

Geometria Fractal em Sala de Aula: Uma Revisão Sistemática Envolvendo a Taxonomia de Bloom

Fractal Geometry in the Classroom: A Systematic Review Involving Bloom's Taxonomy

Renata Lopes Alves¹

Eduardo Barrére²

RESUMO

As dinâmicas e exposições que envolvam objetos não euclidianos, como é o caso dos fractais, permitem conduzir os alunos a percepções até então escondidas por conceitos essencialmente euclidianos. Nesse sentido, insere-se esse artigo que possui como objetivo central investigar como tem sido proposto o ensino da geometria fractal em salas de aula no ensino básico. Serão apresentados brevemente os elementos que permeiam a fundamentação teórica da pesquisa no campo da Educação Matemática, a saber: ensino de fractais; tecnologias na Educação Matemática; e taxonomia de Bloom. Em seguida, expõe-se um panorama geral de uma revisão sistemática que buscou investigar tendências e concepções no ensino de geometria fractal, aplicando-se a taxonomia de Bloom como uma ferramenta de análise qualitativa dos objetos de aprendizagem, especialmente os objetos digitais. Dentre os resultados obtidos na investigação, constatou-se quais níveis cognitivos predominam nas intervenções e quais carecem de propostas didáticas envolvendo essa temática, revelando nesse aspecto, um campo de estudo a ser investido. Por fim são expostos as considerações finais e comentários relevantes.

PALAVRAS-CHAVE: Educação Matemática. Geometria Fractal. Taxonomia de Bloom. Revisão Sistemática. Objetos de Aprendizagem.

ABSTRACT

The dynamics and expositions that involve non-Euclidean objects, as is the case of fractals, allow us to lead students to perceptions that were until then hidden by essentially Euclidean concepts. In this sense, the main purpose of this article is to investigate how the teaching of fractal geometry has been proposed in elementary school classrooms. The elements that permeate the theoretical basis of this

¹ Universidade Federal de Juiz de Fora. E-mail: renatalopes.if@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7023-4345>.

² Universidade Federal de Juiz de Fora. E-mail: eduardo.barrere@ice.ufjf.br. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1598-5362>



research in the field of Mathematics Education will be briefly presented, namely: fractal teaching; technologies in Mathematics Education; and Bloom's taxonomy. Next, an overview is presented of a systematic review that sought to investigate trends and conceptions in the teaching of fractal geometry, applying Bloom's taxonomy as a tool for qualitative analysis of learning objects, especially digital objects. Among the results obtained in the investigation, it was found which cognitive levels predominate in the interventions and which lack didactic proposals involving this theme, revealing, in this respect, a field of study to be invested in. Finally, the final considerations and relevant comments are exposed.

KEYWORDS: Mathematical Education. Fractal Geometry. Bloom's Taxonomy. Systematic Review. Learning Objects.

Introdução

O campo de estudo da geometria fractal, apesar de recente e sua teorização datar a década de 70, vêm ganhando cada vez mais espaço no cenário educacional. Uma demonstração da sua relevância enquanto tema a ser abordado na educação básica é evidenciado nos documentos oficiais de orientações curriculares, onde se insere a Base Nacional Comum Curricular – BNCC, que aponta os fractais como uma ferramenta para analisar as produções humanas e os elementos presentes na natureza (BRASIL, 2017).

O emprego de novas tecnologias é uma tendência temática na área de Educação Matemática e têm subsidiado as propostas de ensino para além dos conteúdos tradicionais curriculares, onde se insere a geometria fractal. Dessa forma, são emergentes os estudos dedicados a investigar as potencialidades de ferramentas digitais/tecnológicas em abordagens de ensino como tal. O presente trabalho objetivou apresentar, a partir dos resultados de uma revisão sistemática de bibliografia, um panorama geral das produções neste âmbito, investigando como tem sido proposto o ensino de geometria fractal em salas de aula da educação básica.

Ocorre que as indicações curriculares da temática dos fractais, como a da BNCC, são ainda novatas e conseqüentemente o que se observa é que as propostas envolvendo abordagens da geometria fractal são ainda, de certo modo, principiantes e carecem de uma sistematização. Isto é, é possível notar com facilidade que na literatura existe um grande quantitativo de abordagens e relatos de experiências nesse campo; mas apesar disso, os esforços envolvendo análises qualitativas dessas propostas não acompanham essa tendência.

Os fractais são objetos em que cada parte é semelhante ao objeto como um todo. Isso significa que os padrões da figura inteira são repetidos em cada parte, porém em escala de tamanho menor. Os flocos de neve são exemplos de fractais: cada ramo do floco parece com o floco inteiro. Existe uma área da matemática que se dedica ao estudo dos fractais, chamada geometria fractal (MANDELROT, 1983).

Além dos fractais naturais, essas formas geométricas também podem ser obtidas através de processos matemáticos recursivos e funções iteradas, o que lhes confere complexidade infinita. Além disso, o ponto alto desta geometria reside na peculiaridade da dimensão de seus objetos. Diferente das dimensões euclidianas, onde as formas possuem dimensões inteiras, nesta geometria depara-se com objetos de dimensão fracionada, característica de suas irregularidades.

Contudo, a amplitude desses entes geométricos faz com que seu estudo não se restrinja apenas à matemática, sendo de interesse para as mais diversas áreas do conhecimento. Na medicina, uma comum aplicação consiste na identificação de patologias, como por exemplo, a dimensão fractal é utilizada para detectar irregularidades em núcleos atípicos de células do colo uterino (SEDIVY, 1999). Há ainda outros exemplos na área da Computação (MARTINS, 2006); Economia (HAYASHI, 2002) e desenvolvimento urbano (SOBREIRA, 2002).

Identifica-se no estudo da geometria fractal uma potencialidade para o ensino de matemática, por se tratar de um tema interdisciplinar e que pode ser estudado a partir de uma perspectiva teórica, computacional ou experimental. Além disso, é importante no que se refere à aproximação que os fractais apresentam da natureza, ampliando a noção geométrica da realidade. Assim, são justificáveis as iniciativas de levar o estudo da geometria fractal para a sala de aula (BARBOSA, 2012).

As dinâmicas e exposições que envolvam objetos não euclidianos, como é o caso dos fractais, permitem conduzir os alunos às percepções até então escondidas por conceitos essencialmente euclidianos. Contudo é evidente o déficit no que se diz respeito ao ensino de matemática na educação básica envolvendo fractais naturais e reais, o que não parece razoável considerando a riqueza do tema. O déficit se manifesta também nos cursos de formação de professores, o que contribui para uma possível justificativa da falta de intimidade que os mesmos possuem com a temática. (BORGES, 2017, LOVIS; FRANCO, 2015).

A investigação sobre como tem sido proposto o ensino da geometria fractal em salas de aula no ensino básico visa auxiliar a tomada de decisões na elaboração e estruturação de um objeto de aprendizagem, de tal forma que se manifesta como uma tarefa fundamental do processo. Fiorentini e Lorenzato (2006) corroboram com essa ideia, ao dizer que revisão acadêmica oferece sustentação à investigação além de aprofundar teoricamente o conhecimento.

No mais, o texto está organizado da seguinte forma: inicialmente apresenta-se a fundamentação teórica, onde são discutidos os pressupostos teóricos da

pesquisa. Em seguida são expostos os resultados gerais da Revisão Sistemática que buscou investigar o ensino de geometria fractal nas escolas de ensino básico. Por fim, alguns comentários relevantes e perspectivas futuras são apresentados.

Aspectos teóricos

Essa pesquisa tem por objetivo apresentar um panorama geral de uma revisão sistemática que buscou investigar tendências e concepções no ensino de geometria fractal em sala de aula, aplicando-se a taxonomia dos objetivos educacionais como uma ferramenta de análise qualitativa dos objetos de aprendizagem. Desta forma nessa seção serão apresentados os pressupostos teóricos que oferecem fundamentação para essa pesquisa, a saber: o ensino de fractais; as tecnologias na educação matemática; e a taxonomia de Bloom.

Ensino de Fractais

Antes mesmo de receberem esse nome, essas formas geométricas peculiares – fractais – já chamavam a atenção de estudiosos. Por exemplo, o Conjunto de Cantor - Georg Cantor (1845-1918); a curva de Hilbert - David Hilbert (1862-1943); o Triângulo de Sierpinski – Waclaw Sierpinski (1882-1969); a Curva de Peano – Giuseppe Peano (1858-1932), entre outros. Esses são exemplos clássicos conhecidos hoje pela literatura como “fractais precursores”.

Contudo, foi Benoît Mandelbrot, matemático e economista polonês, que em 1975 cunhou o termo fractal, que significa “fragmentado”. Sua famosa indagação “Qual a extensão do litoral da Grã-Bretanha?” evidenciou, a partir do seu caráter irregular, que a resposta varia de acordo com a escala adotada. A partir daí motivou os estudos desses entes, fundando a teoria dos fractais.

Desde então os estudos nessa área avançaram muito com os recursos computacionais disponíveis hoje em dia. Esses recursos possibilitam ampliação das imagens para melhor visualização, além de identificar os padrões com que as imagens se reproduzem. Nos fractais gerados por métodos computacionais, cada pequena parte do fractal é exatamente uma cópia da imagem original e pode ser obtido a partir de uma função específica.

Também é possível construir fractais utilizando apenas recursos geométricos. Por exemplo, partindo de um triângulo e dividindo-o em outros triângulos menores, todos eles semelhantes entre si, um grande desafio para serem representados e estudados matematicamente.

Frequentemente os fractais são estudados em diversas áreas do conhecimento, tendo aplicação na medicina, economia, meteorologia, etc.. Inclusive Mandelbrot iniciou seus estudos envolvendo objetos com características fractais ao se deparar com ruídos aleatórios em linhas telefônicas (BARBOSA, 2012).

Isso quer dizer que, assim como diversos outros conteúdos matemáticos que hoje são curriculares, sua origem advém de estudos amplamente aplicados e difundidos na comunidade científica. Essa constatação está presente nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN's (BRASIL, 1998), e exemplifica ainda com o surgimento dos números negativos, irracionais e complexos. Ainda neste documento, há uma menção clara à importância de geometrias não euclidianas com uma mudança de paradigma:

Uma instância importante de mudança de paradigma ocorreu quando se superou a visão de uma única geometria do real, a geometria euclidiana, para aceitação de uma pluralidade de modelos geométricos, logicamente consistentes, que podem modelar a realidade do espaço físico (BRASIL, 1998, p. 5).

Um dos desafios do professor de matemática, antes mesmo de "ensinar" a matemática, é fazer com que os alunos aprendam a gostar dela, com suas múltiplas características, entre elas: a lógica, a beleza e a diversidade de campos de aplicação. Isso envolve conduzir o aluno a uma descoberta, abrindo novos horizontes e mostrando que a matemática não é uma ciência pronta, acabada.

Nesse sentido, nota-se que a temática dos fractais se harmoniza com o que é proposto no ensino de conteúdos geométricos. Os PCN's apontam como atitudes relevantes explorar as construções geométricas, utilizando ferramentas como régua e compasso “como visualização e aplicação de propriedades das figuras, além da construção de outras relações” (BRASIL, 1998, p.51). Esses procedimentos considerados socialmente relevantes podem ter ainda suas contribuições potencializadas quando associadas às formas do mundo físico.

Além disso, a temática fractal também está presente em uma das habilidades propostas pela Base Nacional Comum Curricular, destacada a seguir, sendo referente à primeira competência para área de “Matemática e suas Tecnologias”:

Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras) (BRASIL, 2017, p. 533).

A escolha do tema Geometria Fractal foi ao encontro desses pressupostos, pois fascina pela beleza, é de fácil compreensão na sua essência, é notória na

natureza e abre um leque de opções no que diz respeito à abordagem de conhecimentos matemáticos, além de estimular o uso das tecnologias da informação e comunicação (TIC's). Sendo assim, o seu uso possibilita uma atuação diferente na sala de aula, transformando o aluno em sujeito ativo da sua aprendizagem.

Tecnologias na Educação Matemática

A trajetória da Educação Matemática no Brasil enquanto campo profissional de produção de saber apresentada por Fiorentini (1994) explicita como as linhas de pesquisa foram se desenvolvendo, ampliando-se a região de inquérito, até a constituição, de fato, de uma comunidade científica com práticas consistentes.

A consolidação da área de Educação Matemática enquanto um campo de pesquisa é um marco recente, atribuída à década de 90. Acompanhando essa trajetória de desenvolvimento estão os esforços em identificar e categorizar as tendências e linhas de pesquisa.

Auxiliando esse processo, em Fiorentini e Lorenzato (2001) são destacadas sete temáticas de investigação em Educação Matemática, consideradas relevantes nos anos 90. Na busca de referenciais teóricos que subsidiem o trabalho, faz-se necessário identificar, no âmbito das tendências em Educação Matemática, aquelas que melhor se adequam ao objetivo da pesquisa. Desse modo, de acordo com as denominações apresentadas pelos autores supracitados, este trabalho relaciona-se à tendência “Emprego de novas tecnologias no ensino de Matemática”, uma vez que objetivamos apresentar uma proposta didática que seja subsidiada por uma ferramenta digital.

Rezende (2002) em uma abordagem construtivista do uso de tecnologias para área educacional ressalta que a preocupação deve estar voltada não mais para responder se devemos ou não introduzi-las, mas sim, em como introduzi-las. Sobretudo, no contexto em que essa pesquisa está sendo desenvolvida, durante a pandemia de COVID-19, são fortemente justificáveis as iniciativas que se utilizam de objetos digitais e tecnológicos como ferramentas de apoio ao processo de ensino e aprendizagem em propostas pedagógicas.

Taxonomia de Bloom

Taxonomia em seu sentido etimológico pode ser entendida como um sistema de classificação ordenada. Amplamente conhecida no campo das ciências biológicas, essa prática, de modo geral, leva em consideração uma série de

características similares dos sujeitos e objetos de estudos diante da necessidade de categorizá-los.

Essa necessidade também se manifesta na área educacional. Um dos processos críticos da prática pedagógica é o momento da avaliação da aprendizagem. Para garantir que ela seja feita de forma coerente é necessário que os objetivos educacionais sejam bem definidos e postos de maneira explícita, não só ao educador (FERRAZ; BELHOT, 2010). Este é um exemplo de processo pedagógico em que o seu sucesso está intimamente atrelado a um bom planejamento, que antecede a própria execução.

A definição clara e estruturada dos objetivos instrucionais, considerando a aquisição de conhecimento e de competências adequados ao perfil profissional a ser formado direcionará o processo de ensino para a escolha adequada de estratégias, métodos, delimitação do conteúdo específico, instrumentos de avaliação e, conseqüentemente, para uma aprendizagem efetiva e duradoura (ibidem, 2010, p. 2).

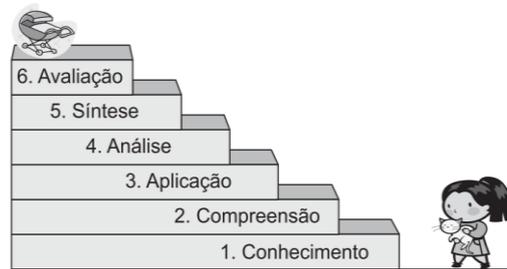
É comum que, quando os objetivos não são declarados explicitamente, haja o risco de que ocorram exigências superiores às compatíveis com o contexto e com as atividades planejadas. É nesse sentido que se insere a Taxonomia dos Objetivos Educacionais (BLOOM, 1956). Também conhecida como taxonomia de Bloom, que recebe esse nome graças ao seu idealizador Benjamim Bloom, surgiu na década de 50 como resultado de um projeto formado por uma comissão multidisciplinar de especialistas envolvendo diversas universidades dos Estados Unidos.

A classificação proposta por Bloom dividiu a aprendizagem em três domínios, a saber: Cognitivo, afetivo e psicomotor. O domínio cognitivo refere-se à aprendizagem intelectual, a dominar o conhecimento e desenvolver habilidades. O domínio afetivo está relacionado à inteligência emocional e processos de sensibilização, atribuição de sentimentos e valores. Por último, o domínio psicomotor preocupa-se com as habilidades físicas, relacionadas à execução de tarefas. (FERRAZ; BELHOT, 2010, OLIVEIRA, 2020).

Contudo, o eixo cognitivo é o mais estudado e representa o foco deste trabalho. Este é por sua vez subdividido em seis níveis interdependentes de aprendizagem e organizados de maneira hierárquica (Figura 1). Considera-se nessa taxonomia que os processos mentais evoluem de maneira linear. Isto é, são desenvolvidos de tal forma que parte-se do nível menos elevado de complexidade (Conhecimento) ao mais complexo (Avaliação), de tal forma que para ascender às

etapas pressupõe-se o acúmulo das capacidades desenvolvidas ao longo das etapas precedentes (LIMA, 2009).

Figura 1 - Níveis do domínio cognitivo proposto na Taxonomia de Bloom.



Fonte: Ferraz (2009, p. 424).

Os níveis de cognição são comumente organizados e identificados de acordo com os verbos que poderão estar presentes nos enunciados e comandos das questões propostas aos alunos. A organização verbal é uma maneira de facilitar o processo de elaboração de atividades adequadas aos objetivos educacionais.

O quadro a seguir, retirado de Lima (2009) apresenta uma breve descrição do que é esperado que o aluno desenvolva como habilidade em cada nível bem como os verbos associados a ele.

Quadro 1 - Descrição dos níveis cognitivos da Taxonomia de Bloom.

Nível	Desempenho	Amostra de Verbos
Conhecimento	O aluno irá concordar ou reconhecer informações, ideias, e princípios na forma (aproximada) em que foram aprendidos.	Escreva, liste, rotule, nomeie, identifique, cite e defina.
Compreensão	O aluno traduz, compreende ou interpreta informação com base em conhecimento prévio.	Explique, traduza, ordene, diferencie, resuma, parafraseie, descreva e ilustre.
Aplicação	O aluno seleciona, transfere, e usa dados e princípios para completar um problema ou tarefa com um mínimo de supervisão.	Use, desenvolva, compute, resolva, demonstre, aplique e construa.
Análise	O aluno distingue, classifica e relaciona pressupostos, hipótese, evidências ou estruturas de uma declaração ou questão.	Analise, classifique, categorize, deduza e separe.
Síntese	O aluno cria, integra e combina ideias num produto, plano ou proposta, novos para ele.	Crie, proponha, formule, modifique, planeje, elabore hipótese(s), invente, projete e desenvolva.
Avaliação	O aluno aprecia, avalia ou critica com base em padrões e critérios específicos.	Julgue, argumente, compare, contraste, recomende, critique e justifique.

Fonte: Lima (2009, p. 29)

A taxonomia de Bloom é direcionada para o desenvolvimento do aluno e auxilia a hierarquizar os processos pedagógicos. Sua aplicação nesse contexto representa o ponto de partida para muitas pesquisas educacionais. Portanto, serve como base para desenvolvimentos de estratégias e propostas educacionais, auxiliando na escolha de métodos, conteúdos e procedimentos.

Trajetória metodológica

Com o intuito de verificar como tem sido proposto o ensino de geometria fractal na educação básica, foi realizada uma Revisão Sistemática cujos resultados parciais serão apresentados a seguir. Esse mapeamento segue os procedimentos proposto em Nakagawa (2017) que subdivide o trabalho em 5 etapas: (i) Informações Gerais; (ii) Questões de Pesquisa (iii); Identificação de estudos; (iv) Seleção e avaliação de estudos; e (v) Síntese dos dados e apresentação dos resultados.

- **Objetivo da Pesquisa:**

O objetivo da pesquisa é investigar o Estado da Arte do ensino de geometria fractal no ensino básico. Isto é, identificar quais os procedimentos, conteúdos, recursos e metodologias mais frequentes adotados nas propostas de ensino que envolvam a temática. Para tal, no âmbito deste trabalho, buscou-se responder às seguintes questões de pesquisa:

1) Quais recursos tecnológicos têm subsidiado as propostas de ensino de geometria fractal na escola básica?

2) Baseado na taxonomia de Bloom, de que maneira os recursos tecnológicos têm subsidiado as propostas de ensino que envolvem a temática?

Vale ressaltar que no âmbito deste trabalho, no que diz respeito às considerações feitas ao ensino básico, refere-se especificamente às etapas do Ensino Fundamental e Ensino Médio, uma vez que a etapa da Educação Infantil foge ao escopo desta pesquisa.

- **Definição de Bases de Dados e string de busca:**

A escolha de bases de dados está diretamente relacionada aos termos de busca (string), de modo que diversos foram os testes realizados variando-se tanto a string quanto as bases de dados, a fim de se escolher as combinações que melhor se adequavam aos propósitos da investigação. Dessa forma, foram selecionadas as seguintes bases online: *SciELO*³, *Ibict Oasis Br*⁴ e *Google Scholar*⁵

Acrescenta-se ainda que a motivação da escolha das bases *SciELO* e *Ibict Oasis Br* se justifica por serem bases as quais a Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF) possui assinatura e, dessa forma, facilita o acesso aos textos publicados. Já o Google Scholar justifica-se por ser uma plataforma de busca de trabalhos acadêmicos bem difundida e de fácil manuseio.

³ Disponível em: < <https://scielo.org/> >

⁴ Disponível em: < <http://oasisbr.ibict.br/vufind/> >

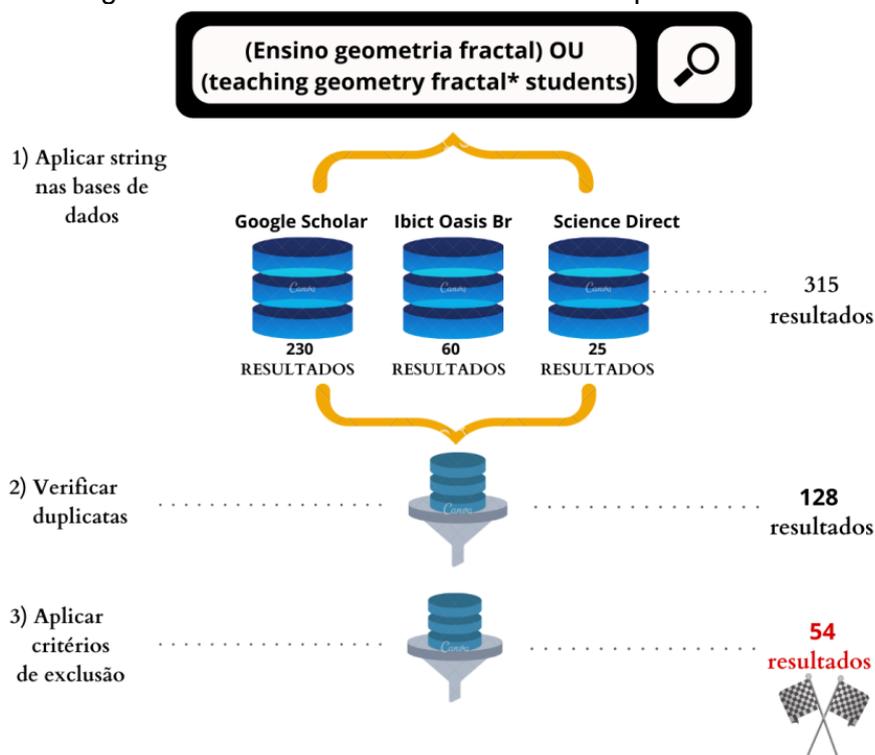
⁵ Disponível em: < <https://scholar.google.com/> >

Após vários testes de amostragem, os termos de busca que melhor se adequaram às bases de dados foram: *(Ensino geometria fractal) OU (teaching geometry fractal* students)*.

- **Critérios de Inclusão e Exclusão:**

Após aplicados os critérios⁶, o passo seguinte envolveu a leitura diagonal dos trabalhos e extração dos dados como: informações do trabalho; recursos utilizados; procedimentos adotados; abordagem pedagógica; conteúdos matemáticos abordados; e etapa do ensino a qual se destina a proposta. Para apresentar as etapas que se desenvolveram desde a aplicação da string até a obtenção de um resultante final, foi elaborado o infográfico que segue (Figura 2).

Figura 2 - Resultados encontrados nas etapas de busca



Fonte: Elaborado pelos autores

Após aplicar a string de busca em cada uma das três bases escolhidas, foram obtidos 60 resultados para o Ibict Oasis Br e 25 resultados para o Science Direct. Em relação aos resultados do Google Scholar, a busca foi restringida para as primeiras 10 páginas de pesquisa, resultando em 230 trabalhos. Na realização da busca de dados aplicou-se somente o filtro referente ao idioma das pesquisas. Essa busca foi realizada nos períodos de 11-18 de Junho de 2020.

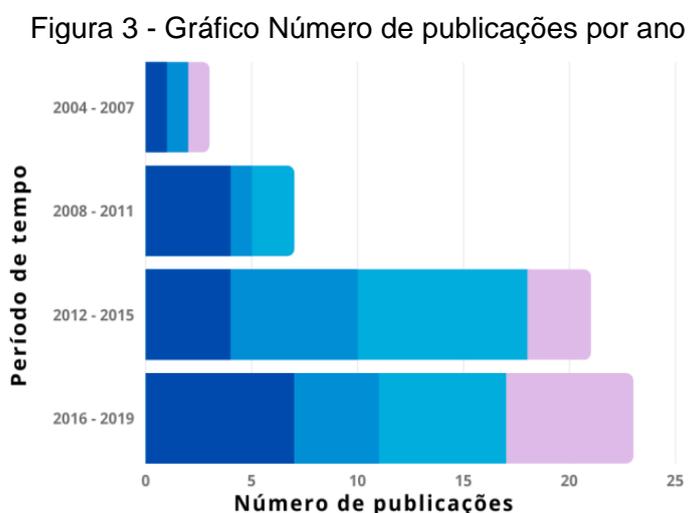
⁶ A apresentação dos critérios utilizados para incluir ou excluir um resultado e a lista completa dos trabalhos analisados está disponível no link em <https://bitly.com/rXAvSs>

Os 315 arquivos finais foram inseridos no Mendeley⁷ e, após verificar as duplicatas e submetê-los aos critérios de exclusão a partir de uma leitura diagonal dos textos, foram obtidos, por fim, 54 resultados.

Análise da revisão

No processo de leitura diagonal, verificou-se que grande parte dos textos abordava a temática dos fractais como uma possibilidade de ensino, apresentando suas potencialidades, mas não estruturando uma proposta didática e esses trabalhos foram descartados. Os 54 textos resultantes apresentam propostas de ensino de geometria fractal para ensino fundamental e médio, aplicadas ou não. Os relatos de experiência estão também contemplados, por considerar que as descrições contidas no texto oferecem informações suficientes para responder à questão de pesquisa.

Primeiramente, em relação ao ano de publicação, o resultado mais antigo é de 2004 e os mais atuais encontrados em 2019. Agrupando a quantidade de publicações em períodos de 4 anos, é possível perceber que há uma tendência crescente de publicações, conforme aponta o gráfico a seguir (Figura 3).



Fonte: Elaborado pelos autores

Ao categorizar os dados, foi possível perceber que a maioria das propostas se assemelha quanto à escolha de uso de materiais manipulativos nas atividades propostas. Para essa definição, este trabalho está apoiado nas classificações introduzidas no trabalho de Silveira et al (no prelo). No campo educacional, os autores apresentam uma definição de materiais manipulativos como sendo

⁷ Programa disponível para desktop ou acesso online, conhecido por gerenciar referências e projetado para pesquisadores, estudantes e acadêmicos. Disponível em <<https://www.mendeley.com/>>

“quaisquer objetos físicos, pictóricos ou virtuais utilizados como recursos para o ensino de determinado conhecimento” (SILVEIRA *et al*, no prelo, p. 1). Além disso, contribuem ao apresentarem 4 categorias de classificação para os objetos manipulativos: materiais didaticamente construídos; instrumentos culturais herdados da tradição; objetos retirados da vida cotidiana; e objetos manipulativos virtuais.

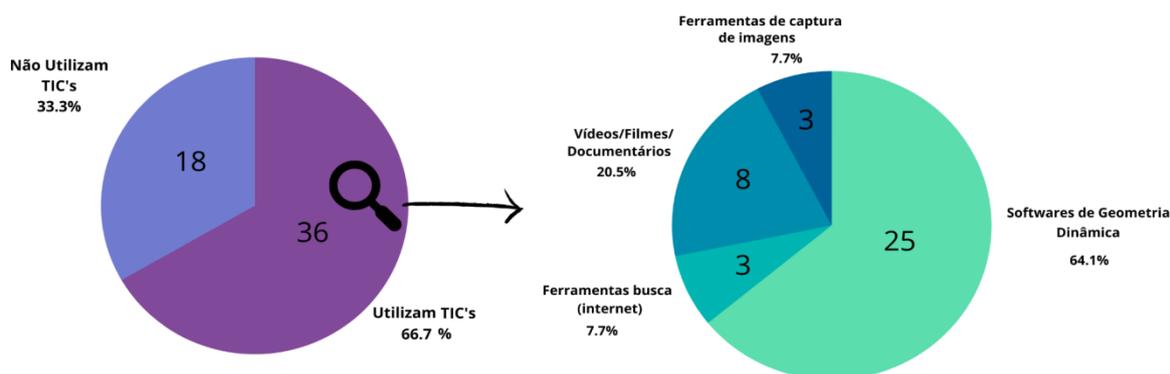
De maneira geral, foi possível perceber que as tendências das propostas se concentram no uso de instrumentos culturais herdados da tradição e de materiais didaticamente construídos. Em relação ao primeiro, podemos citar o uso de régua, esquadro, compasso, transferidor, etc. - ou seja, aqueles instrumentos que historicamente acompanham o desenvolvimento do fazer matemático.

Alves (2019) e Gomes (2012) propõem, dentre outras, atividades de construção de fractais matemáticos clássicos, como o Conjunto de Cantor, Tapete de Sierpinski e Triângulo de Sierpinski. Em Mendonça (2016, p. 70), com a finalidade de “apresentar novas possibilidades de expressão de figuras geométricas, para além das figuras da Geometria Euclidiana conhecidas e comumente trabalhadas” propõe-se oficinas com atividades adaptadas de Barbosa (2005) voltadas para o Ensino Médio. Justifica-se o destaque dado a esse trabalho por apresentar atividades de construção de diversos fractais matemáticos e serem estas atividades baseadas na obra de Barbosa (2005), importante referencial teórico para professores interessados no ensino de Geometria Fractal.

Outra prática com bastante expressão consiste na utilização de técnicas de dobradura para obtenção dos chamados cartões fractais tridimensionais, como é o caso de Conceição (2019) e Amaral (2012). Mais incomum é o uso de objetos retirados da vida cotidiana para auxiliar a construção de objetos fractais. Contudo, Souza (2014) e Oliveira (2016) trazem atividades interessantes utilizando canudinhos plásticos para o Conjunto de Cantor e latinhas de alumínio para construção do Triângulo de Sierpinski.

Por último, uma atenção especial ao uso de objetos manipulativos virtuais. No âmbito desta investigação verificamos a presença do uso de softwares educacionais de geometria dinâmica. Do total de trabalhos analisados, 27 utilizaram softwares seja na construção ou somente exploração de fractais matemáticos, sendo que destes, apenas 1 fez uso do software apenas como uma ferramenta de verificação de resultados numéricos.

Figura 4 - Gráfico sobre o uso de tecnologias da informação e comunicação



Fonte: Elaborado pelos autores

Conforme aponta o gráfico da Figura 4, em relação ao uso de Tecnologias da Informação e Comunicação, verificamos que 36 trabalhos (66,7%) utilizam ou sugerem as TIC's como auxílio para inserir tópicos de discussão de geometria fractal em sala de aula. Desses, a maior parte consiste no uso de softwares de geometria dinâmica para construção e manipulação de objetos fractais. Outra comum utilização compreende o uso de vídeos, filmes ou documentários e são introduzidos no início das propostas como um recurso de apresentação e aproximação dos alunos com a geometria dos fractais. Em menor expressividade podemos citar a utilização de ferramentas de busca na internet, como é proposto em Gressler (2008, p. 52), onde se iniciam os estudos a partir de uma pesquisa na internet, e “os alunos tiveram livre acesso aos sites que continham dados sobre o assunto, e ao concluírem a pesquisa foi realizado em sala de aula o seminário em que o resultado das pesquisas foi apresentado”.

Por fim, em igual manifestação, 3 trabalhos envolviam o uso de câmeras fotográficas. Nesses, os professores solicitaram que os alunos registrassem e apresentassem à turma fotografias por eles realizadas de objetos reais com características fractais.

Taxonomia de Bloom

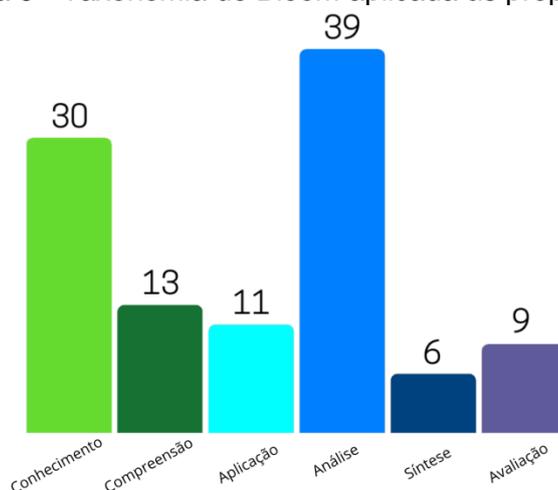
Sob uma perspectiva qualitativa foi realizada uma categorização das abordagens pedagógicas com base na Taxonomia de Bloom. A taxonomia de Bloom considera que o domínio cognitivo para ser desenvolvido em sua totalidade demanda algumas habilidades: conhecimento, compreensão, aplicação, análise, síntese e avaliação.

Contudo, na análise de sequências didáticas a fronteira entre essas habilidades é sutil. Depara-se com a primeira dificuldade na identificação dos comandos das atividades propostas, quando a maioria dos trabalhos apresentam

suas propostas de maneira abrangente, como é o caso dos relatos de experiência, não expondo de forma explícita os enunciados das atividades tal como apresentadas aos alunos. Dessa forma, basear-se unicamente na utilização dos verbos ocasionaria uma análise não fiel dos objetivos expostos na sequência didática.

Dessa forma, dado o grau de subjetividade inerente de análises como essa, procurou-se estabelecer alguns critérios que garantisse uma análise coerente das propostas, que serão destacados ao longo desta seção. O gráfico a seguir traz uma síntese dos resultados encontrados nessa identificação (Figura 5).

Figura 5 - Taxonomia de Bloom aplicada às propostas



Fonte: Elaborado pelos autores

As habilidades identificadas como “análise” e “conhecimento” foram as que obtiveram maior representação, com respectivamente, 39 e 30 aparições. Nesta categoria foram contempladas as atividades que requerem dos alunos a capacidade de investigar as partes que compõe o objeto, identificando os padrões, as relações e causalidades entre elas, com vista à generalização.

Parece haver certa similaridade na composição dessas tarefas, que são em geral compostas por uma construção fractal que possibilita a identificação do processo recursivo e uma tabela a ser preenchida pelos alunos em que é possível explorar conceitos como número de objetos, comprimento, perímetro, área e volume em cada uma das iterações. Desse modo, trata-se de atividades em que o objetivo é organizar e analisar dados para obter a expressão geral de uma sucessão.

Para realização de atividades como essas é preciso que haja a correta compreensão do processo iterativo. Desse modo, pode-se verificar que este nível do processo cognitivo (análise) de fato engloba a habilidade de compreensão, que, por sua vez, pressupõe o conhecimento.

Contudo, identifica-se que outra grande parte das propostas não extrapola o conhecimento, mantendo seus objetivos nesse nível de cognição. São exemplos disso as práticas em que os alunos são orientados a construir um fractal, seja de forma manual ou subsidiada por softwares, fornecendo uma espécie de guia a ser seguido. Compreende-se que essas atividades possuem caráter informativo, com objetivo de apresentar a temática aos alunos, aproximando-os dos objetos fractais. Outros recursos são utilizados com esse intuito, como é o caso da utilização de vídeos e documentários, jogos e dobraduras.

Quando, além de conhecerem, os alunos são levados a registrarem suas observações e escrevem comandos para obtenção de um objeto fractal, caracteriza-se uma extrapolação que permite a tradução do conhecimento em uma nova linguagem, referente à habilidade descrita como compreensão. Dessa forma, é na ausência de instruções procedimentais de construção que é possível verificar se o aluno atingiu o nível de compreensão. Outro exemplo que permite identificar essa etapa é o que propõe Leivas (2018, p. 5), onde se espera dos alunos “reconhecer condições necessárias e suficientes nas duas geometrias para diferenciá-las e verificar características próprias de cada uma delas”.

Em relação ao terceiro nível de cognição, apesar do estudo indicar 11 propostas nesse sentido, a escassez dessa abordagem é ainda mais notável/crítica do que parece. Isso se deve ao fato de que, na categorização deste nível, estão presentes atividades em que foram aplicados os conhecimentos oriundos da temática em questão (logaritmos, probabilidade, área, volume, etc.). Porém, ao direcionar a investigação para as propostas que trabalham especificamente com as potencialidades de aplicação da geometria fractal, o número se reduz ainda mais. Quer dizer, apesar de existirem inúmeras aplicações dos objetos fractais no cotidiano e em diversas áreas do conhecimento, raramente são oferecidas atividades que permitam que os alunos lidem com essa realidade.

O trabalho de Rabay (2013) apresenta uma interessante dinâmica nesse sentido, onde os alunos são desafiados a estimarem a dimensão fractal da ilha costeira de Fernando de Noronha a partir de um mapa apresentado. A mesma discussão é verificada em Júnior (2014, p. 44) que justifica a motivação da proposta de trabalho em campo devido ao “questionamento de vários alunos com o conteúdo sempre dentro de sala e sem conectividade com suas vivências externas a escola”.

Por fim, em menor expressividade, aparecem os níveis associados às habilidades de “síntese” e “avaliação”. A síntese está relacionada com produções e

inovações. Desse modo, atribuímos esse caráter às atividades em que seja possível manifestar a criatividade e originalidade em produções, sejam elas modelos, vídeos, desenhos ou projetos. Encaixam-se nessa categoria as situações que propõe a criação livre de um fractal.

As atividades que em certo grau envolvem aspectos de julgamento, defesa de ideias, confronto de dados e validação através de softwares, se encaixam na categoria de “avaliação”. São exemplos disso as situações onde os alunos foram estimulados a buscarem fractais no seu cotidiano, registrarem e apresentarem a turma os argumentos que justificam a característica fractal daquele objeto.

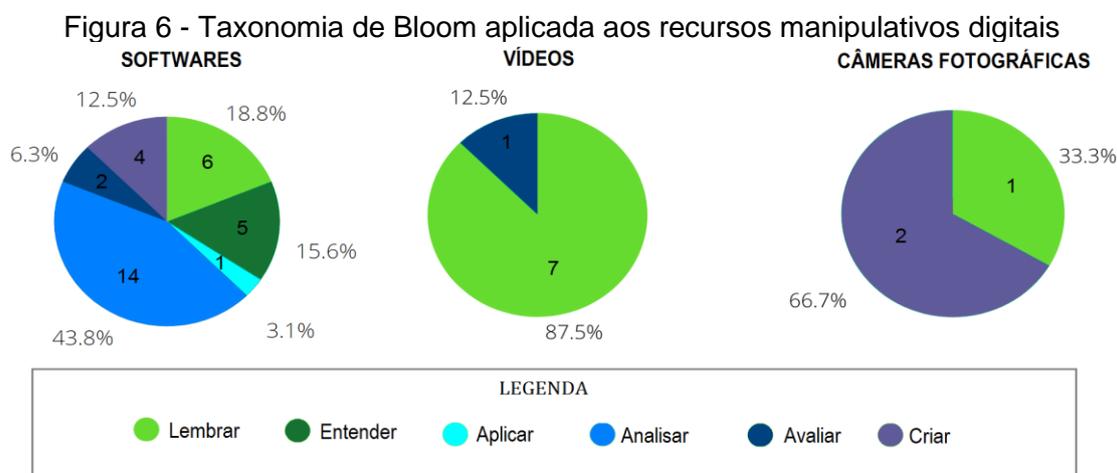
As sequências didáticas que preveem esse nível de desenvolvimento em suas atividades podem ser consideradas propostas mais completas da temática, uma vez que visam atingir o mais alto nível de desenvolvimento cognitivo aqui estabelecido, pressupondo todas as outras habilidades anteriores a elas. Mesmo que isso seja feito de forma superficial, são abordagens que do ponto de vista da Taxonomia de Bloom, são melhores integradas.

Juntamente com o nível de “aplicação”, o Estado da Arte aponta que são essas as possibilidades que ao serem exploradas trariam maior contribuição para a área, uma vez que os esforços das propostas de ensino estão concentrados nos níveis de Análise, Conhecimento e compreensão. Fazendo um recorte destes trabalhos é possível verificar que essas conclusões podem ser estendidas para as análises de abordagens que utilizam as tecnologias da informação e comunicação.

De acordo com os gráficos a seguir, o cenário geral reflete-se integralmente nas utilizações dos softwares. Os softwares apresentados possuem considerável facilidade de manuseio e suas aplicações são sempre antecedidas por momentos de apresentação de suas ferramentas. Seu uso, quando aliado à construção manual de fractais, permite com que os alunos visualizem o processo da recursão de forma ilimitada, representando a característica de complexidade infinita que esses objetos apresentam e dando significado às construções matemáticas. Todos esses aspectos são fatores que facilitam o processo de análise e sendo este, portanto, o nível mais abordado pelos trabalhos estudados.

Dentre as propostas que envolvem utilização de vídeos, apenas 1 se adequa ao nível de síntese, uma vez que os alunos produzem de forma manual um mapa mental sobre o documentário que assistiram. Os 87,5% dos casos restantes utilizam os vídeos para introduzir a temática, sendo, portanto, apenas um recurso informativo. Por fim, com as ferramentas de capturas de imagens, os autores

propuseram o registro de objetos fractais do mundo físico para ou reconhecerem as particularidades ou avaliarem o aspecto fractal, argumentando e possibilitando defesas de argumentos.



Dessa forma, podemos notar que dentre os resultados obtidos na investigação, verifica-se que a maioria das propostas envolve o uso de objetos manipulativos didaticamente construídos e instrumentos herdados da cultura e outra parte dos trabalhos envolvem o uso de objetos virtuais.

Conclusão

Esse artigo reúne reflexões e considerações acerca do ensino de geometria fractal, inicialmente apresentando os referenciais teóricos que permeiam a pesquisa. Por meio de uma revisão sistemática foram investigados os principais trabalhos na área e apresentados os resultados relevantes que auxiliam na compreensão do estado da arte do ensino de geometria fractal na educação básica.

Dentre os resultados obtidos na investigação, verifica-se que a maioria das propostas envolvem o uso de objetos manipulativos didaticamente construídos e instrumentos herdados da cultura. Outra parte dos trabalhos envolve o uso de objetos virtuais; esses, por sua vez, constituem o foco da pesquisa que estamos desenvolvendo atualmente e, por isso, contribuem de maneira considerável para a nossa iniciativa e a de outros pesquisadores que desejam investir nessa abordagem.

Foi realizada uma análise qualitativa dos textos por meio da aplicação da taxonomia de Bloom. Em relação a essa categorização, constatou-se que existem alguns níveis cognitivos que carecem de propostas didáticas envolvendo essa temática, como é o caso do nível “aplicação”, “síntese” e “avaliação”. Contudo,

grande parte das atividades concentram-se no nível cognitivo relacionado à análise. Isso indica que a maioria das propostas é elaborada de forma a contemplar altos níveis de cognição e abstração, sobretudo quando associadas às habilidades de conhecimento e compreensão.

Esse é ainda um tema que ganhará espaço no cenário educacional. Por isso, os resultados aqui apontados podem contribuir para o desenvolvimento de propostas de ensino, uma vez justificado o desafio em propor atividades que envolvam o avaliar e aplicar. Dessa forma, se manifesta como um convite a educadores e interessados pela beleza e potencialidade da geometria fractal.

Pensando nessa colaboração, atualmente está em desenvolvimento a elaboração de uma sequência didática que propõe o estudo da geometria dos fractais sob uma perspectiva interdisciplinar. Trata-se de uma adaptação do trabalho proposto por Souza *et al.* (2019) e Souza *et al.* (2021) visando à sua aplicação no ensino remoto. Em relação aos níveis cognitivos de Bloom, a proposta se manifesta como uma alternativa para se abordar a temática a partir dos níveis de aplicação e avaliação, uma vez que utiliza os fractais como uma ferramenta de análise do grau de irregularidade de superfícies físicas.

Por fim, por acreditar que o amadurecimento da geometria fractal enquanto um campo do saber a ser explorado ainda na educação básica demanda formação inicial e continuada de professores e educadores nesta área, está sendo desenvolvida uma série de vídeos educacionais a ser disponibilizada aos interessados através de um curso online de formação continuada. Esses vídeos, produtos educacionais da dissertação de mestrado em Educação Matemática, consistem em objetos de aprendizagem com alto poder de reuso também para o contexto de sala de aula. Dessa forma, objetivamos contribuir, através do investimento no preparo desses educadores, de forma significativa para o ensino de geometria fractal em salas de aula da educação básica.

Referências

ALVES, Delba Costa da Silva. **Fractais: Uma ferramenta no Ensino Médio**. 2019. 78 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Pós Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Recife, 2019.

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrimos a Geometria Fractal para a sala de aula**. 3ª. Ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2005.

Bloom, Benjamin Samuel et al. **Taxonomy of educational objectives**. New York: David McKay. v. 1. p. 262, 1956.

BORGES, Fábio Alexandre; PEREIRA, Tiago. A geometria dos fractais no ensino de Matemática: uma revisão bibliográfica categorizada das pesquisas brasileiras dos últimos dez anos. **Acta Scientiae**, v. 19, n. 4, 2017.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática (1998)** / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC / SEF, 1998. 148 p.

BRASIL. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Diário Oficial da União: Brasília: MEC/CEF, 2017. Disponível em:

<<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>>. Acesso em: 05 jul. 2018.

FERRAZ, Ana Paula do Carmo Marcheti; BELHOT, Renato Vairo. Taxonomia de Bloom: revisão teórica e apresentação das adequações do instrumento para definição de objetivos instrucionais. **Gestão & Produção**, v. 17, n. 2, p. 421-431, 2010.

FIORENTINI, Dario. A Educação Matemática enquanto campo profissional de produção de saber: a trajetória brasileira. **Dynamis**, v. 7, n. 7, p. 7-17, 1994.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sérgio. **O profissional em educação matemática**. Universidade Santa Cecília, 2001.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sérgio. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos**. 2ª. Ed. Campinas: Autores Associados, 2006.

GOMES, Antônio do Nascimento. **Uma proposta de ensino envolvendo geometria fractal para o estudo de semelhança de figuras planas**. 2010. 228 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) -Centro de Ciências Exatas, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2010.

GRESSLER, Márcia Denise. **Construindo uma Percepção Complexa da Realidade a partir do Estudo dos Fractais**. 2008. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

HAYASHI, André Daniel. **Aplicação dos fractais ao mercado de capitais utilizando-se as Elliott Waves**. 2002. 132f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2002.

LIMA, Rommel Wladimir de. **Mapa de Conteúdos e Mapa de Dependências: ferramentas pedagógicas para uma metodologia de planejamento baseada em objetivos educacionais e sua implementação em um ambiente virtual de aprendizagem**. 2009. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2009.

LOVIS, Karla Aparecida.; FRANCO, Valdeni Soliani. As concepções de geometrias-não euclidianas de um grupo de professores de matemática da Educação Básica. **Bolema**, Rio Claro, v. 29, n. 51, p. 369-388, 2015.

MANDELBROT, Benoit B. **The fractal geometry of nature**. New York: WH freeman, 1982.

MARTINS, Ana Maria Sala Minucci; LIBRANTZ, André Felipe Henrique. A geometria fractal e suas aplicações em arquitetura e urbanismo. **Exacta**, v. 4, n. Esp, p. 91-93, 2006.

MENDONÇA, Fernando Antônio Cavalcante. **Aplicações da geometria fractal: uma proposta didática para o Ensino Médio**. 2016. 158 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas, Instituto de Matemática, Maceió, 2016.

NAKAGAWA, Elisa Yumi et al. **Revisão sistemática da literatura em engenharia de software: teoria e prática**. Elsevier Brasil, 2017

OLIVEIRA, Genilton José Cavalcante. **Ensaio fractais à luz do ensino médio**. 2016. 145 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Maceió, 2016.

OLIVEIRA, Pablo Roberto Fernandes et. al. Ontologia dos Objetivos Educacionais. In: **Anais do XXXI Simpósio Brasileiro de Informática na Educação**. SBC, 2020. p. 1183-1192.

REZENDE, Flávia. As novas tecnologias na prática pedagógica sob a perspectiva construtivista. **Ensaio Pesquisa em Educação em Ciências** (Belo Horizonte), v. 2, n. 1, p. 70-87, 2000.

SILVEIRA, Everaldo; POWELL, Arthur Belford; GRANDO, Regina Célia. Materiais manipulativos em educação matemática. In: SILVEIRA, E.; POWELL, A. B.; GRANDO, R. C. (Org.). **Glossário de Verbetes em Educação Matemática**. No prelo.

SEDIVY, R. et al. Fractal analysis: an objective method for identifying atypical nuclei in dysplastic lesions of the cervix uteri. **Gynecologic Oncology**, v. 75, n. 1, p. 78-83, 1999.

SOBREIRA, Fabiano. **A lógica da diversidade: complexidade e dinâmica em assentamentos espontâneos**. 2002. Tese de Doutorado. Programa de Pós-graduação em Desenvolvimento Urbano, Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2002.

SOUZA, Cacilda de. **Geometria Fractal e Aplicações no Ensino Médio**. 2014. 74 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Departamento de Matemática, Universidade de Brasília, Brasília, 2014.

SOUZA, Paulo Victor Santos et al. A Tool to Study Fractals in an Interdisciplinary Perspective. **The Physics Teacher**, v. 57, n. 7, p. 467-469, 2019.

SOUZA, Paulo Victor Santos et al. Characterization of surface roughness by speckle pattern - an experimental approach. **Physics Education**, v. 56, n. 2, p. 025013, 2021.

Submetido em maio de 2021

Aceito em agosto de 2021