REVISTA DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL (UFMS)

ISSN 2359-2842 Volume 14, número 34 – 2021 DOI: 10.46312/pem.v14i34.12755

Uma Proposta de Atividade com *Feedbacks* Automáticos no GeoGebra

An Activity Proposal with automatic feedbacks in GeoGebra

Jorge Cássio Costa Nóbriga[1]

Sérgio Carrazedo Dantas[2]

RESUMO

Apresentamos uma proposta de atividade para ser feita na plataforma GeoGebra e que contém exercícios com feedbacks automáticos. A motivação para o desenvolvimento de tal atividade parte do fato de sabermos que as atividades em contexto de ensino remoto precisam oferecer condições de trabalho com mais autonomia pelo estudante. Para fundamentarmos a proposta, primeiramente, apresentamos uma breve revisão sobre feedback em contextos educativos. Em seguida, apresentamos orientações sobre a elaboração de questões objetivas. Na seção seguinte, apresentamos um estudo sobre erros de estudantes na resolução de equações polinomiais de 2º grau. Finalmente, apresentamos a atividade, explicitando como funciona, quais feedbacks possui, quando aparecem e algumas orientações de como pode ser feita. Embora não se tenha feito ainda uma análise sistemática a respeito das contribuições da atividade para o processo de ensino e aprendizagem, os primeiros experimentos apontam que o uso de atividades como essa pode auxiliar no desenvolvimento da aprendizagem em situações de ensino remoto.

PALAVRAS-CHAVE: *Feedback* automático. GeoGebra. Ensino Remoto.

ABSTRACT

We present an activity proposal to be made on the GeoGebra platform and which contains exercises with automatic feedbacks. The motivation for the development of the activity stems from the fact that we know that activities in the context of remote education provide working conditions with more autonomy for the student. To substantiate a proposal, we first present a small review of feedback in educational contexts. Next, we provide guidance on objective issues. In the following section we present a study on errors in solving quadratic equations. Finally, we present the activity, explaining

---

[1] Doutor em Educação pela Universidade de Brasília (UnB). Professor adjunto da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Professor do PPGECIM (FURB). E-mail: j.cassio@ufsc.br. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5745-6610.

[2] Doutor em Educação Matemática pela Unesp de Rio Claro. Professor Adjunto II da Universidade Estadual do Paraná – campus Apucarana (Unespar). E-mail: sergio.dantas@unespar.edu.br. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7043-1664.

how it works, what feedbacks it has, when they appear and some guidelines on how it can be done. Although a systematic analysis has not yet been made regarding the activity's contributions to the teaching and learning process, the first experiments point out that the use of activities like this can help in the development of learning in remote teaching situations.

KEYWORDS: Automatic Feedback. Geogebra. Remote teaching.

Introdução

O texto que segue é o resultado das reflexões, leituras e pesquisas de dois professores que atuam na formação de professores de Matemática e que possuem experiências com recursos tecnológicos relacionados ao ensino e à aprendizagem de Matemática. Ele é também o resultado de nossas inquietações diante do ensino remoto que os professores da Educação Básica e do Ensino Superior tiveram que adotar por conta das medidas de distanciamento social para o controle da Pandemia do Covid-19.

O ano de 2020 foi um momento que marcou transformações radicais na forma de realizar nossas aulas e nossos encontros com os estudantes. Passamos por um período em que escolas e universidades suspenderam momentaneamente suas atividades para, logo em seguida, retomá-las de forma não presencial, o que foi e é chamado de ensino remoto. Para a realização do ensino remoto, foram empregadas estratégias diversas: utilização de vídeos, materiais textuais, interações em fóruns e em grupos de *WhatsApp*, enfim, diversos recursos que permitissem a continuação das aulas, das práticas de ensino e, principalmente, da aprendizagem dos alunos. É nesse cenário que passamos a elaborar, discutir e refletir sobre atividades e materiais que buscassem desenvolver maior autonomia dos estudantes em seus momentos de estudos individualizados. Nesse sentido, o objetivo deste artigo é apresentar um exemplo de atividade com *feedbacks* automáticos, alguns conceitos e estudos que nos ajudaram na sua elaboração e orientações de como usá-la.

Para abordar o tema que propomos, na primeira seção falamos sobre o *feedback* em contextos educativos e como ele pode ser utilizado em materiais disponibilizados em ambientes virtuais de aprendizagem. Em seguida, abordamos o estudo de questões objetivas e distratores. Esse tipo de questão nos permite construir atividades com um número definido de respostas e nos interessava prever as possíveis causas das respostas erradas para poder fornecer dicas e/ou *feedbacks* automáticos nos materiais elaborados.

Para desenvolvermos a atividade, foi necessário também concentrar nossas discussões a partir de um tópico específico do conhecimento matemático. Nossa escolha foi a resolução de equações polinomiais de 2º grau. Essa escolha é justificada por sua relação com outros tópicos internos à Matemática e com outras áreas de conhecimento. Assim, dedicamos uma seção do texto para compreender ações dos estudantes quando envolvidos na resolução de equações do 2º grau com o emprego da fórmula de Bhaskara. Para tanto, nos apoiamos nos estudos que discutem os principais erros cometidos pelos estudantes.

Na seção seguinte, apresentamos um exemplo de atividade sobre equações quadráticas que consiste em um conjunto formado por um vídeo, textos instrutivos e questões em formatos de *applets* que contém *feedbacks* automáticos em formato de mensagens de ajuda e indicações de acertos ou erros. Em seguida, discutimos algumas questões técnicas que são úteis na elaboração da proposta, sem a preocupação de aprofundamento nas ferramentas utilizadas.

O nosso desejo é que as reflexões iniciais que apresentamos, neste texto, funcionem como disparadores de ideias e provocações para promover um debate em torno da temática: materiais didáticos com *feedbacks* automáticos.

Feedbacks automáticos: definição, características e algumas classificações

O *feedback* no contexto educativo é uma forma de dar retorno ao aluno no processo de resolução de uma atividade proposta. De certa forma, trata-se de uma informação transmitida ao aluno sobre seu desempenho em uma tarefa de aprendizagem. De acordo com Narciss (2008), citado por Costa *et al.* (2016, p. 2), o *feedback*

> deve prover informações para orientar o estudante na conclusão bem-sucedida de uma atividade proposta, sem oferecer imediatamente a resposta correta da solução. Tal conceito é melhor aplicado em atividades cujas soluções são criadas em etapas (como soluções de equações matemáticas) e em atividades nas quais os estudantes possam ter a oportunidade de realizar mais de uma tentativa para solucioná-las (como questões de múltipla escolha).

Em nossa compreensão o objetivo fundamental dos *feedbacks* é melhorar a aprendizagem do estudante. De acordo com Costa *et al.* (2016, p. 2)

> o *feedback* pode contribuir para uma ação reflexiva por parte do estudante e para sua aprendizagem, pois ressalta alguma discrepância entre o resultado pretendido e o esperado, incentivando a revisão, ou ainda apontando os comportamentos adequados, motivando o estudante a repetir o acerto.

No contexto de educação *online*, o *feedback* pode ampliar seu potencial de contribuição tendo em vista as possibilidades oferecidas pelos sistemas computadorizados de apoio à aprendizagem (ambientes virtuais de aprendizagem, micromundos, sistemas de inteligência artificial, entre outros). Nesse contexto, o *feedback* pode ser considerado como qualquer informação apresentada ao estudante após qualquer entrada, com o objetivo de moldar as suas percepções (MORY, 2004).

Há diferentes formas de classificar os *feedbacks*. Narciss (2013) apresenta alguns tipos que podem ser usados em ambientes computacionais, dentre eles:

1) Conhecimento do desempenho – oferece ao estudante informações sobre o nível de seu desempenho em uma atividade, por exemplo, percentual de acertos.

2) Conhecimento do resultado – apresenta ao estudante apenas a informação sobre a correção da atividade, “correta” ou “incorreta”.

3) Conhecimento da resposta correta – oferece ao estudante a resposta correta da atividade.

4) *Feedback* elaborado – fornece informações mais elaboradas com o objetivo de ajudar o estudante em sua atividade, tais como: dicas, exemplos, explicações e indicações de erros.

Nessa classificação, nos parece faltar um tipo de *feedback* que contemple aspectos motivacionais e de interação. Na classificação sugerida por Cardoso (2011), há *feedbacks* motivacionais/interacionais que buscam oferecer um apoio motivacional em resposta a uma interação do estudante. Costa *et al.* (2016) propõem um modelo conceitual para *feedback* pedagógico. Nesse modelo, há uma dimensão relacionada com o conteúdo do *feedback*:

> componente avaliativa diz respeito às mensagens que fornecem informações sobre a avaliação do desempenho do estudante. A componente interacional se refere às mensagens cujo objetivo é fornecer conselhos práticos e específicos sobre como o estudante deve proceder para concluir sua tarefa ou evitar os erros cometidos [Dennis et al. 2016]. Já a componente motivacional visa oferecer um suporte emocional ao estudante durante ou após a resolução de atividades, em sistemas computacionais esta componente pode estar vinculada a elementos de gamificação. (COSTA *et al.,* 2016, p. 12).

Nesse mesmo modelo, também há uma dimensão relacionada à apresentação. Segundo Costa *et al.* (2016, p. 12), há “três formas de exibição da mensagem, quais sejam: texto discursivo (dicas e explicações), apresentação visual (vídeos, imagens, animações, entre outros) e apresentação multimodal (uso conjunto de vários modos de apresentação)”.

Quanto ao momento em que o *feedback* é oferecido, Shute (2008) classifica como *feedback* imediato aquele que o estudante recebe logo após responder a uma questão ou realizar uma tarefa ou uma ação. Em ambientes virtuais de aprendizagem, por exemplo, o estudante pode receber o resultado de uma avaliação composta por questões objetivas logo após sua conclusão. É comum, nesses casos, o estudante ser informado sobre seu desempenho e sobre quais questões acertou ou quais errou. Já o *feedback* adiado é aquele que o estudante recebe algum tempo após a realização de uma tarefa. Esse é tipo de *feedback* fornecido ao estudante quando ele recebe em um segundo momento, as impressões do professor sobre sua produção.

Os *feedbacks* em ambientes computacionais podem ser automáticos. Nesse caso, há fatores que podem influenciar a dificuldade na produção do *feedback*. Por exemplo, quando se tem uma tarefa composta apenas por questões objetivas, pode-se emitir uma mensagem de *feedback* dando conta de correções do tipo "certo" ou "errado", incrementando uma justificativa e um parecer de erro ou fornecer informações sobre a qualidade do acerto. Por outro lado, em questões abertas, a automatização do *feedback* oferece uma certa dificuldade, principalmente devido à imprevisibilidade das respostas dos estudantes (FILATRO, 2008).

A proposta que apresentamos neste texto faz uso de questões objetivas, ou seja, aquelas com uma única resposta correta. Porém, nos debruçamos em compreender as respostas incorretas que os estudantes podem oferecer e suas possíveis causas para, aliado a essa compreensão, propor orientações e *feedbacks* aos estudantes que os ajudem em suas produções de conhecimentos. Desse modo, necessitamos de noções sobre a elaboração de questões objetivas e isso será apresentado na próxima seção.

Elaboração de questões objetivas

Nesta seção do texto, tratamos sobre o que são questões objetivas e o que, geralmente, é levado em consideração na elaboração desse tipo de questão. Antes, porém, convém ressaltar que questões objetivas são, em geral, aquelas que permitem uma única resposta. Nesse tipo de questão, em geral, são apresentadas alternativas em que uma delas corresponde à resposta e as demais correspondem aos distratores. Esse tipo de questão é também chamado de questão de múltipla escolha. Elas são muito empregadas em provas de vestibulares e de concursos, pois permitem aos avaliadores uma maior facilidade e agilidade na correção em relação aos outros tipos de questões. Esse é o caso de questões abertas, ou seja, aquelas em que o resolvedor pode apresentar, de diferentes formas, uma resposta, que pode ser considerada correta ou incorreta após a leitura e análise do avaliador.

Segundo o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira - INEP (BRASIL, 2010), órgão responsável pela elaboração de avaliações de larga escala como ENEM e SAEB[3], uma questão de múltipla escolha deve conter três elementos básicos: texto base (situação-problema), enunciado e alternativas.

O texto base tem a função de apresentar certo contexto e uma problemática que envolva o leitor. Ele descreve uma situação e apresenta dados ou informações que devem ser considerados no momento da resolução da questão. O enunciado corresponde a um texto de uma ou duas linhas que, de forma objetiva, se traduz em um comando ou algo proposto a partir do texto base. As alternativas se dividem em dois grupos. O primeiro grupo com apenas um item corresponde à resposta correta ao que é proposto no enunciado e o segundo grupo contém os itens incorretos e são chamados de distratores. Os itens incorretos não podem ser elaborados de forma aleatória, ou seja, sem nenhuma relação com o que é proposto no texto base e no enunciado. Assim, eles funcionam como distratores que indicam as alternativas incorretas à resolução da situação-problema proposta. Além disso, essas respostas devem ser plausíveis, isto é, devem parecer corretas para aqueles participantes do teste que não desenvolveram a habilidade em questão (BRASIL, 2010, p. 11).

Na questão apresentada na Figura 1, destacamos o texto base, o enunciado e as alternativas.

Figura 1 - Exemplo de questão de múltipla escolha

texto-base	Um campeonato é disputado em 2 turnos, cada clube jogando duas vezes com cada um dos outros. O total de partidas é 306.
enunciado	Quantos clubes estão no campeonato?
alternativas	a) 17 b) 18 c) 153 d) Não há solução e) Nas condições do campeonato, ele pode ter 17 e, também, 18 times em disputa

Fonte: adaptado de Lima *et al* (2006)

[3] Avaliações de larga escala são provas elaboradas e aplicadas por órgãos externos a escola que visam, no caso do ENEM e do SAEB, emitir informações sobre conhecimentos específicos dos estudantes.

A alternativa *b* corresponde à resposta ao enunciado dessa questão. Para encontrar tal resposta, pode-se partir da hipótese do texto base de que cada time joga com todos os demais. Então, considerando-se que há *x* times, eles enfrentarão os demais *x* – 1 times em 306 partidas. A tabela 1 detalha a resolução da equação assim obtida.

Tabela 1 - Etapas da solução

Etapa	Algoritmo
1	$x \cdot (x-1) = 306$
2	$x^2 - x - 306 = 0$
3	$x = \dfrac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-306)}}{2}$
4	$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1225}}{2}$
5	$x = \dfrac{1 \pm 35}{2}$
6	$x_1 = 18$ e $x_2 = -17$

Fonte: Lima et al. (2006)

Após concluir a resolução, desconsidera-se o valor negativo. Portanto, 18 clubes participam do campeonato.

Restam, portanto, as demais alternativas *a*, *c*, *d* e *e*. O que possivelmente foi considerado pelo elaborador da questão para elencar os valores apresentados nesses itens? Em outras palavras, o que o elaborador antecipou como possibilidade de uso inadequado de um dado conceito, uma interpretação equivocada, um cálculo incorreto, entre outros, que poderia ser realizado pelo resolvedor? Exploramos as possibilidades a seguir.

A resposta 17 apresentada na alternativa *a* foi elaborada em função de o resolvedor cometer um equívoco no passo três. Ele poderia escrever $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4 \cdot (1) \cdot (-306)}}{2}$, ou seja, ao obter os dados da equação quadrática utiliza *b* = 1, ao invés de *b* = -1. Assim, ao final, realizando os cálculos corretamente, ele deve obter $x = \frac{-1 \pm 35}{2}$, e finalmente, $x_1 = 17$ e $x_2 = -18$.

Para obter como resposta 153 correspondente à alternativa *c*, o resolvedor considera que, como são dois turnos em que dois times se enfrentam duas vezes, então divide o total de partidas por 2. Assim, ao dividir 306 por 2, obtém-se 153.

Já, para obter como resposta a alternativa *d* em que não haveria solução, o resolvedor da questão consideraria uma quantidade *x* de times que enfrenta os demais $x - 1$ times, ou seja, $x(x-1)$. Porém, divide a expressão anterior por 2 e a iguala à quantidade de partidas, por serem dois turnos, obtendo $\frac{x\cdot(x-1)}{2}=306$ que pode ser reduzido à equação $x^2-x-612=0$, obtendo o discriminante $\Delta\ =1-4.(1)(612)=-2447<0$. Como o discriminante é negativo, a equação não teria solução no conjunto dos números reais.

Também se pode obter $\frac{x\cdot(x-1)}{2}=306$ quando se recorre às noções de análise combinatória. Nesse caso, parte-se da hipótese de que há *x* times que se enfrentam dois a dois. Assim, estabelece-se uma equação por combinação de *x* elementos dois a dois e iguala-se a 306:

$$C_2^x=\frac{x!}{(x-2)!\cdot 2!}=\frac{x\cdot(x-1)}{2}=306$$

Se ao invés de dividir por 2, multiplica-se por 2 em uma interpretação análoga, $2\cdot x\cdot(x-1)=306$ e obter-se-ia $x^2-x-153=0$. O que culminaria com a seguinte solução: $x=\frac{1\pm\sqrt{613}}{2}$. Essa solução não faria sentido para o problema porque o número de partidas precisa ser inteiro positivo. Logo, o resolvedor poderia optar, de igual modo, pela alternativa *d*.

A alternativa *e*, ou seja, “nas condições do campeonato, ele pode ter 17 e, também, 18 times em disputa”, pode surgir como resposta pelo resolvedor compreender que a equação $x(x-1)=306$ possui como soluções $x_1=18$ e $x_2=-17$, conforme apresentado na resolução à alternativa *b*. Em uma interpretação equivocada, o resolvedor se atém aos valores absolutos das soluções da equação.

O exercício analisado anteriormente nos possibilita compreender ou fazer uma leitura sobre alguns caminhos que nossos alunos podem tomar na resolução de questões. Conhecer esses caminhos pode nos ajudar como professores na compreensão de suas demandas de aprendizagem, sobretudo no que diz respeito às dificuldades. Esse conhecimento é empregado por nós na análise que fazemos na seção seguinte, relacionada ao estudo de equações quadráticas.

Equações quadráticas

Um tópico matemático bastante explorado no Ensino Básico é a resolução de equações quadráticas (ou equações de 2º grau). Em geral, sua abordagem começa no 9º ano do Ensino Fundamental. Trata-se de um conteúdo que exige um nível de abstração superior ao de resolução de equações polinomiais de 1º grau. Ele é muito importante no que diz respeito às práticas internas do conhecimento matemático, porque é usado em diversos outros tópicos da área de conhecimento. É bastante comum vermos questões de trigonometria, geometria, funções, entre outros, em que o estudante precisará resolver uma equação quadrática para resolver um problema. Tal conteúdo é também bastante usado em física, como, por exemplo, em problemas que envolvem lançamento oblíquo.

Existem várias técnicas para resolver equações quadráticas. Todavia, uma bastante explorada é a que faz uso da fórmula de Bhaskara. Em geral, tal técnica consiste em identificar os coeficientes da equação quadrática, calcular o valor do discriminante (delta Δ) e, em seguida, substituir na equação $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ os valores encontrados anteriormente para, então, calcular o(s) valor(es) de *x*.

Nabais (2010) investigou as dificuldades dos estudantes na resolução de equações quadráticas:

> Na utilização da fórmula resolvente, tenho verificado que as principais dificuldades advêm da não associação entre esta e os coeficientes dos termos da equação do 2° grau, escrita na forma canónica. Se na equação já reduzida o polinómio do 2° grau não se encontrar ordenado por ordem decrescente dos graus dos monômios, ou se o coeficiente do termo do 1° grau for negativo, as dificuldades acrescem. Os alunos evidenciam, também, com alguma frequência, dificuldades de associação entre o símbolo "±", presente na fórmula resolvente, e a eventual existência de duas raízes para a equação e, por vezes questionam-me se "mais ou menos" quer dizer que vamos obter como soluções valores aproximados e não valores exactos. Não posso também deixar de mencionar as dificuldades que muitos alunos mostram em fazer traduções entre as linguagens natural e simbólica (NABAIS, 2010, p. 5).

Algumas dificuldades relacionadas com a identificação dos coeficientes podem ser exemplificadas por meio dos seguintes erros:

1) Dada a equação $x^2 - 4 = 0$, o estudante considera $a = 1, b = -4$ e $c = 0$. Ou seja, considera que o b é sempre o segundo coeficiente da equação.

2) Dada a equação $-4 + 5x + 2x^2 = 0$, o estudante considera $a = -4, b = 5$ e $c = 2$. Ou seja, considera que os coeficientes a, b e c são determinados pela ordem em que aparecem.

3) Dada a equação $x^2 + 3x - 4 = 0$, o estudante considera $a = 0, b = 3$ e $c = -4$. Ou seja, como o coeficiente de x^2 é igual a 1 e não está explícito na equação, então o estudante toma $a = 0$.

4) Dada a equação $x^2 + 6x - 5 = 0$, o estudante considera $a = x^2, b = 6x$ e $c = -5$. Ou seja, considera que a é o primeiro termo do polinômio, b é o segundo e c é o terceiro;

5) Dada a equação $-x^2 - 7x + 5 = 0$, o estudante considera $a = 1, b = 7$ e $c = 5$, ou seja, não considera o sinal negativo dos coeficientes.

Algumas dificuldades relacionadas com o cálculo do discriminante podem ser exemplificadas por meio dos seguintes erros:

1) Dada a equação $x^2 - 4x + 4 = 0$, o estudante faz $\Delta = -4^2 - 4.4 = -32$. Ou seja, não considera o sinal negativo ao fazer o cálculo da potência.

2) Dada a equação $x^2 - 4x + 4 = 0$, o estudante faz $\Delta = (-4)^2 + 4.4 = 32$. Ou seja, não considera o sinal negativo da fórmula para o cálculo do discriminante.

3) Dada a equação $2x^2 + 4x = 0$, o estudante faz $\Delta = (4)^2 + 4.2 = 16 + 8 = 24$. Ou seja, quando *c* = 0, acaba desconsiderando o *c* da fórmula do cálculo do discriminante.

Algumas dificuldades relacionadas com o uso da parte final da fórmula de Bhaskara podem ser exemplificadas por meio dos seguintes erros:

1) Dada a equação $x^2 - 4x + 3 = 0$, o estudante faz $x = \frac{-(-4) \pm 4}{2}$, ou seja, não considera o $\sqrt{\Delta}$ da fórmula.

2) Dada a equação $x^2 - 4x + 3 = 0$, o estudante faz $x = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2}$, ou seja, não considera o sinal negativo do b da fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

3) Dada a equação $2x^2 - 8x + 6 = 0$, o estudante faz $x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{16}}{2}$, ou seja, não considera o a do denominador da fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

4) Dada a equação $2x^2 - 32 = 0$, o estudante faz $x = \frac{\sqrt{256}}{4}$, ou seja, não considera o $\pm$ da fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Em nossa compreensão, tais erros não podem garantir que há falta de compreensão quanto ao uso da fórmula. Muitas vezes, eles podem ocorrer por simples falta de atenção. Por outro lado, tais erros são bastante comuns e em muitos testes são usados como distratores. O conhecimento dos distratores pode ser valioso na produção de atividades que buscam oferecer *feedbacks* mais personalizados. Dessa forma, como criar atividades que possam ajudar a identificar tais erros no momento em que o estudante está cometendo-os? Como criar atividades que não impeçam a possibilidade do estudante cometer um erro, mas que possam dar *feedbacks* adequados para que ele perceba, compreenda o erro e possa realizar os cálculos corretamente? No tópico seguinte, mostraremos um exemplo de atividade que busca responder essa questão.

Atividade de Equações quadráticas no GeoGebra

Neste tópico, apresentamos e discutimos a atividade[4] que desenvolvemos na plataforma GeoGebra para a compreensão da resolução de equações quadráticas, usando a fórmula de Bhaskara. A atividade contém *applets*, vídeos e perguntas abertas e fechadas.

A Figura 2 mostra que, primeiramente, buscamos apresentar o que caracteriza uma equação do 2º grau por meio da definição e de exemplos. Em seguida, buscamos apresentar o que seria resolver uma equação quadrática.

Figura 2 - O que é uma equação do 2º grau? O que é resolver uma equação do 2º grau?

Equação do 2º Grau

Autor: Jorge Cássio

Tópico: Equações

O que é uma equação do 2º grau?

A **equação do 2º grau** é caracterizada por um polinômio de **grau 2**, ou seja, um polinômio do tipo ax^2+bx+c, em que *a*, *b* e *c* são números reais, com *a* $\neq$ 0. A seguir, mostramos alguns exemplos:

a) $x^2-3x+4=0$
b) $5x^2-3=0$
c) $x^2=0$
d) $-5x^2-30x=0$

O que é resolver uma equação do 2º grau?

Resolver uma equação do 2º grau é encontrar valores para a incógnita *x* que torne a igualdade verdadeira. Esses valores são chamados de raízes da equação. Por exemplo, $x=1$ ou $x=3$ são raízes da equação $x^2-4x+3=0$, pois se substituirmos os valores de x na equação e efetuarmos os cálculos, encontramos 0 como resultado:

$1^2-4.1+3=0$
$3^2-4.3+3=0$

Fonte: os autores

Em seguida, propomos uma questão para verificar se os estudantes compreendem como determinar se um número é ou não uma solução de uma equação do 2º grau.

Figura 3 - Exercício 1 da atividade

Exercício 1

Marque as alternativas em que os valores de x são raízes das equação dadas:

Assinale a sua resposta aqui

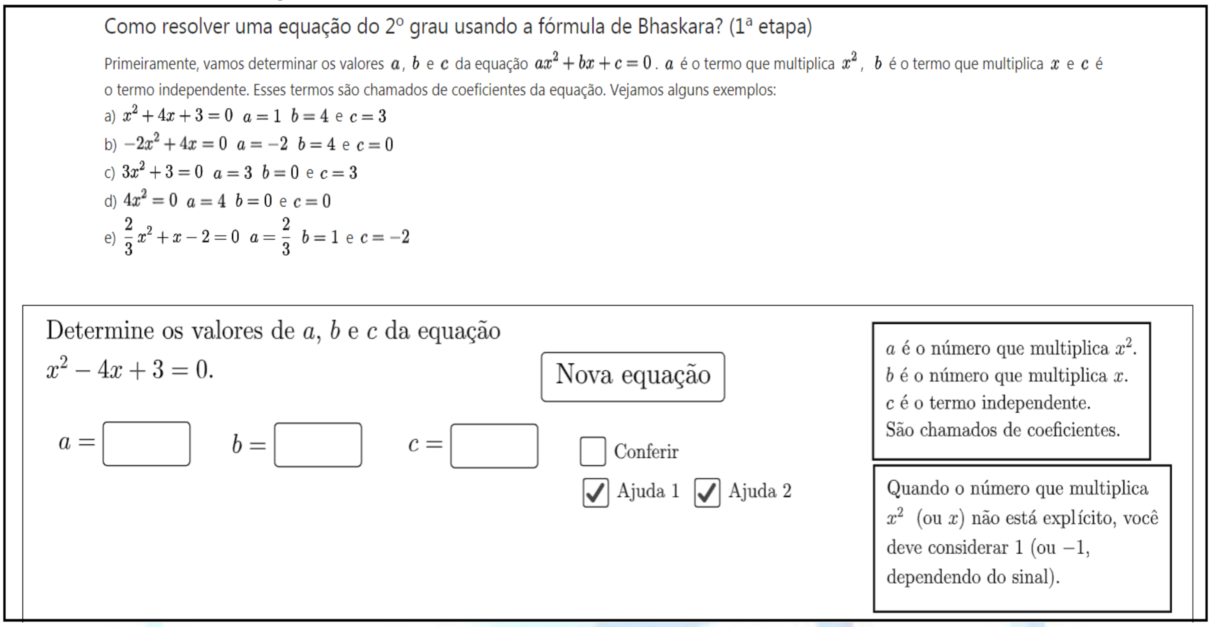
- ☐ $x=-1$ ou $x=3$
  equação: $x^2-2x-3=0$
- ☐ $x=1$ ou $x=0$
  equação: $-x^2+2x-1=0$
- ☐ $x=-2$ ou $x=2$
  equação: $x^2-4=0$
- ☐ $x=1$ ou $x=2$
  equação: $x^2-2x+4=0$

Fonte: os autores

[4] Disponível em https://www.geogebra.org/m/cyypnzqj . Acesso em10 de fevereiro de 2021.

Após isso, passamos para a abordagem do método de resolução da equação quadrática, usando a fórmula de Bhaskara. Isso foi feito em etapas. A 1ª etapa foi a identificação dos coeficientes *a*, *b* e *c* da equação. Para isso usamos um texto com exemplos e um *applet* em que o estudante deveria digitar os valores dos coeficientes de uma equação quadrática dada.

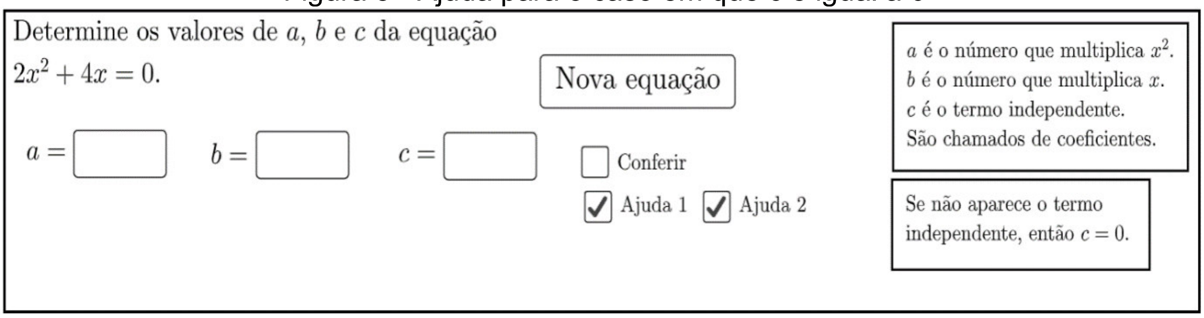
Figura 4 - Exercício para identificação dos coeficientes



Fonte: os autores

Na Figura 4, é possível perceber que o estudante tem a possibilidade de marcar duas caixas de Ajuda. Essas ajudas têm características do *feedback* elaborado (NARCISS, 2013). A primeira ajuda é padrão para todas as equações que podem aparecer no *applet* da atividade. Já a segunda ajuda varia em função da equação apresentada na atividade. Na Figura 4, o valor de *a* não está explícito na equação. Assim, a Ajuda 2 busca auxiliar o estudante quanto ao que ele pode fazer nesse caso. A Figura 5 mostra outro exemplo de Ajuda 2. Nesse caso, o valor de *c* não está explícito na equação e a ajuda auxilia o estudante sobre o que ele pode fazer nesse caso.

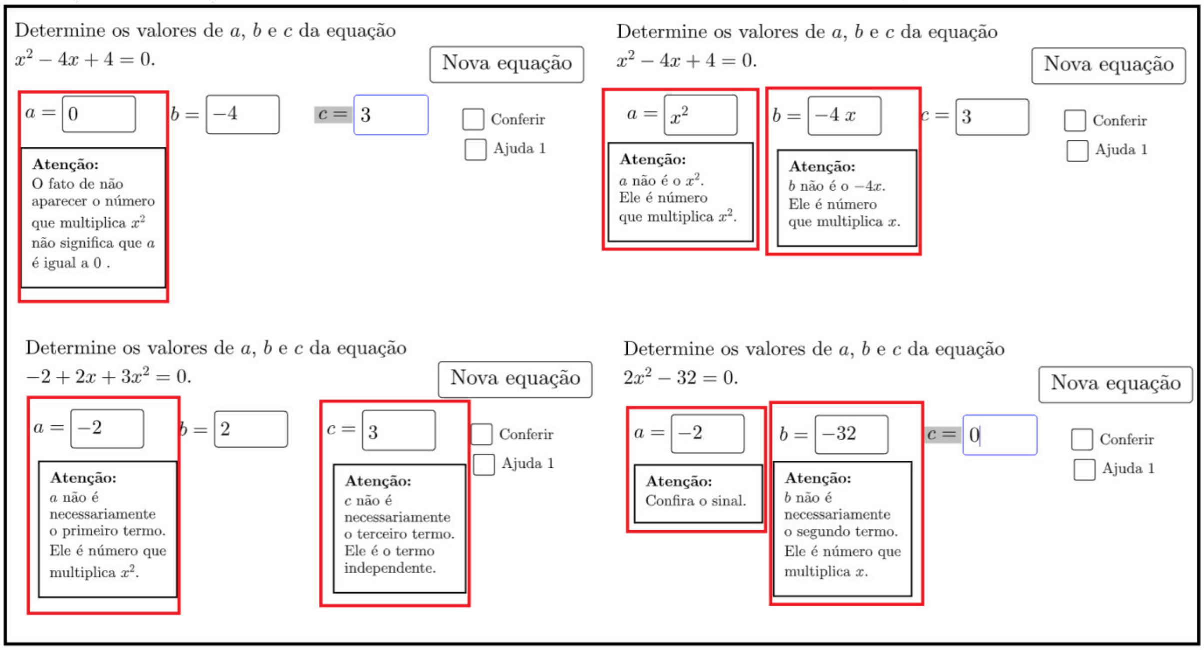
Figura 5 - Ajuda para o caso em que c é igual a 0



Fonte: os autores

Esse *applet* contém alguns *feedbacks* automáticos para alguns possíveis erros cometidos pelos estudantes. Tratam-se também de *feedbacks* elaborados (NARCISS, 2013). Eles foram planejados a partir dos distratores que apontamos na seção anterior. Vejamos alguns exemplos na Figura 6.

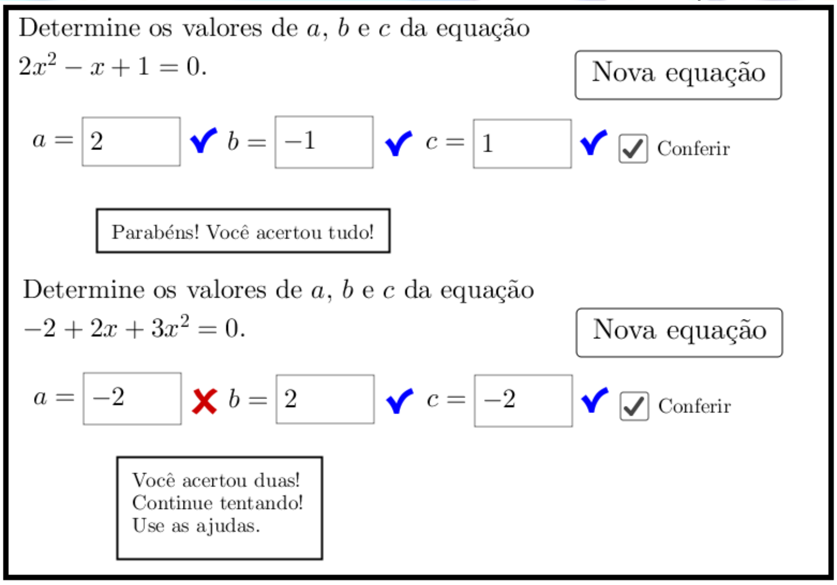
Figura 6 - Alguns *feedbacks* automáticos sobre erros na identificação dos coeficientes



Fonte: os autores

Quando o estudante preenche os campos de entrada e marca a caixa Conferir, aparece um *feedback* de Conhecimento do Resultado que é representado com um “x” ou “v”. Aparece também um *feedback* de Desempenho (NARCISS, 2013), integrado com *Feedback* motivacional/interacional (CARDOSO, 2011).

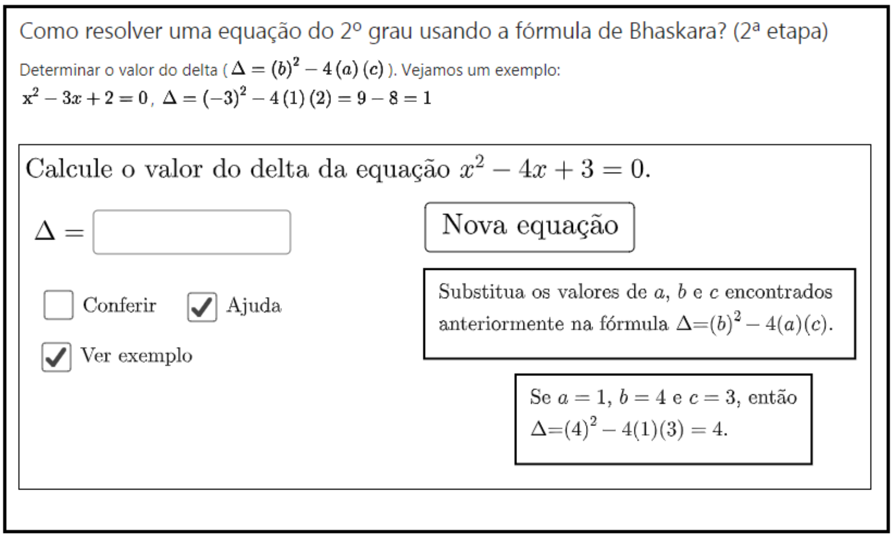
Figura 7 - *Feedback* de Conhecimento do Resultado, de Desempenho e Motivacional



Fonte: os autores

Após a etapa de identificação dos coeficientes, passamos para a etapa de cálculo do discriminante. A Figura 8 mostra um texto com uma breve explicação sobre como calcular o discriminante, um exemplo e um *applet* em que o estudante pode solicitar uma ajuda. Tratam-se de *feedbacks* elaborados (NARCISS, 2013).

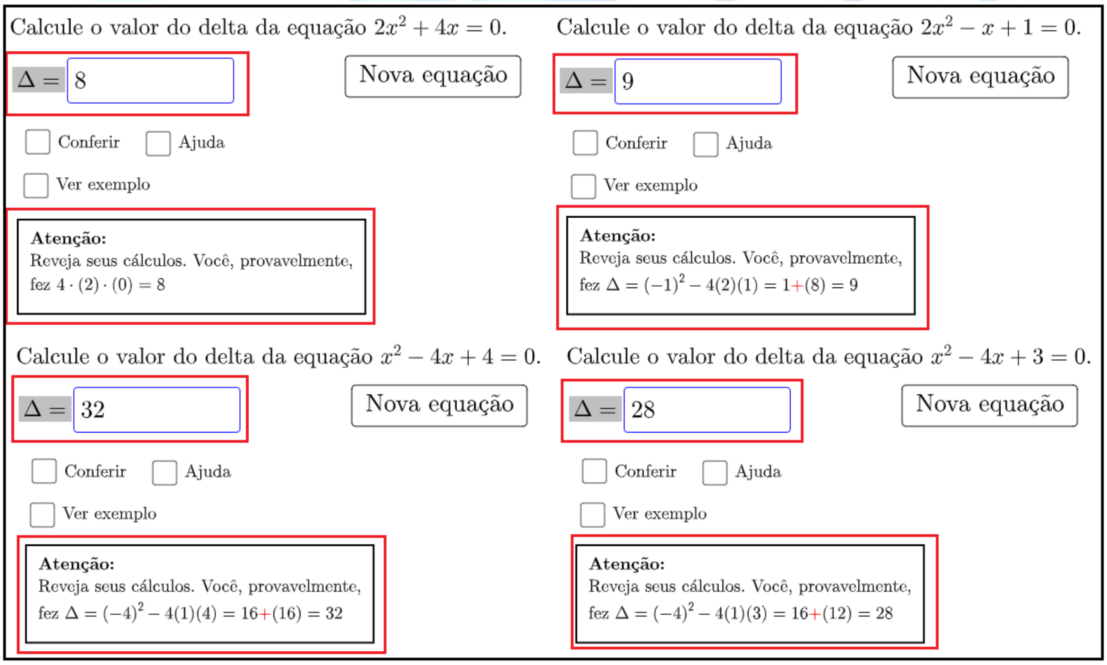
Figura 8 - 2ª etapa da resolução da equação quadrática



Fonte: os autores

Esse *applet* também contém alguns *feedbacks* elaborados (NARCISS, 2013) para alguns possíveis erros cometidos pelos estudantes. Tais *feedbacks* foram desenvolvidos a partir dos distratores que apontamos na seção anterior. Vejamos alguns exemplos na Figura 9.

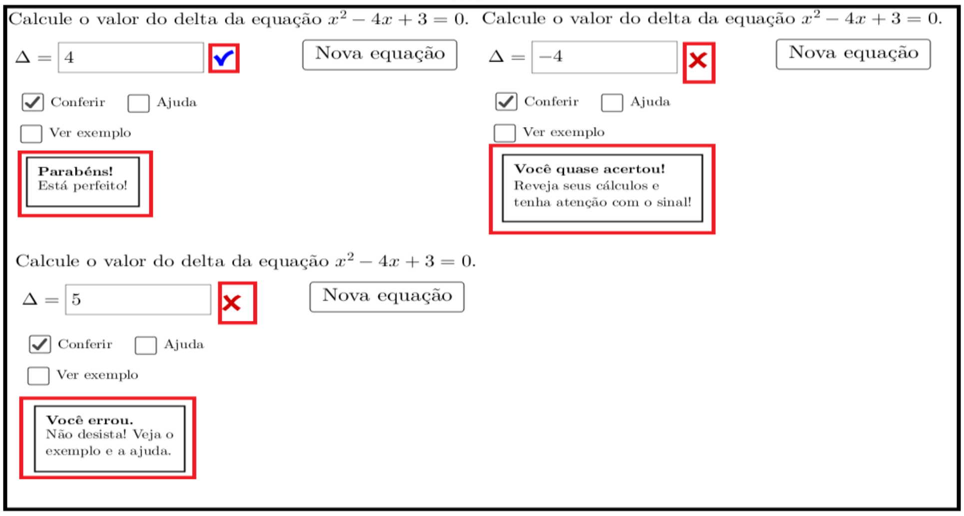
Figura 9 - Alguns *feedbacks* automáticos sobre erros cometidos pelos estudantes no cálculo do discriminante



Fonte: os autores

Também nesse *applet*, quando o estudante preenche os campos de entrada e marca a caixa Conferir, aparece o *feedback* de Conhecimento do Resultado que é representado com um “x” ou “v”. Aparece também um *feedback* de Desempenho (NARCISS, 2013), integrado com *Feedback* motivacional/interacional (CARDOSO, 2011).

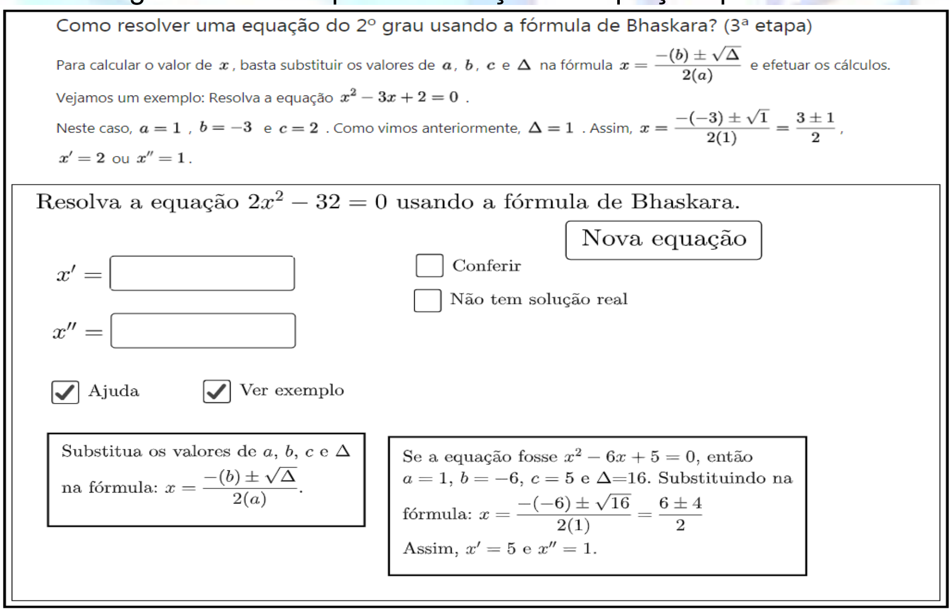
Figura 10 - *Feedback* de Conhecimento do Resultado, de Desempenho e Motivacional para o cálculo do discriminante



Fonte: os autores

Após a etapa do cálculo do discriminante, passamos para a etapa final do cálculo do valor de *x*. A Figura 11 mostra um texto com uma breve explicação sobre como calcular o valor de *x*, um exemplo e um *applet* em que é dada uma equação e dois campos de entrada para o estudante escrever os valores de *x*. O *applet* contém, também, um exemplo e uma ajuda (*feedbacks* Elaborados).

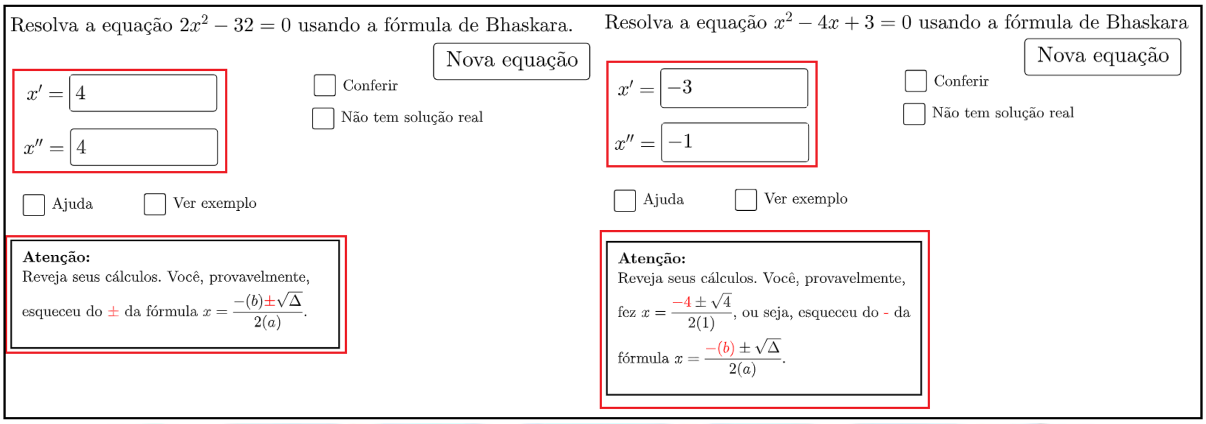
Figura 11 - 3ª etapa da resolução da equação quadrática



Fonte: os autores

Esse *applet*, assim como os anteriores, também contém alguns *feedbacks* automáticos para alguns possíveis erros cometidos pelos estudantes. Tais *feedbacks* Elaborados foram desenvolvidos a partir dos distratores que apontamos na seção anterior. Vejamos alguns exemplos na Figura 12.

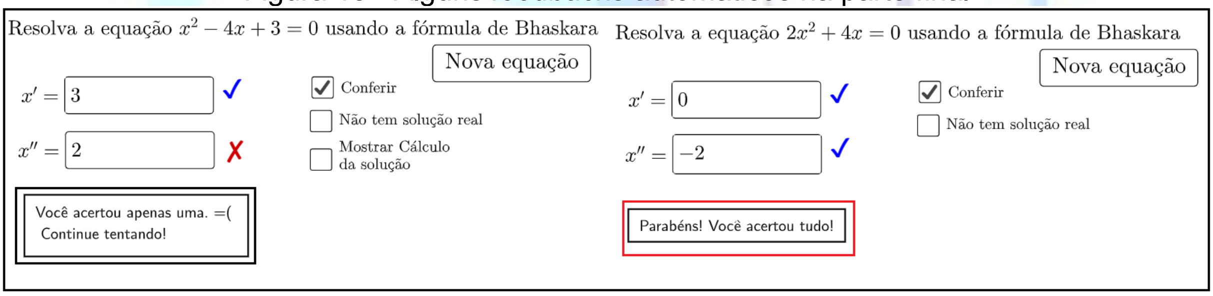
Figura 12 - Alguns *feedbacks* automáticos sobre erros cometidos pelos estudantes na parte final



Fonte: os autores

Também nesse *applet*, quando o estudante preenche os campos de entrada e marca a caixa Conferir, aparece *feedback* de Conhecimento do Resultado que é representado com um “x” ou “v”. Aparece também um *feedback* de Desempenho (NARCISS, 2013), integrado com *Feedback* motivacional/interacional (CARDOSO, 2011).

Figura 13 - Alguns *feedbacks* automáticos na parte final



Fonte: os autores

Nas figuras anteriores, mostramos alguns dos *feedbacks* que a atividade contém. Recomendamos que o leitor experimente a atividade para poder identificar mais *feedbacks*. É evidente que não tivemos a pretensão de colocar *feedbacks* para todos os possíveis erros cometidos pelos estudantes. Muito provavelmente, o leitor pode conhecer algum possível erro que não tínhamos previsto. Nesse sentido, estamos pensando em algum meio para poder receber sugestões dos professores e podermos implementar na atividade.

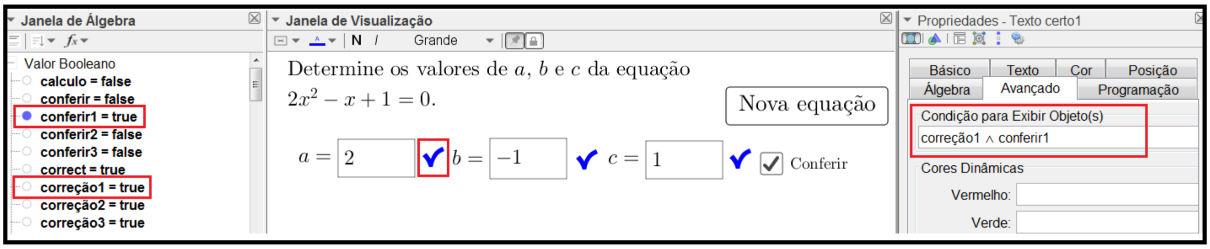
Como imaginamos que o leitor poderia ficar curioso sobre como fizemos os *applets*, decidimos falar brevemente sobre isso no tópico seguinte.

Algumas observações importantes sobre "Como fazer" uma atividade com *feedbacks* automáticos

Neste artigo, não apresentaremos detalhadamente, em termos técnicos, como construir uma atividade como a que foi apresentada. Caso o leitor tenha interesse, pode acessar o vídeo[5] para ter um bom exemplo de como criar uma atividade simples com *feedbacks* do tipo acertou, errou e mensagens de erros comuns. Aqui daremos apenas algumas dicas mais técnicas para quem pretende fazer atividades com *feedbacks* automáticos.

Em primeiro lugar, deixamos claro que não foi necessária nenhuma programação em *javascript*. Para que os *feedbacks* aparecessem, basicamente, usamos a ferramenta "Condição para Exibir Objeto". Com isso, um objeto só apareceria quando determinada condição fosse satisfeita. Vejamos um exemplo na Figura 14.

Figura 14 - Exemplo de condição para mostrar objeto



Fonte: os autores

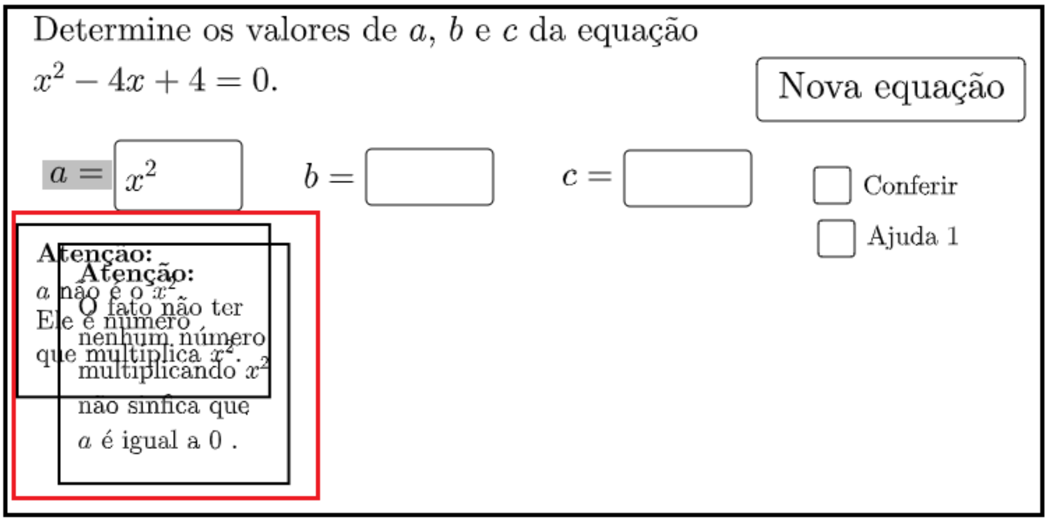
Na Figura 14, o primeiro  tem a condição "correção1∧conferir1". O sinal "∧" significa "e". Assim, "correção1" e "conferir1" têm que ser ambas satisfeitas para que o objeto apareça. Na janela de álgebra, podemos ver que "conferir1=*true*" e "correção1=*true*". O objeto "conferir1" é uma caixa para exibir/esconder objeto. Queríamos que o *feedback* dos objetos para "certo" ou "errado" só aparecesse quando o estudante clicasse na caixa "Conferir". Assim, quando essa caixa está marcada, o objeto é *true* e quando está desmarcada é *false*. O objeto "correção1" é "usera $\stackrel{?}{=}$ f" e pode ser interpretado da seguinte forma: "o valor que está dentro do campo de entrada é igual a f?"; f é a função *f(x)=a*, em que *a* é o coeficiente de x^2 da equação do problema. Uma pergunta natural seria: "Não bastaria colocar usera$\stackrel{?}{=}$ a?"

[5] Disponível em https://www.geogebra.org/m/tsqsn53u. Acesso em 20 de fevereiro de 2021.

Não bastaria, porque tínhamos que contar com a possibilidade do estudante digitar algo do tipo $2x^2$ no campo de entrada, pois era um tipo de erro previsível. Logo, “usera” é uma função de *x* e não apenas um número. Se definíssemos “usera” apenas como um número, o Geogebra não aceitaria uma entrada como função no campo de entrada.

Nas mensagens de *feedbacks* para os possíveis erros cometidos pelos estudantes também usamos “condição para exibir objeto”. Nesse caso, tivemos que testar várias vezes, porque percebemos que em alguns casos dois *feedbacks* diferentes poderiam aparecer em um erro cometido pelo estudante. Vejamos um exemplo na Figura 15.

Figura 15 - Dois *feedbacks* para uma resposta.



Fonte: os autores

Na Figura 15, os *feedbacks* “Atenção: o fato de não ter nenhum número multiplicando $\boldsymbol{x^2}$ não significa que *a* é igual a 0” e “Atenção: *a* não é o $\boldsymbol{x^2}$. Ele é número que multiplica $\boldsymbol{x^2}$ ” ficaram sobrepostos porque tínhamos colocado as seguintes condições:

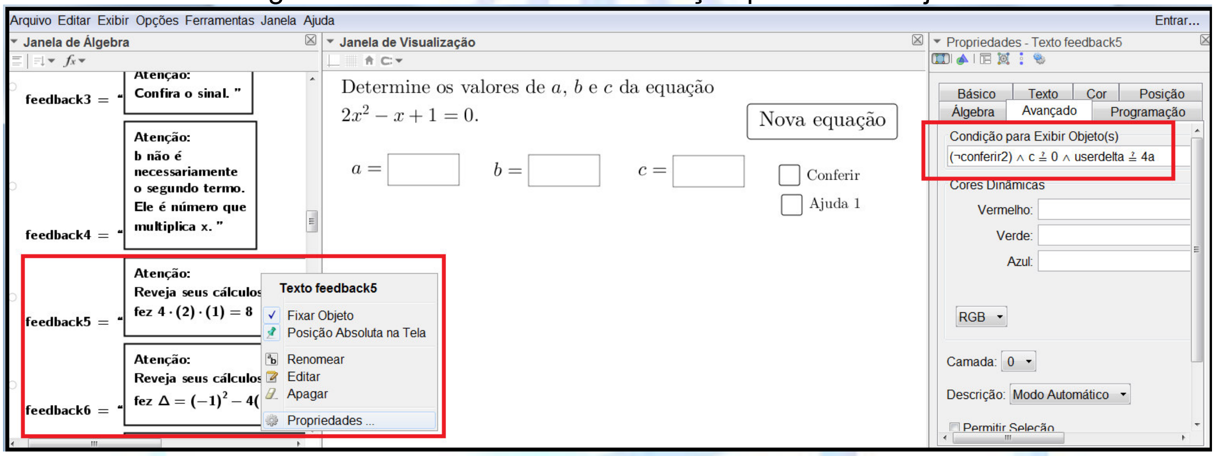
1º *Feedback*: ($\neg$conferir1) $\wedge$ usera(0) $\stackrel{?}{=}$ 0 $\wedge$ (a $\stackrel{?}{=}$ 1 $\vee$ a $\stackrel{?}{=}$ -1)

2º *Feedback*: ($\neg$conferir1) $\wedge$ usera $\stackrel{?}{=}$ g

No primeiro caso, “$\neg$conferir1” significa que, para a mensagem aparecer, o estudante não poderia ter marcado a caixa “Conferir”. Além disso, deveria ter digitado “0” no campo de entrada “usera” numa situação em que a equação do problema tem *a* igual a 1 ou -1. No segundo caso, “$\neg$conferir1” também significa que para a mensagem aparecer, o estudante não poderia ter marcado a caixa “Conferir”. Ainda deveria ter digitado uma função igual a g que é $\boldsymbol{g(x) = ax^2}$ (*a* é o coeficiente de $\boldsymbol{x^2}$ da equação do problema) no campo de entrada “usera”. Nesse caso, percebese que as condições para os dois *feedbacks* são satisfeitas quando o estudante digita x^2 no campo de entrada. Para resolver isso, mudamos a condição do 1º *feedback* para $(\neg \text{conferir1}) \wedge (a \overset{?}{=} 1 \vee a \overset{?}{=} -1) \wedge \text{usera} \neq g \wedge \text{usera}(0) \overset{?}{=} 0$.

Essa atividade tem 19 mensagens de *feedbacks* para possíveis erros cometidos pelos estudantes. Caso o leitor esteja interessado em saber quais foram as condições para mostrar cada uma delas, pode baixar o *applet* (abrir na versão *desktop*), mostrar a janela de álgebra, clicar com botão direito em cima do texto da mensagem, selecionar Propriedades e, em seguida, Avançado.

Figura 16 - Como localizar a condição para exibir objeto



Fonte: os autores

Para melhor compreender as condições, o leitor pode analisar as propriedades de cada objeto que aparecem na Condição para Exibir Objetos.

Considerações Finais

Embora não se tenha feito ainda experimentos formais de pesquisa com a atividade, alguns testes feitos com estudantes apresentam fortes indícios de contribuição para o processo de ensino e aprendizagem da matemática. Sobretudo, em situações de ensino em que o professor não pode acompanhar em tempo real o desenvolvimento da atividade feita pelo estudante. Atividades com *feedbacks* automáticos podem ser mais personalizadas e contribuir para diminuir a sensação de estar sozinho nos momentos de estudos individualizados, pois eles podem "simular" a presença do professor, auxiliando o estudante na tarefa de construção de conhecimentos, mesmo que o professor não esteja o acompanhando naquele momento. Além disso, também pode contribuir para a diminuição da demanda de trabalho do professor em situações de ensino remoto.

Ao ler esse artigo, é natural pensar que o desenvolvimento de uma atividade como essa demanda muito conhecimento técnico sobre o GeoGebra. Todavia, a maior dificuldade está em prever e compreender os possíveis erros cometidos pelos estudantes, tentando fornecer um *feedback* em uma mensagem pequena. O nosso maior desafio está sendo responder as seguintes questões: Como fazer uma mensagem sobre o erro cometido pelo estudante, buscando ajudá-lo a compreender o erro e fazer corretamente? Como fazer isso sem, necessariamente, fornecer a resposta? Nossa experiência como professores e os referenciais nos ajudaram muito na identificação e na decisão sobre os tipos de *feedbacks* que usaríamos em determinadas situações. Todavia, temos constatado que muito ainda precisa ser pesquisado sobre os conteúdos das mensagens do *feedback*. Estamos apenas começando e esperamos que esse artigo possa motivar professores e pesquisadores para o desenvolvimento de mais atividades com esses propósitos.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação, Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Guia de Elaboração de Itend**. Brasília: 2010.

CARDOSO, Ana Carolina Simões. Feedback em contextos de ensino-aprendizagem on-line. **Linguagens e Diálogos**, Rio de Janeiro, v. 2, n. 2, p. 17-34, 2011.

COSTA, Evandro *et al.* Modelos de Feedback para estudantes em Ambientes Virtuais de Aprendizagem. **Jornada de Atualização em Informática na Educação**, [S.l.], p. 1-38, nov. 2016. ISSN 23167734. Disponível em: https://www.br-ie.org/pub/index.php/pie/article/view/6594. Acesso em 03 de mar. 2021.

FILATRO, Andrea. **Design instrucional na prática**. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2008.

LIMA, Elon Lages *et al*. **A Matemática do Ensino Médio** (Volume 1). Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2006.

MORY, Edna Holland. Feedback Research Revisited. *In:* MORY, Edna Holland. **Handbook of Research for Educational Communications and Technology**. [S.l.]: Association for Educational Communications and Technology, 2004

NABAIS, Margarida Maria Saraiva. **Equações do 2.º grau***:* um estudo sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 9.º ano. 2010. Dissertação (Mestrado) - Universidade de Lisboa, 2010.

NARCISS, Susanne. Feedback strategies for interactive learning tasks. *In:* SPECTOR, J. M. *et al.* (Ed.)**. Handbook of research on educational communications and technology**. New York: Routledge, 2008. p. 125 – 144.

NARCISS, Susanne. Designing and Evaluating Tutoring Feedback Strategies for digital learning environments on the basis of the Interactive Tutoring Feedback Model. **Digital Education Review**, n. 23, p. 7- 26, 2013.

SHUTE, Valerie. Focus on Formative Feedback. **Review of Educational Research**, v. 78, n.1, p.153-189, 2008.

Submetido em março de 2021.

Aceito em abril de 2021.