuns aos estudantes do Ensino Fundamental com histórico de baixo rendimento escolar, acerca do ensino e aprendizagem da matemática. Segundo Vila e Callejo (2006) “as crenças influem na forma como se aprende, se ensina e se aplica a matemática” (VILA; CALLEJO, 2006, p. 52) e “embora as crenças e as práticas formem um círculo às vezes difícil de romper, pode-se tentar quebra-lo por algum lado: constatou-se que as mudanças nas práticas de aula podem modificar as crenças" (VILA; CALLEJO, 2006, p. 52). Por meio da abordagem metodológica proposta, tentávamos desestabilizar crenças como: "aprender matemática é memorizar, não tendo relação com a resolução de problemas", "a matemática é uma atividade solitária, feita por indivíduos isoladamente", "as pessoas que são boas em matemática não precisam dedicar tempo para pensar como resolver um problema", "só há uma maneira de responder corretamente a cada problema; normalmente é o método que o professor acaba de mostrar em aula" e "a resolução de uma questão matemática acaba quando se encontra a resposta" (VILA; CALLEJO, 2006, p. 60-67).

Buscávamos, sobretudo, contrapormo-nos à concepção bancária de educação, que considera os alunos meros receptores do conhecimento de um professor que tudo sabe (FREIRE, 1974) e apresentávamos aos estudantes uma proposta de educação dialógica, problematizadora, fundada no respeito aos conhecimentos dos educandos, pois sabíamos que "ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua produção ou a sua construção" (FREIRE, 2015, p. 24) e que "nas condições de verdadeira aprendizagem os educandos vão se transformando em reais sujeitos da construção e da reconstrução do saber, ao lado do educador, igualmente sujeito do processo" (FREIRE, 2015, p. 28).

Os dados obtidos, materializados como textos no diário de campo, foram lidos e relidos com o intuito de identificar momentos em que os subscontrutos, como semânticas do número racional, se tornavam o centro da discussão, e alguns destes momentos foram selecionados para serem apresentados neste trabalho. Desse modo, vivenciou-se a dupla função de professor e de pesquisador. No distanciamento possibilitado pela releitura do vivido, foram identificadas possíveis conduções não contempladas na ação (outras poderiam surgir por outros leitores). Embora tenhamos estudado, por meio da metodologia apresentada, todas as questões da prova, neste artigo, apresentamos somente as discussões em torno das questões de número 140, 146, 153 e 171 do ENEM 2013 (BRASIL, [2015]), caderno amarelo, escolhidas por representarem, no conjunto, a diversidade de subconstrutos de número racional, que está sendo considerada nesta pesquisa.

Destacamos inicialmente a discussão em torno da questão 140 do ENEM, que exige o domínio do objeto de conhecimento razão, em que se tornou particularmente evidente o subconstruto parte-todo.


QUESTÃO 140

Em um certo teatro, as poltronas são divididas em setores. A figura apresenta a vista do setor 3 desse teatro, no qual as cadeiras escuras estão reservadas e as claras não foram vendidas.

A razão que representa a quantidade de cadeiras reservadas do setor 3 em relação ao total de cadeiras desse mesmo setor é

A $\frac{17}{70}$

B $\frac{17}{53}$

C $\frac{53}{70}$

D $\frac{53}{17}$

E $\frac{70}{17}$

Figura 2 – Questão 140 da prova “Matemáticas e suas tecnologias”
Fonte: ENEM 2013, caderno amarelo (BRASIL, [2015]).

A resposta surgiu de praticamente todos os alunos com relativa facilidade: 17/70. Os alunos explicaram que bastava colocar “em cima” o número de cadeiras pintadas e “em baixo” o número total de cadeiras. Trata-se, em verdade, do subconstruto elementar do número racional: o parte-todo. De acordo com Damico, a interpretação de um número racional como parte-todo consiste na divisão de uma quantidade contínua ou um conjunto discreto de objetos em *q* partes iguais (congruentes em área ou número de objetos) das quais são tomadas um número *p* destas partes, *p* menor ou igual a *q* (DAMICO, 2007, p. 67). O que a questão do ENEM chama de “razão” é, na verdade, nesse caso, uma relação ou comparação parte-todo de um conjunto discreto de objetos, exigindo do candidato que soubesse que o número fracionário poderia ser usado para estabelecer este tipo de comparação.

Evidências indicam que esta – a interpretação parte-todo – costuma ser a principal abordagem do número fracionário na primeira fase do Ensino Fundamental. Por exemplo, Magina e Campos (2008, p. 25) afirmam: “os professores brasileiros que atuam no nível de escolarização de 1ª a 4ª séries do Ensino Fundamental, costumam, em geral, utilizar as situações de parte-todo como sendo o principal contexto para o ensino de fração”. Nunes aduz que, normalmente, tal subconstruto é apresentado em situações-problema em que o todo já é apresentado dividido, exigindo do estudante identificar a fração correspondente, o que simplesmente encoraja os alunos a empregar um tipo de procedimento de contagem dupla: contar o número total de partes e então as partes pintadas (NUNES, 1997, p. 191). Talvez, por essa razão, os alunos não tenham encontrado dificuldade para a resolução desta questão do ENEM.

Buscando explorar as diversas possibilidades problemáticas da questão, propusemos novas indagações. Apresentamos como variação da questão o número de 7 cadeiras reservadas ao invés de 17, pois essa alteração possibilitava discutir a necessidade de simplificar a fração (noção de equivalência), visto que a opção correta na prova do ENEM poderia vir representada por 1/10. Neste caso, nem todos os jovens sabiam realizar a simplificação, enquanto que, os que sabiam, haviam decorado a regra de "dividir em cima e em baixo pelo mesmo número", sem conseguirem explicar a razão pela qual o procedimento era válido, o que revela imperfeito domínio da variante equivalência. Isto possibilitou que o professor retomasse a ideia da equivalência, variante que exige, em contextos discretos, uma reordenação dos elementos (DAMICO, 2007, p. 85), ou seja, ao invés de se considerar os elementos isolados como partes do todo, eles são agrupados, de modo que todos os elementos do todo estejam reunidos em grupos de mesma quantidade de objetos. No caso proposto, para chegar-se na resposta 1/10, seria preciso distribuir as 70 cadeiras em grupos de 7 cadeiras cada, e então contar quantos grupos há, do total de grupos, no caso, 1 em 10. Ciscar e Garcia (1988 apud DAMICO, 2007, p. 85) afirmam que é preciso que os alunos desenvolvam, num primeiro momento, relações de equivalência em diversos contextos concretos (contínuos e discretos), para só então perceberem a regularidade de se dividir ou multiplicar o numerador e o denominador da fração pelo mesmo número. Além disso, trata-se de noção importante, uma vez que, a partir dela, é possível realizar operações de adição e subtração de frações sem recorrer-se aos algoritmos, que são pouco intuitivos, conforme proposta apresentada, por exemplo, por Toledo e Toledo (1997).

Outra variação que trabalhamos foi dar uma razão, no caso 2/5, e pedirmos que tentassem descobrir o número de cadeiras reservadas, dentre as mesmas 70 disponíveis. Neste caso em específico, exigíamos a compreensão do subconstruto operador. De acordo com Behr, Harel, Post e Lesh (1992 apud DAMICO, 2007, p. 76), o raciocínio que as crianças mais frequentemente utilizam para resolver situações-problema que envolvam operador é dividir primeiro e depois multiplicar, como quando, ao descobrir dois terços de 18, as crianças primeiro dividem o 18 em três grupos e, posteriormente, contam o número de objetos em dois destes grupos.

Nessa atividade, o aluno R logrou êxito em responder quanto valia 2/5 de 70 e explicou para os colegas que pensou: "se ali é 5, então preciso dividir o total de cadeiras, que é 70, por 5, o que dá 14. São 5 grupos de 14 cadeiras. Mas ele quer só 2 grupos, então, 2 x 14

= 28”. Mostrei também a maneira como nós havíamos pensado: “2/5 de 70. A partícula ‘de’ representa multiplicação, em matemática, então 2/5 x 70/1 = 140/5 = 28”. Interessante notar que, neste caso, foi o aluno R que retomou a ideia para o professor, pois, para ele, calcular uma fração de um todo havia sido uma mera conta: multiplicou-se numerador com numerador e denominador com denominador (talvez pela prática reiterada de exercícios algébricos de maior complexidade), diferentemente do aluno R, que, debruçando-se sobre o problema, apresentava necessidade de entender o que se estava a fazer, de atribuir sentido a ação realizada. Nesse caso, o pensamento do aluno estava mais próximo da ideia do subconstruto operador, que remonta à noção parte/todo. Linhares e Sanchez (1998 apud MOREIRA e FERREIRA, 2008, p. 108) afirmam que, embora se possa inverter a ordem das operações, está implícita na interpretação operar primeiro a divisão e depois a multiplicação, pela identificação com a interpretação parte-todo.

Passemos para a questão 146, que exige o domínio do objeto de conhecimento porcentagem. A partir da discussão sobre ela, percebeu-se a emergência do subconstruto operador.

QUESTÃO 146

O contribuinte que vende mais de R$ 20 mil de ações em Bolsa de Valores em um mês deverá pagar Imposto de Renda. O pagamento para a Receita Federal consistirá em 15% do lucro obtido com a venda das ações.

Disponível em: www1.folha.uol.com.br. Acesso em: 26 abr. 2010 (adaptado).

Um contribuinte que vende por R$ 34 mil um lote de ações que custou R$ 26 mil terá de pagar de Imposto de Renda à Receita Federal o valor de

A R$ 900,00.
B R$ 1 200,00.
C R$ 2 100,00.
D R$ 3 900,00.
E R$ 5 100,00.

Figura 3 – Questão 146 da prova “Matemáticas e suas tecnologias”
Fonte: ENEM 2013, caderno amarelo (BRASIL, [2015]).

Durante o debate, o estudante M1 sugeriu multiplicar 0,15 ao lucro, no caso, R$ 8.000, mas disse que não sabia fazer esta conta à mão, “só na calculadora”. Quando perguntado o porquê da multiplicação pelo número decimal, ele não soube explicar (nem a multiplicação e nem o número decimal), dizendo simplesmente que, para calcular porcentagem, é preciso fazer assim, colocar zero vírgula o valor da porcentagem e depois multiplicar pelo preço, “pois assim havia aprendido no trabalho”. Outro aluno, o M2, disse que havia feito este exercício por regra de três, considerando que, “se R$ 8 mil é meu 100%, quanto vale 15%?”, e efetuando as regras algorítmicas subsequentes. O professor, com o apoio dos alunos, colocou na lousa as duas maneiras apontadas por eles de se fazer o exercício, socializou aos demais colegas o que haviam pensado e realizou as intervenções necessárias para a ampliação da discussão.

No caso de M1, para explicar a razão de ser da operação de multiplicação, o professor aproveitou a oportunidade para retomar a interpretação do operador do número racional. Buscou explicar o conceito de porcentagem, de modo a dizer que calcular 15% de 8.000 é calcular 15/100 de 8.000, e calcular 15/100 de alguma coisa, é pegar 15 partes dessa coisa quando se divide ela em 100 partes. O professor fez lembrar o raciocínio do aluno R, quando havia sido resolvida, em momento anterior, a questão 140. Esta explicação foi bem recebida pelos alunos e tornou evidente o subconstruto operador que, de acordo com Damico, “define uma estrutura multiplicativa em que o operador *p* sobre *q* faz duas operações: uma de multiplicação por *p* e outra de divisão por *q*” (DAMICO, 2007, p. 75). A partir daí, o professor buscou demonstrar que, se é necessário dividir um todo *x* em *y* partes e depois multiplicar por *z (x/y * z)*, pode-se trocar a ordem de execução das operações, dividindo-se *z* por *y* e depois multiplicar por *x* (*z/y *x*), sem que isso altere o resultado final. A referida troca de operações correspondia ao raciocínio de M1 e, após a intervenção, o aluno se mostrou satisfeito com a resposta. Naquela oportunidade, o professor não explorou a fundo a transformação 15% em 0,15, que diz respeito ao entendimento do subconstruto coordenada linear, em que a/b expressa um número na reta real (DAMICO, 2007, p. 77).

Em relação à saída de M2, o professor fez a regra de três na lousa e buscou demonstrar que as operações realizadas no algoritmo da regra de três eram as mesmas já realizadas no mecanismo do operador, apenas a ordem delas é que, novamente, havia sido alterada: ao invés de se fazer x/y * z ou z/y * x, estava a se fazer x * y/z. Novamente, a solução foi bem aceita pela turma.

A questão 153 do ENEM, que exige o objeto de conhecimento “proporção”, fez emergir o subconstruto razão e medida do número racional.

QUESTÃO 153

Um dos grandes problemas enfrentados nas rodovias brasileiras é o excesso de carga transportada pelos caminhões. Dimensionado para o tráfego dentro dos limites legais de carga, o piso das estradas se deteriora com o peso excessivo dos caminhões. Além disso, o excesso de carga interfere na capacidade de frenagem e no funcionamento da suspensão do veículo, causas frequentes de acidentes.

Ciente dessa responsabilidade e com base na experiência adquirida com pesagens, um caminhoneiro sabe que seu caminhão pode carregar, no máximo, 1 500 telhas ou 1 200 tijolos.

Considerando esse caminhão carregado com 900 telhas, quantos tijolos, no máximo, podem ser acrescentados à carga de modo a não ultrapassar a carga máxima do caminhão?

Ⓐ 300 tijolos
Ⓑ 360 tijolos
Ⓒ 400 tijolos
Ⓓ 480 tijolos
Ⓔ 600 tijolos

Figura 4 – Questão 153 da prova “Matemáticas e suas tecnologias”
Fonte: ENEM 2013, caderno amarelo (BRASIL, [2015])

No debate, dois alunos, D e R, estavam inquietos com a questão, e disseram que não sabiam fazer regra de três e por isso não conseguiram resolver a questão proposta. O professor perguntou o que haviam pensado em fazer, e D disse:

> Aluno D: Eu não sei fazer, **mas sei que é preciso fazer uma relação entre tijolos e telhas**.
> Professor: Por quê?
> Aluno D: Porque eu preciso transformar 600 telhas em tijolos pra achar a resposta.
> Professor: Explique melhor.
> Aluno D: Porque, se ele carrega 900 telhas, poderia carregar mais 600 telhas [já que o limite máximo é 1500]. Então é só transformar essas 600 telhas em tijolos, pra achar o quanto a mais em tijolos o caminhão pode carregar.
> Professor: Muito bem. Excelente raciocínio! E como nós faríamos essa relação entre tijolos e telhas?
> Aluno D: Por regra de três, mas eu não sei fazer. (DIÁRIO DE CAMPO).

O aluno sabia que a regra de três estabelecia relação entre grandezas, mas não sabia ao certo como isto se dava. Naquele momento, o professor poderia ter explorado o subconstruto razão do número racional, em que a/b representam uma relação de grandezas, mas preferiu seguir por outro caminho. Sem recorrer ao algoritmo da regra de três, buscou instigar o aluno:

> Professor: Veja bem, nós sabemos que 1500 telhas ou 1200 tijolos pesam o mesmo tanto, por isso, são a mesma coisa.
> *Pausa. Nenhuma resposta.*
> Professor: Vocês concordam que a telha é mais leve de tijolo?
> Alunos: Sim, porque o caminhão leva 1500 telhas e só 1200 tijolos.
> Professor: É possível dizer que o tijolo é duas vezes mais pesado que a telha?
> *Pausa para reflexão.*
> Aluno D: Não, porque se fosse assim, o caminhão conseguiria carregar o dobro de telhas, e aqui, temos 1200 tijolos e **mil e quinhentas** telhas.

> Professor: Então a relação tijolo telha não pode ser 1 tijolo para 2 telhas.
> *Segundos de silêncio.*
> Aluno D.: Tem de ser 1 vírgula alguma coisa. (DIÁRIO DE CAMPO)

Nesse ponto, evidencia-se que a relação entre grandezas é mais facilmente perceptível quando esta ocorre entre inteiros – 1 para 2, 1 para 3, 1 para 4 – pois, para esse tipo de relação, basta um raciocínio multiplicativo de dobro, triplo, quádruplo, o que não ocorre quando a relação é "quebrada", em que se torna imperioso o entendimento do número fracionário. Interessante perceber que a necessidade da humanidade de se criar os números racionais (ainda como número fracionário) surgiu a partir de conflito idêntico, advindo da necessidade de se medir utilizando-se uma unidade de medida fixa (CARAÇA, 1951, p. 29-37). O comentário "1 vírgula alguma coisa" demonstra certo domínio sobre o subconstruto coordenada linear, pois o aluno sabe que o número racional em tela pertence a um ponto da reta real entre 1 e 2.

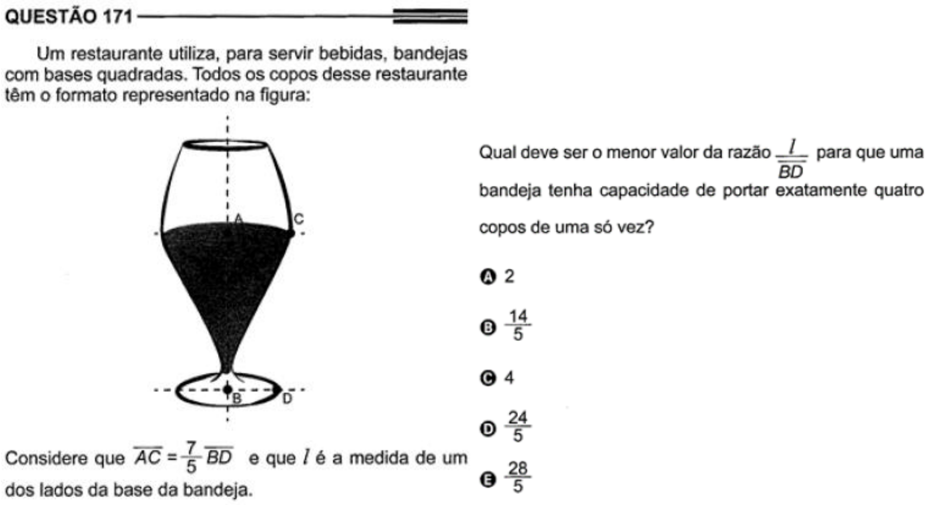
> Professor: Isso, muito bem! E como faremos para **descobrir o valor exato**?
> Neste momento, o aluno R, que acompanhava atentamente o diálogo, diz:
> Aluno R.: E se descobríssemos quantas telhas cabem em cada tijolo? É isso que estamos tentando fazer, não é [descobrir a relação entre tijolos e telhas]?
> Professor: Muito bem! Como faremos isso?
> Aluno R.: Precisamos pegar 1500 telhas e dividir para 1200 tijolos, para saber quantas telhas cabem em cada tijolo. (DIÁRIO DE CAMPO)

Percebe-se a perspicácia do aluno, em avançar, do mero "estabelecer uma relação" entre grandezas, para "estabelecer quanto uma cabe na outra", o que equivale a medir as telhas usando os tijolos como unidade de medida. Fizemos a conta com eles, sem a utilização do algoritmo: constatou-se que 1200 cabem em 1500 uma vez, sobrando ainda 300 telhas. Mede-se novamente: 1200 não cabem em 300, precisamos fracionar a unidade de medida. Fraciona-a em 4 partes – convenientemente, para que cada uma valha 300 –, pega-se uma delas, e então sabemos quanto a telha cabe no tijolo: 1 vez mais ¼ da vez. A fração em seu subconstruto medida surge, portanto, espontaneamente. Pela compreensão do subconstruto coordenada linear, que, novamente, poderia ter sido mais bem explicado em sala, o resultado "1 + ¼" foi transformado em 1,25. "Isso quer dizer que cabe 1 telha mais ¼ de telha em cada tijolo. Temos, então, a relação que D havia dito que precisávamos encontrar: 1 tijolo para 1,25 telha. O que fazemos com ela? (intervenção do professor)".

A partir desse ponto, os alunos resolveram a questão, fazendo a divisão de 600 telhas por 1,25 telhas, para descobrir a quantidade de tijolos, resultando em 480, o que encerrou a questão, sem ter havido a necessidade de se utilizar da "regra de três".

Interessante perceber que, pelo caminho escolhido para a resolução da questão, fica claro que a tentativa ou a ação de se comparar grandezas proporcionais gerou a necessidade de compreensão da fração, em seu subconstruto medida, pois tal número fracionário surgiu da necessidade de dividir 1500 por 1200 (de se medir 1500 usando 1200 como unidade de medida). Tal ocorrência indica uma proximidade entre o número fracionário e a comparação de grandezas. De fato, de acordo com Damico, no subconstruto medida "a ideia é de comparação entre duas grandezas, por exemplo: quantas vezes um palmo cabe no comprimento de uma mesa?" (DAMICO, 2007, p. 73). O autor explica que a necessidade do número racional ocorrerá quando tomarmos um segmento como unidade e, ao questionarmos quanto este segmento cabe em outro segmento, percebermos, de antemão, que não há número inteiro capaz de identificar esta medida (DAMICO, 2007, p. 74). De acordo com Carpenter e outros (1994 apud DAMICO, 2007, p. 75) é possível utilizar como unidade de medida, ao invés de um objeto contínuo (como o palmo), um conjunto discreto, como é o caso do seguinte problema: "se gasta-se 6 latas de tinta para pintar um quilômetro das linhas existentes no meio da estrada, quantos quilômetros de estrada poderiam ser pintados com 27 latas de tinta?". Neste caso, "6 latas são utilizadas como unidade para medir as 27 latas" (DAMICO, 2007, p. 75), sendo que 24 latas representam 4 grupos de 6 latas (pintando 4 quilômetros) e as 3 latas restantes devem ser comparadas com a divisão da unidade - 6 latas - representando três sextos ou um meio (DAMICO, 2007, p. 75). A utilização de conjunto discreto como unidade de medida é o que se requereu nesta questão do ENEM.

Por fim, destaquemos a questão 171, em que é exigido três objetos de conhecimento: "equações", "características das figuras geométricas" e "razão". Nela, um aspecto do subconstruto quociente pode ser explorado.



QUESTÃO 171

Um restaurante utiliza, para servir bebidas, bandejas com bases quadradas. Todos os copos desse restaurante têm o formato representado na figura:

Considere que $\overline{AC} = \frac{7}{5}\overline{BD}$ e que l é a medida de um dos lados da base da bandeja.

Qual deve ser o menor valor da razão $\frac{l}{BD}$ para que uma bandeja tenha capacidade de portar exatamente quatro copos de uma só vez?

A) 2

B) $\frac{14}{5}$

C) 4

D) $\frac{24}{5}$

E) $\frac{28}{5}$

Figura 5 – Questão 171 da prova “Matemáticas e suas tecnologias”
Fonte: ENEM 2013, caderno amarelo (BRASIL, [2015]).

Os alunos, de um modo geral, disseram que esta questão era difícil. O professor percebeu que não havia muita clareza, por parte dos alunos, no que era pedido no enunciado desta questão; requereu a atenção dos alunos e buscou refletir com eles o que significava descobrir “a menor razão l/BD” a partir da interpretação quociente do número racional. De acordo com Damico, pelo subconstruto quociente a fração *a/b* é uma divisão entre dois números inteiros e a e b denotam uma operação, a ÷ b (2007, p. 70). Ohlsson (1988 apud DAMICO, 2007, p. 72) destaca quatro maneiras diferentes pelas quais o subconstruto quociente pode ser entendido, e uma delas, a “extração”, ou interpretação quotitiva, diz respeito à ideia da divisão enquanto “caber”, ou enquanto “medir”. Tal interpretação auxiliou os estudantes na compreensão do que se pedia na questão do ENEM, pois l/BD passou a significar: “quantos BD cabem em l?”.

O aluno R perguntou “o que significava isso”, apontando para AC = 7/5BD. O professor poderia, neste momento, ter devolvido a pergunta, para investigar a interpretação do aluno acerca da equação, mas explicou que o segmento AC é igual a sete quintos do segmento BD, ou seja, dividindo-se o segmento BD em 5 partes, o segmento AC será do tamanho de 7 dessas partes (terá o tamanho do próprio BD, mais ⅖ de BD). De qualquer froma, a incompreensão da equação sinalizava uma não familiaridade do mesmo com o pensamento algébrico, sendo que a equação indicava a medição de AC usando-se BD como unidade de medida, portanto, requerendo a interpretação medida do número fracionário. Após a explicação, o aluno R voltou a se debruçar sobre o problema e, minutos depois, ele disse: “l é o somatório de AC quatro vezes, e AC é 7/5 (de BD), então, l vai ser 28/5 de BD, cabem 28/5 de BD em l”. Ressalte-se que o estudante não havia esquematizado o seu raciocínio em equações, e nem mesmo feito alguma conta no papel (o que havia era, tão-somente, o desenho da bandeja e das taças). Dissemos a ele que “refletisse um pouco melhor sobre a bandeja”, e após alguns minutos de reflexão individual, disse, num grito incontido e com o rosto iluminado: “l não é AC somado quatro vezes, mas apenas duas, mais BD somado duas vezes, então l dá 24/5 de BD”.

Interessante o aluno R ter seguido este caminho de resolução, sem o apoio da álgebra, o que aconteceu por diversas vezes ao longo dos encontros, não só com este aluno, como com vários outros, revelando-se uma tendência dos alunos, diferentemente do professor, que recorria à mesma em diversas ocasiões, até mesmo quando ela se revelava pouco útil e tornava o processo de solução mais demorado.

Conclusão

A partir do estudo realizado, concluímos que o domínio das diversas interpretações do número racional é importante para a resolução da prova do ENEM, visto que mais da metade das questões desse exame solicita a compreensão dos subconstrutos do número racional, destacando-se os subconstrutos operador e coordenada linear. Concluímos também que há uma correlação entre determinados objetos de conhecimento definidos na matriz do ENEM e subconstrutos do número racional, merecendo o assunto maiores estudos que investiguem tal correlação, pois, em nossa opinião, isto reforça a tese - defendida por diversos autores em educação matemática - de ser realizar um trabalho pedagógico no Ensino Fundamental que explore ao máximo estes subconstrutos, colocando o estudante diante de diversas situações em que as mais diversas interpretações do número racional seja possível, pois a apropriação de determinados subconstrutos pode ser caminho ou pré-requisito para a aquisição de determinados objetos de conhecimento exigidos nas etapas seguintes da Educação Básica.

A vivência realizada em sala de aula, por sua vez, nos mostrou que os alunos pesquisados apresentaram dificuldade em, por si próprios, interpretarem questões que pediam determinados subconstrutos, com exceção do subconstruto parte/todo, o que não os impedia de mobiliar soluções para o problema, seja a partir de procedimentos intuitivos, conhecimentos adquiridos em contextos não escolares, ou mesmo regras algorítmicas aprendidas ao longo de sua trajetória escolar cujo fundamento não sabiam explicar (e que nem sempre, é claro, se mostravam suficientes ou adequados para o problema). Mostrou-nos também que em diversas situações envolvendo números racionais, procedimentos e operações realizadas de forma mecânica pelo professor do Ensino Médio não fazem sentido para os alunos, podendo ser proveitoso retomar conceitos e ideias do número racional, em seus diversos subconstrutos, para um maior esclarecimento da situação-problema. Por diversas vezes, aliás, os subconstrutos do número racional se mostraram nas discussões das questões do ENEM como necessários à interpretação e resolução da situação-problema, e em alguns casos foi mesmo desnecessária a aplicação de algoritmos convencionais (como a regra de três) e mesmo da álgebra para a solução de determinadas questões, quando apenas compreensão do subconstruto do número racional já encaminhava a solução.

A metodologia de aula dialogada por nós utilizada (BARRETO; GODOY, 2015), na qual os participantes eram convidados a expor o que pensaram, a negociar soluções e a compartilhar caminhos, ao mesmo tempo em que nos preocupávamos em quebrar crenças negativas em relação à matemática que os alunos nesta etapa da escolaridade adquiriram ao longo de sua formação, parece ter colaborado com trabalho que se pretendeu realizar.

Referências

BARRETO, M. F. T; GODOY, João Paulo. **Uma Abordagem Dialógica para o Estudo da Matemática em Sala de Aula.** In: VI EDIPE - Encontro Estadual de Didática e Práticas de Ensino, 2015, Goiânia. Anais do VI EDIPE - Encontro Estadual de Didática e Práticas de Ensino, 2015. Disponível em: <http://www2.unucseh.ueg.br/ceped/edipe/anais/viedipe/PDF/GT5%20Matematica%20pdf/GT5%20Maria%20de%20F%C3%A1tima%20Teixeira%20Barreto.pdf>

BEHR, M. J.; HAREL, G.; POST, T.; LESH, R. Rational number, ratio, and proportion. In: GROUWS, D.A. (Ed.). **Handbook of research on Mathematics teaching and learning.** New York: MacMillan, 1992.

BERTONI, Nilza Eigenheer. **Módulo VI**: Educação e linguagem matemática IV. Brasília: Universidade de Brasília, 2009. 95p.

BOLEMA, Rio Claro, Ano 21, n° 31, 2008.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Sobre o ENEM.** [2009]. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/web/enem/sobre-o-enem>. Acesso em: 30 jul.2015.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Matriz de Referência para o ENEM 2009**. Brasília: MEC, 2009, 26p.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Provas e Gabaritos**. [2015]. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/web/enem/edicoes-anteriores/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 30 jul. 2015.

BRASIL. Ministério da Educação. Programa de Financiamento Estudantil. **O que é o FIES**. [2010]. Disponível em: <http://sisfiesportal.mec.gov.br/fies.html>. Acesso em: 30 jul. 2015.

CANDIDATOS já podem conferir vagas no Sisu. **O Globo**, 14 jan. 2015. Disponível em: <http://oglobo.globo.com/sociedade/educacao/candidatos-ja-podem-conferir-vagas-no-sisu-15025114>. Acesso em: 30 jul. 2015.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Sá da Costa, 1951.

CARPENTER, Thomas P. **Teaching and learning rational numbers:** proposed framework for CGI teacher development in the upper elementary grades. Wisconsim Center for Education Research. School of Education, University of Wisconsin-Madison, 1994.

DAMICO, Alecio. **Uma investigação sobre a formação inicial de professores de matemática para o ensino de números racionais no ensino fundamental**. 2007. 313 p. Tese (doutorado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia do Oprimido**. 1ª Edição. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1974.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da Autonomia**. 51ª Edição. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2015.

FREIRE, Paulo. **O problema da consciência histórica**. Rio de Janeiro, Editora Fundação Getúlio Vargas, 1998.

GADAMER, Hans-Georg. **Verdade e Método.** Petrópolis, Vozes, 1997.

INSCRIÇÕES para 213 mil bolsas do Prouni terminam nesta quinta-feira. **UOL**, São Paulo, 29 jan. 2015. Disponível em: <http://educacao.uol.com.br/noticias/2015/01/29/inscricoes-para-213-mil-bolsas-do-prouni-terminam-nesta-quinta-feira.htm>. Acesso em: 30 jul. 2015.

LLINARES, S.; SANCHEZ, V. **Fracciones**. Madrid: Sintesis, 1998.

MINISTRO confirma segunda edição do Fies para novos contratos em 2015. **G1**, São Paulo, 09 jun. 2015. Disponível em: <http://g1.globo.com/educacao/noticia/2015/06/ministro-confirma-segunda-edicao-do-fies-para-novos-contratos-em-2015.html>. Acesso 30 jul. 2015.

MOREIRA, Plínio Cavalcanti; FERREIRA, Maria Cristina Costa. A Teoria dos Subconstrutos e o Número Racional como Operador: das estruturas algébricas às cognitivas. In: **Bolema**, Rio Claro (SP), Ano 21, nº 31, 2008, p. 103 a 127.

NUNES, Terezinha; BRYANT, Peter. **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

ROMANATTO, Mauro C. **Número Racional***:* relações necessárias a sua compreensão. 1997. Tese (doutorado), Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, 1997, 158 p.

TOLEDO, Marília; TOLEDO, Mauro. **Didática da Matemática***:* como dois e dois: a construção da Matemática. São Paulo: FTD, 1997.

VERGNAUD, G. A trama dos campos conceituais na construção dos conhecimentos. **Revista do GEMPA**, Porto Alegre, nº 4, v. 9, 1996.

VILA, Antoni; CALLEJO, Maria Luz. **Matemática para aprender a pensar***:* o papel das crenças na resolução de problemas. Porto Alegre: Artmed, 2006.

Submetido em setembro de 2015

Aprovado em abril de 2016