REVISTA DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL (UFMS)

ISSN 2359-2842 Volume 14, número 35 – 2021 DOI: 10.46312/pem.v14i35.13262

A Formação Matemática do Professor da Educação Básica: das Concepções Historicamente Dominantes às Possibilidades Alternativas Atuais

The Mathematics of Mathematics Teacher Education: from Historically Dominant Conceptions to Current Alternative Possibilities

Plinio Cavalcanti Moreira[1]

Ana Cristina Ferreira[2]

RESUMO

Contamos uma história abreviada das ideias que influenciaram os desenhos curriculares dos cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil desde 1930, e também daquelas que influenciaram as visões teóricas alternativas que foram se desenvolvendo ao longo desse período. Como parte importante dessa história de ideias, mencionamos três conceitos que se desenvolvem a partir de estudos publicados entre 1975 e 1987: o de Recontextualização (Bernstein), o de Transposição Didática (Chevallard) e o de Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (Shulman). Sob o olhar segundo o qual construímos este texto, tais conceitos são fundamentais porque inspiraram, direta ou indiretamente, uma série de trabalhos que contribuíram para aprofundar a compreensão da natureza específica do conhecimento matemático requerido na prática docente escolar. Tal compreensão, ancorada também em estudos empíricos, levou, eventualmente, à construção de modelos teóricos que destacam, cada um sob sua perspectiva, as características essenciais do saber matemático relevante para a docência escolar.

PALAVRAS-CHAVE: Educação Matemática. Currículo. Prática Docente Escolar. Formação de Professores. Formação Matemática do Professor.

ABSTRACT

[1] Professor do Departamento de Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto. Doutor em Educação pela UFMG. E-mail: pliniocavalcantim@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9576-2769.

[2] Professora do Departamento de Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto. Doutora em Educação pela Unicamp. E-mail: anacf@ufop.edu.br. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0953-1468.

We present a brief history of ideas that have framed the curricular structure of Mathematics Teacher Education Programs in Brazil since 1930, together with those that have impacted the theoretical conceptions developed on this subject over these eight-nine decades. As a relevant part of this history of ideas, we mention three specific concepts presented in studies published between 1975 and 1987: Recontextualization (Bernstein), Didactic Transposition (Chevallard), and Pedagogical Content Knowledge (Shulman). We consider those concepts fundamental as they inspired, directly or indirectly, a series of research that deepened the current understanding of the nature of mathematical knowledge required in the school teaching practice. Such an understanding, supported by empirical studies, eventually led to the construction of theoretical models for describing, each according to its perspective, the essential characteristics of the mathematical knowledge relevant to school teaching practice.
KEYWORDS: Mathematics Education. Mathematics Teacher Education. School Teaching Practice. Curriculum.

Os primeiros cursos de licenciatura no Brasil: anos 30 do século XX

Os cursos de licenciatura no Brasil, em particular a Licenciatura em Matemática, nascem no final da década de 1930, sob a predominância de um paradigma de ensino transmissivo, centrado na figura do professor e, de acordo com o qual, ensinar era basicamente transmitir o conhecimento. E aprender era receber a transmissão sem muitos ruídos. O movimento escolanovista, fundamentado em ideias de pensadores europeus e norte-americanos, propunha, alternativamente, um “ensino centrado no estudante”, enfatizando a autonomia, as necessidades e interesses pessoais e sociais dos alunos. Aqui no Brasil, no entanto, embora contando com a adesão de educadores e intelectuais proeminentes, que influenciaram importantes reformas da Educação nas décadas de 1930 e 1940[3], o escolanovismo não chegou a dominar o cenário geral das práticas de sala de aula de matemática, nessa época.

O currículo prescrito nos primórdios da formação do professor simplesmente acrescentava o chamado Curso de Didática à formação oferecida ao bacharel. Este complemento era composto de disciplinas ligadas aos fundamentos dos processos de ensino e, em princípio, deveria preparar o bacharel para o trabalho de transmissão do conhecimento aos estudantes da escola. Assim, a ideia inicial parece ter sido licenciar o bacharel (CASTRO, 1974). No início, os 3 anos de “conteúdo” e o ano de estudos complementares correspondiam a cursos diferenciados (o Bacharelado e o Curso de Didática, respectivamente) e não a partes estanques de um mesmo curso. Observe-se que os primeiros professores de matemática formados pela Universidade de São Paulo (USP) são de 1936, quando ainda não existia formalmente o curso de Licenciatura e sim o de Matemática (ver GOMES, 2016). Eventualmente, com a criação do curso de Licenciatura, esse esquema Bacharelado + Didática é transferido para a composição curricular específica desse curso. Isso explica a origem da

[3] Lourenço Filho, Anísio Teixeira, Fernando de Azevedo, Euclides Roxo, entre outros.

conhecida fórmula “Licenciatura = Bacharelado + Didática” [4] ou outra, mais conhecida ainda, que se refere à formação do professor como o “3+1”, isto é, 3 anos de formação na disciplina específica, seguidos de 1 ano complementar, envolvendo a preparação para a atividade de ensino escolar.

De todo modo, desde o princípio, as disciplinas do ano complementar compunham uma espécie de apêndice na formação do professor. Para se ter uma ideia da relação hierárquica existente entre essas duas instâncias (a formação na disciplina específica e a formação complementar), é interessante observar que a formação matemática na USP era feita em três anos, com uma média de 3,5 disciplinas por ano, enquanto o chamado Curso de Didática compreendia seis disciplinas em 1 ano, podendo-se, até 1941, fazer esse curso junto com o terceiro ano do Bacharelado (CASTRO, 1974; GOMES, 2016). E é importante notar que o curso da USP exerceu grande influência sobre o desenho curricular das Licenciaturas em Matemática que vieram a ser criadas posteriormente (ver, por exemplo, GOMES, 2016; FERREIRA, 2018). Ainda a respeito da ascendência da formação matemática sobre os estudos complementares, Silva (2002), num texto em que analisa aspectos históricos do curso de Licenciatura em Matemática da Faculdade Nacional de Filosofia, no Rio de Janeiro, criado em 1939, conclui: “o professor secundário aparecia como um subproduto altamente especializado daquela instituição que visava, em primeiro lugar, promover a pesquisa” (p. 104). Gomes (2016), analisando o primeiro curso de Matemática do Brasil (o da USP/SP), no contexto do debate atual sobre a formação de professores, confirma essa conclusão de Silva:

> Diversos autores [...] observam que a função principal do curso era a preparação de matemáticos, ficando em segundo plano, subordinada à formação do cientista, a meta de formação profissional de professores. [...] O testemunho do professor Benedito Castrucci [...] mostra que o interesse por aspectos julgados importantes na formação do professor para a escola secundária estava ausente das concepções do professor Luigi Fantappiè, principal responsável pelo desenvolvimento inicial das atividades do curso de Matemática. Segundo Castrucci (citado por PIRES, 2006, p. 215), o docente italiano, referindo-se aos cursos de Didática, disse: “A única didática que importa é o conhecimento profundo da matéria que se ensina. Um bom expositor, sem cultura, pode perder gerações ao passo que um mau didata, firme nos seus conhecimentos, beneficiará os alunos respondendo com exatidão as perguntas, seja na aula, seja fora da sala” (GOMES, 2016, p. 7).

---

[4] Agradecemos a Vicente Garnica por esta observação, feita em comunicação pessoal a um dos autores.

As Teorias da Reprodução e os debates dos anos 1960-1970

Ao longo das décadas de 40 e 50 do século passado, fortalecem-se, no Brasil, fatores de pressão pela expansão do acesso à escola. Toma corpo mais sólido uma mudança que já vinha se delineando desde os anos 1920: a estrutura essencialmente agropecuária da economia brasileira transforma-se com a eventual industrialização do país. A política do "café-com-leite" (vigente na República Velha e dominada pelos caciques políticos dos estados de São Paulo e Minas Gerais, grande produtor de café e grande criador de gado leiteiro, respectivamente) teve que se adaptar ao desenvolvimento de um cenário urbano e industrial, no qual se acentuava o movimento de migração em direção ao sul e sudeste do país. A necessidade de mão de obra especializada nesse novo cenário demanda a alfabetização e, mais que isso, a escolarização em estágios relativamente elevados, da crescente população urbana. Isso tudo vem gerar o estabelecimento de novos cursos de Licenciatura, uma vez que se multiplica a demanda por escolas e por professores capazes não apenas de ensinar às crianças das elites, mas também de contemplar as demandas de formação escolar mais amplas para a população urbana em geral. Esse cenário pode, assim, ser considerado essencialmente novo, em relação àquele em que se deu a criação dos primeiros cursos de Licenciatura, no final dos anos 30 do século XX e início da década seguinte, ainda que o germe da política de acesso universal à escola já estivesse presente no discurso dos educadores daquele período. Por outro lado, observa-se também, especialmente a partir dos anos 50, uma propagação maior das ideias de Piaget no Brasil, tendo como consequência um relativo abalo no paradigma, ainda dominante, do ensino escolar transmissivo, contribuindo, dessa forma, para o desenvolvimento de uma visão crítica da experiência de formação dos professores acumulada nas décadas anteriores.

As chamadas Teorias da Reprodução, desenvolvidas principalmente por Pierre Bourdieu e outros estudiosos da dimensão sociológica da educação escolar, vêm contribuir para uma reflexão sobre o papel social da escola, para a construção de novas visões do papel do professor no processo de escolarização e, em consequência, para a crítica do currículo da formação inicial do professor nas Licenciaturas. Em termos do papel da escola na sociedade, o esquema elitista que predominava essencialmente na formação escolar (desde o nascedouro das Licenciaturas) é contrastado por um movimento forte, ainda que não consensual em seus objetivos de fundo, em favor da democratização ampla do acesso à escola, da esperada (e supostamente consequente) inclusão social, cultural e econômica das camadas populares, através da educação escolar.

Por outro lado, em determinadas instâncias acadêmicas e intelectuais, desenvolve-se o entendimento (impulsionado, em parte, pelos estudos de Bourdieu e seus colegas), de que a democratização do acesso à escola não leva, por si só, a uma inclusão efetiva, uma vez que a escola tende a sacramentar a hegemonia dos valores culturais da classe dominante e, portanto, reproduzir a exclusão, mesmo a partir do seu interior. Toma corpo então, nessa perspectiva, uma visão de que o papel dos educadores dentro da escola deveria ser o de resistência à exclusão, de militância contra a reprodução da cultura dominante pela instituição escolar e contra a legitimação das relações sociais capitalistas que ela acaba promovendo, de acordo com essa corrente de pensamento.

Isso tudo se reflete, direta ou indiretamente, nas disputas de ideias sobre o desenho da estrutura curricular para a Licenciatura. Numa escola para as elites, sob a preponderância do paradigma de ensino como transmissão de conhecimento, caberia ao professor de matemática, segundo a prática dominante no início dos cursos de Licenciatura no Brasil, transmitir o conhecimento matemático aos jovens “promissores”, contribuindo para a formação de futuros cientistas. Numa escola em que o acesso se democratiza, caberia agora ao professor levar o conhecimento a todos, ou seja, possibilitar que qualquer pessoa tenha acesso ao conhecimento matemático, visto como valor universal e elevado. Em qualquer desses casos, toma força a ideia de que a função principal do professor na escola é ensinar os conteúdos disciplinares.

Por outro ponto de vista, que parte de uma percepção mais crítica da função social da escola, caberia ao professor educar para a resistência, educar para tornar realidade a inclusão social, objeto do discurso oficial, mas quase nunca efetivamente lograda na prática. Caberia também ao professor negar-se a desempenhar o papel de legitimador da exclusão disfarçada que decorreria do status privilegiado atribuído, na própria instituição escolar, aos valores culturais dominantes, aos quais teriam que se submeter e se adaptar as crianças e jovens das camadas populares.

Essas visões em disputa, que sintetizamos abreviadamente acima, ao se refletirem no interior do processo de formação inicial nas Licenciaturas, acabam instituindo polos que, aos poucos, vão sendo vistos como opostos, embora nem sempre de forma explícita. Num polo, formar o professor que educa e, no outro, formar o professor que ensina conteúdos disciplinares (o professor de Matemática, de

História, de Física etc.). Num polo, prioriza-se a educação para a transformação social, no outro, o ensino de conteúdos disciplinares específicos.

Como visto, a plataforma “formar o professor educador” tinha suporte numa visão política do papel da escola na sociedade e do papel do professor na sala de aula da escola: o profissional da educação deveria estar preparado para tomar partido nos conflitos de interesses que se desenvolvem na sociedade mais ampla e que, de alguma forma, se refletem na instância escolar. O trabalho do professor em sala de aula incluiria, então, a contribuição no sentido de proporcionar aos alunos o acesso às reflexões e saberes relevantes para a participação ativa nas lutas sociais. Em suma, o professor deveria estar preparado para levar a cabo uma educação crítica, voltada para a promoção da mudança no campo social. Para isso, os saberes didáticos/pedagógicos e aqueles ligados a uma visão crítica do papel social e político da Educação assumem um papel crucial.

Por seu turno, a ideia de formar o professor de matemática concebendo sua função primordial como a de ensinar os conteúdos da disciplina, partiria, supostamente, de uma visão politicamente neutra do papel da educação escolar na sociedade, acompanhada, muitas vezes, especialmente na década de 1970 e início da de 1980, de uma concepção tecnicista do processo de ensino, o que frequentemente orientou, nesse período, a atuação do professor de matemática em sala de aula da escola.

Embora essas duas visões possam parecer diametralmente opostas, acabando até, como vimos, por se polarizarem, queremos ressaltar que, do nosso ponto de vista, não há ensino que não eduque (mal ou bem), nem há educação que não ensine (mal ou bem) “conteúdos”. Entretanto, a questão subjacente aí seria o foco posto sobre os atos de ensinar e de educar, em que, de um lado, privilegia-se a dimensão política e transformadora da educação e, do outro, adota-se uma perspectiva que situa o processo de ensino fora das disputas sociais, visando unicamente a socialização dos conhecimentos historicamente consolidados, supostos universais, técnicos e, portanto, politicamente neutros, como costumam ser vistos, até hoje, os conhecimentos matemáticos.

Essa divergência mais ampla de concepções a respeito do papel social da educação escolar penetra o desenho do currículo de formação do professor. Pode-se notar, então, referências frequentes, nesse período (décadas de 70-80 do século XX), à necessidade de formar o professor educador (significando normalmente uma ênfase maior nas disciplinas “pedagógicas”) e também, quase sempre em oposição a essa visão, alusões à necessidade de enfatizar a formação de “conteúdo” (ver, p. ex., BRAGA, 1988, p. 157).

O modelo “3+1”, consolidado nas décadas anteriores, passa a ser objeto de debate no seio dessas disputas e sofre, então, adaptações. As disciplinas do campo didático-pedagógico se ampliam, passando a incluir o estudo dos aspectos históricos, políticos e sociológicos do processo de educação geral e, em particular, da educação escolar, além de disciplinas como Psicologia da Aprendizagem, Estrutura e Funcionamento do Ensino Escolar, entre outras. Em meados da década de 1980, um bloco de disciplinas (chamadas “integradoras”) é introduzido no currículo, com a finalidade precípua de integrar a formação “de conteúdo” com a formação “pedagógica” e estas com a prática profissional docente na escola. Entretanto, como observa Moreira (2012), não se desenvolve, de forma aprofundada, uma discussão sobre o significado do verbo integrar, nesse contexto. A ideia fundamental do modelo de formação do professor, assentado na fórmula Bacharelado + Didática (essencialmente, o que ensinar + como ensinar), parece estar tão arraigada nos atores do processo de formação profissional docente e no cenário curricular das Licenciaturas, que se naturaliza a avaliação de que é possível integrar duas instâncias de formação, concebidas, desde o início, para se desenvolverem de forma essencialmente dicotômica.

Assim, sem um questionamento específico da lógica de fundo do modelo “3+1” e com o acréscimo das disciplinas integradoras, a discussão sobre a estrutura curricular das Licenciaturas se volta basicamente para uma disputa de espaço entre o 3 e o 1, ou seja, para um repensar da antiga proporção (3 anos de “conteúdo disciplinar” para 1 ano de saberes didáticos/pedagógicos) e para a conquista de uma proporção nova e mais vantajosa (dependendo do ponto de vista) para um ou outro lado em disputa (MOREIRA, 2012). Talvez 2,5+1,5 ou 2+2.

Reflete-se, nesses termos, a oposição (implícita ou explícita) entre uma visão “conteudista” e outra “pedagogista” do processo de formação do professor nos cursos de Licenciatura. Entretanto, de forma talvez surpreendente, o “pedagogismo” e o “conteudismo” mostravam também uma faceta de cumplicidade, na medida em que não se tocava na questão do desenvolvimento autônomo da formação matemática e da formação didática/pedagógica. Cada um no seu quadrado, como se poderia dizer hoje em dia. A cortina de fumaça, que encobria esse isolamento intocado de cada uma dessas duas instâncias de formação do professor, era constituída pelo bloco das disciplinas “integradoras”. No fundo, a disputa acontecia sob um consenso velado:

para os matemáticos a formação matemática, para os educadores a formação didática e pedagógica. As disciplinas integradoras que "se virassem" para integrar aquilo que se configurava praticamente não-integrável. A essência do "3+1" permanece: uma concepção de formação docente em que o saber matemático é selecionado e trabalhado a partir da lógica interna da matemática, postulando-se, tacitamente, a atribuição de um sentido profissional (docente) para esse saber disciplinar, sentido esse que deveria ser desenvolvido em outras instâncias do processo de formação. Assim, a inclusão das disciplinas integradoras pode ser vista como um paliativo que não toca no cerne da questão.

O que toca no cerne da questão

Três ideias importantes vêm à tona nos 10 ou 12 anos seguintes a 1975 e oferecem uma contribuição significativa para o debate sobre a estrutura curricular da Licenciatura em Matemática no Brasil, no que diz respeito à autonomia e endogenia da formação matemática dentro dessa estrutura. São elas: as noções de Recontextualização, de Basil Bernstein, e de Transposição Didática, de Yves Chevallard, que vieram a público na segunda metade dos anos 1970 e início dos anos 1980, respectivamente, bem como o conceito de Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, desenvolvido por Lee Shulman, especialmente em dois artigos publicados em 1986 e 1987.

Na impossibilidade de apresentar, neste texto, essas ideias dentro do contexto teórico global em que tomam seu sentido mais consistente, em conexão com outros conceitos importantes para os respectivos estudos, decidimos correr o risco de tentar situá-las, nesta nossa história abreviada, como antecedentes teóricos que inspiraram, direta ou indiretamente, algumas das mais importantes posições no debate atual a respeito da formação matemática nos cursos de Licenciatura em Matemática.

A primeira dessas três ideias é, como vimos, a de Recontextualização, desenvolvida por Bernstein em seus estudos sociológicos da Pedagogia. Já comentamos que Bourdieu conclui, de suas pesquisas, que o fracasso escolar da maioria dos alunos está correlacionado ao fato de que a escola reproduz os valores da cultura dominante. Segundo Bourdieu, exceto em casos especiais (os chamados trânsfugas), a população escolar proveniente das classes populares dificilmente incorpora adequadamente esses valores culturais, de modo a competir em igualdade de condições com os jovens provenientes das camadas médias e privilegiadas da sociedade capitalista. As camadas populares são submetidas, na escola, a um processo de violência simbólica (BOURDIEU; PASERÓN, 1975).

Bernstein procurou penetrar detalhadamente nos mecanismos segundo os quais as relações de poder e de controle, vigentes na esfera social mais ampla, se refletem sobre o processo de educação escolar e, em particular, sobre a estrutura do discurso pedagógico. Para esse autor, a escola é uma instância de reprodução de discursos produzidos em outros campos. De acordo com Bernstein, ao penetrar no espaço social da reprodução, o discurso originário do campo da produção tem que passar por um processo de recontextualização, de modo a fazer sentido e tornar-se funcional nesse novo contexto. Morgan e Xu explicam como a matemática se transfere da academia para a escola, de acordo com a noção de recontextualização de Bernstein:

> Nos termos de Bernstein, a matemática escolar é um discurso pedagógico, formado pela recontextualização de outros discursos, incluindo a matemática acadêmica, mas também, por exemplo, as teorias de aprendizagem e de ensino. Esta recontextualização "se apropria seletivamente de outros discursos, desloca-os, redireciona seus focos, relaciona-os entre si, para constituir-se como um discurso próprio" (Bernstein, 2000, p.33). Isso é uma consequência inevitável do movimento entre contextos com diferentes funções: do campo da produção da matemática (a academia) para o campo da reprodução (a escola) (MORGAN; XU, 2011, p. 8, tradução nossa).[5]

Entretanto, é importante lembrar que, de acordo com Bernstein, existem dois campos de recontextualização que precisam ser diferenciados e que seriam potencialmente conflitantes: o ORF (*Official Recontextualizing Field* – Campo Oficial de Recontextualização) e o PRF (*Pedagogical Recontextualizing Field* – Campo Pedagógico de Recontextualização). O primeiro é criado e dominado pelo Estado, a fim de ensejar a construção e o monitoramento de um discurso pedagógico oficial. O segundo forma-se a partir do envolvimento de agentes educacionais mais ou menos autônomos, como professores e autores de livros didáticos, entre outros (BERNSTEIN, 1998)[6]. É importante deixar claro também que, para Bernstein, a recontextualização não se desenvolve regulada apenas pela dimensão técnica, mas

[5] "In Bernstein's terms, school mathematics is a pedagogic discourse, formed by the recontextualization of other discourses, including academic mathematics but also other discourses such as, for example, theories of learning and teaching. This recontextualization "selectively appropriates, relocates, refocuses and relates other discourses to constitute its own order" (BERNSTEIN, 2000, p. 33). This is an inevitable consequence of movement between contexts with different functions: from the field of production of mathematics (the academy) into the field of reproduction (the school)" (MORGAN; XU, 2011, p. 8).

[6] Estamos nos referenciando em textos de Bernstein posteriores à década de 1980, mas é importante esclarecer que os primeiros trabalhos sobre a sua visão sociológica da Pedagogia foram publicados a partir da segunda metade dos anos 1970, tendo sido sistematicamente revisados em trabalhos posteriores, até a sua morte em 2000.

principalmente pelas relações de poder vigentes entre os grupos sociais envolvidos e se constitui, portanto, como um processo essencialmente político.

Uma segunda ideia mais ou menos contemporânea da Recontextualização de Bernstein, que também veio a contribuir fortemente, no nosso entendimento, para o desenvolvimento da crítica da formação matemática nas Licenciaturas, é a noção de Transposição Didática, desenvolvida por Chevallard na segunda metade dos anos 1970, ancorando-se na tese de doutorado de Michel Verret, de 1975. Os primeiros escritos de Chevallard sobre a noção de Transposição Didática referem-se a uma parte das notas para um curso de verão em 1980, as quais, após revisão e acréscimos, são publicadas na forma de livro, sob o título *La Transposition Didactique: du savoir savant au savoir enseigné* (1985). Em 1991, é publicada uma segunda edição em Francês, pela mesma editora (*La Pensée Sauvage*), e uma versão em espanhol, pelo Grupo Editorial Aique, na Argentina.

Chevallard sintetiza o que é a Transposição Didática, e seu papel no processo de constituição do objeto de ensino, da seguinte maneira:

> um conteúdo de saber que é designado como saber a ensinar sofre, a partir de então, um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a ocupar um lugar entre os objetos de ensino. O "trabalho" que transforma um saber a ensinar em um objeto de ensino é denominado transposição didática (CHEVALLARD, 1991, p. 45, ênfase como no original)[7]

Embora possa parecer mais ou menos óbvia a ideia de adaptação de uma peça do saber quando se se propõe a ensiná-la, o conceito de transposição didática ocupa um lugar importante na literatura da formação de professores porque, entre outras razões, traz à tona a possibilidade teórica de se distinguir e estabelecer relações entre os tipos de saber matemático (no caso que nos interessa aqui) envolvidos em todo o processo de ensino escolar: o saber sábio (como o denomina Chevallard), também referido na literatura especializada como matemática acadêmica; o saber a ensinar, aquele selecionado para ocupar um lugar no currículo escolar, tendo sua origem no saber sábio, segundo Chevallard; e o saber ensinado, isto é, a matemática ensinada (bem ou mal) na escola.

Assim, um aspecto importante a considerar aqui, no contexto de disputa entre pedagogismo e conteudismo, descrito anteriormente (seção 2), é esse olhar inovador

---

[7] "Un contenido de saber que ha sido designado como saber a enseñar, sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para ocupar un lugar entre los objetos de enseñanza. El "trabajo" que transforma de un objeto de saber a enseñar en un objeto de enseñanza es denominado la transposición didáctica".

que Chevallard lança sobre a Didática da Matemática. Ele não a vê segundo os parâmetros clássicos da época, que se referiam a um simples “como ensinar” algo previamente prescrito. Para Chevallard, a Transposição Didática é um processo de criação do objeto de ensino a partir do saber prescrito (saber a ensinar). Nesse sentido, uma grande contribuição que essa ideia traz ao cenário das disputas vigentes nos anos 1970-1980 (e, em certa medida, até hoje) é a projeção da possibilidade de interlocução entre conteúdo e didática/pedagogia, num ambiente até então dominado pela visão que pressupunha, ainda que de forma tácita, uma dicotomia entre “o que ensinar” (conteúdo) e o “como e por que ensinar” (didática e pedagogia). Além disso, o conceito de transposição didática vem contribuir no seguinte sentido: em lugar de se reduzirem as questões que envolvem as atividades de ensino a uma generalidade que transcenderia a disciplina específica (Matemática, no caso), toma um sentido mais consistente a ideia de uma didática de cada disciplina, criadora de seu conteúdo específico, o qual é também, ao mesmo tempo, seu objeto de estudo.

A terceira grande ideia que queremos destacar, neste contexto de contribuições teóricas do final do século passado para um avanço nos fundamentos da problematização de concepções e práticas de formação matemática na Licenciatura, é a noção de *Pedagogical Content Knowledge* (PCK) apresentada por Lee Shulman em um texto de 1986 e retomada, em outros trabalhos, especialmente em Shulman (1987). O artigo de 1986, com o título meio misterioso à primeira vista (“*Those who understand: knowledge growth in teaching*”), constitui um protesto fundamentado contra a ideia de que o professor precisa saber pouco da disciplina que ensina, ideia essa cristalizada no aforismo “*He who can, does. He who cannot, teaches”* (em Português, um velho conhecido: quem sabe faz, quem não sabe ensina).

No caso da Matemática, especificamente, esse aforismo retratava dois aspectos contraditórios da disputa entre conteudismo e pedagogismo, disputa essa que, não necessariamente movida pelos mesmos interesses que a acirravam aqui no Brasil, tomava lugar também no cenário internacional, especialmente nos Estados Unidos da América. Por um lado, o referido aforismo simbolizava, pelo menos no Brasil, uma defesa direta contra qualquer tentativa de diminuição do tempo curricular dedicado à formação matemática na Licenciatura, pois isso representaria, segundo os “conteudistas”, uma ameaça à qualidade geral da formação do futuro professor, o qual se veria às voltas com o problema de ter que ensinar matemática sem saber matemática, “confirmando” o aforismo. Por outro lado, reafirmava também a hierarquia culturalmente dominante (até hoje, pode-se dizer), segundo a qual o Bacharelado (que forma o futuro matemático, aquele que vai “fazer” matemática) é um curso mais seletivo e de maior status acadêmico do que a Licenciatura (que forma o futuro professor, aquele que vai “apenas” ensinar matemática na escola).

A partir de uma posição que rejeitava a opção simplória entre conteudismo e pedagogismo, Shulman (1986) propõe um repertório amplo de conhecimentos profissionais do professor, incluindo o conhecimento disciplinar presente na formação do bacharel e acrescentando a este o que chamou de Pedagogical Content Knowledge (além de destacar os conhecimentos didáticos e pedagógicos gerais, conhecimentos curriculares, conhecimento das finalidades da educação escolar, entre outros). Shulman então defende sua proposta de “Knowledge Base for Teaching” a partir de estudos sistemáticos realizados por ele (e seus colaboradores) sobre a prática de professores de diversas disciplinas, mais especificamente sobre os tipos de conhecimento demandados e mobilizados nessa prática. E finaliza esse artigo de 1986 propondo uma nova versão para o aforismo citado no início: “*Those who can, do. Those who understand, teach*” (quem sabe faz; quem compreende ensina).

Em 1987 Shulman retoma a ideia de uma base de conhecimentos para o ensino, discutida no artigo de 1986, especificando com maiores detalhes as fontes e os componentes dessa base e dando um destaque especial ao Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK). Em 1986, Shulman diz que o PCK se refere às

> formas mais adequadas de representação das ideias, as mais poderosas analogias, ilustrações, explicações e demonstrações – em uma palavra, as melhores maneiras de representar e formular as ideias da disciplina que as tornam compreensíveis a outros. [...] PCK inclui também o entendimento do que faz a aprendizagem de um tópico específico mais fácil ou mais difícil: as concepções e preconcepções que estudantes de idades e backgrounds diferentes trazem para o processo de aprendizagem dos diversos tópicos de uma disciplina (SHULMAN, 1986, p. 9)[8].

No artigo de 1987, Shulman acrescenta que o PCK é “aquele amálgama especial de conteúdo e pedagogia que é exclusivo dos professores, sua forma própria e especial de entendimento profissional do conteúdo”[9] (p. 8).

---

[8] “The most useful forms of representation of those ideas, the most powerful analogies, illustrations, examples, explanations, and demonstrations – in a word, the ways of representing and formulating the subject that makes it comprehensible to others. […] Pedagogical content knowledge also includes an understanding of what makes the learning of specific topics easy or difficult: the conceptions and preconceptions that students of different ages and backgrounds bring with them to the learning of those most frequently taught topics and lessons”.

[9] “that special amalgam of content and pedagogy that is uniquely the province of teachers, their own special forma of professional understanding”.

São duas as ideias associadas a esse construto de Shulman que merecem destaque no contexto deste nosso trabalho. Em primeiro lugar, a ideia de que o profissional docente conhece (ou deveria conhecer) o chamado conteúdo de uma maneira particular e única, própria daquele que ensina. Em segundo lugar, mas tão relevante quanto a primeira, a ideia de que esse olhar profissional específico sobre o saber disciplinar é construído na e para a prática docente. É importante destacar essas duas características do PCK porque o fato de ser construído no exercício da prática docente e envolver um olhar específico do professor para a disciplina projeta-o como um tipo de saber que é conhecimento do conteúdo disciplinar, mas com a particularidade de ser regulado epistemologicamente pelas condições e necessidades da prática profissional docente e não pelas normas e valores internos à disciplina. Em outras palavras, o conhecimento pedagógico do conteúdo matemático não é regulado por uma epistemologia da “matemática em si”, desconsiderando-se o contexto de ensino e aprendizagem escolar, mas por uma epistemologia da prática docente escolar em matemática.

Por tudo isso, entendemos que essas três noções (Recontextualização, Transposição Didática, Conhecimento Pedagógico do Conteúdo) tocam de modo fecundo no cerne da questão comentada na seção anterior. Embora não tenham sido desenvolvidas no seio de projetos que tivessem como objeto de estudo específico a formação do professor de matemática da Educação Básica, acabaram inspirando, explícita ou implicitamente, ideias e propostas teóricas que estabelecem, a nosso ver, um novo patamar na crítica da formação matemática em cursos de Licenciatura no Brasil (e, claro, também no plano internacional).

Observaremos, logo adiante, algumas das convergências possíveis de serem notadas, para os nossos propósitos, entre esses três conceitos, ainda que cada um deles tenha se desenvolvido no interior de estudos com objetivos e focos diferenciados, como mencionado. Mas, antes das convergências, é importante observar as diferenças dos objetivos e dos focos. Bernstein, Chevallard e Shulman, oferecem, a partir de seus respectivos estudos, contribuições importantes para o avanço na compreensão do funcionamento dos sistemas de ensino escolar. Entretanto, Bernstein lança seu olhar para o papel das relações de poder e de controle, vigentes entre os grupos sociais envolvidos na operacionalização desses sistemas. Chevallard, por sua vez, mira as relações entre os diversos saberes envolvidos no processo de ensino escolar, desde as indicações curriculares, produzidas em espaços de decisões educacionais mais amplas (que chama de

Noosfera), até o saber efetivamente ensinado na sala de aula. E Shulman, de sua parte, enfatiza a identificação de um repertório de conhecimentos profissionais dos professores para a docência escolar (*Knowledge Base for Teaching*), explicitando também as fontes desses saberes próprios do ofício docente. Acreditamos que isso marca suficientemente as diferenças, para os efeitos de uma leitura fluente deste artigo.

Quanto às possíveis convergências, a noção de Recontextualização aponta para a necessária e incontornável consideração da especificidade do contexto (ensino escolar) em que se dá a reprodução do discurso matemático, em relação ao contexto (acadêmico) de sua produção. Isso pode ser visto como convergente, em certo sentido, com a ideia de Transposição Didática, que decorreria da necessidade de construção do objeto de ensino (discurso pedagógico, nos termos de Bernstein), através de transformações adaptativas sobre o saber a ensinar (que tem origem no discurso matemático, na linguagem conceitual de Bernstein). Por fim, o conceito de Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK) vem reforçar também a ideia de que o ensino de matemática na escola requer uma forma profissional específica de conhecer matemática, própria do contexto escolar e exclusiva da docência. A matemática do ensino escolar (discurso pedagógico, nos termos de Bernstein; fruto das transposições didáticas, nos de Chevallard) não se identifica, também para Shulman, simplesmente com a parte elementar da matemática acadêmica (discurso matemático, nos termos de Bernstein; saber sábio, segundo Chevallard), mas constitui uma construção (tal como na Recontextualização e na Transposição Didática) que se desenvolve a partir das demandas e das funcionalidades de um contexto específico: a prática docente escolar.

Assim, acreditamos que o conjunto de ideias englobadas por essas três noções díspares, em certo sentido, mas convergentes sob a perspectiva que queremos destacar aqui, constituem, univocamente, um marco histórico no desenvolvimento de algumas formas atuais de conceber o conhecimento matemático requerido na prática docente escolar. Tais concepções atuais, com seus desdobramentos que já vão além dessas ideias seminais de Bernstein, Chevallard e Shulman, alinham-se, nesse final de segunda década do século XXI, em torno de uma constatação comum: a de que a prática profissional do professor de matemática da escola básica demanda um conhecimento matemático particular e específico, que, de modo geral, ultrapassa o tipo usualmente trabalhado na formação matemática dos cursos de Licenciatura.

Os anos 2000: diversas faces do conhecimento matemático específico para o ensino escolar

Os anos 1990 e as duas primeiras décadas do século XXI presenciaram o surgimento de vários modelos teóricos em que se procura descrever e caracterizar as diversas faces do conhecimento matemático requerido na prática docente escolar em matemática. Em Moreira e Ferreira (2013), propusemos agrupar, em duas grandes vertentes, as diferentes visões a respeito do conhecimento matemático relevante para a prática docente escolar e, em consequência, para a formação do professor da Educação Básica nos cursos de Licenciatura.

Numa primeira vertente, estariam aquelas visões que concebem a formação matemática do professor a partir de referências e parâmetros dados pela matemática acadêmica, entendida como objeto de estudo e trabalho dos matemáticos profissionais, ou seja, o corpo científico de conhecimentos reconhecido como tal pela comunidade dos matemáticos. A imagem mais comum e popular, talvez, seja a de um edifício, com suas bases e alicerces sustentando a progressão que vai de sua parte elementar para a intermediária e desta para a avançada, em contínuo processo de expansão.

A matemática da formação do professor da escola seria aquela que compõe a parte elementar desse edifício, mas vista a partir de uma perspectiva intermediária ou avançada, de modo a proporcionar uma percepção das conexões entre seus diferentes tópicos constitutivos. A própria matemática definiria os rumos de sua didática, através da dependência e articulação lógica entre os conceitos, os resultados, as técnicas e processos. Ainda segundo essa visão geral, a perspectiva avançada também fornece os porquês: por que é importante? Por que está incorreto? Por que é verdadeiro? Tais questões se colocariam de maneira opaca àqueles que não empreendem esse “voo de águia” proporcionado por uma perspectiva mais avançada. Em suma, sem essa perspectiva seria impossível, de acordo com essa visão, apreciar a matemática da escola como parte de um conjunto de saberes conexo e logicamente estruturado.

Agrupadas numa segunda vertente, ainda de acordo com Moreira e Ferreira (2013), estariam as visões que concebem o conhecimento matemático relevante para a docência na escola (e para a formação do professor nas Licenciaturas) a partir de parâmetros dados essencialmente pelas necessidades postas pela prática docente escolar, em sua dinâmica social e histórica. Nesse sentido, a matemática relevante para o professor deveria favorecer, antes de tudo, a possibilidade de construção de respostas positivas para os problemas que se apresentam na prática do ensino (e da aprendizagem) escolar. A partir daí esse tipo de conhecimento matemático incorpora valores essenciais da prática profissional do professor, não se subordinando, necessariamente, aos valores e normas das práticas de produção da matemática como um corpo lógico-formal-dedutivo.

Há, na literatura especializada do século XXI, vários trabalhos em que se apresentam formas teóricas consistentes de pensar um conhecimento matemático específico para o ensino escolar (MOREIRA; DAVID, 2005; BALL; THAMES; PHELPS, 2008; BEDNARZ; PROULX, 2009, 2011, 2017; ROWLAND, 2013; DAVIS; SIMMT, 2006; DAVIS; RENERT, 2014, entre outros). Sintetizamos a seguir as ideias centrais de alguns desses trabalhos, alinhados no que classificamos de segunda vertente, ainda que se possam perceber divergências importantes entre eles.

Matemática acadêmica e matemática escolar: práticas distintas, saberes distintos

Moreira e David (2005) partem de um ponto de vista segundo o qual se faz necessário distinguir entre matemática acadêmica e matemática escolar, quando se pensa a formação do professor da Educação Básica. Assim, referem-se à matemática acadêmica como o corpo científico de conhecimentos, tal como é sistematizado pelos matemáticos no interesse da sua prática de produção de resultados originais de fronteira. A matemática escolar, por sua vez, é entendida como "um conjunto de saberes validados e associados especificamente ao processo de educação escolar básica em matemática" (p. 20). Com essa formulação, explicam os autores,

> a matemática escolar inclui tanto saberes produzidos e mobilizados pelos professores de matemática em sua ação pedagógica na sala de aula da escola, como também resultados de pesquisas que se referem à aprendizagem e ao ensino escolar de conceitos matemáticos, técnicas, processos etc. Dessa forma, distanciamo-nos, em certa medida, de uma concepção de matemática escolar que a identifica com uma disciplina ensinada na escola, para tomá-la como um conjunto de saberes associados ao exercício da profissão docente (MOREIRA; DAVID, 2005, p. 20).

Uma observação fundamental aqui é a clara associação da matemática acadêmica com uma determinada prática profissional (a dos matemáticos) e da matemática escolar com outra prática profissional (a dos professores de matemática da escola). Os autores argumentam, então, que práticas profissionais distintas, com valores e objetivos distintos, demandam, naturalmente, distintas formas de conhecimento matemático. Moreira e David (2005) mostram exemplos concretos que explicitam as diferenças e fundamentam a distinção que fazem entre matemática acadêmica e matemática escolar. Os autores vão além: essas seriam duas formas de conhecer matemática não apenas distintas, mas, em muitos casos, também conflitantes (cf. MOREIRA; DAVID, 2008). Isso quanto aos fundamentos da distinção.

Quanto aos propósitos e suas consequências para a análise do processo de formação do professor, Moreira e David explicam que uma assertiva óbvia é a de que "não se pode ensinar o que não se sabe". O problema, segundo os autores, seria derivar dessa assertiva a seguinte consequência, que também, à primeira vista, parece óbvia: "portanto, o professor que vai ensinar matemática tem que saber matemática". Tal derivação, enunciada de modo genérico e aliada ao refrão, também genérico, de que "é preciso saber mais do que se vai ensinar", tem levado, segundo os autores, a uma naturalização da ideia de que a matemática acadêmica (ou seja, "a" matemática, em termos do senso comum) tem que ser parte fundamental do currículo da Licenciatura. Para os autores, uma vez naturalizada essa ideia, a discussão caminha no sentido da aceitação (explícita ou tácita) de que a matemática acadêmica, sendo necessária à formação do professor, pode não ser suficiente. Desvia-se, assim, o foco do debate para os complementos que devem constar do currículo da formação docente, complementos esses normalmente situados fora "da" matemática e, portanto, fora da responsabilidade dos matemáticos, os quais se comprometem apenas com o "núcleo duro" dessa formação. Tal sequência de raciocínio conduz, segundo Moreira e David, a uma análise da formação frequentemente focada nos outros componentes curriculares, garantindo-se, então, a autonomia da formação matemática. A ideia de distinguir entre matemática acadêmica e matemática escolar, nos termos em que os autores a desenvolvem, viria, então, colocar em xeque essa maneira de pensar a formação do professor de matemática na Licenciatura, conduzindo a alguns questionamentos:

Que matemática o professor vai ensinar na Educação Básica?

Que matemática deve conhecer para que possa ensinar essa?

Que conhecimentos "a mais" ele precisa dominar? Por que esses conhecimentos e não outros?

Segundo Moreira e David, a busca de respostas para as questões acima aprofunda necessariamente a análise do real e efetivo papel dos conhecimentos da formação na prática docente escolar e ajuda a desnaturalizar a ideia de que a matemática acadêmica é necessária na formação do professor. Sobre esse assunto, Moreira diz em um texto recente:

> embora a matemática ensinada na escola possa ser vista como a parte elementar da matemática acadêmica, quando situada no contexto do ensino e da aprendizagem escolar um filtro profissional se aplica, "limpando-a" de valores não relevantes para esse contexto e agregando outros elementos e valores inerentes ao exercício da prática docente escolar. Esse processo, no meu modo de ver, leva a outra forma, essencialmente diferente, de conhecer matemática. […] Resumindo, a matemática acadêmica, embora possa, talvez, contribuir em alguma medida para o trabalho docente escolar, constitui um tipo de conhecimento matemático que, em princípio, não é necessário nem suficiente para a formação do professor da Educação Básica (MOREIRA, 2018, p. 628).

Outra consequência positiva, segundo Moreira e David, de se desnaturalizar o papel da matemática acadêmica na formação do professor, é que isso traz à tona a questão da necessidade de prover fundamentos científicos que justifiquem a presença desta forma de conhecimento matemático (e de outras possíveis) na formação, a partir de suas eventuais contribuições para a prática docente escolar. Nesse sentido, mas a partir de outra perspectiva teórica, alguns autores têm pesquisado formas de trabalhar a matemática universitária no processo de formação do professor, de modo a influenciar positivamente o exercício da prática profissional docente na escola (p. ex., WASSERMAN; WEBER; FUKAWA-CONNELLY; MCGUFFEY, 2019).

Conhecimento matemático para o ensino: MKT e seus domínios

Um dos modelos teóricos mais consolidados na comunidade internacional da Educação Matemática (ainda que longe de constituir um consenso) é aquele desenvolvido por Deborah Ball e seus colaboradores da Universidade de Michigan, em Ann Arbour, USA. Após mais de 20 anos de trabalho em equipe, identificando, através de pesquisas empíricas, elementos do conhecimento matemático requerido na prática docente escolar, Ball, Thames e Phelps apresentam, em 2008, uma formulação fundamentada do que constituiria, segundo esses autores, o Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT – *Mathematical Knowledge for Teaching*, na expressão em inglês). No *ICMI Study 15*, em Águas de Lindoia, SP, Ball, Bass, Sleep e Thames (2005) apresentam um esboço do que chamaram de "Uma teoria do conhecimento matemático para o ensino" (*A Theory of Mathematical Knowledge for Teaching*), desenvolvida a partir das pesquisas da equipe. O artigo de 2008 é uma versão revisada e refinada do esboço de 2005, publicada no *Journal of Teacher Education*, sob um título que indica claramente a adesão à ideia de que existe um conhecimento matemático específico para o trabalho de ensino escolar da disciplina: "*Content Knowledge for Teaching – What Makes it Special*?"

O artigo começa lembrando as contribuições de Shulman, inspiradoras dos estudos que levaram à formulação do MKT, tal como é apresentado no texto. Comentam-se duas visões sobre a formação matemática do professor da escola: a dominante, segundo a qual os professores precisariam saber a matemática prescrita no currículo escolar, adicionada a alguns anos de estudo da matemática universitária; e uma alternativa, segundo a qual os professores precisam conhecer o currículo escolar, mas de forma "profunda" e acrescida de certa quantidade de PCK. Em ambos os casos, afirmam os autores, não fica claro o que constituiria esse conhecimento matemático "extra" e/ou "profundo". Assim, indo além dessas duas possibilidades referidas acima, o grupo de pesquisa liderado por Ball decidiu estudar a prática de ensino escolar de matemática, procurando entender dois elementos fundamentais dessa prática. Em primeiro lugar, partindo da premissa óbvia de que o professor precisa saber o que vai ensinar na escola (frações, números primos, funções etc.), puseram o foco na forma como o professor precisa conhecer esses tópicos. Paralelamente a isso, quiseram determinar o que mais, a respeito da matemática, o professor precisa conhecer. Avançando ainda além disso, procuram entender como e onde fazem uso desse conhecimento matemático "a mais", em sua prática de ensino de matemática na escola. E explicam que, para eles (os autores) prática de ensino de matemática na escola significa tanto o trabalho interativo direto em sala de aula, como também o planejamento das aulas, as avaliações, os esforços para a promoção da superação de desigualdades educacionais etc., enfim, tudo que se refere ao ato de ensinar matemática e de promoção da aprendizagem escolar da disciplina (BALL; THAMES; PHELPS, 2008).

De acordo com Ball, Thames e Phelps, o MKT se compõe de quatro categorias fundamentais: duas associadas a um domínio chamado *Content Knowledge* (CK), e outras duas associadas ao domínio *Pedagogical Content Knowledge* (PCK). Além dessas quatro, duas outras categorias estariam sob consideração, no sentido de eventualmente virem a constituir subdomínios autônomos dos domínios CK e PCK ou então, alternativamente, se distribuírem pelas outras quatro categorias já firmemente estabelecidas. Os quatro subdomínios (ou categorias) consolidados são:

Common Content Knowledge (CCK), pertencente ao domínio CK. É constituído basicamente pelo conhecimento matemático que todo adulto escolarizado deve dominar e que, em princípio, o professor de matemática tem que ensinar na escola, de acordo com o currículo prescrito. Essa é, segundo os autores, a parte óbvia do conhecimento matemático para o ensino. Assim, as atividades da prática do professor que requerem os conhecimentos pertencentes a esse subdomínio do MKT se referem ao ensino dos tópicos matemáticos indicados no currículo escolar tais como: operações com números negativos, resolução de equações e inequações, teorema de Thales etc.

Specialized Content Knowledge (SCK), também pertencente ao domínio CK, é descrito como um tipo de conhecimento matemático que é específico da profissão de ensinar na escola e, portanto, não tipicamente requerido em outras instâncias em que se utiliza matemática (por exemplo, engenharia, economia, ciências contábeis etc.). Alguns exemplos de atividades mais ou menos rotineiras de um professor que ensina matemática na escola e requerem conhecimento matemático especializado (SCK) são: responder a perguntas dos estudantes, do tipo “por que é verdadeiro?”; encontrar um exemplo específico que se presta especialmente bem para ilustrar um conceito que está sendo apresentado; escolher ou criar, junto com os alunos, uma definição que se adapte bem ao estágio de aprendizagem matemática em que se esteja trabalhando (por exemplo, sexto ano do Ensino Fundamental ou segundo do Ensino Médio); selecionar as representações de um conceito que melhor se ajustem a um propósito específico de ensino (o propósito de justificar a validade de uma afirmação envolvendo o conceito, por exemplo). Cada uma dessas atividades demanda conhecimentos específicos que, por um lado, não fazem parte dos conteúdos usualmente prescritos pelo currículo escolar (portanto não pertencem ao subdomínio CCK) e, por outro, não são requeridos em outras profissões que utilizam matemática (o que justifica ser um conhecimento especializado do professor). Por exemplo, saber elaborar uma situação problema que demande uma divisão por 1/2 é importante para o professor que vai ensinar divisão por fração, mas não para o aluno (ou para um engenheiro) quando está diante de uma situação problema que demanda a divisão por 1/2. Os autores comentam que, em geral, não se espera que os estudantes sejam capazes de selecionar exemplos com propósitos didáticos/pedagógicos específicos (uma divisão de números inteiros em que aparece o algarismo zero na posição das centenas no dividendo e/ou no divisor, por exemplo) ou que saibam analisar erros cometidos por outros alunos nas resoluções de tarefas. Mas o trabalho de ensinar matemática na escola demanda esse tipo de saber do professor. Por isso, segundo os autores, esse tipo de conhecimento matemático deve ser visto como parte especializada do CK, daí o nome SCK.

Observe-se, de passagem, que o que faz parte do CK, de acordo com Ball, Thames e Phelps, é, em síntese, o que está prescrito no currículo escolar (CCK) acrescido de uma forma de conhecimento matemático diretamente vinculada ao que o ato de ensinar matemática na escola demanda (SCK). Em suma, para Ball Thames e Phelps (2008), o CK é um conhecimento matemático que o professor efetivamente mobiliza (ou é requerido mobilizar) no desenvolvimento concreto das atividades inerentes ao ensino escolar de matemática. Mais adiante comentaremos um terceiro subdomínio (provisoriamente alocado no domínio CK, segundo os autores), o *Horizon Content Knowledge* (ainda sem uma tradução consolidada na Língua Portuguesa), que também se refere diretamente a conhecimentos matemáticos relevantes para o ensino escolar (ainda que o nome possa sugerir algo relacionado com matemática avançada).

O terceiro subdomínio do MKT (não mais pertencente ao domínio CK, mas ao PCK) é denominado KCS (em inglês, *Knowledge of Content and Students*). Refere-se a uma combinação de conhecimentos a respeito do conteúdo matemático e a respeito dos alunos. Ball, Thames e Phelps (2008) listam algumas das atividades usuais do ensino escolar de matemática que requerem esse tipo de conhecimento. Por exemplo, ao selecionar ou criar atividades matemáticas para serem trabalhadas com os alunos, o professor precisa antecipar quais, dentre as disponíveis, têm maiores chances de se mostrarem motivadoras e interessantes para os estudantes; quando prepara uma tarefa matemática para casa ou para a sala de aula, é preciso também antecipar se (e quanto) essa tarefa será considerada difícil ou fácil pelos seus alunos; do mesmo modo, o professor deve ser capaz de interpretar um pensamento que o estudante expressa com dificuldade, de modo confuso ou incompleto e, para isso, precisa dispor de conhecimentos que se situam na interface da matemática com conhecimentos sobre o pensamento matemático dos alunos. Esses são alguns exemplos de situações de ensino e de aprendizagem em que são requeridas interações entre o conhecimento do conteúdo e a familiaridade com o pensamento matemático do aluno, suas concepções (corretas ou incorretas) acerca de um conceito matemático específico ou acerca da aprendizagem matemática em geral. Segundo os autores, reconhecer que uma resposta está errada demanda o CCK; avaliar a natureza do erro, especialmente um erro não muito comum, demanda o SCK. Entretanto, antecipar os erros mais prováveis de serem cometidos pelos alunos em determinadas situações (por exemplo, confundir área e perímetro) envolve o KCS.

O último subdomínio considerado consolidado pelos autores é o KCT (*Knowledge of Content and Teaching*), também pertencente ao domínio PCK. KCT combina conhecimento do conteúdo matemático com conhecimento acerca do ensino de matemática na escola. KCT envolve, por exemplo, conhecer diferentes materiais que podem ajudar no entendimento do sistema decimal de representação dos números e, correspondentemente, conhecer os cuidados a serem tomados ao usar cada um desses materiais, de modo a tornar possível discutir, de maneira eficiente, as questões matemáticas de fundo que se deseja destacar e tornar claras para os estudantes. Outras situações de ensino que requerem o KCT referem-se à atenção quando o professor for fazer uso de uma linguagem mais informal ou metafórica, por exemplo, no sentido de avaliar se essa linguagem favorece efetivamente o entendimento ou torna as coisas mais confusas para alguns dos alunos.

Por fim, Ball, Thames e Phelps (2008) descrevem brevemente dois outros subdomínios, um pertencente (provisoriamente, segundo os autores) ao domínio CK (*Horizon Content Knowledge* - HCK) e outro, também provisoriamente, ao domínio PCK (*Knowledge of Content and Curriculum* – KCC). HCK se refere a uma atenção do professor em relação aos modos como os tópicos matemáticos do currículo escolar se relacionam entre si e como se situam no espectro do conhecimento matemático prescrito globalmente nesse currículo. Por exemplo: professores do Ensino Fundamental precisariam ter uma noção de como a matemática que ensinam no primeiro ano se relaciona com a matemática que seus estudantes vão aprender no terceiro ano. Por quê? Segundo os autores, para que possam estabelecer, em cada estágio de ensino, os fundamentos corretos e adequados para a matemática que virá nos estágios posteriores. Concretizando, ao ensinar multiplicação de números naturais e suas propriedades, por exemplo, o professor deve ter em mente que o significado dessa operação será estendido para os números inteiros (e também para os racionais e reais) daí a relativamente pouco tempo. Certas características da multiplicação se manterão nesses novos conjuntos numéricos, enquanto outras não (por exemplo, multiplicar dois números racionais pode dar como resultado um número menor que ambos os fatores, o que não acontece nos naturais). Inversamente, seria interessante que o professor do Ensino Médio conhecesse em detalhes a matemática a que seu aluno foi exposto nos ciclos anteriores de escolarização. Isso compõe, segundo Ball, Thames e Phelps, um tipo de conhecimento matemático importante para o ensino, incluído no subdomínio HCK.

Quanto ao KCC, trata-se de conhecimento matemático que permita adequada avaliação e uso pertinente dos diferentes tipos de materiais didáticos (softwares, livros didáticos, materiais manipuláveis etc.) ao longo dos anos de escolarização em matemática, por exemplo. Os autores comentam que não estão seguros, à altura em que o artigo foi publicado, se esse tipo de MKT realmente constituiria um novo subdomínio do PCK, se poderia estar contido no KCT, ou, talvez, numa terceira possibilidade, se distribuir entre todos os demais subdomínios já estabelecidos. Aliás, em tom mais geral, fazem o seguinte comentário sobre os subdomínios em que decompõem o MKT: "se essas categorias que propomos são ou não as mais adequadas não é o que mais importa. Há uma boa probabilidade de que não sejam. Nossas categorias atuais continuarão precisando de revisões e refinamentos[10]" (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p.403, tradução nossa).

Segundo os autores, o que realmente importa é destacar a natureza multidimensional do Conhecimento Matemático para o Ensino. Isso talvez explique porque não fizeram questão de retornar à discussão sobre o caráter provisório dos subdomínios HCK e KCC, nos mais de 10 anos que se passaram desde que a possibilidade de os acrescentar ao MKT foi considerada.

O Quarteto do Conhecimento (*The Knowledge Quartet*)

A partir dos resultados de um estudo realizado em 2000, com 150 futuros professores primários, Tim Rowland e seus colaboradores (o grupo de Cambridge) dão início a um projeto, cujo propósito era "identificar e compreender melhor as formas pelas quais o conhecimento do conteúdo matemático dos professores primários (ou a falta dele) era visível em seu ensino" (ROWLAND, 2013, p. 17, tradução nossa)[11]. Eles partiam da seguinte premissa: se o conhecimento da matemática universitária realmente faz alguma diferença para o ensino da matemática elementar, isso poderia ser observável de alguma forma na prática de um professor experiente.

Segundo Rowland (2013, p. 19), ainda que acreditem que certos conhecimentos seriam desejáveis para se ensinar matemática elementar, os pesquisadores do grupo acabaram por focar o que "os professores sabem, em que acreditam, e como podem ser identificadas oportunidades para aprimorar conhecimentos". Em outras palavras, buscaram a construção de uma teoria do conhecimento para o ensino empiricamente fundamentada, na qual a distinção entre diferentes tipos de conhecimento matemático é menos relevante do que a classificação de situações nas quais o conhecimento matemático vem à tona no

[10] Whether these categories, as we propose them here, are the right ones is not most important. Likely they are not. Our current categories will continue to need refinement and revision".
[11] "In a nutshell, the Cambridge team wanted to identify, and to understand better, the ways in which elementary teachers' mathematics content knowledge, or the lack of it, is visible in their teaching".

ensino (ROWLAND, 2013). E denominaram Quarteto do Conhecimento (em inglês, *Knowledge Quartet*, por isso, KQ) o modelo teórico que construíram.

O KQ é composto pelas seguintes unidades ou categorias: Fundamentação, Transformação, Conexão e Contingência. Cada unidade é constituída por várias subcategorias, mas não entraremos nos detalhes destas últimas (o leitor interessado pode consultar ROWLAND, 2013, por exemplo).

A primeira categoria do KQ é Fundamentação (*Foundation*, em inglês), que tem suas raízes nas bases teóricas e crenças do professor, envolvendo conhecimentos e entendimentos construídos ao longo de sua educação pessoal e de sua formação acadêmica voltada para a docência escolar. Diferentemente das outras três categorias, que se referem a conhecimentos mobilizados pelo professor no planejamento e na realização das aulas, a Fundamentação envolve conhecimentos da matemática "*per se*", ou seja, independentes do uso, bem como conhecimentos relativos ao ensino e à aprendizagem da matemática na escola, crenças relativas à natureza do conhecimento matemático, aos propósitos da educação matemática escolar etc.

A segunda categoria é Transformação, e refere-se ao conhecimento-em-ação tanto no planejamento como no próprio ato de ensinar. O foco é o comportamento docente direcionado ao aluno (ou grupo de alunos). Segundo Rowland (2013, p. 23-24), no cerne dessa categoria está a observação de Shulman (1987), de que a base de conhecimento para o ensino se destaca pela "capacidade do professor de transformar o conhecimento do conteúdo que possui em formas que são pedagogicamente poderosas". Particular importância é posta na escolha e uso de exemplos para auxiliar o aluno no processo de formação de conceitos, domínio da linguagem matemática, justificativas dos procedimentos etc. Como a primeira categoria, esta é também influenciada por tipos particulares de literatura, tais como coleções de livros didáticos ou artigos e recursos disponíveis em páginas da internet ou em revistas especializadas.

A Conexão harmoniza certas escolhas e decisões, no sentido de favorecer a aprendizagem de um conceito ou procedimento, e refere-se à coerência geral do planejamento e das aulas ministradas. Segundo Rowland (2013), a Conexão envolve, além do conhecimento matemático e da gestão do discurso matemático na sala de aula, o sequenciamento dos tópicos de ensino, incluindo a ordem das tarefas e dos exercícios propostos. Os conhecimentos desta categoria envolvem não apenas o reconhecimento de conexões estruturais dentro da própria matemática, mas também a percepção das relações entre demandas cognitivas de diferentes tópicos a serem ensinados e diferentes atividades a serem propostas aos alunos (ROWLAND, 2013).

A categoria Contingências refere-se a respostas do professor a eventos que ocorrem em sala de aula e que não foram antecipados no planejamento. Envolve, portanto, a habilidade de dar respostas convincentes, fundamentadas e bem informadas a eventos imprevistos e não planejados (ROWLAND, 2013).

Embora esta forma de pensar a matemática para o ensino escolar (o *Knowledge Quartet)*, tenha tido origem em estudos que envolviam professores dos anos iniciais da Inglaterra, é importante destacar que, eventualmente, veio a orientar estudos e pesquisas relativas ao trabalho docente tanto no segundo segmento do que chamamos, no Brasil, de Ensino Fundamental, como também naquele correspondente ao nosso Ensino Médio.

A matemática do professor ou matemática-no-trabalho-docente

Bednarz e Proulx (2009, 2011, 2017) partem de suas longas experiências como formadores de professores de matemática no Canadá (no caso de Nadine Bednarz, cerca de 30 anos) para fundamentar uma visão específica acerca do conhecimento matemático associado ao ensino dessa disciplina na escola.

Segundo os próprios autores, suas concepções se alinham, em alguma medida, com os trabalhos da equipe de T. Rowland, porém, o foco está em como a matemática do professor se constitui no ambiente profissional docente[12].

Para Bednarz e Proulx (2009, 2011), o conhecimento matemático dos professores possui como características centrais as seguintes:

Sua natureza é mais próxima de um saber-agir do que de um conhecimento factual. São conhecimentos que se desdobram e se desenvolvem na ação relacionada às tarefas efetivamente executadas pelo professor;

Tem um caráter situado. São conhecimentos matemáticos que ganham seu sentido no contexto do ensino e da aprendizagem escolar;

Tem um caráter de imprevisibilidade e de emergência, o que exige uma capacidade de reação instantânea do professor. São conhecimentos que se adaptam em tempo real às situações de sala de aula e aos alunos;

[12] It not only includes what the teacher thinks and does in the classroom, but also what he/she aims to do, thinks he/she should/could have done, what he/she had to avoid or was obliged to do, etc. This practice is situated temporally and contextually (BEDNARZ; PROULX, 2017, p. 43).

Tem um caráter de conexão e de entrelaçamento com outros tipos de saberes (didáticos, pedagógicos, institucionais) mobilizados simultaneamente na prática escolar. Ganha sentido próprio exatamente nessa mobilização conjunta e entrelaçada.

Percebe-se, aqui, certa ênfase no aspecto da emergência e da imprevisibilidade em situações de sala de aula, considerando-se que o conhecimento matemático cristalizado ou factual (aquele que podemos encontrar nos livros e em relatos de pesquisas sobre ensino e aprendizagem da disciplina, por exemplo) é transformado e adaptado na ação.

Acreditamos ser possível identificar, a partir das características descritas acima, uma via de mão dupla nas relações entre o saber cristalizado/factual e o saber em ação, no desenvolvimento da atividade docente escolar. Entendemos que o saber-agir do professor tem suporte, muito frequentemente, num conhecimento cristalizado/factual, que é transformado e adaptado à ação docente em-situação. Ao mesmo tempo, conhecer a forma cristalizada, factual, do conhecimento matemático só tem sentido para a profissão docente num contexto em que essa forma se conecta a outros tipos de saberes (didáticos, pedagógicos, institucionais), dando suporte ao eventual saber-agir do professor. Assim, não se trata, no nosso entendimento, de estabelecer uma oposição simples entre saberes cristalizados ou factuais e o saber-agir em situações de ensino, mas sim de perceber esses dois tipos de saber profissional em suas relações de suporte mútuo e de complementaridade.

Considerações Finais

Os cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil têm cerca de 80 anos. Como vimos, as formas teóricas de pensar a formação matemática do professor se modificam, constituindo-se, ao longo desse período, um espectro que vai desde a fórmula clássica Licenciatura = Bacharelado + Didática, nos anos 1930-1940, até a identificação de um tipo de conhecimento matemático específico para o ensino escolar, que se desenvolve mais claramente nas duas primeiras décadas deste século XXI. Ao longo desse período, muitas ideias e experiências foram contribuindo para germinar e cultivar concepções a respeito do que constitui a matemática relevante para a docência na Educação Básica.

Sintetizamos, neste texto, alguns modos de conceber essa matemática, hoje. Os modelos apresentados divergem em certos aspectos, mas convergem em torno da premissa de que o conhecimento matemático para o ensino escolar deve ter como referência básica a profissão docente e suas demandas.

Assim, podemos dizer que dispomos, no momento, de algumas direções teóricas que poderiam ajudar a construir um caminho para a eventual superação de um projeto de formação matemática do professor que se mostrou historicamente problemático, o 3+1 e suas variantes. Entretanto, como nos ensina Bernstein, não bastam direções teóricas defensáveis e consistentes. Há que considerar as relações de poder e de legitimidade social outorgadas aos diferentes grupos que participam das decisões curriculares, com base nas quais se estruturam os cursos de Licenciatura. Há que considerar também as dificuldades objetivas de se implementar um projeto de formação matemática na Licenciatura ancorado em modelos teóricos que tomem as demandas da prática docente escolar como o centro de gravidade do processo de formação inicial. Grandes desafios surgem e precisam ser enfrentados com argumentos bem construídos, bem fundamentados, e alinhados a estratégias adequadas. Uma batalha teórica que exige paciência e realismo. Além, obviamente, da consideração de sua natureza política, acima referida.

Como esperamos ter deixado claro neste texto, uma formação inicial de professores de matemática para a Educação Básica fundamentada nas ideias que sintetizamos na seção anterior envolve o trabalho com um conhecimento matemático que é, qualquer que seja o modelo adotado, complexo e multidimensional. Isso significa que esse tipo de formação exige grande esforço e engajamento por parte dos licenciandos e dos formadores, ao mesmo tempo que pressupõe políticas públicas de valorização da docência escolar, de modo a induzir níveis robustos de interesse social pela profissão. É pouco provável que se sustente uma situação em que o processo de formação profissional demande muito esforço e dedicação, quando, em contrapartida, a profissão correspondente tem pouco reconhecimento social e financeiro.

Outro aspecto que dificultaria, a curto prazo, a implementação de uma formação modelada pelas ideias descritas na seção anterior seria o fato de que a inclusão das várias categorias do conhecimento matemático específico para o ensino escolar no currículo das Licenciaturas, na forma de disciplinas obrigatórias, pressupõe a retirada da obrigatoriedade de parte do que consta dos currículos atuais, uma vez que um tempo de formação muito alongado é inviável. Isso conduz a uma disputa que, de novo, ultrapassa o aspecto “técnico” da questão e avança para o campo das relações de poder, comentadas acima: seria possível, hoje, “trocar” a obrigatoriedade de disciplinas como Cálculo Diferencial e Integral, Equações Diferenciais, Análise Real etc., no currículo de formação do professor de matemática da Educação Básica, pela obrigatoriedade de outras disciplinas, concebidas nos moldes e funcionalidades dos modelos descritos na seção anterior? Argumentos cientificamente consistentes podem ser arrolados a favor dessa “troca”, mas ela seria politicamente viável, neste momento histórico? Que implicações haveria para a composição e para formação dos professores-formadores, por exemplo?

Várias outras questões poderiam ser colocadas, mas o que queremos ressaltar, nestas Considerações Finais, é a natureza política das disputas que a ideia de um conhecimento matemático específico para o ensino na Educação Básica traz à tona. Em outras palavras, queremos enfatizar que não se trata apenas de arrolar argumentos puramente técnicos ou científicos – se é que existe algo puramente técnico ou científico. Trata-se também de considerar com atenção a dimensão política das questões envolvidas na elaboração dos currículos dos cursos de Licenciatura em Matemática, dimensão essa que permanece quase sempre elusiva, latente ou mesmo abertamente evitada nos debates científicos e nos documentos curriculares oficiais brasileiros.

Referências

BALL, Deborah Loewenberg; THAMES, Mark Hoover; PHELPS, Geoffrey. Content knowledge for teaching: What makes it special? **Journal of Teacher Education**, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.

BALL, Deborah Loewenberg; BASS, Hyman; SLEEP, Laurie; THAMES, Mark Hoover. A Theory of Mathematical Knowledge for Teaching. In: **Proceedings of the ICMI Study 15**, Águas de Lindoia, SP, Brazil, 2005.

BEDNARZ, Nadine; PROULX, Jerôme. Knowing and using mathematics in teaching: Conceptual and epistemological clarifications. **For the Learning of Mathematics**, v. 29, n. 3, p. 11–17, 2009.

BEDNARZ, Nadine; PROULX, Jerôme. Spécificité du travail mathématique de l’enseignant: Un ancrage pour la formation continue. Colloque International: Le travail enseignant au XXI siècle: Perspectives croisées: didactiques et didactique professionnelle. Disponível em: http://www.inrp.fr/archives/colloques/travail-enseignant/contrib/25.htm. Acesso em 03 de ago. 2021 Lyon, France, 16-18 de Maio, 2011.

BEDNARZ, Nadine; PROULX, Jerôme. Teachers’ mathematics as mathematics-at-work, **Research in Mathematics Education**, v. 19, n. 1, p. 42-65, 2017.

BERNSTEIN, Basil. **Pedagogía, control simbólico e identidad:** teoría, investigación y crítica. Madrid: Ediciones Morata, 1998.

BERNSTEIN, Basil. **Pedagogy, Symbolic Control and Identity**: Theory, Research and Critique (revised edition). Lanham: Rowman and Littlefield, 2000.

BOURDIEU. Pierre. **Escritos de Educação**. 5. ed. Petrópolis: Vozes, 2003.

BOURDIEU, Pierre.; PASSERON, Jean Claude. **A reprodução**: elementos para uma teoria do sistema de ensino. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1975.

BRAGA, Mauro Mendes. A licenciatura no Brasil: um breve histórico sobre o período 1973-1987**. Ciência e Cultura**, v. 40, n. 2, p. 151-157, 1988.

CASTRO, Amélia Domingues. A licenciatura no Brasil. **Revista de História**, São Paulo, vol. L, Tomo II, n. 100, ano XXIV, p. 627-652, out./dez. 1974.

CHEVALLARD, Yves. **La transposition didactique**: du savoir savant au savoir enseigné. Paris, La Pensée Sauvage, 1985.

CHEVALLARD, Yves**. La Transposición Didáctica:** del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires: Aique, 1991.

DAVIS, Brent; SIMMT, Elayne. Mathematics-for-teaching: an ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. **Educational Studies in Mathematics**, v. 61, n. 3, p. 293–319, 2006.

DAVIS, Brent; RENERT, Mosh. **The math teachers know:** profound understanding of emergent mathematics. New York; Routledge, 2014.

FERREIRA, Ana Cristina. A faculdade de filosofia, ciências e letras de Minas Gerais e a primeira licenciatura em matemática do estado. In: BRITO, Arlete.; MIORIM, Mariangela; FERREIRA, Ana Cristina. **Histórias de formação de professores:** a docência da Matemática no Brasil, p. 111-136. Salvador: EDUFBA (2a edição), 2018.

GOMES, Maria Laura Magalhães. Os 80 Anos do Primeiro Curso de Matemática Brasileiro: sentidos possíveis de uma comemoração acerca da formação de professores no Brasil. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 30, n. 55, p. 424-438, ago. 2016.

MOREIRA, Plinio Cavalcanti; DAVID, Maria Manuela Martins Soares. **A formação matemática do professor:** Licenciatura e prática docente escolar. Belo Horizonte: Autêntica, 1ª edição, 2005.

MOREIRA, Plinio Cavalcanti; DAVID, Maria Manuela Martins Soares. Academic Mathematics and mathematical knowledge needed in school teaching practice: some conflicting elements. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 11, p. 23–40, 2008.

MOREIRA, Plinio Cavalcanti. 3+1 e suas (In)Variantes: Reflexões sobre as possibilidades de uma nova estrutura curricular na Licenciatura em Matemática. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 26, n. 44, p. 1137-1150, dez. 2012.

MOREIRA, Plinio Cavalcanti. Part VI: Commentary – Broadening Mathematical Understanding Through Content. In: KAJANDER, Ann; HOLM, Jennifergan; CHERNOFF, E. (eds.) **Teaching and Learning Secondary School Mathematics. Advances in Mathematics Education**. Springer, Cham, p. 627-639, 2018.

MOREIRA, Plinio Cavalcanti; FERREIRA, Ana Cristina. O Lugar da Matemática na Licenciatura em Matemática**. Bolema**, Rio Claro (SP), v. 27, n. 47, p. 981-1006, dez. 2013.

MORGAN, Candia; XU, Guo-Rong**. Reconceptualizing 'obstacles' to teacher implementation of curriculum reform:** beyond beliefs. Paper given at Mathematics

Education and Contemporary Theory Conference. Manchester Metropolitan University, UK, 2011.

PIRES, Rute da Cunha. **A presença de Nicolas Bourbaki na Universidade de São Paulo.** Tese (Doutorado em Educação). 2006. 578f. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

ROWLAND, Tim. Mathematics teacher knowledge. In: ANDREWS, Paul; ROWLAND, Tim (Eds.) **Masterclass in Mathematics Education:** International Perspectives on Teaching and Learning (pp. 87-98). London, Bloomsbury, 2013.

SHULMAN, Lee. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, Washington, US, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

SHULMAN, Lee. Knowledge and teaching: foundations of the new reform. **Harvard Educational Review**, Cambridge, US, v. 57, n. 1, p. 1-22, 1987.

SILVA, Circe Mary Silva da. Formação de professores e pesquisadores de matemática na Faculdade Nacional de Filosofia. **Cadernos de Pesquisa**, n. 117, p. 103-126, novembro, 2002.

WASSERMAN, Nicholas. *et al*. Designing Advanced Mathematics Courses to Influence Secondary Teaching: Fostering Mathematics Teachers' Attention to Scope. **Journal of Mathematics Teacher Education**, n. 22, p.379-406, 2019. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/s10857-019-09431-6 . Acesso em 03 de ago.2021.

Submetido em julho de 2021.

Aceito em julho de 2021.