REVISTA DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL (UFMS)

ISSN 2359-2842 Volume 14, número 35 – 2021 DOI: 10.46312/pem.v14i35.13407

Afinando o Foco em Matemática: Desenho, Implementação e Avaliação de Atividades MathTASK para a Formação de Professores de Matemática

Sharpening the Focus on Mathematics: Designing, Implementing and Evaluating MathTASK Activities for Mathematics Teacher Education

Irene Biza[1]

Lina Kayali[2]

Bruna Moustapha-Corrêa[3]

Elena Nardi[4]

Athina Thoma[5]

RESUMO

MathTASK é um programa de pesquisa e desenvolvimento que engaja professores de matemática em situações de sala de aula desafiadoras e altamente contextualizadas na forma de tarefas

---

[1] Doutora em Educação Matemática pela Universidade Nacional (Kapodistriano) de Atenas, Grécia. Professora Associada de Educação Matemática da Universidade de East Anglia (Reino Unido). Coordenadora do programa MathTASK (https://www.uea.ac.uk/groups-and-centres/a-z/mathtask). Email: i.biza@uea.ac.uk. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1727-3884.

[2] Doutora em Educação Matemática pela University of East Anglia (Reino Unido). Associada acadêmica na Universidade de East Anglia e professora de matemática na Universidade de Bristol (Reino Unido). E-mail: L.Kayali@uea.ac.uk. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3251-460X.

[3] Doutora em Ensino e História da Matemática e da Física pela Universidade Federal do Rio de Janeiro Professora Adjunta do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro. E-mail: bruna.correa@uniriotec.br. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1849-4195

[4] Doutora em Educação Matemática pela University of Oxford (Reino Unido). Professora Titular de Educação Matemática da Universidade de East Anglia (Reino Unido). Coordenadora do grupo de Pesquisa em Educação Matemática da Universidade de East Anglia (https://www.uea.ac.uk/groups-and-centres/research-in-mathematics-education-group). E-mail: e.nardi@uea.ac.uk. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7145-6473.

[5] Doutora em Educação Matemática pela Universidade de East Anglia (Reino Unido). Associada acadêmica na Universidade de East Anglia. E-mail: A.Thoma@uea.ac.uk. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5985-3820.

(chamadas de *mathtasks*). As respostas de professores às tarefas revelam seus discursos matemáticos e pedagógicos e abrem oportunidades para articular, considerar e reconstruir tais discursos. As tarefas foram usadas como instrumento de pesquisa e também de formação de professores e desenvolvimento profissional no Reino Unido, na Grécia e no Brasil. Neste artigo, apresentamos o programa MathTASK e um exemplo de *mathtask*. Em seguida, apresentamos um resumo dos construtos teóricos que emergiram na análise dos dados do programa MathTASK. Então, indicamos os princípios gerais do uso de *mathtasks* na pesquisa e formação de professores e damos quatro exemplos dos princípios, cada um dirigido a diferentes aspectos do ensino e da aprendizagem de matemática, e cada um desenvolvido tendo em mente níveis educacionais e contextos. Concluímos com observações sobre os benefícios de usar *mathtasks* como uma forma de estimular e facilitar reflexões de professores de matemática sobre suas práticas.

PALAVRAS-CHAVE: MathTASK. Professores/as de Matemática. Formação de Professores/as. Discurso Matemático e Pedagógico. Situações de Sala de Aula.

ABSTRACT

MathTASK is a research and development programme that engages mathematics teachers with challenging and highly contextualised classroom situations in the form of tasks (*mathtasks*). Teacher responses to these tasks reveal their mathematical and pedagogical discourses and provide opportunities to articulate, reflect and reform said discourses. These tasks have been used as instruments for research as well as teacher education and professional development in the UK, Greece and Brazil. In this chapter, we first introduce the MathTASK programme and a *mathtask* example. We then present a summary of theoretical constructs that have emerged in the course of analysis of MathTASK data. We then present the general principles in using *mathtasks* into research and teacher education and we exemplify these principles through four examples, each addressing different issues of mathematics teaching and learning, and each developed with different educational levels and contexts in mind. We conclude with observations on the benefits of using *mathtasks* as a means to trigger and facilitate mathematics teachers' reflection on their practice.

KEYWORDS: MathTASK. Mathematics Teachers. Teacher Education. Mathematical and Pedagogical Discourse. Classroom Situations.

Introdução

Professores de matemática têm grandes aspirações ao entrar em sala. Querem que os estudantes entendam, apreciem e aproveitem matemática. Entretanto, é comum que o que encontrem na sala de aula esteja muito longe de tais aspirações: as respostas de estudantes podem não fazer sentido, trabalhar com necessidades individuais é difícil, a turma não coopera, a tecnologia é confusa e os recursos são aquém do necessário[6]. MathTASK[7], um programa de pesquisa e desenvolvimento que une pesquisadores, formadores de professores de matemática[8] (aqui chamados simplesmente de formadores de professores) e professores do Reino Unido, da Grécia e do Brasil, tem o objetivo de ajudar professores a lidar com situações desafiadoras que frequentemente encontram na

---

[6] Veja uma breve animação descrevendo MathTASK em: https://youtu.be/gt0HZBfBBGI.
[7] Usamos MathTASK (https://www.uea.ac.uk/groups-and-centres/a-z/mathtask) quando nos referimos ao programa e seus princípios, e *mathtask* quando nos referimos a tarefas específicas desenhadas nos princípio do programa MathTASK.
[8] Formadores de professores de matemática são aqueles que atuam em formação continuada (em exercício) ou inicial de professores de matemática.

sala de aula — e, por fim, ajudar professores de matemática a transformar suas aspirações em estratégias eficientes de sala de aula. Para tal objetivo, projetamos tarefas baseadas em situações específicas para professores de matemática e os convidamos a interagir com tais tarefas. Chamamos as tarefas de *mathtasks*. As tarefas são apresentadas aos professores na forma de narrativas curtas representando uma situação em sala de aula na qual um professor e seus estudantes lidam com um problema matemático e um dilema que pode surgir das diferentes respostas ao problema propostas por diferentes estudantes. O problema matemático, as respostas dos estudantes e as reações do professor são inspirados na vasta gama de questões que comumente surgem na complexidade das aulas de matemática e que são indicadas como cruciais por pesquisas anteriores. Até agora, o programa MathTASK se concentrou em quatro tipos de questões: abordagens diferentes ou potencialmente falhas para o problema matemático, apresentadas por diferentes membros da turma; questões de gerenciamento de turma causadas pelas trocas durante a aula, interferindo com a aprendizagem matemática dos estudantes; tensões, criativas ou não, que surgem do uso de recursos digitais na solução de problemas matemáticos; e inclusão em atividades matemáticas de aprendizes comumente excluídos, tais como aprendizes com alguma deficiência. Os professores são convidados se engajar nas tarefas por meio de reflexões, respostas escritas e discussões. No cerne de MathTASK está a afirmação de que, partindo de — e afinando o foco em — elementos específicos de matemática presentes em situações de sala de aula que são prováveis de ocorrer na prática real, podem emergir abordagens pedagógicas de matemática consistentes, específicas e sustentadas por pesquisa. Nosso artigo visa fornecer evidências para tal afirmação.

Especificamente, neste texto introduzimos algumas *mathtasks* e apresentamos os princípios gerais do desenho e uso de *mathtasks* para fins de pesquisa e formação de professores[9]. Ilustramos esses princípios em exemplos de *mathtasks*. A seguir, apresentamos um resumo dos construtos teóricos que emergiram da análise de dados do MathTASK. Continuamos com quatro exemplos,

---

[9] Por formação de professores, nos referimos a qualquer curso voltado para a aprendizagem de professores. Pode ser um curso de *formação inicial de professores* para estudantes de graduação ou pós-graduação que desejam se tornar professores (professores ainda não atuantes) ou um curso de *desenvolvimento profissional* para aqueles que já são profissionais do ensino (professores atuantes) e gostariam de melhorar o conhecimento e a prática profissional. Neste artigo, usamos o termo *formação de professores* de forma geral e especificamos se nos referimos a *formação inicial de professores* ou *desenvolvimento profissional* somente se queremos nos referir a algum curso específico para professores não atuantes, ou atuantes, respectivamente.

cada um de um estudo conduzido por pelo menos uma das autoras. Concluímos com uma breve discussão dos benefícios do uso de *mathtasks* para pesquisa e formação de professores.

Estudando os discursos de professores de matemática

O foco do nosso trabalho é a exploração de discursos pedagógicos e matemáticos de professores em sua preparação para ensinar e em reflexões sobre suas práticas docentes, especialmente no que diz respeito à interação com seus formadores (por exemplo, em cursos de formação de professores na graduação ou pós-graduação) ou colegas (por exemplo, ao discutir o ensino na rotina cotidiana ou em cursos de desenvolvimento profissional em exercício). Cursos de formação de professores esperam que professores transformem o conteúdo teórico oferecido naquilo que eles fazem no trabalho cotidiano de sala de aula. Tal transformação já foi descrita por construtos como a *transformação didática* (*transposition didactique*) de Chevallard (1985), os *dilemas e compromissos* de Lampert (1985), o *conhecimento pedagógico do conteúdo* de Shulman (1986, 1987), o *conhecimento matemático para o ensino* de Hill e Ball (2004) e o *quarteto do conhecimento* de Rowland *et al*. (2011). Ao longo dos anos, tais conceitos evoluíram. Por exemplo, a atenção dos trabalhos iniciais estava no conhecimento que os professores precisam *possuir* para se tornarem *eficientes* em seu ensino (SHULMAN, 1986, 1987). A tipologia de Shulman é seminal e foi o ponto de partida para diversos estudos, que se atentam, por exemplo, a acontecimentos factuais na sala de aula de matemática (como no estudo sobre conhecimento matemático para o ensino de Hill e Ball, 2004).

Recentemente, em parte no espírito da rápida emergência de abordagens discursivas na pesquisa em Educação de Matemática (cf. KIERAN; FORMAN; SFARD, 2002), a atenção se voltou para o *discurso matemático para ensino* (COOPER, 2014). Esta mudança se dá no reconhecimento dos diferentes discursos envolvidos na prática docente, pedagógicos e matemáticos, com foco em como tais discursos se apresentam nas diferentes profissões envolvidas nessas práticas, como professores, criadores de políticas, formadores de professores, e matemáticos que formam professores. Nosso trabalho está situado nesses desenvolvimentos: nos alinhamos com a recente perspectiva de práticas docentes como engajamento com certos discursos profissionais ou acadêmicos. Assim, exploramos como acessar e ajudar a desenvolver discursos de professores para fins de pesquisa, formação de professores e desenvolvimento profissional.

Além disso, pesquisas relataram a discrepância evidente entre as visões sobre matemática e pedagogia expressas por professores em teoria e fora de contexto e suas reais práticas (cf. SPEER, 2005; THOMPSON, 1992). Speer (2005) alega, por exemplo, que, em lugar de discutir práticas docentes de forma abstrata, uma discussão em contexto concreto pode proporcionar compreensão compartilhada entre pesquisadores e professores participantes sobre as crenças atribuídas pelos pesquisadores aos professores. Com esta observação em mente, em nosso trabalho partimos de situações específicas de sala de aula que podem desencadear trocas e criar insights compartilhados entre pesquisadores e professores. Mais especificamente, convidamos professores em formação inicial e continuada para refletir sobre situações de sala de aula fictícias, porém realistas e sustentadas em pesquisa (*mathtasks*), que incluem um problema matemático e as reações de um ou mais estudantes (e um professor) ao problema (BIZA; NARDI, 2019; BIZA; NARDI; JOEL, 2015; BIZA; NARDI; ZACHARIADES, 2007, 2009, 2014, 2018; NARDI; BIZA; ZACHARIADES, 2012). Discutiremos os princípios de desenho do MathTASK na seção seguinte.

Princípios de desenho, implementação e avaliação de MathTASK

Usando tarefas para pesquisa em ensino e professores de matemática e para formação de professores

Na literatura, a palavra tarefa (*task*) tem usos variados (LEONT'EV, 1975; CHRISTIANSEN; WALTER, 1986; MASON; JOHNSTON-WILDER, 2006) e costuma indicar que tarefas são ferramentas de mediação para o ensino e aprendizagem de matemática. No caso da formação de professores, uma tarefa pode ser usada para desencadear a reflexão dos professores e para explorar seu conhecimento matemático para o ensino, bem como suas percepções e crenças pedagógicas e epistemológicas. Uma tarefa adequadamente desenhada, que aborda propósitos complexos, proporciona oportunidade de engajamento com aspectos da matemática, de estratégias didáticas, de teoria pedagógica e de crenças epistemológicas. Vemos todos esses aspectos como cruciais na proficiência diagnóstica de professores ao lidar com situações inesperadas em sala de aula que exigem reação imediata.

No campo da formação de professores de matemática, significativa atenção tem sido direcionada à natureza, ao papel e ao uso de tarefas. Por exemplo, partes do *The Handbook of Mathematics Teacher Education* (TIROSH; WOOD, 2009) se concentram em trabalhos que integram tarefas na formação de professores. Além disso, uma edição especial do *Journal of Mathematics Teacher Education* (2007), organizada por Zaslavsky, Watson e Mason, assim como o livro organizado por Zaslavsky e Sullivan (2011), sinalizam esse interesse.

Ademais, um substancial corpo de pesquisas explora o uso de casos, i.e., "qualquer descrição de episódio ou incidente que pode ser conectada à base de conhecimento para ensino" (CARTER, 1999, p. 174), na pesquisa e na formação de professores de matemática (ver, por exemplo, uma análise em Markovits e Smith, 2008). Shulman (1992, p. 28) viu o método de casos

> como estratégia para superar muitas das deficiências mais sérias na formação de professores. Por serem contextuais, locais e situados — como toda narrativa —, casos integram o que costuma se manter separado.

Ao longo dos anos, essa ideia chave ganhou ímpeto substancial na formação de professores de matemática, seja na forma de situações breves de sala de aula usadas como disparadores (cf. ERENS; EICHLER, 2013; DREHER; NOWINSKA; KUNTZE, 2013), ou na forma de diálogos "imaginários" mais extensos em sala de aula, como o "teatro de aula" de Zazkis, Sinclair e Liljedahl (2013). Conforme Zazkis *et al*. (2013, p. 29): "com essa imaginação, atenção e percepção são desenvolvidas em 'câmera lenta', com controle total da situação e a capacidade de repeti-la ou corrigi-la, em vez de pensar com pressa e tomar decisões de momento". O desenho de tarefa que apresentamos em nosso estudo é consonante com esses trabalhos, na identificação de incidentes críticos fictícios, mas realistas, de sala de aula e os transformando em tarefas para professores. Antes de descrever os princípios de desenho das *mathtasks*, discutiremos os incidentes críticos e seu papel na pesquisa e na formação de professores.

Incidentes críticos

Incidentes críticos já foram largamente usados em programas de formação de professores, na forma de breves relatos reflexivos, escritos por professores, sobre situações de sala de aula que observaram ou viveram como parte da formação (cf. GOODELL, 2006; POTARI; PSYCHARIS, 2018). De acordo com Skott (2001), "incidentes críticos de prática" são ocasiões em que um professor toma decisões em sala de aula considerando diversos motivos, alguns dos quais podendo ser conflitantes, que são vitais para as prioridades do professor em relação à matemática escolar e cruciais para o desenvolvimento de interações em sala de aula e aprendizagem dos estudantes. Tripp (2012) descreve incidentes críticos como eventos cotidianos ou rotinas que determinam as tendências, os propósitos e as rotinas da prática dos professores; eles se tornam críticos quando alguém opta por vê-los assim. Na visão desse autor, isso pode ser "problemático", pois depende de interpretações pessoais (2012, p. 28). Goodell (2006, p. 224) argumenta que "um incidente crítico pode ser visto como um acontecimento cotidiano encontrado por um professor em sua prática, que o faz questionar as decisões tomadas e abre caminho para melhoria no ensino". Acredita-se que reflexões sobre incidentes críticos podem desempenhar papel importante na aprendizagem de professores (GOODELL, 2006; HOLE; MCENTEE, 1999; POTARI; PSYCHARIS, 2018; SKOTT, 2001; TRIPP, 2012). Skott (2001, p. 19) argumenta que *incidentes críticos de prática* (*critical incidents of practice*, ou CIPs) são úteis em dois aspectos:

> Primeiro, permitem vislumbrar o papel das prioridades matemáticas escolares dos professores quando são desafiadas como informativas da prática docente pela emergência de múltiplos motivos para as atividades. Segundo, CIPs podem se provar significativos para o desenvolvimento a longo prazo das prioridades matemáticas escolares de determinado professor.

Portanto, identificar incidentes críticos parar que professore reflitam sobre eles "pode transformar a sala de aula em um ambiente de aprendizagem para professores, além de para estudantes" (SKOTT, 2001, p. 4), e, consequentemente, também para pesquisadores. Reflexões aprofundadas sobre incidentes críticos inspira professores a pensar no que aconteceu, por que aconteceu, o que isso pode significar e quais são as implicações (HOLE; MCENTEE, 1999). Ademais, Goodell (2006) alega que pedir para professores identificarem incidentes críticos e produzirem relatos reflexivos, seguidos de discussões em grupo, responde à preocupação indicada por pesquisas prévias em formação de professores a respeito da falta de estrutura nas reflexões de professores e seus desafios em olhar objetivamente para experiências escolares e se beneficiar delas (cf. PULTORAK, 1993). Em nosso trabalho, desenvolvemos essa afirmação um pouco mais além: argumentamos que familiarizar professores com incidentes críticos preparados com antecedência (*mathtasks*) tem o potencial de introduzi-los em uma prática de identificar e comunicar o que pode ser crítico para eles e de estruturar suas reflexões a respeito. Voltaremos ao tipo de incidente que nosso trabalho pode considerar como crítico na seção seguinte, apresentando os princípios do desenho de MathTASK.

Princípios de desenho

No MathTASK, um incidente crítico é um evento ou ocorrência de sala de aula em que professores devem tomar decisões quanto a sua própria reação. A escolha de incidente é baseada em questões já identificadas como cruciais pela pesquisa e pela experiência; é suficientemente direcionada para promover reflexões estruturadas por professores; e é suficientemente ampla para abrir meta-discussões sobre questões mais gerais sobre o ensino de matemática. Por exemplo, no cerne das situações de ensino em nossas tarefas estão momentos essenciais no crescimento do pensamento matemático do estudante. Esses momentos são semelhantes ao que Leatham, Peterson, Stockero e Van Zoest (2015, p. 90) chamam de *oportunidades pedagógicas matematicamente significativas para desenvolver pensamento discente* (*Mathematically Significant Pedagogical Opportunities to build on Student Thinking*, ou *MOSTs*), "ocorrências de pensamento discente que têm potencial considerável em determinado momento para se tornar objeto de discussões ricas sobre ideias matemáticas importantes". Especificamente, vemos a identificação e facilitação de formas para professores reconhecerem MOSTs e otimizarem essas oportunidades no diagnóstico de questões em situações de sala de aula e na abordagem dessas questões na prática (matemática e pedagógica) como um objetivo central de nosso trabalho. Neste sentido, as situações das *mathtasks* satisfazem as três características de MOSTs: "pensamento matemático discente, importância matemática, e oportunidade pedagógica" (LEATHAM *et al*., 2015, p. 91).

Propomos o uso de *mathtasks* na formação de professores para explorar, avaliar e desenvolver o *discurso matemático para o ensino* (COOPER, 2014) dos professores. Ademais, com essas tarefas, temos o objetivo de abordar ao conjunto complexo de considerações que professores levam em conta ao determinar suas ações. Para tal fim, usamos o que Herbst *et al*. (cf. HERBST, CHAZAN, 2003) descrevem como *racionalidade prática do ensino* (*practical rationality of teaching*, ou *PRT*). Aprofundamos as considerações e os resultados de nossa pesquisa anterior sobre o *espectro de garantias* (*spectrum of warrants*, ou *SW*) que professores de matemática consideram para contextualizar as decisões que têm intenção de tomar na sala de aula: *empírico–pessoais, empírico–profissionais, institucional–curriculares, institucional–epistemológicas, a priori–epistemológicas, a priori–pedagógicas*, e *avaliativas* (NARDI; BIZA; ZACHARIADES, 2012; ver uma apresentação mais elaborada dessas definições na seção seguinte).

Ademais, nos interessam as competências docentes em identificar questões matemáticas e pedagógicas e no discurso matemático e pedagógico que endossam nesses processos de identificação. Para isso, nos referenciamos no *discurso* *matemático para o ensino* (*mathematical discourse for teaching*, ou *MDT*) de Cooper (2014). Também nos baseamos no que Rowland e seus colaboradores (TURNER; ROWLAND, 2011) descrevem como *Fundação* — um dos quatro elementos do *quarteto do conhecimento* (*knowledge quartet*, ou *KQ*), sendo os outros três *conexão*, *transformação* e *contingência* —, especificamente, entre outros, "conhecimento de conteúdo explícito, fundamentação teórica da pedagogia, uso de terminologia" (p. 200). Além disso, vemos o *conhecimento de horizonte de conteúdo* (*horizon content knowledge*, ou *HCK*) de Ball, Thames e Phelps (2008) — "uma percepção de como tópicos matemáticos se relacionam globalmente na matemática incluída no currículo" e "a visão útil para ver conexões com ideias matemáticas muito mais adiantadas" (p. 403) — como um componente útil do conhecimento matemático para o ensino, que articula conteúdo matemático e curricular.

Portanto, ao desenhar as tarefas, temos os seguintes princípios em mente:

● O conteúdo matemático da tarefa abarca um tema ou questão conhecido por sua sutileza ou por apresentar dificuldades para os estudantes, a partir de informações provenientes da literatura e/ou da experiência docente (MOSTs: pensamento matemático discente, importância matemática).

● A resposta do estudante reflete essa sutileza (ou falta dela) ou dificuldade e fornece uma oportunidade para o professor demonstrar ou refletir sobre os modos como ajudaria o estudante a atingir a sutileza ou a superar a dificuldade (MOSTs: oportunidade pedagógica).

● A abordagem pedagógica do professor abarca questões matemáticas, pedagógicas e epistemológicas conhecidas por sua sutileza ou por serem desafiadoras para os professores (PRT, SW).

● O conteúdo matemático e as respostas de estudante/professor fornecem um contexto em que os discursos do professor (MDT) se evidenciam, também em relação ao conhecimento, às crenças e às práticas intencionadas (matemáticas, pedagógicas e epistemológicas) do professor que vêm à tona (MKT, HCK, KQ).

● O conteúdo matemático e as ações e interações de estudantes/professores são contextualizados no currículo e no contexto educacional familiar aos professores (por exemplo, informações contextuais sobre o nível da turma e do estudante permite que os professores se situem como professores daquela turma específica).

Objetivos de aprendizagem no uso de *mathtasks*

O uso de *mathtasks* com professores em formação inicial ou continuada tem os seguintes objetivos de aprendizagem:

A. Gerais

• Identificar erros matemáticos dos estudantes.

• Perceber e valorizar contribuições dos estudantes em uma aula.

• Preparar e considerar sobre uma reação em uma situação de ensino.

• Avaliar uma abordagem pedagógica adotada por outro professor (quando uma reação de um professor é fornecida).

• Avaliar e justapor soluções propostas por estudantes (quando mais de uma solução é incluída no incidente).

• Apreciar o valor e os desafios de diferentes soluções.

• Apreciar o valor e os desafios de ferramentas tecnológicas.

B. Específicos ao conteúdo da situação de ensino em discussão.

• Aprender sobre tópicos matemáticos específicos e o ensino desses.

• Apreciar as diferentes facetas de uma atividade matemática (por exemplo, raciocínio, demonstração, visualização etc.).

•Considerar as potencialidades e os desafios de usar tecnologia no ensino de atividades ou tópicos matemáticos específicos.

Estrutura e formato de *mathtasks*

Começamos a trabalhar no desenvolvimento dessas tarefas em 2005 (o formato inicial pode ser visto em Biza *et al*., 2007). Cada tarefa é baseada em uma situação de ensino, que é fictícia, porém derivada de resultados de pesquisas anteriores. Ao longo dos anos, utilizamos várias versões do desenho de tarefas baseadas em situações específicas. Até o presente momento, a estrutura de uma *mathtask* é a seguinte:

• Um *contexto* de situação de sala de aula é descrito (por exemplo, nível da turma, ambiente da aula etc.)

• Um *problema matemático* é apresentado pelo professor aos estudantes

• Segue-se uma *situação de sala de aula* na forma de:

-- uma resposta de estudante;

-- mais de uma resposta de estudante;

-- resposta(s) de estudante(s) e reação de (ou diálogo com) um professor;

-- resposta(s) de estudante(s) e reação de (ou diálogo com) um professor, seguida por diálogo entre professores.

• Uma lista de *perguntas* que convidam os participantes a se engajarem e a refletirem sobre a situação, tais como:

-- resolva o problema matemático;

-- reflita sobre o objetivo de usar este problema matemático em aula;

-- identifique as questões na situação de sala de aula;

-- proponha como reagiria em uma situação semelhante se fosse o professor da turma.

O formato de uma *mathtask* sempre começa com uma introdução escrita em que o contexto e o problema matemático são dados e acaba com uma lista de perguntas. O formato da situação de sala de aula varia entre:

• escrito em roteiro, muitas vezes na forma de diálogo, em que o trabalho dos estudantes no problema é fornecido;

• um vídeo de uma interação real entre estudante e professor (editado para manter a anonimidade) ou uma captura de tela do trabalho de estudantes com poucas pausas, em momentos significativos, quando o participante é convidado a responder e discutir.

O uso de uma *mathtask* pré-desenhada

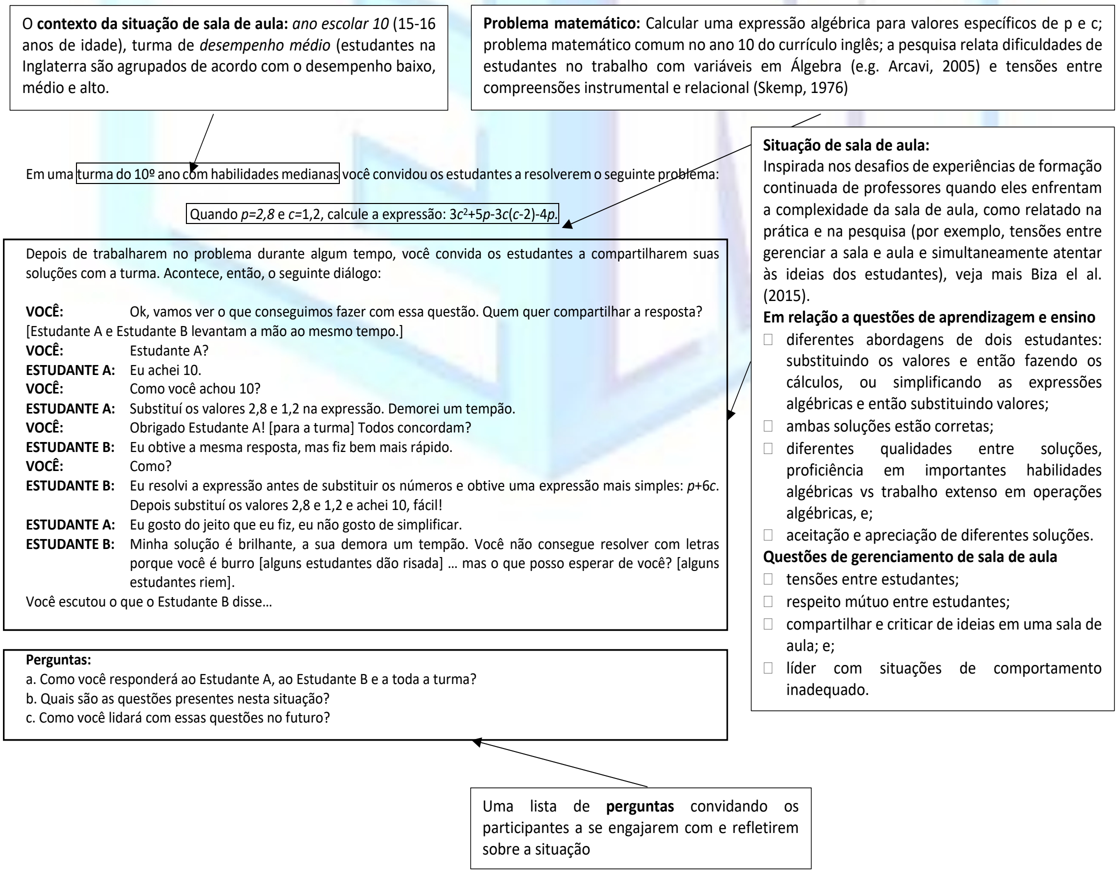
Mathtasks podem ser usadas para fins de pesquisa e de formação de professores, com professores em formação inicial ou continuada, trabalhando individualmente ou em grupo. Em oficinas organizadas por pesquisadores ou formadores de professores, *mathtasks* são distribuídas a professores que leem, respondem por escrito e discutem suas respostas em grupos ou em discussões plenárias. Há oportunidade para professores revisitarem e ajustarem as respostas iniciais à tarefa após o fim da discussão, usando uma caneta de cor diferente. Diferentes respostas antes e depois da discussão podem indicar possíveis mudanças no discurso dos professores quanto à matemática e à pedagogia. Especialmente para fins de pesquisa, entrevistas com professores (individualmente ou em grupos como foco específico) sobre as respostas à tarefa podem fornecer mais insight sobre as visões que expressaram nas respostas escritas. Recentemente, *mathtasks* são usadas em programas de formação de professores como forma de apresentar os professores à ideia de incidente crítico e como passo intermediário antes de começarem a preparar seus próprios incidentes críticos. Para além de eventos organizados por pesquisadores e formadores de professores, professores podem usar *mathtasks* em suas discussões com colegas, em reuniões regulares de equipes ou em conversas informais entre aulas. Ademais, *mathtasks* já foram usadas em avaliações formativas e somativas de cursos de educação matemática.

Quando *mathtasks* são usadas para fins de avaliação, tarefas são escolhidas de acordo com os objetivos de aprendizagem do curso e as respostas são avaliadas seguindo esses objetivos. Por exemplo, quando *mathtasks* são usadas para apresentar estudantes de matemática à educação em matemática, o objetivo é observar como os estudantes (por exemplo, professores em formação) usam o conteúdo de matemática bem como de educação matemática. Nesse caso, podemos avaliar as respostas de acordo com as quatro características de *Consistência, Especificidade, Reificação de discurso pedagógico* e *Reificação de discurso matemático*. Elaboramos os termos mais adiante neste artigo, após exemplificar a estrutura e os princípios de desenho de MathTASK na seção seguinte.

Exemplo dos princípios de desenho de MathTASK: a "Tarefa de Simplificação”

Os princípios que discutimos anteriormente são demonstrados na “Tarefa de Simplificação” (BIZA; NARDI; JOEL, 2015). Na Figura 1, a *mathtask* tem comentários ao lado para explicar seu desenho.

Figura 1 - A Tarefa de Simplificação com comentários



Fonte: adaptado de Biza, Nardi e Joel (2015, p. 188)

Voltaremos a exemplificar mais quatro *mathtasks* neste texto. Antes, porém, apresentamos um resumo de construtos teóricos que emergiram ao longo da análise de dados do programa MathTASK.

Construtos teóricos propostos pelo uso de *mathtasks*

Resultados de pesquisas sobre o uso de *mathtasks* revelaram o conjunto complexo de considerações que professores de matemática levam e conta quando tomam decisões ou refletem sobre seu ensino. Por exemplo, quando perguntamos a um professor de matemática se “aceitaria um argumento baseado em gráficos como uma demonstração”, ele respondeu:

> matematicamente, na sala de aula, aceitaria a nível da aula, o analisaria e elogiaria, mas não em uma prova.” Quando pedimos para que elaborasse, ele declarou: “Por meio do argumento [baseado no gráfico], eu tentaria direcionar a discussão a uma demonstração normal (…) com definição, declividade, derivada etc.” Quando pedimos para justificar ele acrescentou: “É isso que nós, matemáticos, aprendemos até agora. Pedir precisão. (…) temos esse princípio axiomático em nossas mentes. (…) É isso que é exigido em exames. E é esperado que preparemos os estudantes para os exames. (BIZA; NARDI; ZACHARIADES, 2009, p. 34).

O professor em questão parece abordar a argumentação visual a partir de três perspectivas diferentes e interconectadas: as restrições do contexto educacional atual, nesse caso, os exames de admissão na universidade; as condições epistemológicas com respeito ao que transforma um argumento em demonstração na comunidade matemática; e, por fim, o papel pedagógico da argumentação visual como meio para a construção de conhecimento matemático formal. Essas três perspectivas refletem três papéis que um professor de matemática deve equilibrar: educador (responsável por facilitar a aprendizagem matemática dos estudantes), matemático (responsável por introduzir as práticas normativas da comunidade matemática) e profissional (responsável por preparar candidatos para um dos exames mais importantes de suas trajetórias estudantis).

Essa observação nos levou à análise dos argumentos manifestados por professores de matemática nas respostas por escrito a uma situação de sala de aula descrita em uma *mathtask* e das entrevistas de acompanhamento. Nossa análise visou discernir, diferenciar e discutir a gama de influências (epistemológicas, pedagógicas, curriculares, profissionais e pessoais) nos argumentos apresentados por professores em suas respostas escritas e entrevista. Nós nos concentramos especialmente nas garantias dos argumentos, à luz do modelo de argumentos informais de Toulmin (1958) e da classificação de justificativas de Freeman (2005), e propusemos a seguinte classificação:

● uma garantia *a priori* é, por exemplo, recorrer a um teorema ou a uma definição matemática (*a priori–epistemológica*) ou recorrer a um princípio pedagógico (*a priori–pedagógico*);

● uma garantia *institucional* é, por exemplo, justificar determinada escolha pedagógica por ser recomendada ou exigida em um livro didático (*institucional–curricular*) ou por refletir práticas padrão da comunidade matemática (*institucional–epistemológica*);

● uma garantia *empírica* é, por exemplo, citar uma ocorrência frequente na sala de aula (de acordo com as experiências docentes de quem argumenta, *empírica–profissional*) ou recorrer a experiências pessoais de aprendizagem de matemática (*empírica–pessoal*);

● uma garantia *avaliativa* é justificar determinada escolha pedagógica por com base em uma visão, um valor ou uma crença pessoal. (NARDI; BIZA; ZACHARIADES, 2012, p. 160-161).

Em outro estudo, analisamos as respostas de professores a *mathtasks* em relação a suas competências em diagnosticar questões nas respostas de estudantes e a responder a essas questões. A análise sugeriu uma tipologia de quatro características interconectadas de respostas dos professores:

● *Consistência*: o quão consistente é uma resposta na forma como comunica a conexão entre as crenças declaradas do respondente e sua prática intencionada;

● *Especificidade*: o quão contextualizada e específica é uma resposta em relação à situação de ensino na tarefa;

● *Reificação de discurso pedagógico*: o quão retificado é o discurso pedagógico da resposta para descrever as questões pedagógicas e didáticas das situações em sala de aula e a prática intencionada presente nas respostas escritas;

● *Reificação do discurso matemático*: o quão reificado é o discurso matemático da resposta em relação à identificação do conteúdo matemático que sustenta as situações de sala de aula e à transformação do conteúdo matemático na prática intencionada presente nas respostas escritas. (BIZA; NARDI; ZACHARIADES, 2018, p. 64).

O uso do termo reificação se baseia em perspectivas discursivas como a de Sfard (2008), que define reificação como a transformação gradual de processos em objetos. Discursos, de acordo com Sfard, mudam em uma “cadeia de expansão e compressão intermitentes” (p. 118). Reificação é o elemento-chave de compressão que pode ser endógeno, resultando de *equalização* (*saming*) em determinado discurso, e exógeno, “fundindo vários discursos em um só” (p. 122). Reificação é uma resposta ao que pesquisadores discursivos veem como nossa “necessidade de conclusão” inata (p. 184) em nosso uso de significantes e une pelo menos dois ganhos potentes: aumentar a eficiência comunicativa do discurso e aumentar a eficiência prática do discurso. Por exemplo, em um sistema educacional que segue grupos de estudantes de acordo com habilidade, uma abordagem dominante no Reino Unido, uma caracterização de *estudante de alto nível* reifica certa habilidade de aprendizagem, expectativas de desempenho, conjunto de tarefas apropriadas e, com muita frequência, certos comportamentos em sala de aula. Acreditamos que um uso potente dessas características pode servir como instrumento de análise de reflexões de professores sobre a própria prática. Agora ilustraremos como os princípios de desenho, implementação e avaliação do programa MathTASK se materializaram em quatro exemplos diferentes.

Exemplo 1. Problematizando o uso de letras em álgebra

Álgebra tem papel importante no currículo escolar brasileiro. Entretanto, os estudantes acham o conteúdo difícil, especialmente por conta das *letras* e dos diferentes papéis que elas podem representar: incógnitas, variáveis, coeficientes, parâmetros, símbolos abstratos etc. Professores que introduzem a álgebra a seus estudantes frequentemente lidam com questões tais como: Como os estudantes pensam nas letras em suas aulas de matemática? E se a mesma letra for usada para propósitos diferentes? Como podemos tornar os estudantes conscientes dos diferentes usos das letras?

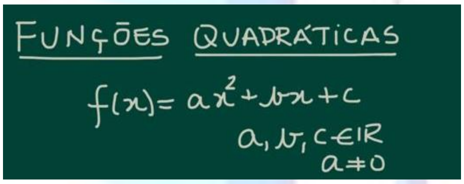
A *mathtask* (Quadro 1) que apresentamos neste exemplo tem a intenção de abordar essas questões, desencadeando a problematização de como letras são usadas na álgebra. Foi desenhada e usada pela terceira autora em um mestrado profissional para professores de matemática em uma instituição brasileira. No trecho que se segue, começamos com a apresentação da *mathtask* e das evidências da pesquisa e da prática que motivaram seu desenho. Em seguida, discutimos a implementação em uma aula para professores em formação continuada.

A *mathtask* e seu desenho

Na *mathtask* (Quadro 1), o professor apresenta aos estudantes um conjunto de problemas matemáticos com funções quadráticas (por exemplo: encontrar os coeficientes, ou calcular valores específicos). Uma aluna, Bruna, pergunta: “Como vamos resolver essa função?” Isso leva o professor a se perguntar: “Por que os estudantes sempre dizem que precisam ‘resolver a função’?” A discussão sobre “resolver a função” é central no desenho desta *mathtasks*. Nós a utilizamos para problematizar a representação algébrica de equações e funções e também seu ensino. Bruna, nesta situação de sala de aula, provavelmente não se dá conta de que o x de uma função não é o mesmo x de uma equação. No Brasil, professores passam quase todo o 9º ano do Ensino Fundamental estudando como resolver equações quadráticas e, no ano seguinte, as funções quadráticas são apresentadas aos estudantes. Contudo, a resolução da equação $ax^2 + bx + c = 0$ e o trabalho com a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ usam notações que são, ao mesmo tempo, muito semelhantes e muito diferentes. Estudantes que estão acostumados a resolver equações quadráticas e veem x aplicado ao contexto das funções não percebem a diferença e podem facilmente aplicar as rotinas conhecidas para resolver equações, embora essas não sejam relevantes.

Quadro 1. Uma *mathtask* usada em um mestrado profissional para professores de matemática a nível escolar

Em uma sala de 1º ano do Ensino Médio, o professor Victor começa o estudo de funções quadráticas. Ele começa a escrever no quadro, como indicado, e continua a aula, destacando os coeficientes e como é possível determinar imagens de valores específicos.



A seguir, a turma começa a resolver alguns exercícios selecionados pelo professor.

Exercícios

1. Indique os coeficientes das funções a seguir.

a) $f(x) = 5x^2 + x - 7$
b) $f(x) = 4 - x^2$
c) $f(x) = x^2 - x$
d) $f(x) = -4 + 2x^2 - 9x$

2. Considere $f(x) = x^2 - 3x + 4$. Determine.

a) $f(1)$
b) $f(2)$
c) $f(0)$
d) $f(-1)$
e) x, tal que $f(x) = 4$
f) x, tal que $f(x) = 2$
g) x, tal que $f(x) = 0$

Aline e Bruna se sentam juntas para resolver a lista. Bruna: Como vamos resolver essas funções? Aline: Essa pergunta aqui é só pra indicar os coeficientes. Bruna: Tá. Mas e o outro? A gente não tem que resolver? O professor Victor fica intrigado com a pergunta de Bruna sobre "resolver funções". Depois da aula, encontra um colega e conversa com ele. Victor: Eu dou aula há anos e, até agora, não entendo por que estudantes dizem que precisam “resolver a função”. Perguntas: a. O que está por trás do pedido de Bruna para “resolver a função” e da observação de Victor? b. Como professor, como lidaria com um estudante que quer “resolver a função”?

Fonte: dados da pesquisa

Nosso objetivo com a tarefa é, portanto, chamar atenção para as semelhanças e diferenças que equações e funções podem ter, especialmente em relação aos diferentes papéis de letras na álgebra, como incógnitas, variáveis e coeficientes. A incógnita é uma quantidade que não é conhecida, normalmente de forma temporária, que satisfaz determinada equação (por exemplo, em $3x + 7 = 10$). Uma variável é uma quantidade que varia de acordo com determinadas condições (por exemplo, x em $f(x) = x$, em que x é qualquer número real). Coeficientes são considerados como quantidades conhecidas representadas de forma genérica com uma letra. Em uma equação genérica, determinar coeficientes é algo arbitrário, enquanto que determinar a incógnita se dá pela solução (não arbitrária) da equação (ver resumo no Quadro 2). A semelhança notável das representações da equação ($ax^2 + bx + c = 0$) e da função ($f(x) = ax^2 + bx + c$) do segundo grau pode esconder a diferença entre incógnita (x na equação), variável (x na função) e coeficiente (a tanto na equação como na função). Especificamente, o uso da letra *x* para representar tanto incógnita em equações como variáveis em funções pode, portanto, confundir os estudantes.

Quadro 2 - Usos diferentes de letras em expressões e equações algébricas

Letras como…	Exemplos	Caracterização
incógnitas (x)	$3x + 7 = 10$ $x^2 + 7x = 49$	Quantidades que não conhecemos e que satisfazem determinada equação
Variáveis (x e y)	$f(x) = x$ $x^2 + y^2 = 1$	Quantidades que não conhecemos e que podem tomar valores arbitrários determinados por certas

		condições
Coeficientes (a e b e c)	$y = ax + b$ $ax^2 + bx + c = 0$	Quantidades que consideramos conhecidas em determinadas expressões algébricas para descrever um caso genérico

Fonte: baseado em Roque (2012)

Embora o professor possa não ser aquele que ensinará letras como variáveis (por exemplo, no 1º ano do Ensino Médio), é importante estar ciente dessas possíveis questões ao ensinar letras como incógnitas. Da forma similar, ao ensinar variáveis, o professor deve considerar que os estudantes podem já ter estabelecido rotinas com letras como incógnitas (por exemplo, no 9º ano do Ensino Fundamental). Tal consciência do professor é importante para preparar os estudantes para o que vem a seguir e antecipar possíveis conflitos entre o que eles conhecem e o que é novo para eles. Acreditamos que tal consciência pode ser estabelecida com preparação docente adequada, que expanda os discursos matemático e pedagógico dos professores por meio do fortalecimento de sua confiança no conteúdo matemático; da identificação de conexões entre ideias matemáticas; da demonstração de como objetos matemáticos, neste caso, as letras em álgebra, podem ter diferentes usos e significados; e da aprendizagem sobre como tais conexões podem ser integradas no ensino de matemática (ver as discussões sobre: Conhecimento de Conteúdo de Horizonte, em Ball, Thames e Phelps, 2008; dimensões de Fundação e Conexão do Quarteto do Conhecimento, em Turner e Rowland, 2011; Discurso Matemático para o ensino, em Cooper, 2014). A *mathtask* no Quadro 1 objetiva tal preparação e diz respeito a um conteúdo matemático que, apesar de não ser necessariamente usado em aula, enriquecerá os discursos dos professores e influenciará suas decisões no ensino.

Discussões em torno da pergunta (a) da *mathtask* oferecem a possibilidade de falar sobre a diferença epistemológica entre variáveis e incógnitas, como resumido no Quadro 2. Como coeficientes também aparecem nas expressões genéricas de equações e d funções, também podem ser discutidos; exemplos são bem-vindos para explicar, por exemplo, a arbitrariedade ou não das letras. Além disso, na pergunta (b), há possibilidades de discutir questões de sala de aula e potenciais abordagens para essas questões quando surgirem. Neste caso, a experiência profissional do professor pode nos surpreender, com relatos de erros comuns de estudantes ou estratégias desenvolvidas por professores para lidar com situações parecidas.

Usando *mathtask* em um mestrado profissional para professores de matemática a nível escolar

A *mathtask* no Quadro 1 acima foi usada no contexto da pesquisa de doutorado da terceira autora (MOUSTAPHA-CORRÊA, 2020; MOUSTAPHA-CORRÊA; BERNARDES; GIRALDO, 2019; MOUSTAPHA-CORRÊA *et al*., 2021). Professores em formação continuada que assistiram à aula reconheceram suas próprias práticas em situações semelhantes à presente na *mathtask*. Alguns deles não perceberam que, na transição do estudo de equações para o estudo de funções, é necessário prestar atenção às diferenças entre incógnitas e variáveis. Por outro lado, o mesmo grupo de professores argumentou que em determinadas situações, como 2(a), 2(b) e 2(c) (Quadro 1), eles "resolvem a função" para encontrar a solução do problema. Portanto, a *mathtask*, como apresentada aqui, atingiu seus propósitos.

Mais especificamente, parece que alguns dos professores que participaram no estudo não estavam habituados a destacar a diferença entre equações e funções para seus estudantes. Passavam de incógnitas para variáveis sem considerar que não são a *mesma coisa* — o que Giraldo e Roque (2014) chamam de *naturalizar*. Os diferentes usos de letras em álgebra as tornam objetos diferentes no discurso matemático de sala de aula. Não destacar essas diferenças pode causar um *conflito comognitivo* (SFARD, 2008) entre o que o professor e o livro didático dizem e o que os estudantes respondem nas tarefas. Um conflito comognitivo pode ocorrer quando a mesma palavra é usada de modos diferentes pelos participantes de uma discussão, especialmente quando esses não estão cientes das diferenças. No caso de "resolver funções", isso ocorre, pois, estudantes não mudaram seu discurso sobre letras, e professores devem estar atentos e prontos para abordar a questão no ensino.

Em desenhos futuros de *mathtasks*, a questão de "resolver funções" também pode ser abordada por meio de uma situação de sala de aula em que se pede que os estudantes estudem as propriedades de uma função quadrática, eles a igualam a zero e resolvem a equação resultante, indiferentemente ao indicado no enunciado ou pelo professor.

Exemplo 2. Tecnologia como mediador visual: "o que vocês veem?"

Os dados que inspiraram este exemplo de *mathtask* vêm da pesquisa de doutorado da segunda autora, que aborda o trabalho de professores com recursos (KAYALI, 2019; KAYALI; BIZA, 2017, 2021). Recursos aqui são definidos como "qualquer coisa que pode intervir na atividade [de um professor]"; pode ser um artefato (por exemplo, uma caneta), um material de ensino (por exemplo, uma folha de exercícios), ou mesmo uma interação social (por exemplo, uma conversa com um colega) (GUEUDET; BUTEAU; MESA; MISFELDT, 2014, p. 142). Nosso interesse no trabalho de professores com recursos surgiu da influência de mão-dupla entre recursos e professores (i.e. recursos influenciam e são influenciados por professores); portanto, explorar as interações entre os dois pode ajudar a identificar oportunidades de desenvolvimento do ensino (KAYALI; BIZA, 2021; GUEUDET *et al*., 2014). Partindo desse interesse, uma série de aulas foi observada com um professor de matemática, Adam, que trabalhava em uma escola britânica.

Observações que levaram ao desenho da *mathtask*

Contexto de aula

Essa foi a primeira aula que observamos com Adam. Na época da observação, Adam tinha quatro anos de experiência docente, dando aulas para estudantes na faixa etária de 12 a 18 anos. Ele é formado em economia e tem um Certificado de Pós-Graduação em Pedagogia[10] para o ensino de matemática em escolas de ensino secundário (estudantes de 12 a 18 anos) e estava prestes a completar o mestrado em educação[11]. No Reino Unido, não é necessário que professores sejam formados em matemática para dar aulas de matemática. Em lugar disso, um curso de graduação que tenha um componente matemático é suficiente, desde que juntamente a um certificado de pós-graduação em pedagogia, que é um curso formação inicial de formação de professores. A primeira aula de Adam que observamos foi para uma turma do 12º ano (estudantes de 17 a 18 anos) e foi gravada em áudio. A aula foi dada em uma sala que continha um quadro branco interativo e um computador para uso do professor. O computador do professor tinha dois softwares de ensino matemático: Autograph (www.autograph-

---

[10] O Certificado de Pós-Graduação em Pedagogia (Post-Graduate Certificate in Education, PGCE) é um curso de formação de professores de um ou dois anos ("Teaching- What is a PGCE?", 2019. Acesso em: https://getintoteaching.education.gov.uk/explore-my-options/teacher-training-routes/pgce). Esse é um dos caminhos para se qualificar como professor na Inglaterra, e exige que o candidato tenha graduação em matemática ou área afim ("Teaching- Eligibility for teacher training", 2019. Acesso em: https://getintoteaching.education.gov.uk/eligibility-for-teacher-training). Se o diploma de graduação do candidato não for em matemática, ele pode cursar uma disciplina de conhecimento de conteúdo ("Teaching- Subject knowledge enhancement (SKE) courses", 2019. Acesso em: Retrieved from https://getintoteaching.education.gov.uk/explore-my-options/teacher-training-routes/subject-knowledge-enhancement-ske-courses).

[11] O Mestrado em Prática e Pesquisa Educacional é um curso de pós-graduação em dedicação parcial para profissionais da educação (principalmente professores) interessados em expandir o desenvolvimento profissional pelo estudo para um diploma a nível de mestrado ("MA Educational Practice and Research, UEA", 2019).

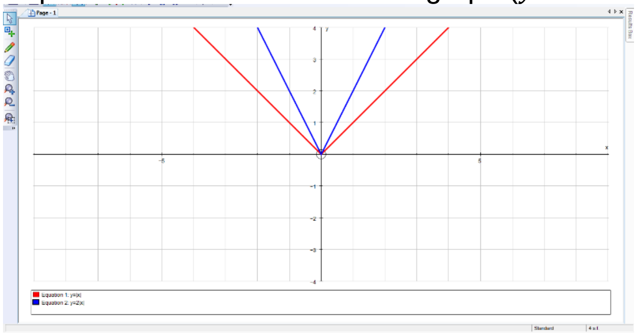
maths.com) e GeoGebra (www.geogebra.org). O foco da observação foi o uso de recursos por Adam, especialmente o uso de softwares de ensino de matemática, neste caso, Autograph ou GeoGebra, que ele mencionou empregar com frequência em suas aulas.

Visão geral da aula

A observação foi feita em uma aula de revisão sobre a solução de equações lineares e modulares (i.e. equações que incluem valor absoluto). Adam começou mexendo um bastão no ar para desenhar um gráfico específico, e pediu para os estudantes reconhecerem o gráfico. Um dos gráficos era o da função seno, mas os estudantes pareciam confusos quanto aos gráficos desenhados. Depois da atividade do bastão, Adam pediu aos estudantes para resolverem problemas apresentados no quadro. Todos os problemas eram selecionados do livro didático, exceto por um, criado por Adam. Durante a aula, Adam usou Autograph para corrigir as respostas dos estudantes, digitando as funções para que os gráficos fossem projetados no quadro. Em seguida, uma discussão e demonstração da solução algébrica foi conduzida por ele no quadro branco. Quando dois estudantes acabaram os problemas passados no quadro antes do resto da turma, Adam propôs uma questão extra, que ele pode ter sugerido espontaneamente em resposta à necessidade de mais trabalho. A questão extra tinha duas partes: a primeira pedia duas funções modulares diferentes sem interseção, e a segunda pedia duas que tivessem uma interseção. “É possível? Vocês podem me mostrar duas com uma interseção?”, Adam perguntou à turma, e se seguiu o diálogo:

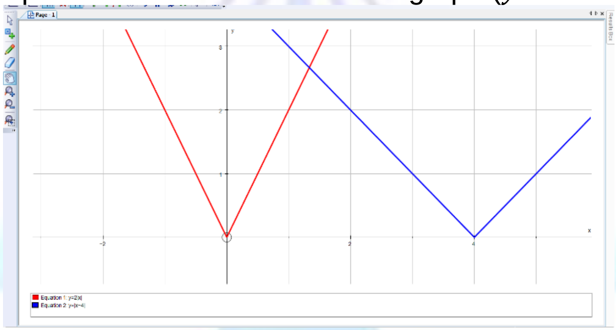
> Estudante A: $y = |x|$ e $y = 2|x|$
>
> [*Adam plotou os gráficos no Autograph (Figura 2)*]
>
> Adam: Ah, é isso mesmo.
>
> Estudante A:Isso, você traduziu.
>
> Estudante B:$y = |x - 4|$ e $y = 2|x|$.
>
> [*Adam plotou os gráficos no Autograph (Figura 3), olhou para os gráficos no Autograph e balançou a cabeça, no que parecia concordância hesitante*].
>
> Estudante C: Muda a inclinação.
>
> Adam ajustou as equações conforme sugestão do estudante C e escreveu
>
> $y = 2|x-4|$ e $y = 2|x|$ sem comentar a resposta do estudante B.
>
> [*Adam não prosseguiu com discussões sobre a resposta do estudante B, ou sobre a correção do estudante C. Em vez disso, passou para uma atividade completamente diferente, com a qual concluiu a aula*].

Figura 2 - Resposta do estudante A no Autograph ($y = |x|$ e $y = 2|x|$)



Fonte: dados da pesquisa

Figura 3 - Resposta do estudante B no Autograph ($y = |x - 4|$ e $y = 2|x|$)



Fonte: dados da pesquisa

O que é interessante nessa aula e por quê?

Softwares de educação matemática influenciam ações dos professores, pois são adaptados para proporcionar acesso a conhecimento matemático; nota-se que eles tornem o ensino mais complexo (por exemplo, se estudantes entendem mais de tecnologia do que seus professores) e as tarefas mais difíceis de planejar (CLARK-WILSON; NOSS, 2015). Tal complexidade pode levar a "soluços", que são momentos ou eventos inesperados na sala de aula que ocorrem devido ao uso de tecnologia (CLARK-WILSON; NOSS, 2015). Momentos e eventos inesperados em sala de aula também foram abordados por Rowland, Thwaites e Jared (2015) em um contexto mais amplo (i.e., não somente em relação a tecnologia) na dimensão "Contingência" do Quarteto do Conhecimento. Por exemplo, um momento "contingente" pode ocorrer devido a contribuições inesperadas de estudantes. A dimensão de contingência de Rowland *et al*. (2015) enfoca as respostas dos professores a tais contribuições, suas respostas à disponibilidade ou não de recursos, seu uso de oportunidades que surgem na sala de aula e o fato de desviarem ou não de seu planejamento de aula.

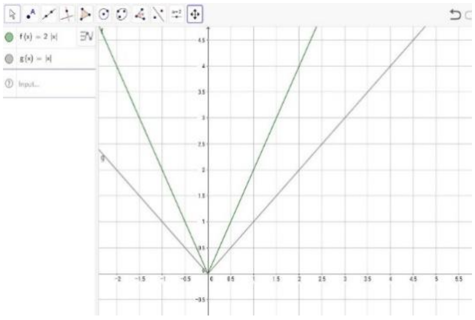
A observação da aula abordada neste exemplo joga luz nessa complexidade e nos eventos inesperados ou não planejados. Por um lado, evidencia a apreciação de Adam pela facilidade de uso do Autograph para representações visuais; na forma como ele usou o software para verificar o trabalho dos estudantes e apresentar soluções gráficas antes de partir para soluções algébricas. Por outro lado, Adam pareceu confuso com o Autograph no momento da resposta do estudante B, com a qual pareceu concordar hesitantemente. Isso pode ter sido porque só um ponto de interseção era visível na parte do gráfico mostrada (Figura 3). Nesse caso, Adam perdeu a oportunidade de usar todos os recursos do Autograph (no caso, a ferramenta de zoom) para melhorar a resposta do estudante B e explicar a resposta correta ao resto da turma. Não houve evidência de que o resto da turma, exceto o estudante C, tenha percebido onde estava problema como esse foi corrigido. Usando a linguagem do Quarteto do Conhecimento (ROWLAND *et al*., 2015), esse foi um momento contingente que ocorreu devido a respostas e contribuições inesperadas de estudantes, e parece que o professor perdeu a oportunidade de refletir sobre o ocorrido.

A *mathtask* e seu desenho

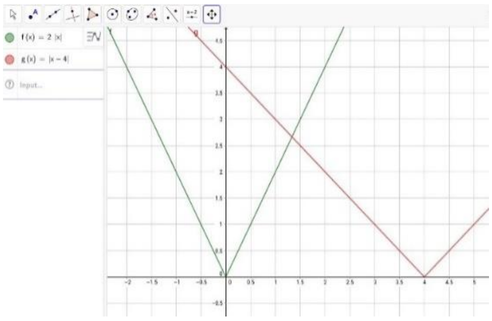
Com base na observação descrita, criamos uma tarefa que refletia a situação de sala de aula observada, especialmente em relação ao uso de tecnologia. Uma equipe de pesquisadores em Educação de Matemática e de professores atuantes examinou o episódio de sala de aula e reconheceu que a questão extra que Adam usou em aula (pedindo duas funções modulares diferentes sem interseção, e duas com uma interseção) poderia ser a base de uma tarefa para compartilhar com os professores. A equipe sugeriu substituir o Autograph pelo GeoGebra, pois esse último é um software gratuito e, portanto, mais acessível a professores de diferentes escolas. Assim, a tarefa do Quadro 3 foi produzido.

Quadro 3 - Uma *mathtask* sobre equações modulares

Em uma aula para o 12º ano sobre equações modulares, pede-se o seguinte aos estudantes: “Apresente duas funções modulares cujos gráficos têm apenas uma interseção.” O professor e os estudantes têm acesso ao software Geogebra. Depois de certo tempo, ocorre a seguinte conversa: Estudante A: As duas funções modulares que encontrei foram $y = \|x\|$ e $y = \|2x\|$. Estudante B: Encontrei outro par: $y = \|x - 4\|$ e $y = 2\|x\|$. Professor: Vamos verificar essas soluções no GeoGebra. O professor gera os gráficos das sugestões dos estudantes A e B no GeoGebra.



Estudante A



Estudante B

Perguntas:

a. Que questões você acha que surgem das soluções propostas pelos estudantes A e B?

b. Quais são os objetivos de realizar essa atividade em aula?

c. Se você fosse o professor, o que você faria a seguir, em resposta aos dois estudantes e ao resto da turma?

d. Como você usaria o software GeoGebra, ou outro software, para justificar as respostas acima?

Fonte: dados da pesquisa

Usando *mathtask* para reflexão e desenvolvimento profissional de professores escolares

Professores atuantes que participaram de um evento de formação de professores (neste caso, desenvolvimento profissional) do MathTASK no Reino Unido foram apresentados a esta *mathtask* e convidados a refletir e discutir a respeito de questões sobre o uso de tecnologia. A discussão girou em torno do uso de tecnologia, assim como do uso de mais de uma abordagem para resolver o problema. Questões ligadas ao software foram identificadas nas respostas de treze professores, incluindo: o valor da representação visual de gráficos e soluções e a ferramenta de zoom do software; e se o software deveria ser uma ferramenta principal ou suplementar de ensino em tais situações. Além disso, alguns professores sugeriram que a discussão em sala de aula deveria ser encorajada neste caso, e que poderia ser iniciada com perguntas abertas como “o que vocês veem?”. Outros sugeriram gerar o gráfico de uma função e criar outra que possa ser manipulada usando controles deslizantes para a inclinação e/ou para a interseção em y, de forma a permitir que os estudantes explorem o que aconteceria quando esses valores mudassem. Nessa conversa, valorizamos o engajamento dos professores com o conteúdo matemático relacionado com a *mathtask* (por exemplo, resolver equações modulares, traduzir gráficos, o papel de inclinações etc.); o significado matemático e o papel pedagógico de representações; o papel da tecnologia na visualização de ideias matemáticas e suas potencialidades e desvantagens pedagógicas (sobre o foco em discursos matemáticos e pedagógicos, ver Biza *et al*. (2018)). Além disso, demos crédito ao uso da *mathtask* em manter a discussão estruturada e contextualizada em questões especificas (sobre o foco na especificidade de respostas de professores, ver Biza e Nardi (2019) e Biza *et al*. (2018)). De forma geral, a tarefa ajudou a trazer à tona questões sobre o uso de tecnologia e sobre o ensino/aprendizagem de matemática. Portanto, consideramos que o objetivo principal da *mathtask* em discussão foi atingido.

Exemplo 3: O que a│b significa na matemática universitária?

A *mathtask* que discutimos nesta seção diz respeito ao ensino de matemática em nível universitário e visa auxiliar no desenvolvimento profissional de professores universitários de matemática[12]. Recentemente, instituições de educação superior no Reino Unido têm investido mais recursos na preparação de seus professores para o ensino. Até o momento, essa preparação era principalmente em pedagogia geral (por exemplo, gestão de aprendizagem, uso de recursos ou avaliação) e menos na pedagogia de uma disciplina específica — no nosso caso, a matemática. A *mathtask* proposta se concentra no ensino de matemática em nível universitário com atenção tanto em matemática como em pedagogia, e se baseia em resultados da pesquisa de doutorado da quinta autora sobre o envolvimento esperando e factual de estudantes com discursos matemáticos universitários no contexto de questões de exames de fim de ano (THOMA, 2018; THOMA; NARDI, 2017, 2018). Começamos com uma amostra dos resultados que levaram ao desenho desta *mathtask*.

Observações que levaram ao desenho da *mathtask*

A amostragem de dados que apresentamos aqui vem da análise de respostas escritas de exames de fim de ano de vinte e dois estudantes em um módulo de primeiro ano sobre Conjuntos, Números, Demonstrações e Probabilidade em um departamento de matemática no Reino Unido (THOMA; NARDI, 2018). Uma das questões propostas aos estudantes nesses exames é apresentada na Figura 4.

[12] No contexto do Reino Unido, professores universitários são usualmente ser chamados de *lecturers* e a sessão conduzida por esses professor é chamada de *lecture*. Na estrutura usual de uma *lecture*, o *lecturer* expõe o conteúdo e os estudantes participam fazendo anotações e contribuições pontuais. Também há outras formas de ensino, como *seminars*, em que estudantes trabalham em listas de exercícios e o professor os ajuda, respondendo dúvidas que possam ter.

Figura 4 - Pergunta de prova no módulo sobre conjuntos, números, provas e probabilidade

(a) Suponha que a, b, d, m, n são inteiros. Dê a definição do que significa dizer que d é um divisor de a. Usando essa definição, prove que se, d é um divisor de a e d é um divisor de b, então d é um divisor de $ma + nb$.

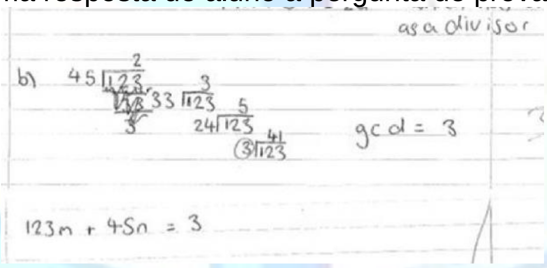
(b) Use o algoritmo Euclidiano para encontrar d, o máximo divisor comum entre 123 e 45. Assim (ou de outra forma), encontre inteiros m, n com $123m + 45n = d$.

(c) Existem inteiros s, t tais que $123s + 45t = 7$? Explique sua resposta cuidadosamente.

Fonte: Thoma e Nardi (2018, p. 168)

Um estudante escreveu a resposta que vemos na Figura 5. Nessa resposta, o estudante escreve d/a e d/b, em que d é o divisor de a e b. Os resultados dessas frações, m e n, respectivamente, são considerados como números inteiros na resposta do estudante, apesar de não sejam. Isso é conflitante com a introdução das variáveis m e n na tarefa como números inteiros. Thoma e Nardi (2018) sugerem que o estudante foi instruído a se engajar com os discursos de diferentes conjuntos numéricos, os números inteiros e os números reais, e, ao trabalhar com os inteiros, os viu como reais, e vice-versa. O erro "ocorreu porque o estudante não delimitou a narrativa que produziu em um contexto numérico específico". Thoma e Nardi (2018, p. 168) descrevem isso como uma manifestação de um conflito comognitivo subjacente relacionado a não "trabalhar no contexto numérico adequado". Tal observação levou à *mathtask* proposta, que apresentamos a seguir.

Figura 5 - Uma resposta de aluno à pergunta de prova da Figura 4



Fonte: Thoma e Nardi (2018, p. 169)

A *mathtask* e seu desenho

A *mathtask* no Quadro 4 refere-se a aulas de matemática de primeiro ano de graduação e captura uma cena de uma aula de exercícios (*seminar).* No contexto do Reino Unido, após as aulas teóricas (*lectures*), os estudantes têm aulas de exercícios (*seminars*), nas quais trabalham com problemas relacionados com o conteúdo apresentado nas aulas teóricas. O objetivo principal das aulas de exercícios é que os estudantes trabalhem os problemas, individualmente ou com colegas. Nessas aulas de exercício, na universidade onde esta pesquisa foi conduzida, normalmente há cerca de vinte estudantes e um ou dois tutores (docentes ou estudantes de doutorado). Os tutores andam pela sala e respondem a perguntas que os estudantes podem ter. A situação a seguir ocorre em uma dessas aulas em um módulo de primeiro ano de graduação em matemática. A tarefa começa com uma breve descrição de contexto. O leitor que se engaja com a tarefa é instruído a tomar o lugar do professor. O professor é confrontado com a solução de dois estudantes e pedido para refletir sobre como responderia a eles.

Quadro 4 - A *mathtask* de teoria de números “a divide b"

Estudantes de primeiro ano de graduação foram apresentados ao conceito de divisor na aula expositiva da semana passada. Agora, estão em uma aula de exercícios e trabalham com uma lista de questões sobre o conceito de divisor. Os estudantes fazem os exercícios individualmente, ou em duplas. Você anda pela sala e vê o que eles estão fazendo. Você vê dois estudantes discutindo seu trabalho no seguinte problema:

“Prove que se $a \mid b$ e $a \mid c$ então $a \mid b + c$, em que a, b e c são números inteiros.”

Eles parecem ter chegado a uma solução, que estão discutindo. Você vê o que eles escreveram:

$$\frac{a}{b} = k \text{ e } \frac{a}{c} = l,$$

Então $b = \frac{a}{k}$ e c= $\frac{a}{l}$.

$$\frac{a}{b+c} = \frac{a}{\frac{a}{k} + \frac{a}{l}} = \frac{1}{\frac{k+l}{kl}} = \frac{kl}{k+l}$$

Você os ouve comentar:

Estudante A: Acho que é isso. Nós temos que a divide b e que a divide c, e nós mostramos que a divide $b + c$.

Estudante B: É, acho que acabamos. Foi fácil.

Perguntas:

a. Como você resolveria esse problema matemático?

b. Qual poderia ser o objetivo de usar esse problema em aula?

c. Que questões você abordaria na sua resposta a esses estudantes?

Fonte: dados da pesquisa

Esta *mathtask* segue a metodologia do programa MathTASK, também inspirada pela metodologia usada por Iannone e Nardi (2005), e por Nardi (2008), que pediram que professores de graduação em matemática discutissem respostas escritas selecionadas de estudantes. Seu principal objetivo é desencadear reflexões sobre aspectos como: uso de simbolismo; uso de terminologia; e a transição entre vários domínios numéricos. Discutimos esses aspectos também com base na literatura de pesquisa relevante.

A adequação da convenção de usar o símbolo “$|$” para ilustrar a propriedade de divisibilidade é questionada por Kontorovich (2019). Os participantes de seu estudo são matemáticos que discutem convenções matemáticas e os símbolos utilizados. Eles questionaram a característica simétrica do símbolo “$|$” e a discrepância com a relação não simetria de $a|b$. De forma semelhante, Zazkis (1998) discute significados do termo divisor. A palavra divisor se refere ao número pelo qual se divide no contexto da divisão; e, no contexto da teoria de números, a palavra divisor indica um número inteiro. Especificamente, na teoria de números, $a|b$ em que a e b são números inteiros significa que b é um número inteiro múltiplo de a. Em outras palavras, $b = ka$, em que $a, b,$ e k são números inteiros.

Na *mathtask* do Quadro 4, os estudantes traduziram $a|b$, que significa “a divide b” como o quociente entre a e b ($a \div b$). Os estudantes introduzem o símbolo k para indicar o resultado do quociente e, de forma semelhante, introduzem o símbolo / para $a \div c$. Eles manipulam a expressão para criar a soma $b + c$ e sua manipulação resulta em uma fração. Entretanto, não comentam o domínio numérico das variáveis k, l e da fração resultante $\frac{kl}{(k+l)}$. O resultado do quociente entre dois números inteiros não é necessariamente um número inteiro. O problema de usar símbolos sem fornecer informações explícitas sobre o domínio numérico da variável também é documentado na pesquisa (BIEHLER; KEMPEN, 2013; EPP, 2011; THOMA, 2018; THOMA; NARDI, 2017, 2018). A definição de que a divide b significa que b é um número inteiro múltiplo de a. Em consequência, o resultado da divisão deve estar nos inteiros. Entretanto, esses estudantes lidam com variáveis sem especificar o conjunto numérico a que pertencem e sem considerar as restrições da divisão no conjunto dos números inteiros, pois esse conjunto não é fechado em relação à divisão. Além disso, o símbolo de divisibilidade (“$|$”) e o símbolo de divisão (“/”) são muito semelhantes, mas expressam relações muito diferentes entre números. Por exemplo, quando temos a e b inteiros e escrevemos “$a|b$”, existe um número inteiro k tal que $b = ka$. Por outro lado, quando escrevemos “a/b”, dizemos “a dividido por b”. Nessa segunda situação, não há restrições quanto aos domínios numéricos das variáveis a e b. O quociente da divisão não é necessariamente um número inteiro, nem as variáveis a e b. Nesse caso, a relação pode ser representada por $a = bk$, em que a, b e k são números reais.

Propomos que a discussão desta *mathtask* pode proporcionar oportunidades para professores universitários refletirem sobre: o uso de variáveis e notações para operações matemáticas; a introdução de variáveis especificando o conjunto numérico a que essas pertencem; e se o resultado de uma divisão pertence ao mesmo conjunto numérico dos números sendo divididos. De forma semelhante, o objetivo desta tarefa é desencadear discussões em torno do objeto divisor e dos diferentes usos do termo em várias questões matemáticas, com que os estudantes podem ter familiaridade de sua educação escolar ou universitária. Além de discussões sobre esses conflitos comocognitivos potenciais, outra questão levantada pela tarefa é a restrição dos inteiros em relação à operação de divisão. Isso pode levar a discussões sobre os vários domínios numéricos e à verificação do fechamento de várias operações nesses domínios. Finalmente, o engajamento nesta *mathtask* pode criar a oportunidade de discutir os diferentes usos e significados de símbolos matemáticos e como a transição de estudantes entre áreas matemáticas e/ou níveis educacionais (por exemplo, da escola para a universidade) podem influenciar ou desafiar sua aprendizagem de matemática.

Exemplo 4: Pode a descrição não convencional de uma pirâmide de base quadrada por um estudante cego desafiar perspectivas capacitistas sobre o ensino de matemática?

Apesar de a justiça social ser uma preocupação de muitos pesquisadores interessados em construir salas de aula de matemática mais igualitárias, até recentemente, a atenção dada a estudantes com deficiências tem sido escassa. Em particular, apenas recentemente esse tema começou a ganhar ímpeto na pesquisa e no desenvolvimento em formação de professores de matemática. Além disso, onde existem discursos sobre estudantes com deficiências, esses tendem a subestimar seu potencial para a aprendizagem de matemática (GERVASONI; LINDENSKOV, 2011). Tais discursos foram descritos como “capacitistas”, sendo o capacitismo

> uma rede de crenças, processos e práticas que produzem um tipo específico de ser (self) e de corpo (o padrão corporal) que é projetado como o tipo perfeito, típico da espécie e, portanto, essencial e plenamente humano. A deficiência é, portanto, colocada como um estado diminuído de humanidade (CAMPBELL, 2001, p. 44).

Há sinais de mudança, entretanto, como demonstrado por um volume pequeno, mas crescente, de pesquisa que explora como suposições capacitistas contribuem para a criação de ambientes de aprendizagem incapacitantes, nos quais estudantes com configurações cognitivas, emocionais, físicas ou sensoriais que diferem daquilo que atualmente é definido como socialmente desejável e normal estão em desvantagem (HEALY; POWELL, 2013). Foi com esse desejo de desafiar o capacitismo, especialmente no contexto da formação e do desenvolvimento profissional de professores, que foi concebido o projeto *CAPTeaM* (*Challenging Ableist Perspectives on the Teaching of Mathematics*, ou *Desafiando Perspectivas Capacitistas sobre o Ensino de Matemática*).

Opção por elementos de desenho de pesquisa de *mathtask* no projeto CAPTeaM

Para explorar e desafiar o capacitismo, em especial no contexto de formação e desenvolvimento profissional de professores, produzimos e testamos *mathtasks* que encorajam professores a refletir sobre os desafios de ensinar matemática para aprendizes com deficiências. A seguir, ilustramos como os princípios de desenho do MathTASK foram implementados no desenho de uma *mathtask* para o CAPTeaM e oferecemos também evidências de o engajamento de professores em formação inicial e continuada com as *mathtasks* contribui para a reflexão sobre a inclusão de aprendizes com deficiências em aulas de matemática. Depois disso, apresentamos um construto teórico que emergiu de análises fundamentadas em dados coletados pelo uso de *mathtasks* do CAPTeaM e que agora sustenta nossas análises de dados em diferentes partes do projeto. Um resultado dessas análises é que programas de formação e desenvolvimento profissional de professores precisam questionar mais explicitamente as perspectivas (muitas vezes capacitistas) dos professores em relação ao que constitui uma sala de aula de matemática normal.

O CAPTeaM é um projeto colaborativo envolvendo pesquisadores e professores em formação inicial e em exercício no Brasil e no Reino Unido. Dois financiamentos do Esquema de Parceria e Mobilidade Internacional da Academia Britânica (British Academy International Partnership and Mobility Scheme) nos permitiram combinar os diferentes focos de investigação de duas equipes de pesquisa (no Reino Unido, a equipe por trás do MathTASK; no Brasil, a equipe do projeto Rumo à Educação Matemática Inclusiva) de modo recíproco. A equipe desenha *mathtasks* que visam criar oportunidades para professores em formação inicial e continuada refletirem sobre questões ligadas à inclusão de estudantes com deficiências em suas aulas de matemática. As tarefas enfatizam diferentes questões ligadas à inclusão e desafiam o que identificamos como suposições capacitistas de diferentes modos.

As *mathtasks* do CAPTeaM e seu desenho: princípios e um exemplo

O desenho das tarefas envolve a seleção, por membros da equipe brasileira, de episódios de interações matemáticas entre estudantes e professores a partir do banco de dados de evidências em vídeo coletadas nos diferentes estudos de seu programa de pesquisa. Como escrito por Nardi, Healy, Biza e Fernandes (2016, p. 349):

> o princípio de desenho por trás do processo de seleção é a ideia de destacar a agência matemática de estudantes com deficiências: em vez de tentar determinar realizações “normais” ou “ideais” e posicionar aqueles que desviam das supostas normas como problemáticos e necessitados de remediação, atenção deve ser direcionada a como as ideias matemáticas dos estudantes podem se desenvolver de formas diferentes e a que estratégias pedagógicas são apropriadas para apoiar essas trajetórias de desenvolvimento. O objetivo é, portanto, localizar episódios representativos de práticas matemáticas bem-sucedidas associadas a formas específicas de interação com o mundo — práticas de estudantes que veem com as mãos e com os ouvidos, que falam com as mãos, cuja memória visual é mais eficiente do que a memória verbal, ou que têm outras formas interessantes de interagir com o mundo. Optamos por episódios envolvendo o uso de estratégias matemáticas interessantes e válidas, mas cujas propriedades e relações foram expressas de formas surpreendentes ou pouco convencionais.

Usando a abordagem do MathTASK, cada episódio é inserido como clipe de vídeo em uma narrativa breve sobre uma sala de aula de matemática fictícia. Em seguida, convidamos os participantes a assumir o papel do professor dessa turma e avaliar as interações dos estudantes com deficiências apresentadas nos vídeos — primeiro individualmente, em respostas escrita a um conjunto de perguntas, e depois em uma discussão em grupo (na qual fazemos anotações de observação e que também gravamos em áudio e em vídeo).

Apresentamos agora um exemplo de uma *mathtask* do CAPTeaM, André e a pirâmide (Quadro 5 e Figuras 6 e 7). O vídeo usado na tarefa mostra um episódio breve de uma atividade em que um estudante cego propõe uma descrição de uma pirâmide de base quadrada (Figuras 6, 7). Mais detalhes sobre o contexto da pesquisa em que a atividade foi utilizada encontram-se em Healy e Fernandes (2011).

Quadro 5 - Exemplo de uma *mathtask* do CAPTeaM: *André e a pirâmide*

Imagine-se dando uma aula sobre figuras geométricas tridimensionais. Conforme os estudantes exploram como descreveriam uma pirâmide de base quadrada para alguém que não conhece o conceito, você percorre a sala para observar as estratégias. Você nota que muitos contam faces, arestas e vértices. André, que é cego, está trabalhando com

materiais, como sólidos 3D. Ele observe a seguiste descrição.

Perguntas:

a) O que André propõe como descrição de pirâmide de base quadrada?

b) O que você faz a seguir?

c) Quais você acha que são questões nessa situação?

d) Que experiências prévias você tem para lidar com essas questões?

e) Que experiência prévia você tem para dar apoio à aprendizagem matemática de estudantes cegos em sua sala de aula?

f) Qual é seu grau de confiança em relação a incluir estudantes cegos em sua sala de aula?

Fonte: dados da pesquisa

O vídeo de 27 segundos mostra um estudante cego, André, descrevendo sua visão de uma pirâmide de base quadrada. Conforme ele falava, André movia os dedos ao longo nas arestas que unem os vértices na base da pirâmide (Figura 6) ao vértice no seu ápice (Figura 7). Imagens estáticas tiradas do vídeo são apresentadas em Nardi, Healy e Biza (2015, p. 55).

Figura 6 - Sentindo os vértices da base.

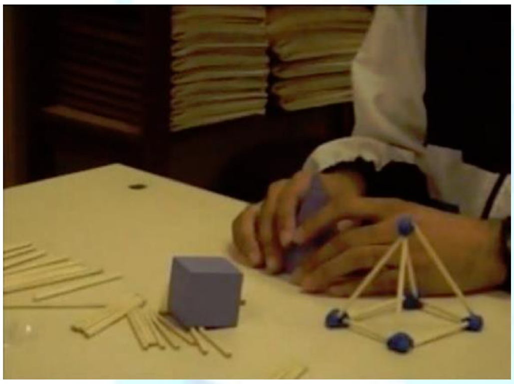


Figura 7 - Indicando o vértice do ápex.

Fonte: Nardi, Healy e Biza (2015, p. 55)

André diz: “Eu diria que a parte de baixo é quadrada… a base… é quadrada… E conforme a gente sobe, ficam… os lados do quadrado ficam menores… Até formar um ponto aqui no alto (ele move os dedos ao longo das arestas até o vértice no ápice da pirâmide)”.

Usando uma *mathtask* do CAPTeaM para explorar perspectivas de professores sobre a inclusão de estudante com deficiência em aulas de matemática

Análises fundamentadas em dados coletados em protocolos escritos de respostas a esta *mathtask*, bem como em gravações de vídeo das discussões plenárias (NARDI *et al*., 2016; NARDI; HEALY; BIZA, 2018) levaram a cinco temas:

1. Valor e Sintonia: em que grau um respondente valoriza e se sintoniza com as contribuições do estudante com deficiência, e como (e se) aborda as particularidades da agência matemática do estudante ou se adapta à restrição imposta à comunicação;

2. Gerenciamento de Sala de Aula: como o respondente gerencia a sala de aula após a contribuição do estudante com deficiência;

3. Experiência e Confiança: o quão experiente e confiante o respondente alega ser no ensino para estudantes com a deficiência exemplificada na *mathtask*;

4. Possibilidades e Restrições Institucionais: que possibilidades e restrições institucionais o respondente identifica como cruciais para o ensino dos estudantes destacados nesta *mathtask*;

5. Ressignificação: evidências de reconsiderações do respondente sobre suas visões e suas práticas intencionadas a partir do engajamento com a *mathtask*.

Nossas evidências sugerem que aqueles que se egajam com as *mathtasks* do CAPTeaM são encorajados a pensar sobre como a agência matemática de estudantes com deficiências pode ser ajudada ou inibida por aspectos dos ambientes de aprendizagem em que experienciam a matemática e a reconhecer que eles não são matematicamente deficientes a priori. Propomos que nossas tarefas são bem-sucedidas em motivar os professores em formação inicial e continuada a repensar a noção do estudante “normal”. Acreditamos que este seja um passo importante na direção de preparar professores para trabalhar com estudantes com deficiências e de influenciar como eles escolhem organizar as atividades de aprendizagem que oferecem a todos os estudantes. Estamos, contudo, cientes de uma ressalva: nossa escolha em situar as *mathtasks* em contextos de sala de aula que os professores provavelmente experimentam (ou já experimentaram) pode ter contribuído para estabelecer uma outra norma, a sala de aula normal. Construir uma matemática escolar inclusiva exige a desconstrução dessa noção também e, com frequência, é no que se segue à resposta escrita da *mathtask* (por exemplo, uma discussão em plenária e/ou uma oportunidade de se engajar com não só uma, mas com uma série de *mathtasks*) que se amplifica a oportunidade de começar a imaginar o que uma sala de aula de matemática verdadeiramente inclusiva pode ser.

Conclusões

Este artigo apresenta nosso trabalho no programa MathTASK, que desenha situações de sala de aula (*mathtasks*) para engajamento de professores de matemática, com fins de pesquisa e de formação de professores. O trabalho se baseia em estudos anteriores que usam casos ou incidentes de sala de aula específicos (reais ou fictícios) na formação de professores (cf. SHULMAN, 1992; ZAZKIS *et al*., 2013) e propõe um desenho e uso de situações de sala de aula que articule conteúdo matemático e pedagogia. Nas seções deste texto, apresentamos as sustentações teóricas que influenciam este trabalho; os princípios de desenho, implementação e avaliação, que demonstramos em um exemplo de *mathtask*; e os construtos teóricos propostos pelo uso das tarefas. Em seguida, apresentamos quatro exemplos de *mathtasks* que foram desenhadas para propósitos diferentes: em um mestrado profissional para professores de matemática da educação básica; para reflexão e desenvolvimento profissional de professores de matemática da educação básica; para reflexão e desenvolvimento profissional de professores de matemática da educação superior; e para explorar perspectivas de professores sobre a inclusão de aprendizes com deficiências em aulas de matemática. Os três primeiros exemplos estão associados às pesquisas de doutorado da segunda, da terceira e da quinta autoras deste artigo. Mais especificamente, no primeiro exemplo, as *mathtasks* foram desenhadas e aplicadas com propósito duplo: formação continuada de professores, e pesquisa sobre as mudanças discursivas desses professores a respeito do que é a matemática e do que é a verdade matemática (MOUSTAPHA-CORRÊA, 2020; MOUSTAPHA-CORRÊA; BERNARDES; GIRALDO, 2019; MOUSTAPHA-CORRÊA *et al*., 2021). No segundo e no terceiro exemplos, o desenho das *mathtasks* foi influenciado pela observação de pesquisa de uma sala de aula de matemática escolar (KAYALI, 2019; KAYALI; BIZA, 2017, 2021), no primeiro caso; e de práticas de avaliação no primeiro ano de graduação em matemática (THOMA, 2018; THOMA; NARDI, 2018), no segundo. O primeiro e o segundo exemplos abordam o ensino de matemática na escola básica do Brasil e do Reino Unido, respectivamente, e foram usados no desenvolvimento profissional de professores em exercício. O terceiro exemplo é uma nova direção do nosso trabalho, com foco no desenvolvimento profissional de professores universitários de matemática, uma área em rápido desenvolvimento no Reino Unido e nos EUA. O quarto exemplo é parte do projeto CAPTeaM, que engaja professores de todas as etapas educacionais em diferentes contextos nacionais e institucionais na reflexão sobre a inclusão de aprendizes de matemática com deficiências.

Em todos os exemplos, o conteúdo matemático é central e sempre entrelaçado com a pedagogia do ensino de matemática. Professores muitas vezes atuam nas fronteiras dos discursos docentes (baseados em suas experiências como estudantes ou como professores), discursos matemáticos (baseados no componente matemático de sua formação) e discursos pedagógicos (baseados no componente pedagógico de sua formação). O programa MathTASK visa articular esses discursos.

Além disso, pesquisas indicam que discussões sobre situações específicas de sala de aula fornecem estrutura para os argumentos dos professores e os ajuda a expressar suas perspectivas sobre ensino (GOODELL, 2006; SPEER, 2005). Alinhadas com essas observações, damos crédito ao desenho de MathTASK pela contextualização das reflexões dos professores.

De forma geral, vemos o desenho de tarefas baseadas situações específicas que propomos e os resultados teóricos do uso de *mathtasks* em pesquisa — classificação de garantias (NARDI *et al*., 2012) e tipologia de quatro características (BIZA *et al*., 2012) — como ferramentas potentes de pesquisa e componentes de avaliação formativa e somativa em programas de formação de professores. Ao acentuar a especificidade da situação de sala de aula, convidamos professores a refletir sobre as abordagens de estudantes (e de outros professores) e a imaginar suas próprias práticas intencionadas. Assim, ganhamos *insight* sobre as visões dos professores e, de forma crucial, desafiamos aspectos dessas visões.

Professores que participaram de oficinas de MathTASK comentaram que: “essas atividades me fizeram refletir sobre minha prática docente”, “meu engajamento com essas tarefas me ajudou a aprofundar meu próprio conhecimento matemático” e “meu engajamento com essas tarefas me ajudou a antecipar respostas e erros de estudantes, bem como suas diferentes formas de solucionar ou abordar conceitos matemáticos”. Esse equilíbrio entre matemática e pedagogia nas reflexões de professores está exatamente no cerne do programa MathTASK.

Agradecimento

O trabalho colaborativo entre nossas instituições, a partir do qual produzimos este artigo, é facilitado por Higher Education Impact Funds (HEIF) recebidos pelo programa MathTASK na UEA e um financiamento da British Academy International Partnership and Mobility [PM160190]. Também agradecemos à CAPES (Programa de Doutorado Sanduíche no Exterior – 88881.133350/2016-01) pelo apoio ao doutorado da terceira autora, por meio de uma bolsa de estágio de doutoramento na Rutgers University (New Jersey, USA).

Referências

ARCAVI, Abraham. Developing and using symbol sense in mathematics. **For the Learning of Mathematics**, v. 14, n. 3, p. 42–47, 2005.

BALL, Deborah; THAMES, Mark; PHELPS, Geoffrey. Content knowledge for teaching. **Journal of Teacher Education**, v. 59, n. 5, p. 389–407, 2008.

BIEHLER, Rolf; KEMPEN, Leander. Students' use of variables and examples in their transition from generic proof to formal proof. *In:* UBUZ, Behiye; HASER, Çiğdem; MARIOTTI, Maria-Alessandra (Eds.), **Proceedings** of the Eigth Congress of the European Mathematical Society for Research in Mathematics Education. Ankara, Turkey: Middle East Technical University and ERME, 2013. p. 86-95.

BIZA, Irene; NARDI, Elena. Scripting the experience of mathematics teaching: The value of student teacher participation in identifying and reflecting on critical classroom incidents. **International Journal for Lesson and Learning Studies**, v. 9, n. 1, p. 43-56, 2019.

BIZA, Irene; NARDI, Elena; JOEL, Gareth. Balancing classroom management with mathematical learning: Using practice-based task design in mathematics teacher education. **Mathematics Teacher Education and Development**, v. 17, n. 2, p. 182-198, 2015.

BIZA, Irene; NARDI, Elena; ZACHARIADES, Theodossios. Using tasks to explore teacher knowledge in situation-specific contexts. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 10, p. 301-309, 2007.

BIZA, Irene; NARDI, Elena; ZACHARIADES, Theodossios. Teacher beliefs and the didactic contract on visualization. **For the Learning of Mathematics**, v. 29, n. 3, p. 31-36, 2009.

BIZA, Irene; NARDI, Elena; ZACHARIADES, Theodossios. Competences of mathematics teachers in diagnosing teaching situations and offering feedback to students: Specificity, consistency and reification of pedagogical and mathematical discourses. *In:* LEUDERS, Timo; LEUDERS, Juliane; PHILIPP, Kathleen. (Eds.). **Diagnostic Competence of Mathematics Teachers**. Unpacking a complex construct in teacher education and teacher practice, New York: Springer, 2018, p. 55-78.

BIZA, Irene; NARDI, Elena; ZACHARIADES, Theodossios. Utilizando tarefas de situação específica para explorar o conhecimento matemático e as crenças pedagógicas: Exemplos de Álgebra e Análise. *In:* ROGUE, Tiatiana; GIRALDO, Victor. (Eds.). **O saber do professor de matemática*:*** ultrapassando a dicotomia entre didática e conteúdo. Rio de Janeiro, Brazil: Editora Ciência Moderna Ltda. 2014, p. 329-378.

CARTER, Kath. What is a case? What is not a case? *In:* LUNDEBERG, Mary; LEVIN, Barbara; HARRINGTON, Helen (Eds.). **Who learns what from cases and how?** The research base for teaching and learning with cases. Mahwah NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1999.

CHEVALLARD, Yves. **La transposition didactique** [The didactic transposition]. Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions, 1985.

CHRISTIANSEN, Bent; WALTER, Gail. Task and activity. *In:* CHRISTIANSEN, Bent; HOWSON, Geoffrey; OTTE, Michael (Eds.). **Perspectives on mathematics**

education*:* Papers submitted by members of the Bacomet Group. Dordrecht: D. Reide, 1986, p. 243-307.

CLARK-WILSON, Alison; NOSS, Richard. Hiccups within technology mediated lessons: A catalyst for mathematics teachers' epistemological development. **Research in Mathematics Education**, v. 17, n. 2, p. 92-109, 2015.

COOPER, Jason. Mathematical discourse for teaching: A discursive framework for analyzing professional development. *In:* **Proceedings** of the Joint Meeting of PME. v. 38, p. 337–344, 2014.

DREHER, Anika; NOWINSKA, Edyta; KUNTZE, Sebastian. Awareness of dealing with multiple representations in the mathematics classroom - A study with teachers in Poland and Germany. *In:* LINDMEIER, Anke; HEINZE, Aiso. (Eds.). **Proceedings** of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, v. 2. Kiel, Germany: PME, 2013, p. 249-256.

EPP, Susanna. Variables in mathematics education. *In:* **International Congress on Tools for Teaching Logic*.*** Springer, Berlin, Heidelberg, 2011, p. 54-61.

ERENS, Rolf; EICHLER, Andreas. Belief systems' change - from preservice to trainee high school teachers on calculus. In LINDMEIER, Anke; HEINZE, Aiso. (Eds.). **Proceedings** of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, v. 2, Kiel, Germany: PME, 2013. p. 281-288.

FREEMAN, James. Systematizing Toulmin's warrants: An epistemic approach. **Argumentation**, v. 19, n. 3, p. 331–346, 2005.

GERVASONI, Ann; LINDENSKOV, Lena. Students with "special rights" for mathematics education. *In:* ATWEH, Bill, GRAVEN, Mellony; VALERO, Paola. (Eds.). **Mapping equity and quality in mathematics education**. New York, NY: Springer, 2011. p. 307–324.

GIRALDO, Victor; ROQUE, Tatiana. História e Tecnologia na Construção de um Ambiente Problemático para o Ensino de Matemática. *In:* GIRALDO, Victor; ROQUE, Tatiana (Org.), **O Saber do Professor de Matemática**: Ultrapassando a Dicotomia entre Didática e Conteúdo. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2014, p. 9-37.

GOODELL, Joanne-Elizabeth. Using Critical Incident Reflections: A Self-Study as a Mathematics Teacher Educator. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 9, n. 3, p. 221-248, 2006.

GUEUDET, Ghislaine; BUTEAU, Chantalle; MESA, Vilma; MISFELDT, Morten. Instrumental and Documentational Approaches: From Technology Use to Documentation Systems in University Mathematics Education***.* Research in Mathematics Education**, v. 16, n. 2, p. 139-155, 2014.

HEALY, Lulu; FERNANDES, Solange. The role of gestures in the mathematical practices of those who do not see with their eyes. **Educational Studies in Mathematics**, v. 77, p. 157-174, 2011.

HEALY, Lulu; POWELL, Arthur. Understanding and overcoming "disadvantage" in learning mathematics. *In:* CLEMENTS, McKenzie-Alexander; BISHOP, Alan; KEITEL, Christine; KILPATRICK, Jeremy; LEUNG, Frederick (Eds.). **Third**

international handbook of mathematics education. NL: Springer, 2013. p. 69–100.

HERBST, Patricio; CHAZAN, Daniel. Exploring the practical rationality of mathematics teaching through conversations about videotaped episodes: The case of engaging students in proving. **For the Learning of Mathematics**, v. 23, n. 1, p. 2–14, 2003.

HOLE, Simon; MCENTEE, Grace. Reflection Is at the Heart of Practice. **Educational Leadership**, v. 56, n. 8, p. 34-37, 1999.

HILL, Heather; BALL, Deborah. Learning mathematics for teaching: Results from California's mathematics professional development institutes. **Journal for Research in Mathematics Education,** v. 35, n. 5, p. 330–351, 2004.

IANNONE, Paola; NARDI, Elena. On the pedagogical insight of mathematicians: 'Interaction'and 'transition from the concrete to the abstract'. **The Journal of Mathematical Behavior**, v. 24, n. 2, p. 191-215, 2005.

KAYALI, Lina. **Mathematics teachers work with resources***:* Four cases of secondary teachers using technology. (Unpublished doctoral dissertation). University of East Anglia, Norwich, UK, 2019.

KAYALI, Lina; BIZA, Irene. "One of the beauties of Autograph is … that you don't really have to think": Integration of resources in mathematics teaching. *In:* DOOLEY, Therese; GUEUDET, Ghislaine (Eds.). **Proceedings** of the 10th Conference of European Research in Mathematics Education. Dublin: Dublin City University, 2017. p. 2406-2413.

KAYALI, Lina; BIZA, Irene. Scheming and Re-scheming: Secondary Mathematics Teachers'Use and Re-use of Resources. **Digital Experiences in Mathematics Education**, Online First, 2021. Disponível em: https://doi.org/10.1007/s40751-021-00091-x. Acesso em 3 de ago. 2021.

KIERAN, Caroline; FORMAN, Ellice; SFARD, Anna. **Learning discourse**: Discursive approaches to research in mathematics education. Kluwer Academic Publishers, 2002.

KONTOROVICH, Igor'. What can be 'annoying' about mathematical conventions? Analysing exchanges of mathematically competent discursants. *In:* JANKVIST, Ufe; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, Maria; VELDHUIS, Michiel. (Eds.), **Proceedings** of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME, 2019.

LAMPERT, Magdalene. How do teachers manage to teach? Perspectives on problems in practice. **Harvard Educational Review**, v. 55, n. 2, p. 178–194, 1985.

LEATHAM, Keith; PETERSON, Blake; STOCKERO, Shari; VAN ZOEST, Laura. Conceptualizing mathematically significant pedagogical opportunities to build on student thinking. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 46, n. 1, p. 88–124, 2015.

LEONT'EV, Aleksie Nikolaevich. **Dieyatelinocti, soznaine, i lichynosti** [Activity, consciousness, and personality]. Moskva: Politizdat, 1975.

MARKOVITS, Z.; SMITH, M.S. Cases as tools in mathematics teacher education. *In:* TIROSH, Dina; WOOD, Terry (Eds.), **The international handbook of mathematics teacher education***:* Tools and Processes in Mathematics Teacher Education. Rotterdam: Sense Publishers, 2008, p. 39-65.

MASON, John; JOHNSTON-WILDER, Sue. **Designing and using mathematical tasks**. York, UK: QED Press, 2006.

MOUSTAPHA-CORRÊA, Bruna. **Rumo a uma Postura Problematizadora na Formação de Professores de Matemática*:*** Articulando Práticas Históricas e Práticas de Sala de Aula. Tese (Doutorado em Ensino e História da Matemática e da Física). Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, p. 363. 2020.

MOUSTAPHA-CORRÊA, Bruna; BERNARDES, Aline; GIRALDO, Victor. Historical tasks to foster problematization. *In:* JANKVIST, Ufe; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, Maria; VELDHUIS, Michiel. (Eds.). **Proceedings** of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME, p. 2149-2157, 2019.

MOUSTAPHA-CORRÊA, Bruna; BERNARDES, Aline; GIRALDO, Victor; BIZA, Irene; NARDI, Elena. Problematizing mathematics and its pedagogy through teacher engagement with history-focused and classroom situation-specific tasks. **Journal of Mathematical Behavior** (Special Issue: Advances in Commognitive Research), v. 61, p. 1-10, 2021.

NARDI, Elena. Amongst mathematicians: Teaching and learning mathematics at university level. **Springer Science & Business Media**, 2008.

NARDI, Elena; BIZA, Irene; ZACHARIADES, Theodossios. Warran revisited: Integrating mathematics teachers pedagogical and epistemological considerations into Toulmin’s model of argumentation. **Educational Studies in Mathematics**, v. 79, n. 2, p. 157-173, 2012.

NARDI, Elena; HEALY, Lulu; BIZA, Irene. The CAPTeaM Project (Challenging Ableist Perspectives on the Teaching of Mathematics): A preliminary report. *In:* ADAMS, Gill. (Ed.) **Proceedings** of the British Society for Research into the Learning of Mathematics Day Conference, v. 35, n. 2, p. 51-57, 2015.

NARDI, Elena; HEALY, Lulu; BIZA, Irene. ‘Feeling’ the mathematics of disabled learners: Supporting teachers towards valuing, attuning, integrating and resignifying in an inclusive mathematics classroom. In: HUNTER, Roberta; CIVIL, Marta; HERBEL-EISENMANN, Beth; PLANAS, Núria; WAGNER, David (Eds.) **Mathematical discourse that breaks barriers and creates space for marginalized learners**. The Netherlands: SENSE Publications, 2017. p. 147-170.

NARDI, Elena; HEALY, Lulu; BIZA, Irene; FERNANDES, S.H.A.A. Challenging ableist perspectives on the teaching of mathematics through situation-specific tasks. *In:* CSÍKOS, Csaba; RAUSCH, Attila; SZITÁNYI, Judit (Eds.). **Proceedings** of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME). Szeged, Hungary: PME, 2016. p. 347–354.

POTARI, Despina; PSYCHARIS, Giorgos. Prospective Mathematics Teacher Argumentation While Interpreting Classroom Incidents. *In:* STRUTCHENS, Marilyn;

HUANG, Rongjin; POTARI, Despina; LOSANO, Leticia (Eds.), **Educating Prospective Secondary Mathematics Teachers**. ICME-13 Monographs: Springer, 2018, p. 169-187.

PULTORAK, Edward. Facilitating reflective thought in novice teachers. **Journal of Teacher Education**, v. 44, p. 288–295, 1993.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática**: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROWLAND, Tim; THWAITES, Anne; JARED, Libby. Triggers of contingency in mathematics teaching. **Research in Mathematics Education**, v. 17, n. 2, p. 74-91, 2015.

SFARD, Anna. **Thinking as communicating. Human development, the growth of discourse, and mathematizing**. New York, NY: Cambridge University Press, 2008.

SHULMAN, Lee. Toward a pedagogy of cases. *In:* SHULMAN, Judith (Ed.), **Case methods in teacher education**. New York, Teachers College Press, 1992. p. 1–29.

SHULMAN, Lee. Those who understand: Knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, v. 15, n. 2, p. 4–14, 1986.

SHULMAN, Lee. Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. **Harvard Educational Review**, v. 57, n. 1, p. 1–22, 1987.

SKEMP, Richard. Relational understanding and instrumental understanding. **Mathematics Teaching**, v. 77, p. 20– 26, 1976.

SKOTT, Jeppe. The emerging practices of a novice teacher: The roles of his school mathematics images. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 4, n. 1, p. 3-28, 2001.

SPEER, Natasha. Issues of methods and theory in the study of mathematics teachers' professed and attributed beliefs. **Educational Studies in Mathematics**, v. 58, n. 3, p. 361–391, 2005.

THOMA, Athina. **Transition to university mathematical discourses***:* A commognitive analysis of first year examination tasks, lecturers' perspectives on assessment and students' examination scripts. (Unpublished doctoral dissertation). University of East Anglia, Norwich, UK, 2018.

THOMA, Athina; NARDI, Elena. Discursive shifts from school to university mathematics and lecturer assessment practices: Commognitive conflicts regarding variables. *In:* Dooley, Therese; Gueudet, Ghislaine (Eds.). **Proceedings** of the Tenth Congress of the European Mathematical Society for Research in Mathematics Education*.* Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME, 2017. p. 2266-2273.

THOMA, Athina; NARDI, Elena. Transition from School to University Mathematics: Manifestations of Unresolved Commognitive Conflict in First Year Students' Examination Scripts. **International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education**, v. 4, n. 1, p. 161-180, 2018.

THOMPSON, Alba. Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. In: GROUWS, Douglas (Ed.), **Handbook of research on mathematics teaching and learning.** New York: Macmillan, 1992. p. 122–127.

TIROSH, Dina; WOOD, Terry. (Eds.). **The International Handbook of Mathematics Teacher Education**. v. 2. Rotterdam: Sense publishers, 2009.

TOULMIN, Stephen. **The uses of argument**. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1958.

TRIPP, David. **Critical incidents in teaching**: Developing professional judgement (Classic ed.). London; New York: Routledge, 2012.

TURNER, Fay; ROWLAND, Tim. The Knowledge Quartet as an Organizing Framework for Developing and Deepening Teachers' Mathematics Knowledge. *In:* ROWLAND, Tim; RUTHVEN, Keneth. (Eds.). **Mathematical Knowledge in Teaching**. London and New York: Springer, 2011. p 195-212.

ZASLAVSKY, Orit; SULLIVAN, Peter. (Eds.). **Constructing knowledge for teaching***:* Secondary mathematics tasks to enhance prospective and practicing teacher learning. New-York: Springer, 2011.

ZASLAVSKY, Orit; WATSON, Anne; MASON, John. Special issue: The nature and role of tasks in mathematics teachers' education. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 10, p. 4-6, 2007.

ZAZKIS, Rina; SINCLAIR, Natalie; LILJEDAHL, Peter. **Lesson play in mathematics education***:* A tool for research and professional development. New-York: Springer, 2013.

ZAZKIS, Rina. Divisors and quotients: Acknowledging polysemy. **For the learning of mathematics**, v. 18, n. 3, p. 27-30, 1998.

Submetido em julho de 2021.

Aceito em agosto de 2021.