REVISTA DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL (UFMS)

ISSN 2359-2842 Volume 14, número 35 – 2021 DOI: 10.46312/pem.v14i35.13408

Ações de Formação de Professores de Matemática e o Movimento de Construção de sua Identidade Profissional

Mathematics teacher education actions and the movement to build their Professional Identity

Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino[1]

RESUMO

Considerando a importância de buscar espaços diferenciados de formação inicial de professores de matemática, para além das tradicionais disciplinas, no presente artigo foram analisadas duas ações de formação, desenvolvidas na Universidade Estadual de Londrina – UEL, nomeadamente: a exploração de tarefas para o trabalho com multiplicação e divisão de inteiros, a partir de ideias presentes nos trabalhos de René Descartes e David Hilbert; e a construção e a utilização de casos multimídia na perspectiva do Ensino Exploratório. As negociações de significados, como mecanismo da aprendizagem docente, promovidas por essas ações em um espaço colaborativo permitiram intervenção contínua dos futuros professores em um processo de dar e receber, de influenciar e ser influenciado e, por conseguinte, o movimento de constituição de sua identidade profissional.

PALAVRAS-CHAVE: Formação de Professores de Matemática. História na Educação Matemática. Casos Multimídia. Identidade Profissional.

ABSTRACT

Considering the importance of seeking different spaces for the mathematics teacher education, in addition to the traditional disciplines, this article analyzes two training actions developed at the State University of Londrina (UEL). These are analyses of exploration of tasks to work with multiplication and division of integers, based on ideas present in the works of René Descartes and David Hilbert, and the construction and use of multimedia cases from the perspective of inquiry-based teaching. Negotiations of meanings, as a mechanism of teacher learning, promoted by these actions in a collaborative space allowed the continuous intervention of prospective teachers in the process of giving and receiving, influencing and being influenced, and therefore the movement of the constitution of their professional identity.

KEYWORDS: Mathematics Teacher Education. History in Math Education. Multimedia Cases. Professional Identity.

[1] Doutora em Educação pela Universidade de São Paulo (USP). Professora Titular do Departamento de Matemática e do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL). E-mail: marciacyrino@uel.br. ORCID: http://orcid.org/0000-0003-4276-8395.

Introdução

Nas últimas duas décadas, os cursos de licenciatura em Matemática no Brasil passaram por diversos processos de reestruturação, com o objetivo de rever os currículos vigentes e repensar a formação inicial e continuada de professores para atuar na Educação Básica, visando à promoção dos processos formativos, tendo em conta as atuais demandas educacionais (BRASIL - MEC, 2000, 2002a, 2002b, 2015, 2019). Na análise de Projetos Pedagógicos de Cursos – PPC, a formação inicial de professores revela que a estrutura curricular ainda é essencialmente centrada no paradigma de conhecimentos disciplinares (CYRINO, 2013; GATTI, 2010; GATTI; NUNES, 2008; MORIEL-JUNIOR; CYRINO, 2009).

Na Resolução vigente CNE/CP n. 2 de 2019[2] o que prevalece é uma visão técnica e instrumental de formação, restrita às competências e às habilidades previstas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para a Educação Básica. A imposição de uma centralização curricular, com um modelo pautado em competências docentes, reverbera uma concepção redutora e esvaziada de currículo, que desconsidera a pluralidade e desrespeita a diversidade cultural, o público e as instituições, ferindo o princípio da gestão democrática e a liberdade de ensinar e aprender.

É importante que os programas de formação de professores busquem espaços diferenciados, para além dos promovidos por esse paradigma, para que os futuros professores possam, por meio de um trabalho colaborativo, investigar, discutir e refletir a respeito da produção/difusão de conhecimentos matemáticos, dos aspectos didáticos, filosóficos, sociológicos, psicológicos e políticos desses conhecimentos e de outros tópicos necessários para a sua profissionalização. Nesses espaços, eles são convidados a assumir que a produção/difusão do conhecimento matemático e do seu ensino é um processo que abarca transformação, criatividade, criticidade, liberdade solidária e participação ativa na constituição de conhecimentos essenciais para sua atividade profissional.

No presente artigo, analisamos duas ações de formação promovidas pelo Grupo de Estudos e Pesquisa sobre a Formação de Professores que Ensinam Matemática – Gepefopem, da Universidade Estadual de Londrina – UEL, em contextos não disciplinares. A Ação 1 envolveu futuros professores na exploração de

---

[2] Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial de Professores para a Educação Básica e que institui a Base Nacional Comum para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica (BNC - Formação).

tarefas para o trabalho com multiplicação e divisão de inteiros, a partir de ideias presentes nos trabalhos de René Descartes e David Hilbert (DESCARTES, 1954, 1979; HILBERT, 2003). A Ação 2 envolveu professores de matemática da Educação Básica na construção e na utilização de casos multimídia na perspectiva do Ensino Exploratório (CANAVARRO, 2011; CYRINO; OLIVEIRA, 2016; CYRINO; TEIXEIRA, 2016; OLIVEIRA; MENEZES; CANAVARRO, 2013).

O objetivo do Gepefopem foi o de promover processos de negociação de significados, como mecanismo de aprendizagem docente e, por conseguinte, o movimento de constituição da Identidade Profissional (IP) de (futuros) professores de matemática (CYRINO, 2016a, 2017, 2018a, 2018b), por meio de um processo pedagógico intencional e sistemático. Esse processo abrangeu conhecimentos específicos e pedagógicos de matemática, construídos socialmente, em um diálogo que considerou diferentes visões de mundo, de educação e de educação matemática; a realidade escolar na qual esses profissionais atuam ou irão atuar; as características das crianças, jovens e adultos dessas instituições de ensino; e a autonomia do (futuro) professor em formação e do seu compromisso político.

Na sequência, apresentaremos a perspectiva de aprendizagem docente e de IP assumida na análise das ações de formação, e algumas considerações finais acerca da relevância de buscar espaços diferenciados de formação, para além das disciplinas, que promovam o movimento de constituição da IP.

Identidade Profissional e a formação de professores que ensinam matemática

Nos últimos anos, temos trabalhado em busca de construir uma caracterização que nos permita analisar o movimento de constituição da IP de professores que ensinam matemática (PEM) em espaços formativos colaborativos (formação inicial e continuada).

De acordo com De Paula e Cyrino (2017), os estudos brasileiros a respeito de IP estão associados às condições de trabalho do PEM; às políticas públicas e aos programas de formação de professores; a contextos diferenciados de formação inicial e continuada de professores; às práticas pedagógicas; a grupos colaborativos e comunidade de prática; à formação na modalidade a distância; dentre outras temáticas.

> Na maioria desses estudos, observa-se a presença de uma variedade de perspectivas teóricas de identidade: sociológica, cultural, psicológica/psicanalítica ou generalista. E a identidade é discutida em um contexto mais amplo, não se relacionando especificamente com a IP de PEM, e há ausência de uma descrição

> ou caracterização para IP que, por vezes, pode fragilizar o processo de análise (CYRINO, 2018a, p. 2).

Essa ausência de descrição ou de uma caracterização para IP também está presente em investigações internacionais como identificado, por exemplo, por Darragh (2016) e Losano e Cyrino (2017).

A perspectiva de IP de PEM assumida neste artigo tem como pressuposto que o movimento de constituição da IP de PEM é um processo contínuo, complexo, dinâmico, temporal e experiencial. Um fenômeno relacional que

> envolve aspectos pessoais, profissionais, intelectuais, morais e políticos dos grupos nos quais os sujeitos estão envolvidos. [...] Não consiste apenas no que os outros pensam ou dizem de nós, mas de como nos vemos e da capacidade de refletirmos sobre a nossa experiência (CYRINO, 2016a, p. 168).

A descrição que uma pessoa faz de si e dos outros não é neutra, muito pelo contrário, expressa suas orientações, seus gostos, seus valores a respeito de si e de sua (futura) prática profissional. Essa descrição traz consigo as emoções, que não são essencialmente idiossincráticas (de personalidade ou de estilo próprio), mas constituem aspecto fundamental do trabalho docente. As emoções são parte basilar da prática educativa, impulsionadas pelo compromisso do professor e pela empatia na forma de ação. A empatia vai além da capacidade de se identificar, de sentir a emoção do outro, de entendê-lo, envolve nossa ação como educadores, uma ação pelo outro e com o outro, que reverbera nossa solidariedade e compromisso político.

Assim, na caracterização que propomos, o movimento de constituição da IP de PEM se dá a partir de *um conjunto de crenças/concepções do professor em formação interconectadas ao seu autoconhecimento, às suas emoções e aos conhecimentos acerca de sua profissão, associado à autonomia (vulnerabilidade e sentido de agência) e ao compromisso político* (CYRINO, 2016a, 2017, 2018a, 2018b).

Nossas investigações teóricas e empíricas (na constituição de grupos colaborativos, de Comunidades de Prática – CoP, e na elaboração e na utilização de casos multimídia para formação de PEM) têm se voltado, nas últimas décadas, para essa caracterização, assentadas em um revezamento entre produção de uma teorização e as ações de formação (relação entre teoria e prática). Contudo, não temos a pretensão de que ela seja totalizadora.

> As relações teoria-prática são muito mais parciais e fragmentárias. Por um lado, uma teoria é sempre local, relativa a um pequeno domínio, e ela pode ter sua aplicação em um outro domínio, mais ou menos distante. A relação de aplicação nunca é semelhante. Por outro lado, desde que a teoria mergulhe em seu próprio domínio, ela

> desemboca em obstáculos, paredes, tropeços que tornam necessário que ela seja rendida por outro tipo de discurso (é esse outro tipo que faz passar, eventualmente, a um outro domínio diferente). A prática é um conjunto de relés[3] de um ponto teórico a outro, e a teoria, um relé de uma prática a outra. Nenhuma teoria pode se desenvolver sem encontrar uma espécie de parede, e é preciso a prática para perfurar a parede (FOUCAULT, 2003, p. 37).

Utilizamos a palavra “movimento”, por considerarmos que a identidade não deve ser entendida como uma característica predeterminada por nossa personalidade, mas sim, (re)negociada constantemente no curso de nossas vidas, envolvendo aspectos cognitivos, afetivos e contextos socioculturais e, desse modo, está em constante movimento. A identidade é “formada e transformada continuamente em relação às formas pelas quais somos representados ou interpelados nos sistemas culturais que nos rodeiam. [...] A identidade plenamente unificada, completa, segura e coerente é uma fantasia” (HALL, 2015, p. 11-12).

É inegável a importância dos conhecimentos profissionais para um ensino efetivo. No entanto, esse conhecimento é apenas uma peça do quebra-cabeça. Cumpre deslocar o foco de “uma pessoa que conhece” para “uma pessoa que aprende” ao longo da vida. No processo de formação de professores, o foco deve ser deslocado daquele que “sabe” para aquele que “sabe como aprender” e investe nessa aprendizagem. E o processo de negociação de significados é um mecanismo para aprendizagem.

Em qualquer ação de formação, os (futuros) professores trazem consigo um conjunto de crenças/concepções, interconectadas ao seu autoconhecimento profissional (KELCHTERMANS, 2009), que podem ser utilizadas na produção de significados para suas experiências de aprendizagem e na compreensão das aprendizagens de seus alunos. E essa produção de significados é fundamental para o desenvolvimento de sua autonomia (vulnerabilidade e sentido de agência) e de seu compromisso político com os alunos e com a educação.

A autonomia se desenvolve, à medida que o (futuro) professor busca o sentido de agência, diante das situações de vulnerabilidade. A agência se manifesta, quando o (futuro) professor, engajado em sua (futura) prática profissional e ancorado em ideias, motivações, interesses e objetivos, faz escolhas e toma decisões que afetam seu trabalho e revelam seu compromisso profissional e ético. Buscar o sentido de agência envolve aspectos pessoais em interação com estruturas sociais,

---

[3] Revezamentos.

revelando expectativas coletivamente percebidas da competência dos professores em um determinado contexto.

Na prática profissional do PEM, existem relações políticas que nem sempre estão explícitas e que permeiam a relação do professor com o aluno; há o contexto escolar, a organização educativa, as políticas públicas educacionais, a investigação. Enfim, tudo com que os professores em formação precisam lidar e que são inerentes ao movimento de constituição da sua IP.

Nas próximas seções analisaremos duas ações de formação, almejando deixar lastros do movimento de constituição da IP dos futuros professores de matemática, envolvidos nessas ações.

Ação 1 - Exploração de tarefas de multiplicação e divisão de inteiros

A compreensão dos números inteiros abrange várias ideias matemáticas que precisam ser compreendidas pelos (futuros) professores de matemática para que possam organizar a sua prática pedagógica. Na Educação Básica, muitas vezes, o conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$) é considerado como a reunião do conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$) com o conjunto dos opostos dos números naturais e o zero.

Do ponto de vista matemático, isso é correto, se estabelecermos um isomorfismo entre uma classe de equivalência (um número inteiro) e um número natural.

Os números naturais e todas as operações sobre esse conjunto podem ser construídos, a partir de um processo recursivo. Porém, nem sempre é possível em $\mathbb{N}$ a operação de subtração. Supondo $a, b \in \mathbb{N}$, a equação $a + x = b$ só tem solução em $\mathbb{N}$ se $a < b$. Quando a equação considerada tem solução em $\mathbb{N}$, isto é, quando $a < b$, essa solução é única, ou seja, para cada par (a, b) de números naturais, corresponde a um único natural x, que é solução da equação considerada.

A consideração do conjunto $\mathbb{Z}$ é essencialmente motivada por uma “insuficiência” do conjunto dos naturais. E, para construir $\mathbb{Z}$ do conjunto $\mathbb{N}$, necessitamos do conceito de produto cartesiano ($\mathbb{N} \times \mathbb{N}$) e da relação de equivalência (~).

Quadro 1 - Definição do Conjunto de Números Inteiros

Seja $\mathbb{Z}$ (números inteiros) um conjunto de todas as classes de equivalência $\left(\overline{a, b}\right) = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,/\, (x, y) \sim (a, b)\}$ definidas no cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pela relação de equivalência $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$.

Fonte: Cyrino e Pasquini (2010, p. 36)

O conjunto $\mathbb{Z}$ é constituído por classes de equivalência $(\overline{a,b})$, determinadas em $\mathbb{N}^2$ pela relação ~. Por exemplo, o número inteiro 4 é designado pela classe de equivalência a que pertencem os pares ordenados (1,5), (2,6), (3,7), ..., que correspondem ao número natural 4. Já o número inteiro -4 é designado pela classe de equivalência a que pertencem os pares ordenados (5,1), (6,2), (7,3), ..., que não correspondem a um número natural.

Na prática, cada número natural e o número inteiro correspondente – em princípio, objetos matemáticos distintos – são mesmo "identificados", ou seja, designados por um mesmo símbolo. Feita essa identificação, podemos dizer que o conjunto $\mathbb{N}$ é um subconjunto do conjunto $\mathbb{Z}$.

Na Educação Básica, a aprendizagem dos números inteiros e das regras de sinais nas operações comporta uma série de dificuldades. Do mesmo modo que o número natural pode ser visto como resultado de uma operação (uma quantidade a mais ou uma quantidade a menos), o número inteiro pode ser visto como um operador, só que com duplo sentido (representa uma quantidade escalonada e, ao mesmo tempo, é resultado de transformações que se dão em dois sentidos). De acordo com Cauchy (1789 – 1857), citado por Glaeser (1981), na obra *Cours d´Analyse* (1821), há uma diferença entre sinais predicativos (indicando estado – positivo ou negativo) e operatório (relativo à operação – aumentar ou diminuir). No entanto, tais argumentos são inviáveis para serem discutidos com estudantes da Educação Básica (Quadro 2).

Quadro 2 – Exemplo da diferença entre sinais predicativos e operatórios

Por exemplo, a operação (+a)+(-b)=(-c) pode ser vista como a composição de operadores aditivos (composição das funções f-b◦f+a=F-c, onde o operador +a é definido por f+a: IN → IN tal que f+a(n)=n+a, e o operador -b é definido por f-b: {b+1, b+2, ...} → IN tal que f-b (n)=n-b). Desse modo, a operação (+2)+(-5)=(-3) pode ser vista como a composição de operadores aditivos f-5◦f+2=F-3, considerando as devidas restrições quanto ao domínio das funções envolvidas. Os sinais + em (+2) e – em (-5) são predicativos, estabelecem uma qualidade do operador. O mesmo vale para os operadores negativos. No caso do exemplo (+2)-(-5) podemos justificar como (+2)+(+5), "extrair uma dívida significa acrescentar um ganho".

Fonte: Cyrino e Pasquini (2010, p. 37)

Glaeser (1981) realizou estudos de cunho histórico-epistemológico dos números inteiros e apresentou uma análise dos obstáculos epistemológicos que se opuseram à compreensão desses números, desde a Antiguidade até o século XIX, quais sejam:

1- Inaptidão para manipular quantidades isoladas.

2- Dificuldade em dar um sentido a quantidades negativas isoladas.

> 3- Dificuldade em unificar a reta numérica. Isto se manifesta, por exemplo, quando se insiste nas diferenças qualitativas entre as quantidades negativas e os números positivos; ou quando se descreve a reta como uma justaposição de duas semirretas opostas com sinais heterogêneos; ou quando não se consideram simultaneamente as características dinâmicas e estáticas dos números.
>
> 4- Ambiguidade dos dois zeros: zero absoluto e zero como origem.
>
> 5- Estagnação no estágio das operações concretas (em confronto com o estágio das operações formais). É a dificuldade de afastar-se de um sentido "concreto" atribuído aos seres numéricos.
>
> 6- Desejo de um modelo unificador. É a intenção de fazer funcionar um "bom" modelo aditivo, igualmente válido para ilustrar o campo multiplicativo, em que esse modelo é inoperante. (Adaptado de GLAESER, 1985, p. 39-40)

A lista de obstáculos exposta por Glaeser é, segundo ele, provisória e inicial. No entanto, essa lista suscitou algumas controvérsias. Por exemplo, Brousseau (1983) não considera que os obstáculos 1 e 2 devam ser vistos como obstáculos epistemológicos, mas como dificuldades inerentes a uma determinada época vista a partir de hoje e não dos conhecimentos constituídos naquela época para lidar com problemas que exigiam manipulação de quantidades negativas isoladas. Essa visão de Brousseau se aproxima das perspectivas historiográficas mais recentes que procuram contornar abordagens históricas anacrônicas, levando em conta o contexto sócio-político-matemático. Assim, não devemos compreender a história ou as justificativas dos sujeitos em termos dos paradigmas atuais, pois, se o fizermos, estaremos instituindo erroneamente a crença da inferioridade do passado e da incompletude dos sujeitos.

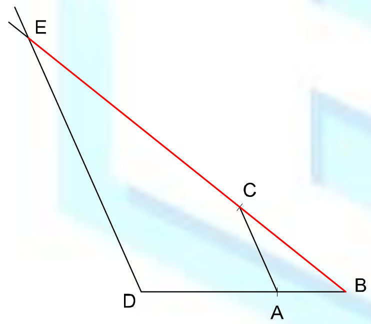
O uso de modelos que expliquem simultaneamente a adição e a multiplicação de inteiros, baseando-se em operações internas, pode ser um obstáculo em sala de aula, do mesmo modo que no desenvolvimento histórico, como apontou Glaeser (obstáculos 5 e 6). Um modelo só pode se tornar um instrumento significativo para compreender um conceito, se o seu uso for intencional e dirigido para construir abstrações e generalizações necessárias para seu entendimento. De acordo com Baldino (1996, p. 4), "Os trabalhos encontrados na literatura sobre os números inteiros são pródigos em suprir modelos para a estrutura aditiva, mas abordam de maneira insuficiente a estrutura multiplicativa".

Com base em nossos estudos quanto ao uso da história na educação matemática na formação de PEM e de desconfortos enfrentados em situações de ensino para tratar do conjunto dos números inteiros, sobretudo com as operações de multiplicação e divisão de inteiros, elaboramos um conjunto de tarefas[4] baseadas nas ideias de Viète (1540 – 1603) e dos métodos de operações com segmentos de Descartes (1596 – 1650) e de Hilbert (1862 – 1943).

Essas tarefas propostas têm como objetivos fornecer informações, promover reflexões e discussões entre futuros professores, de modo que possam lidar criticamente com problemas pertencentes a uma cultura matemática tradicional que envolve números negativos, multiplicação e divisão de segmentos; e estabelecer interações entre ensino e pesquisa para produzir significados para as “regras de sinais” por meio de construções geométricas.

A seguir, mostraremos algumas dessas tarefas e, em seguida, deixaremos alguns lastros do movimento de constituição da IP de professores em formação na exploração destas tarefas. O Quadro 3 traz as descrições de Descartes e Hilbert para construção geométrica de um produto.

Quadro 3 – Descrições de Descartes e de Hilbert para multiplicação de segmentos

Descrição de Descartes	**Descrição de Hilbert**
Seja, por exemplo, $\overline{AB}$ a unidade e que se deva multiplicar $\overline{BD}$ por $\overline{BC}$. Para isso, é necessário unir os pontos A e C, depois determinar $\overline{DE}$ paralelo a $\overline{CA}$, sendo $\overline{BE}$ o produto desta multiplicação. (DESCARTES, 1979).  	Para definir geometricamente o produto de um segmento a por outro b, servimo-nos da seguinte construção: Escolhemos primeiramente um segmento qualquer, fixo em tudo o que o segue, e designemo-lo por 1. Desloquemos para um dos lados dum ângulo recto e a partir do vértice O, o segmento 1 e, além disso também a partir de O, o segmento b; em seguida deslocamos para o outro lado o segmento a. Unamos as extremidades dos segmentos 1 e a por uma recta e conduzamos uma paralela a esta recta pela extremidade do segmento b; esta determinará um segmento c no outro lado do ângulo: chamemos a este segmento c o produto do segmento a pelo segmento b e designamo-lo por: $c = ab$. (HILBERT, 2003, p.58).

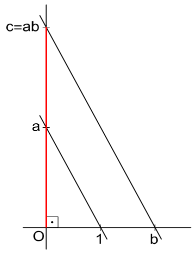
Fonte: Adaptado de Descartes (1979) e de Hilbert (2003)

As tarefas apresentadas no Quadro 4 têm como objetivo discutir a compreensão dessas descrições.

Quadro 4 – Tarefas que buscam compreender as descrições de Descartes e Hilbert

	Tarefas	**Comentários**
1	Leia as descrições de Descartes e Hilbert para multiplicação de seguimentos e em seguida: Represente geometricamente,	Nas discussões sobre possíveis respostas, é importante dar liberdade para que os professores em formação possam expressar o modo como pensaram. Apresentamos a seguir uma possível construção para a

[4] O Gepefopem é formado por professores, por futuro professores em formação e por investigadores.

	utilizando régua e um par de esquadros, a construção proposta por Hilbert. Verifique se há alguma relação entre as construções propostas por Descartes e por Hilbert. Justifique sua resposta.	proposta de Hilbert.  A construção proposta por Hilbert diferencia-se da proposta de Descartes basicamente pelo fato de Hilbert dizer que os segmentos de reta devem ser dispostos perpendicularmente.
2	De acordo com o teorema de Thales “um feixe de retas paralelas divide duas retas transversais quaisquer em segmentos proporcionais”: Investigue em livros de História da Matemática e em livros didáticos o modo como o Teorema de Thales é apresentado e responda: As construções propostas por Descartes e por Hilbert guardam alguma relação com o Teorema de Thales? Por quê?	É esperado que os professores em formação percebam que as construções propostas por Descartes e por Hilbert são semelhantes ao Teorema de Thales, pois, retas paralelas intersectam retas concorrentes, determinando segmentos com medidas proporcionais.

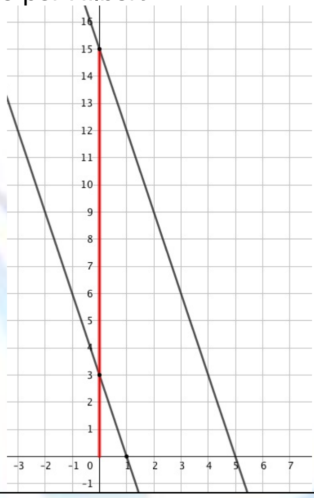
Fonte: Adaptado de Cyrino e Pasquini (2010)

No desenvolvimento das Tarefas 1 e 2, os futuros professores manifestaram experiências de vulnerabilidade por meio da dificuldade de: construir uma representação geométrica a partir do texto; trabalhar com instrumentos geométricos; e lidar com o erro com medo de possíveis críticas.

Essas experiências possibilitaram que eles construíssem um sentido de agência, mediada pelas discussões no grupo, ao buscar estratégias para expor suas dificuldades sem constrangimentos; desenvolvessem sua autoestima (autocompreensão); e fizessem questionamentos. Essa agência mediada é fundamental para desenvolver a autonomia e, consequentemente, para constituir sua IP.

As tarefas de 3 a 5 têm a intenção de construir e interpretar representações de produtos, baseadas na descrição de Hilbert (Quadros 5 e 6). O fato de nos apoiarmos em um modelo geométrico para apresentarmos uma significação para as “regras de sinais” não significa “contextualizar” as operações. As construções viabilizam retomar questões que transcendem a consideração de um objeto matemático, quer seja nas aulas de Matemática da Educação Básica quer em programas de formação de PEM.

Quadro 5 – Tarefas 3 e 4 para representações do produto, a partir da descrição de Hilbert

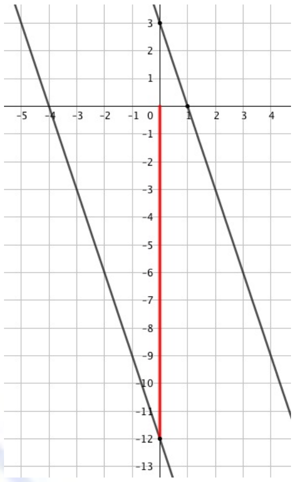
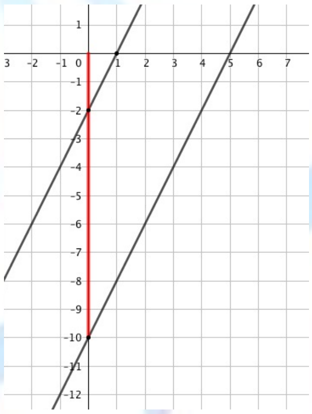
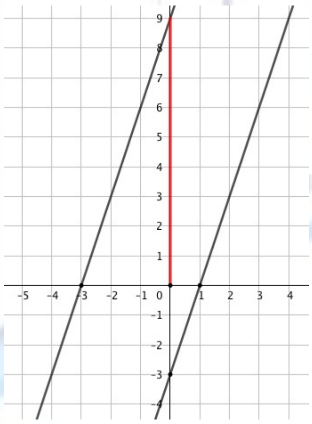
	Tarefas	Comentários
3	Represente geometricamente o produto entre 3 e 5, por meio da construção proposta por Hilbert, em um sistema de coordenadas.	É importante discutir, antes da construção, a unidade de medida que será utilizada. A construção pode ser feita em papel quadriculado e o ‘quadradinho’ pode ser assumido como unidade de medida. A seguir, apresentamos uma construção geométrica, no plano cartesiano, do produto entre 3 e 5 em papel quadriculado (destacado em vermelho), de acordo com o método proposto por Hilbert. 
4	É possível mostrar, por meio de construções geométricas, que podemos realizar a multiplicação entre dois números inteiros quaisquer, positivos ou não? Caso seja possível, apresente alguns exemplos. Se não for possível, justifique.	Como o método de Hilbert satisfaz as propriedades dos números reais, podemos utilizá-lo para considerar operações com quaisquer números inteiros, positivos ou não. Espera-se que os professores em formação concluam que é possível construir a representação do produto de dois números inteiros no plano cartesiano, apresentando exemplos variados.

Fonte: Adaptado de Cyrino e Pasquini (2010)

A representação geométrica do produto (ou do quociente) entre dois números reais nos permite obter o módulo (a medida) e observar o sinal (positivo ou negativo) do número que representa este produto (ou quociente). Assim, julgamos pertinente problematizar em sala de aula a operação de multiplicação (divisão) de segmentos, embasados nos métodos de Descartes e Hilbert, de modo que os professores em formação possam compreender e perceber regularidades para a estrutura multiplicativa e, a partir daí, dar significado às “regras de sinais”.

Quadro 6 – Tarefa 5 para representações do produto a partir da descrição de Hilbert

5	Como fica a construção geométrica do produto entre um número positivo e um número negativo? Qual das construções estudadas (propostas de Descartes e de Hilbert) é mais adequada para representação do produto de números negativos? Por quê? Represente geometricamente esse produto.	Por meio dessa tarefa, os futuros professores podem realizar construções geométricas do produto de um número positivo por um número negativo e, por conseguinte, sistematizar as regras de sinais para multiplicações que envolvam números negativos. Apresentamos a seguir três exemplos: a)$(3) \cdot (-4)$

		 b) $(-2) \cdot (5)$  c)$(-3) \cdot (-3)$ 

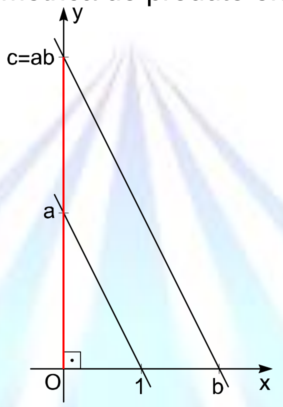
Fonte: Adaptado de Cyrino e Pasquini (2010)

Sabemos que a constituição do conhecimento matemático não está na tarefa, mas nas relações que são estabelecidas na atividade matemática dos futuros professores, ao realizarem tais tarefas.

Quando discutiram essas construções, os futuros professores perceberam as regularidades relativas aos sinais dos fatores e ao respectivo produto dessas multiplicações. Destacaram que essas construções geométricas podem ser generalizadas para os números reais.

Ao multiplicarmos quaisquer números reais positivos a e b, observamos, por meio da construção geométrica, que o produto $c = a \cdot b$ também é um número real positivo, ou seja, $(+) \cdot (+) = (+)$.

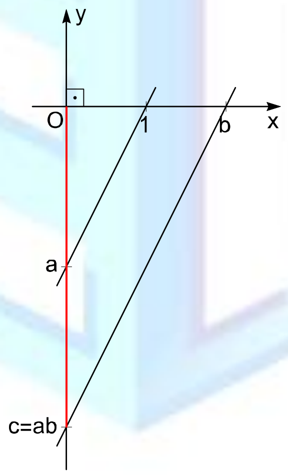
Figura 1 – Construção geométrica do produto entre dois números positivos



Fonte: Cyrino e Pasquini (2010, p. 45)

Quando multiplicamos $a \in \mathcal{R}_{-}^{*}$ por $b \in \mathcal{R}_{+}^{*}$, percebemos, por meio da construção geométrica, que o produto $c = a \cdot b$ é um número real negativo, ou seja, $(-) \cdot (+) = (-)$.

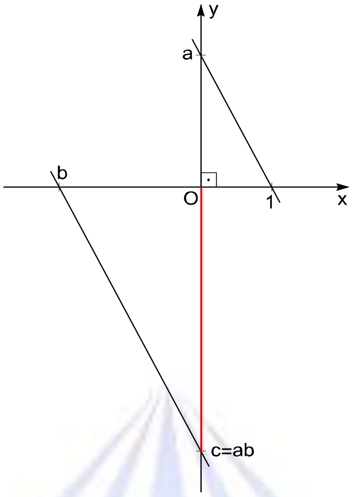
Figura 2 – Construção geométrica do produto entre números com sinais diferentes $(-) \cdot (+) = (-)$



Fonte: Cyrino e Pasquini (2010, p. 54)

Ao multiplicamos $a \in \mathcal{R}_{+}^{*}$ por $b \in \mathcal{R}_{-}^{*}$, notamos, por meio da construção geométrica, que o produto $c = a \cdot b$ é um número real negativo, ou seja, $(+) \cdot (-) = (-)$.

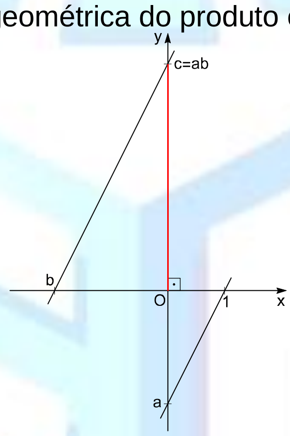
Figura 3 **–** Construção geométrica do produto entre números com sinais diferentes $(+)(-) = (-)$



Fonte: Cyrino e Pasquini (2010, p. 54)

Ao multiplicarmos quaisquer números reais negativos a e b, percebemos, por meio da construção geométrica, que o produto $c = a \cdot b$ é um número real positivo, ou seja, $(-) \cdot (-) = (+)$.

Figura 4 – Construção geométrica do produto entre números negativos



Fonte: Cyrino e Pasquini (2010, p. 55)

Os futuros professores compararam as construções e relataram as seguintes regularidades: (i) o resultado da multiplicação entre números com sinais iguais resulta em um número positivo; (ii) o resultado da multiplicação entre números com sinais diferentes resulta em um número negativo.

Eles puderam ainda mobilizar, construir e articular diferentes conhecimentos matemáticos, ao problematizarem diferentes situações, visando à sistematização de ideias matemáticas importantes para apreender os conceitos matemáticos envolvidos nas discussões.

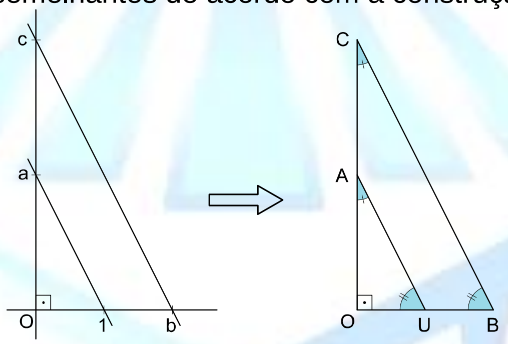
Em uma dessas sistematizações, os futuros professores buscaram uma justificativa algébrica para as construções geométricas da multiplicação com segmentos. Eles concluíram que essas construções podem ser validadas, com base no teorema de Thales, pois nelas traçamos duas retas concorrentes que são intersectadas por um feixe de paralelas (no caso, dois segmentos paralelos entre si). Observando a Figura 1, temos que o segmento de medida 1 está para o segmento de medida b assim como o segmento de medida a está para o segmento de medida c, ou seja, $\frac{1}{b} = \frac{a}{c}$. Desse modo, temos que:

$$\frac{1}{b} = \frac{a}{c} \Rightarrow 1 \cdot c = a \cdot b \Rightarrow c = ab$$

Assim, podemos justificar algebricamente que a medida do segmento c é igual ao produto da medida dos segmentos a e b.

Discutimos que a validação também pode ser feita por meio da semelhança de triângulos.

Figura 5 – Triângulos semelhantes de acordo com a construção proposta por Hilbert



Fonte: Adaptado de Cyrino e Pasquini (2010)

Na Figura 5, temos que os triângulos ΔUOA e ΔBOC são semelhantes, pois as medidas de seus ângulos correspondentes são iguais. Como os triângulos são semelhantes, seus lados correspondentes possuem medidas proporcionais. Assim, podemos escrever que:

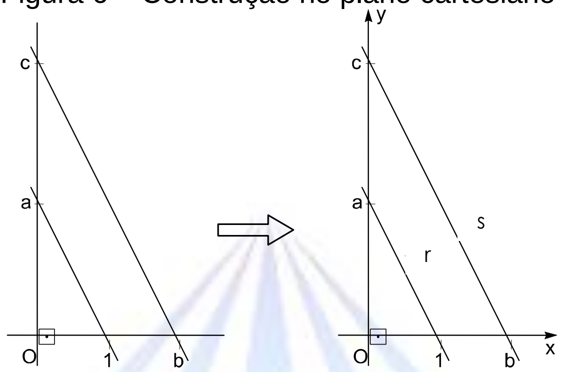
$$\frac{UO}{BO} = \frac{AO}{CO} \Rightarrow \frac{1}{b} = \frac{a}{c} \Rightarrow c = ab$$

Nos dois casos, utilizamos a construção proposta por Hilbert. No entanto, o ângulo entre os segmentos concorrentes não importa, logo as demonstrações realizadas anteriormente são válidas para a construção proposta tanto por Hilbert quanto por Descartes.

Nas discussões com os futuros professores, foi possível justificar a construção geométrica da multiplicação com segmentos perpendiculares, assim como proposto por Hilbert, por meio de conhecimentos de geometria analítica.

Conceitos de geometria analítica foram utilizados para transportar para o plano cartesiano a construção feita inicialmente. Ou seja, realizamos uma construção, no plano cartesiano, de modo que os lados do ângulo reto coincidissem com os eixos x e y, e o vértice do ângulo com a origem do plano. Em seguida, representamos as retas paralelas pelas equações cartesianas das retas em questão (Figura 6).

Figura 6 – Construção no plano cartesiano



Fonte: Adaptado de Cyrino e Pasquini (2010)

No plano cartesiano, podemos utilizar a equação da reta, $y_2 - y_1 = m(x_{2-}x_1)$, para encontrar a inclinação (m) da reta r, pois conhecemos dois de seus pontos: (1, 0) e (0, a).

$$y_2 - y_1 = m_f(x_{2-}x_1) \Rightarrow a - 0 = m_f(0-1) \Rightarrow m_f = -a$$

Sabemos que as retas r e s são paralelas, logo elas possuem a mesma inclinação, ou seja, $m_r = m_s = -a$. Também conhecemos dois pontos da reta s, a saber: (b, 0) e (0, y_2), no qual $y_2 = c$.

Utilizando a equação da reta, calculamos a ordenada y_2.

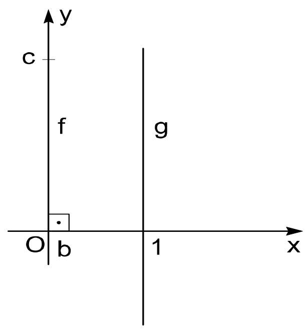
Logo,

$$y_2 - y_1 = m_s(x_{2-}x_1) \Rightarrow c - 0 = -a(0-b) \ \Rightarrow c = ab$$

Concluímos assim que c é o produto entre a e b.

Foram trabalhadas também outras tarefas, que não são discutidas neste artigo, as quais envolveram representações geométricas do produto resultante de uma multiplicação, em que um dos fatores é igual a zero e do quociente de dois segmentos, comparando com a construção do produto; justificativa algébrica para construções de quocientes; regularidades para observação da regra de sinais para quociente de números inteiros; discussões sobre a indeterminação da divisão por zero. Essa última tarefa possibilitou aos futuros professores observarem que a divisão de um número qualquer (c) por zero (b) é uma indeterminação.

Figura 7 – Indeterminação obtida na divisão por zero



Fonte: Cyrino e Pasquini (2010, p. 63)

Note que a reta f coincide com o eixo y. Assim, ao traçarmos a reta g paralela à f, a reta g não interceptará o eixo y, pois $y\,//\,f\,//\,g$. Então essa divisão é indeterminada, pois não podemos localizar o ponto $a = \frac{c}{b}$, que seria o quociente dessa operação e se localizaria sobre o eixo y.

Os futuros professores puderam refletir a respeito do uso da história na educação matemática, do papel da cultura matemática na assunção de sua responsabilidade educacional, das suas escolhas para organizar um trabalho com essa temática em sala de aula, das perspectivas futuras de trabalho, revelando compromisso político com a aprendizagem de seus alunos e, consequentemente, com a sua atividade profissional.

O objetivo pedagógico da história nessas tarefas não foi o de construir um conceito ou uma solução original para um problema, nem o de validar a produção historicamente construída, mas de problematizar o que é veiculado pelos textos históricos e as compreensões dos futuros professores, a fim de ampliar o horizonte cultural deles.

Conhecer a matemática transcende a ideia de conhecer conceitos, resultados, métodos e técnicas necessários para a resolução de problemas. Envolve compreender aspectos relacionados à natureza da cultura matemática.

Ação 2 - Casos multimídia na perspectiva do Ensino Exploratório

Os casos multimídia foram construídos pelo Gepefopem, em parceria com a professora Hélia Oliveira, da Universidade de Lisboa, para serem utilizados na formação inicial e continuada de PEM, como parte de um projeto[5] que abrangeu vídeos de práticas de professores experientes (protagonistas dos casos) em perspectivas alternativas de ensino, nomeadamente do Ensino Exploratório. Cada caso multimídia é formado por vídeos de sala de aula, associados a outros

[5] "Rede de cooperação UEL/UL na elaboração e utilização de recurso multimídia na formação de professores de matemática", financiado pelo CNPq[5] e pela Fundação Araucária, e aprovado pelo comitê de ética em pesquisa.

elementos, tais como: plano de aula, entrevistas com os professores protagonistas do caso antes e após a aula, produções escritas dos alunos, questões problematizadoras e textos, que podem ser acessados eletronicamente em uma plataforma *on-line* (mediante *login* e senha) (CANAVARRO, 2011; CYRINO, 2016b; OLIVEIRA; MENEZES; CANAVARRO, 2013; STEIN *et al.,* 2008).

Foram elaborados quatro casos multimídia, baseados em aulas desenvolvidas em escolas da rede pública de ensino do estado do Paraná, nomeados de acordo com as tarefas desenvolvidas, quais sejam: "Os colares", "Plano de telefonia", "Os brigadeiros" e "Explorando Perímetro e Área". O caso multimídia "Os colares" foi construído a partir de uma aula com alunos de 6.º ano do Ensino Fundamental e tratou do desenvolvimento do pensamento algébrico. O caso multimídia "Plano de telefonia" foi construído a partir da aplicação de uma tarefa que envolveu o conceito de função, sem e com a utilização do *GeoGebra*, com alunos do 1.º ano do Ensino Médio. No caso multimídia "Os brigadeiros", foi trabalhado o conceito de média na perspectiva da Educação Estatística, com alunos do 9.º ano do Ensino Fundamental. E no caso multimídia "Explorando Perímetro e Área", alunos do 5.º ano do Ensino Fundamental resolveram tarefas que mobilizavam os conceitos de perímetro e área.

Todas as aulas que compõem os casos foram desenvolvidas na perspectiva do Ensino Exploratório. Este tipo de ensino se enquadra numa concepção mais ampla de *inquiry based teaching* (OLIVEIRA; CYRINO, 2013). Trata-se de uma perspectiva situada e dialógica do conhecimento, pautada na inquirição, que integra a ação em cooperação com outros e a reflexão sobre o que foi aprendido nesse processo. Desse modo, aspectos ligados à comunicação e à interação social entre professores e alunos e entre alunos assumem especial relevância para o processo de aprendizagem. Wells (2004) deriva várias implicações para o ensino, das quais destacamos as seguintes: i) o conhecimento deve ser construído a partir de problemas e questões que sejam significativos para os alunos, favorecendo a sua compreensão; ii) o desenvolvimento da autonomia individual e da capacidade para a ação assim como o estímulo à interdependência mútua e ao valor da colaboração são fatores importantes; iii) este modo de conhecer apenas pode ser construído assentado em experiências anteriores, ao lidar com problemas que surgem no decurso de atividades práticas específicas; e iv) a linguagem tem um papel central, uma vez que esta medeia o conhecimento, encarado como um processo de atribuição de significado, e é o principal meio da atividade de ensino e aprendizagem.

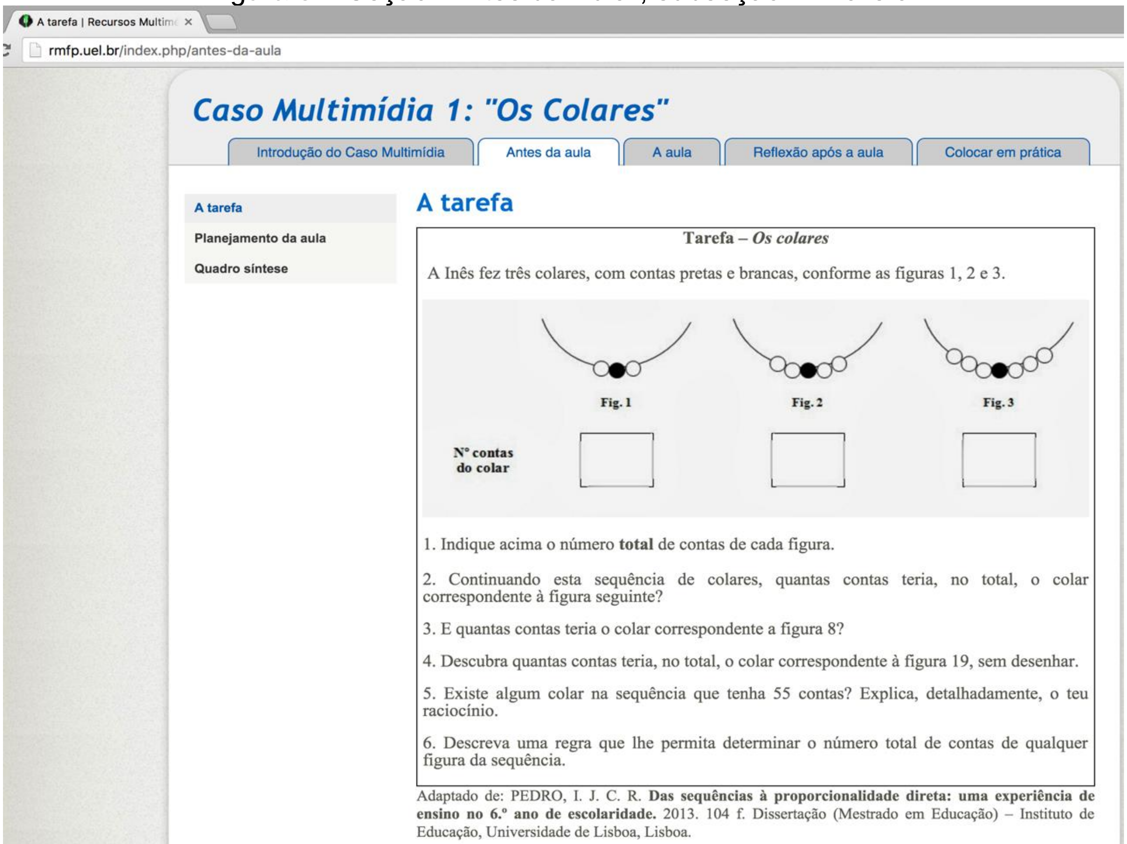
Os casos multimídia foram organizados em cinco grandes seções: 1. *Introdução do caso multimídia*, em que são apresentadas informações do contexto no qual foi desenvolvida a aula, 2. *Antes da aula*, em que há materiais relativos ao planejamento da professora (o plano de aula, entrevista sobre as suas intenções antes da aula), 3. *A aula*, com excertos em vídeos de episódios da aula, 4. *Reflexão após a aula*, com excertos da entrevista com a professora após a aula, e 5. *Colocar em prática*, quando o professor em formação (após explorar o caso) é convidado a desenvolver uma aula na perspectiva do Ensino Exploratório e filmá-la, de modo a analisar a sua própria prática. A aula foi estruturada em quatro fases (introdução da tarefa, realização da tarefa, discussão da tarefa e sistematização das aprendizagens), nas quais se identificam ações específicas do professor com dois objetivos principais distintos, mas inter-relacionados: (i) promover as aprendizagens matemáticas dos alunos; e (ii) gerir os alunos e a turma e o funcionamento da aula.

No decorrer da construção dos casos, foi elaborado um *framework* que explicita ações de um professor no planejamento e no desenvolvimento de uma aula na perspectiva do ensino exploratório nas suas diferentes fases (CYRINO; TEIXEIRA, 2016). O fato de os casos multimídia tomarem como ponto de partida situações reais de sala de aula permitiu desencadear nos futuros professores um (re)pensar suas crenças/concepções, suas atitudes e seus conhecimentos a respeito de seu futuro ofício, revelando, assim, seus desejos de buscar e conhecer outras possibilidades de trabalho em sala de aula. Ao manifestarem suas expectativas quanto à exploração dos casos, eles associaram aspectos da prática pedagógica, dos professores protagonistas dos casos. Enfim, compreenderam a si mesmos como futuros professores (autoconhecimento) e a sua importância e compromisso político na organização e na gestão do processo de ensino, tendo em conta seus conhecimentos e experiências quanto à sua futura profissão.

No presente artigo, para explicitar aspectos da utilização dos casos no movimento de constituição da IP, analisamos situações de exploração do caso "Os colares", que envolveu uma tarefa sobre pensamento algébrico (Figura 8), em um grupo colaborativo, tendo presentes futuros professores e professores da Educação Básica. A exploração desse caso permitiu que os futuros professores conhecessem uma prática de ensino que nunca tinham vivenciado como alunos; refletissem sobre a organização e a gestão da aula; discutissem a relação entre essa prática e as orientações curriculares presentes nos documentos oficiais e em pesquisas; articulassem essa aula com o que vivenciaram no estágio curricular supervisionado;

e estabelecessem uma conexão entre as observações e interpretações empíricas e um referencial teórico mais amplo.

Figura 8 – Seção “Antes da Aula”, subseção “A Tarefa”



Fonte: Disponível em: http://rmfp.uel.br. Acesso em: 31 mar. 2019.

Os futuros professores fizeram uma análise crítica do papel da professora para fomentar as aprendizagens dos alunos e, como resultado, tiveram a oportunidade de desenvolver uma atitude de investigação da prática pedagógica. Eles avaliaram que esse procedimento foi muito profícuo para orientar a investigação de sua futura prática profissional e para elaborar esquemas de ação que lhes permitam agir em situações complexas de ensino, assim como (re)significar a sua futura prática.

Na exploração desse caso "Os colares", os futuros professores discutiram: O que é Álgebra? O que se estuda em Álgebra? Qual a visão da Álgebra que permeia o contexto escolar? Por que falar em pensamento algébrico? O que é o pensamento algébrico? Essa discussão viabilizou que eles tivessem acesso a uma perspectiva que considera o “pensamento algébrico como um modo de descrever significados atribuídos aos objetos da álgebra, às relações existentes entre eles, à modelação, e à resolução de problemas no contexto da generalização destes objetos” (CYRINO; OLIVEIRA, 2011, p. 103).

Os futuros professores revelaram que a exploração do caso foi uma oportunidade para desenvolver a capacidade de refletir a respeito da matemática que ensinam e perceber a importância de ouvir o que os alunos pensam. Isso porque assim será possível identificar e compreender as estratégias deles e os diferentes tipos de pensamento algébrico que manifestam. Eles reconheceram que os alunos podem pensar algebricamente antes de utilizar símbolos.

Foram discutidas diferentes ideias relativas ao pensamento algébrico, tais como: padrão, regularidades, sequência, função e, particularmente, progressão aritmética. Além das ideias matemáticas, os futuros professores perceberam aspectos da argumentação e da comunicação matemática, nomeadamente: i) a promoção de interações dialógicas pela professora protagonista do caso para o desenvolvimento da tarefa matemática pelos alunos; e ii) o *feedback* da professora com base nas respostas dos alunos para o desenvolvimento da atividade matemática (RODRIGUES; CYRINO; OLIVEIRA, 2018). O reconhecimento desses aspectos e os modos de raciocinar sobre eles explicitam o desenvolvimento de uma visão profissional dos professores em formação.

Os casos multimídia podem desencadear um processo dinâmico de problematização da prática docente do professor protagonista do caso, a partir da promoção de um ambiente dialógico e reflexivo, uma vez que o futuro professor tem a oportunidade de se envolver e participar de modo comprometido com suas reflexões sobre essa prática.

Considerações finais

As ações de formação relatadas neste artigo são apenas alguns exemplos de uma política de formação defendida pelo Gepefopem, na qual há valorização de processos que envolvem transformação, investigação, criatividade, criticidade, liberdade solidária e participação ativa na constituição de conhecimentos necessários à atividade profissional do PEM e, consequentemente, no movimento de constituição de sua IP. Os processos de negociação de significados, desencadeados pela interação entre os processos de participação e reificação, como mecanismos de aprendizagem, permearam as ações de formação. O foco dessas ações está nas "pessoas que aprendem" ao longo da vida, e como elas podem investir nessa aprendizagem.

A exploração da história na educação matemática teve como objetivos problematizar e potencializar a compreensão de regras e de conceitos matemáticos inerentes à prática pedagógica do professor. Procuramos explicitar o papel da história na formação de professores de matemática, valorizar a investigação, promover reflexões a respeito da produção/difusão de conhecimentos matemático, por meio de discussões que articularam ideias matemáticas, aspectos epistemológicos e didáticos que podem amparar o professor na procura por respostas para questões que se colocam em sala de aula e que, muitas vezes, não são respondidas nos programas de formação.

A elaboração e a exploração de casos multimídia, construídos a partir de situações reais de sala de aula, trouxe para as discussões conhecimentos produzidos em escolas públicas de periferia do estado do Paraná, que atende a grupos com vulnerabilidades sociais que, muitas vezes, são selecionados e excluídos pela ausência de conhecimentos. Na exploração dos casos multimídia, valorizamos a negociação de significados; a interação entre os processos de participação e de reificação; as discussões de aspectos didáticos, filosóficos, sociológicos, psicológicos e políticos; o autoconhecimento; o processo de construção de uma agência mediada tendo em conta as situações de vulnerabilidade. Buscamos romper com a visão de uma matemática que subordina e subjuga outras formas de conhecimento e promover a inclusão dos futuros professores por intermédio de suas diferentes formas de se comunicar matematicamente.

A valorização de ações que viabilizam o movimento de constituição da IP de PEM é uma forma de resistência à busca de homogeneização na formação de professores, de uma formação totalizadora, defendida pelos modelos centrados somente em conhecimentos disciplinares pouco problematizados.

As ações apresentadas neste artigo e muitas outras relatadas nesse número especial podem fornecer evidências, informações ou indícios que nos permitam pensar em programas alternativos de formação, nos quais os futuros professores possam se desconstruir e se (re)inventar, que promovam o movimento de constituição da IP como um processo contínuo, complexo, dinâmico, temporal e experiencial.

Agradecimentos

Agradeço o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq e da Fundação Araucária, bem como aos futuros professores que participaram deste estudo.

Referências

BALDINO, Roberto Ribeiro. Sobre a epistemologia dos números inteiros. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, n. 5, ano 3, p. 4-11, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. **Proposta de diretrizes para a formação inicial de professores da Educação Básica, em cursos de nível superior**. Brasília: MEC, 2000.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. **Resolução CNE/CP n. 1 e 2**, de 19 de fevereiro de 2002. Diário Oficial da União, Brasília, 4 mar. 2002a.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura**. Brasília, Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil, seção 1, p. 15, 05 de março de 2002b. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf. Acesso em: 15 jul. 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. **Resolução CNE/CP nº 2/2015**, de 1º de julho de 2015. Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial em nível superior (cursos de licenciatura, cursos de formação pedagógica para graduados e cursos de segunda licenciatura) e para a formação continuada. MEC. Brasília, 2015. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/docman/agosto-2017-pdf/70431-res-cne-cp-002-03072015-pdf/file. Acesso em: 15 jul. 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. **Resolução CNE/CP nº 2/2019**, de 20 de dezembro de 2019. Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial de Professores para a Educação Básica e institui a Base Nacional Comum para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica (BNC-Formação). MEC. Brasília, 2019b. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/docman/dezembro-2019-pdf/135951-rcp002-19/file. Acesso em: 15 jul. 2021.

BROUSSEAU, Guy. Les obstacles épistémologique et les problèmes en Mathématiques. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 4, n. 2, p.165-198, 1983.

CANAVARRO, Ana Paula. Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. **Educação e Matemática**, Lisboa, n. 115, p. 11-17, 2011.

CYRINO, Márcia Cristina de Costa Trindade. Propostas de formação inicial de professores de Matemática no Estado do Paraná: condicionantes do cenário atual. Boletim GEPEM, v. 63, p. 45-59, 2013. Disponível em: http://doi.editoracubo.com.br/10.4322/gepem.2014.033. Acesso em: 15 jul. 2021.

CYRINO, Márcia Cristina de Costa Trindade. Mathematics Teachers' Professional Identity Development in Communities of Practice: Reifications of Proportional Reasoning Teaching. **BOLEMA: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro (SP), v. 30, n. 54, p. 165-187, 2016a. Disponível em: https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a08. Acesso em: 15 jul. 2021.

CYRINO, Márcia Cristina de Costa Trindade. **Recurso multimídia para a formação de professores que ensinam matemática**: elaboração e perspectivas. 1. ed. Londrina: EDUEL - Editora da Universidade Estadual de Londrina, 2016b. v. 1. 218p.

CYRINO, Márcia Cristina de Costa Trindade. Identidade Profissional de (futuros) Professores que Ensinam Matemática. **Perspectivas da Educação Matemática**, Mato Grosso do Sul, v. 10, n. 24, p. 699-712, 2017.

CYRINO, Márcia Cristina de Costa Trindade. Grupos de estudo e pesquisa e o movimento de constituição da identidade profissional de professores que ensinam matemática e de investigadores. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática (REnCiMa)**, v. 9, n. 6, p. 1-17, 2018a. Disponível em: https://doi.org/10.26843/rencima.v9i6.2062. Acesso em: 15 jul. 2021.

CYRINO, Márcia Cristina de Costa Trindade. Prospective mathematics teacher's professional identity. In: Marilyn E. Strutchens; Rongjin Huang; Despina Potari; Letícia Losano (org.). **ICME-13 Monographs**. 1.ed. Switzerland: Springer International Publishing, v. 1, p. 269-285, 2018b. Disponivel em: https://doi.org/10.1007/978-3-319-91059-8_15. Acesso em: 15 jul. 2021.

CYRINO, Márcia Cristina de Costa Trindade; OLIVEIRA, Hélia Margarida de. Pensamento Algébrico ao longo do Ensino Básico em Portugal. **Bolema. Boletim de Educação Matemática,** Rio Claro (SP), v. 24, p. 97-126, 2011.

CYRINO, Márcia Cristina de Costa Trindade; OLIVEIRA, Hélia Margarida de. Ensino exploratório e casos multimídia na formação de professores que ensinam matemática. In: Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino. (org.). **Recurso multimídia para a formação de professores que ensinam matemática**: elaboração e perspectivas. 1ed.Londrina: EDUEL - Editora da Universidade Estadual de Londrina, 2016, v. 1, p. 19-32.

CYRINO, Márcia Cristina de Costa Trindade C; PARQUINI, Regina Célia Guapo. **Multiplicação e divisão de números inteiros**: uma proposta para formação de professores de Matemática. 2. ed. Belém: SBHMat - Sociedade Brasileira de História da Matemática - Col. Hist. da Matemática para Professores, 2010. v. 1. 70p.

CYRINO, Márcia Cristina de Costa Trindade; TEIXEIRA, Bruno Rodrigo. O ensino exploratório e a elaboração de um framework para os casos multimídia. *In*: CYRINO, Márcia Cristina de Costa Trindade. (org.). **Recurso multimídia para a formação de professores que ensinam matemática:** elaboração e perspectivas. 1ed.Londrina: EDUEL - Editora da Universidade Estadual de Londrina, 2016, v. 1, p. 81-100.

DARRAGH, Lisa. Identity research in mathematics education. **Educational Studies in Mathematics**, New York, v. 93, n. 1, p. 19-33, 2016.

DE PAULA, Enio Freire; CYRINO, Márcia Cristina de Costa Trindade. Identidade profissional de professores que ensinam Matemática: panorama de pesquisas brasileiras entre 2001-2012. **Zetetiké**, Campinas (SP), v. 25, n.1, p. 27-45, 2017. Disponível em: https://doi.org/10.20396/zet.v25i1.8647553. Acesso em: 15 jul. 2021.

DESCARTES, René. **The Geometry**. Trad. David Eugene Smith e Martha L. Latham. New York: Dover Publications, 1954.

DESCARTES, René. **Discurso do Método.** Lisboa, Portugal: Edições 70 Ltda, 1979.

FOUCAUT, Michael. **Estratégia, Poder-Saber** (Ditos e Escritos, vol. IV). Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2003.

GATTI, Bernadete Angelina. Formação de professores no Brasil: características e problemas. **Educação & Sociedade**, Campinas, v. 31, n. 113, p. 1355-1379, 2010.

GATTI, Bernadete Angelina; NUNES, Marina Muniz Rossa. Estudo dos cursos de Licenciatura no Brasil: Letras, **Matemática e Ciências Biológicas**. Fundação Victor Civita, São Paulo, SP, 2008.

GLAESER, Georges. Epistemologia dos Números Relativos. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 17, p. 29-124, 1985.

HALL, Stuart. **A identidade cultural na pós-modernidade.** 12a ed. Tradução de Tomaz Tadeu da Silva e Guacira Lopes Louro. Rio de Janeiro: Lamparina, 2015.

HILBERT, David. **Fundamentos da geometria.** Trad. da 7.ed. (1930) por Maria P. Ribeiro, Paulino L. Fortes, A.J. Franco de Oliveira. Lisboa: Gradiva, 2003.

KELCHTERMANS, Geert. Who I am in how I teach is the message: self-understanding, vulnerability and reflection. **Teachers and Teaching:** Theory and Practice, v.15, n.2, p. 257-272, 2009.

LOSANO, Letícia; CYRINO, Márcia Cristina de Costa Trindade. Current Research on Prospective Secondary Mathematics Teachers Professional Identity. *In*: STRUTCHENS Marilyn E.; HUANG, Rongjin; LOSANO, Letícia; POTARI, Despina; PONTE, João Pedro Da; CYRINO, Márcia Cristina de Costa Trindade; ZBIEK, Rose MMary (org.). **ICME-13 Topical Surveys**. 1ed.Cham - Switzerland: Springer International Publishing, v. VIII, p. 25-32, 2017. Disponível em: https://doi.org/10.1007/978-3-319-38965-3_4. Acesso em: 15 jul. 2021.

MORIEL-JUNIOR, Jeferson Gomes; CYRINO, Márcia Cristina de Costa Trindade. Propostas de articulação entre teoria e prática em cursos de licenciatura em Matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 11, n. 3, p. 535-557, 2009.

OLIVEIRA, Hélia Margarida de; CYRINO, Márcia Cristina de Costa Trindade. Developing Knowledge of Inquiry-Based Teaching by Analysing a Multimedia Case: One Study with Prospective Mathematics Teachers. **SISYPHUS - Journal of Education**, Lisboa, v. 1, n. 3, p. 214-245, 2013. Disponível em: https://doi.org/10.25749/sis.3712. Acesso em: 15 jul. 2021.

OLIVEIRA, Hélia Margarida de; MENEZES, Luís; CANAVARRO, Ana Paula. Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. **Quadrante**, Lisboa, v. 22, n. 2, p. 1-25, 2013. Disponível em: https://doi.org/10.48489/quadrante.22895. Acesso em: 15 jul. 2021.

RODRIGUES, Renata Viviane Raffa; CYRINO, Márcia Cristina de Costa Trindade; OLIVEIRA, Hélia Margarida de. M. Comunicação no Ensino Exploratório: visão profissional de futuros professores de Matemática. **Boletim de Educação Matemática. Bolema**, Rio Claro (SP), v. 32, n. 62, p. 967-989, 2018. Disponível em: https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a11. Acesso em: 15 jul. 2021.

STEIN, Mary Kay; ENGLE, Randi A.; SMITH, Margaret S.; HUGHES, Elizabeth K. Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. **Mathematical Thinking and Learning**, v. 10, n. 4, p.313–340, 2008.

WELLS, Gordon. **Dialogic inquiry:** Towards a sociocultural practice and theory of education. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

Submetido em julho de 2021.

Aceito em agosto de 2021.