

## Desempenho de Futuros Professores numa tarefa de Proporcionalidade Envolvendo Quantidades de uma Grandeza

### Performance of prospective teachers on a proportionality task involving quantities of a magnitude

*José António Fernandes<sup>1</sup>*

#### RESUMO

Neste artigo estuda-se o desempenho de estudantes, futuros professores dos primeiros anos escolares, numa tarefa de proporcionalidade do quotidiano, envolvendo quantidades de uma grandeza. Participaram no estudo 72 estudantes do 1.º ano do curso de Licenciatura em Educação Básica de uma universidade do norte de Portugal. Os dados foram obtidos através de um questionário, versando vários conceitos de proporcionalidade. Neste estudo explora-se a tarefa do questionário que envolve uma situação de proporcionalidade envolvendo quantidades de uma grandeza. Dos principais resultados obtidos, salienta-se um melhor desempenho na situação de proporcionalidade aqui explorada do que em outras tarefas envolvendo quantidades de duas grandezas. Por outro lado, ao nível das estratégias de resolução, salientam-se as estratégias escalar e regra de três simples, em que a estratégia escalar parece ter sido despoletada pelo tipo de tarefa e a estratégia regra de três simples, tal como em outros estudos, manteve um elevado grau de adesão. **PALAVRAS-CHAVE:** Educação Matemática. Proporcionalidade. Formação de Professores. Primeiros Anos Escolares.

#### ABSTRACT

In this article we study the performance of students, prospective teachers of the first school years, in a daily proportionality task, involving quantities of one magnitude. The study included 72 students from the 1st year of the Degree in Basic Education at a university in the north of Portugal. Data were obtained through a questionnaire, covering several concepts of proportionality. In this study, the questionnaire task that involves a situation of proportionality involving quantities of one magnitude is explored. From the main results obtained, a better performance in the proportionality situation explored here stands out than in other tasks involving quantities of two magnitudes. On the other hand, at the level of resolution strategies, the scalar and simple rule of three strategies stand out, in

---

<sup>1</sup> Universidade do Minho. E-Mail: [jfernandes@ie.uminho.pt](mailto:jfernandes@ie.uminho.pt). Orcid: <https://orcid.org/0000-0003-2015-160X>



which the scalar strategy seems to have been triggered by the type of task and the simple rule of three strategy, as in other studies, maintained a high degree of adherence.

**KEYWORDS:** Mathematics Education. Proportionality. Teacher Education. Early School Years.

## Introdução

Em termos matemáticos, a proporcionalidade pode ser vista como um conceito multifacetado que envolve muitos outros conceitos, como sejam os conceitos de razão, de proporção e de função. Trata-se igualmente de um conceito com vastas aplicações dentro e fora da matemática. No caso da matemática, pode pensar-se em temas como frações, percentagens, proporcionalidade, congruência e semelhança de figuras, trigonometria e probabilidades, os quais, por sua vez, são utilizados em outras disciplinas. No caso exterior à matemática, salientam-se as suas aplicações na vida quotidiana, como acontece com o custo de quantidades (discretas ou contínuas) de custo unitário fixo ou a determinação de distâncias reais a partir de distâncias em mapas.

A grande aplicabilidade da proporcionalidade a variados conteúdos matemáticos e a muitas situações do dia a dia revelam a sua grande importância. Consequentemente, essa importância reflete-se nos programas escolares de matemática do ensino básico ao contemplar o seu ensino desde o 1.º ao 9.º ano de escolaridade (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA, 2013). Assim, uma vez terminado o ensino básico, espera-se que os alunos estejam aptos a resolver problemas envolvendo proporções, a proporcionalidade direta e a proporcionalidade inversa, que lhes permitirá aprofundar temas como variáveis, funções lineares, vetores e outros temas estudados no ensino secundário.

Contudo, apesar dessa importância, estudos realizados mostram que os estudantes, em que se incluem também futuros professores dos primeiros anos escolares, têm dificuldades nos conceitos de razão, proporção e proporcionalidade (e.g., BESWICK, 2011; BURGOS; GODINO, 2020; FERNANDES; BARROS; GONÇALVES, 2019, 2020; FERNANDES; LEITE, 2015; LIVY; VALE, 2011; SINGH, 2000), dificuldades essas relacionadas com a definição, a representação e a aplicação destes conceitos à resolução de situações-problema.

Neste trabalho estuda-se o desempenho de estudantes, futuros professores dos primeiros anos escolares, na resolução de uma situação-problema do quotidiano envolvendo o conceito de proporcionalidade. Comparativamente com outros estudos

prévios, que envolvem razões externas ou heterogéneas, isto é, comparações entre quantidades de diferentes grandezas, no presente estudo a situação-problema caracteriza-se por envolver razões internas ou homogéneas, as quais envolvem comparações entre quantidades da mesma grandeza. Portanto, a influência do uso de quantidades da mesma grandeza sobre o tipo de respostas e de estratégias adotadas na resolução da tarefa constitui a dimensão inovadora do estudo.

Após a apresentação e justificação do estudo, nas próximas secções do artigo desenvolve-se o enquadramento teórico, apresenta-se a metodologia adotada no estudo, analisam-se os dados e relatam-se os resultados obtidos e, por fim, sintetizam-se as principais conclusões do estudo.

### **Enquadramento teórico**

Os estudos revistos nesta secção tratam do conceito de proporcionalidade e da aprendizagem da proporcionalidade, que constituem os dois aspetos centrais do estudo realizado.

#### *Conceito de proporcionalidade*

Sendo a proporção uma igualdade entre duas razões, ela implica a noção de razão, donde se conclui que o raciocínio proporcional requer a compreensão das noções de razão e proporção. Lamon (2007) assume que uma razão é uma comparação entre duas quantidades e distingue entre razões internas ou homogéneas e razões externas ou heterogéneas. As primeiras envolvem comparações entre quantidades da mesma grandeza (dentro da variável) e as últimas envolvem comparações entre quantidades de diferentes grandezas (entre variáveis).

Recorrendo às proporções podem-se resolver dois tipos fundamentais de problemas: os problemas de comparação, em que, sendo dados os quatro valores da proporção,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$ , se pretende comparar as razões  $a/b$  e  $c/d$  através das relações  $<$ ,  $>$  ou  $=$ ; e os problemas de valor omissos, em que, sendo conhecidos três dos quatro valores da proporção, se pretende determinar o valor em falta. Por exemplo, num problema de comparação pretende-se verificar, de dois concentrados de café e leite, se ambos têm a mesma concentração de café (e de leite) ou aquele que tem maior concentração de café (e menor de leite), enquanto no problema de valor omissos se pretende saber o valor em falta, supondo que as duas misturas têm a mesma concentração de café e leite.

Segundo Lamon (2007), o raciocínio proporcional baseia-se em “relações estruturais entre quatro quantidades  $(a, b, c, d)$  num contexto envolvendo simultaneamente a covariância e a invariância de razões ou produtos” (p. 638), como ocorre com a proporção e a regra de três simples. Portanto, podemos considerar a regra de três simples, fundamentalmente, como um método alternativo ao método da proporção para resolver problemas de valor omissos, que não apoia a transição para abordagens mais gerais e robustas, como seja o estudo da proporcionalidade através de operadores escalares e de relações funcionais, as quais veremos a seguir.

A noção de operador escalar entre dois espaços de medida ou no mesmo espaço de medida significa que a razão entre dois quaisquer valores de um dos espaços de medida é igual à razão entre os correspondentes valores do outro espaço de medida ou do mesmo espaço de medida. No caso da situação: “Deseja-se preparar uma mistura de café e cevada, juntando por cada 2 kg de café 3 kg de cevada. Que quantidade de café é necessária para produzir 4 kg de mistura?”, tem-se que  $\frac{4}{5}$  é a razão entre as quantidades de mistura, a qual se deve manter para as quantidades de café. Portanto, a quantidade de café necessária é dada por  $\frac{4}{5} \times 2 = 1,6$  kg.

Já no caso da relação funcional entre dois espaços de medida ou no mesmo espaço de medida, determinamos o valor unitário e multiplicamo-lo pela medida respectiva. No caso da situação anterior, da mistura de café e cevada, tem-se que o valor unitário é dado pela razão  $\frac{2}{5}$  (que corresponde à quantidade de café por cada quilograma de mistura), donde para produzir 4 kg de mistura é necessário  $\frac{2}{5} \times 4 = 1,6$  kg de café. Ou seja, em geral, pode-se definir a relação funcional  $f(x) = \frac{2}{5}x$  ( $x > 0$ ), em que  $x$  define a quantidade de mistura e  $f(x)$  define a quantidade de café. Analogamente se pode definir uma relação funcional que define a quantidade de cevada.

No presente estudo, a tarefa proposta aos estudantes pode ser resolvida por qualquer uma das estratégias referidas anteriormente, esperando-se que eles adotem estratégias variadas.

#### *Aprendizagem da proporcionalidade*

Como foi antes referido, a proporcionalidade é um conceito elaborado, o que, por sua vez, se reflete na aprendizagem dos alunos. Viana e Miranda (2018) referem que o processo de aquisição dos conceitos envolvidos no raciocínio proporcional é difícil, demandando a exploração de muitas situações-problema. Em consequência, o seu ensino decorre ao longo de vários anos escolares do ensino básico (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA, 2013) e a sua aprendizagem não está isenta de dificuldades.

Livy e Vale (2011) inquiriram futuros professores sobre a determinação de uma distância real a partir da distância no mapa. O facto de se terem obtido apenas cerca de 10% de respostas corretas mostra as muitas dificuldades que os estudantes sentiram na resolução do item, em que os erros resultaram, principalmente, da utilização de um procedimento de resolução incompleto, da incorreta conversão de unidades de comprimento, do uso da operação de adição ou subtração em vez da multiplicação e da incorreta interpretação da escala.

Envolvendo também distâncias reais e no mapa, Viseu, Fernandes e Leite (2018) confrontaram futuros professores dos primeiros anos escolares com três itens, em que nos dois primeiros se dava a distância no mapa e real e pedia-se, respetivamente, a distância real e no mapa, enquanto no terceiro se davam duas distâncias reais e se pedia a razão entre as correspondentes distâncias no mapa. Quanto aos resultados obtidos, verificou-se que nos dois primeiros itens cerca de metade ou mais estudantes respondeu corretamente, enquanto no terceiro item os estudantes sentiram mais dificuldades, sendo poucos aqueles que determinaram corretamente a razão pedida, seja calculando a razão entre as distâncias reais, que coincide com a razão entre as distâncias no mapa, seja calculando a razão entre as distâncias no mapa, previamente determinadas através da regra de três simples. Em qualquer dos três itens verificou-se que a maioria dos estudantes recorreu à regra de três simples nas suas resoluções, embora com maior frequência nos dois primeiros itens. No caso do terceiro item, o uso da regra de três simples é ainda mais surpreendente pois, dos estudantes que responderam corretamente, mais do dobro recorreu a essa regra, quando isso não era imprescindível.

Também no estudo de Fernandes *et al.* (2019) se questionaram futuros professores dos primeiros anos escolares sobre a proporcionalidade e o significado da noção de razão. Nos dois itens de proporcionalidade, todos os estudantes recorreram à estratégia da regra de três simples, tendo mais de metade respondido

corretamente, enquanto apenas cerca de um terço atribuíram um significado correto à razão dada. Perante estes resultados, os autores defendem que os estudantes devem desenvolver uma maior flexibilidade e diversidade nas estratégias a que recorrem na resolução das situações-problema e interpretar ou atribuir significado aos resultados obtidos.

Mais recentemente, ainda Fernandes *et al.* (2020) aplicaram três itens sobre proporções a futuros professores dos primeiros anos escolares, em que se pedia para determinar um dos quatro termos da proporção, conhecidos os restantes três. Quanto aos resultados obtidos, constatou-se que a percentagem de respostas corretas variou entre 39% e 68%, com uma média global de 50%. Já em termos das estratégias, por ordem decrescente de frequência, os estudantes recorreram às estratégias regra de três simples, aditiva, unidade de mistura e funcional. Perante a prevalência da estratégia regra de três simples, Fernandes *et al.* (2020) afirmam, referindo-se aos estudantes, que “é fundamental que eles desenvolvam capacidades cognitivas mais elaboradas e mais complexas do que aquelas que foram reveladas pela maioria destes estudantes, que realizaram a aplicação mecânica da regra de três simples” (p. 428).

Tal como ocorreu nos estudos de Fernandes *et al.* (2019, 2020), também no estudo de Burgos, Godino, Giacomone e Beltrán-Pellicer (2018), os estudantes, futuros professores do ensino secundário, foram questionados sobre uma tarefa de proporcionalidade, verificando-se que a regra de três simples foi a estratégia mais utilizada pelos estudantes, seguindo-se a estratégia tabelar e, em menor percentagem, recorreram à estratégia funcional. Os autores denominam de “degenerada” a estratégia regra de três simples, significando com isso que os estudantes omitiram a série de números proporcionais implicados na situação e a igualdade de razões correspondente.

Também num estudo teórico-documental de análise de livros didáticos e currículos dos últimos 60 anos, da república do Mali, Alpha e Almouloud (2021) constataram que a regra de três continua sendo o modelo dominante no tratamento da proporcionalidade, assumindo-se como a principal ferramenta para resolver problemas de proporção e proporcionalidade.

## **Metodologia**

Neste estudo investiga-se o desempenho de estudantes, futuros professores dos primeiros anos escolares, na resolução de uma tarefa do quotidiano envolvendo a utilização de noções de proporcionalidade direta. Mais concretamente, pretende-se estudar a influência nos tipos de respostas e de estratégias quando a tarefa envolve comparações de quantidades da mesma grandeza.

Participaram no estudo 72 estudantes do 1.º ano do curso de Licenciatura em Educação Básica, de uma universidade do norte de Portugal. Este curso dá acesso aos mestrados que conferem habilitação para educador de infância, professor do 1.º ciclo (professor generalista) e professor do 2.º ciclo (professor de uma área disciplinar, como, por exemplo, Matemática e Ciências)<sup>2</sup>. Estes estudantes, futuros professores dos primeiros anos escolares, estavam a iniciar o seu percurso universitário e tinham uma formação matemática variada à entrada na universidade, que tinha sido adquirida em cursos do ensino secundário, como sejam cursos profissionais, cursos humanísticos e cursos científico-tecnológicos. Além disso, os estudantes para ingressarem no curso que se encontravam a frequentar no ensino superior tiveram de obter aprovação num Exame Nacional de Matemática, podendo esse exame incidir sobre a matemática dos cursos humanísticos ou dos cursos científico-tecnológicos.

Os dados do presente estudo foram obtidos através das respostas escritas dadas pelos estudantes a um questionário de avaliação formal, que foi aplicado no âmbito da unidade curricular de Elementos de Matemática que os estudantes se encontravam a frequentar. O questionário constava de seis tarefas envolvendo razões, proporções, proporcionalidade e relações afins não lineares ou não proporcionais. Dessas tarefas, estudamos aqui apenas aquela que se refere à proporcionalidade e que envolve quantidades de uma grandeza, cujo enunciado consta do Quadro 1. Depois de distribuído o questionário pelos estudantes, verificou-se que eles gastaram, no máximo, 1 hora e 15 minutos para lhe responderem.

#### Quadro 1 – Tarefa proposta aos estudantes

Quer-se repartir berlindes entre o João e a Rosa de modo que o João receba 5 berlindes por cada 3 que a Rosa recebe.

- a) Sabendo que o João recebeu 30 berlindes, quantos berlindes recebeu a Rosa?
- b) Sabendo que a Rosa recebeu 21 berlindes, quantos berlindes receberam, na totalidade,

---

<sup>2</sup>Em Portugal, o ensino básico desenvolve-se entre o 1.º e o 9.º ano de escolaridade, e organiza-se nos três seguintes ciclos: 1.º ciclo, do 1.º ao 4.º ano; 2.º ciclo, 5.º e 6.º anos; e 3.º ciclo, do 7.º ao 9.º ano.

as duas crianças?  
c) Sabendo que, na totalidade, as duas crianças receberem 40 berlindes, quantos berlindes recebeu cada criança?

Fonte: elaborado para a pesquisa

Observa-se, assim, que a tarefa consta de três itens, sendo que em a) questiona-se sobre a quantidade de berlindes que a Rosa deve receber, quando o João recebeu 30 berlindes; em b) interroga-se sobre a quantidade de berlindes que as duas crianças devem receber em conjunto, quando a Rosa recebeu 21 berlindes; e em c) questiona-se sobre a quantidade de berlindes que cada criança deve receber, quando as duas crianças receberam 40 berlindes em conjunto. Note-se que as razões que se podem estabelecer são razões internas ou homogêneas, pois as possíveis quantidades são valores de uma única grandeza, isto é, quantidades de berlindes.

Por fim, no tratamento e análise de dados estudou-se o tipo de respostas e de estratégias usadas na obtenção dessas respostas. Assim, estudaram-se as respostas apresentadas pelos estudantes relativamente à sua correção e incorreção. Já quanto às estratégias subjacentes às respostas, recorreu-se à análise de conteúdo para definir as respetivas categorias, tendo resultado, após a análise de dados, as seguintes categorias: "operador escalar"; "regra de três simples"; "equação"; "funcional"; "proporção" e "incompreensível". De seguida, determinaram-se frequências dos tipos de respostas (corretas e incorretas) e das estratégias subjacentes a tais respostas, tendo-se recorrido a tabelas para resumir essa informação. Adicionalmente, para proporcionar uma melhor compreensão das respostas dos estudantes e da análise realizada, são ainda apresentados alguns exemplos de respostas dos estudantes, identificados pela letra *E* (abreviatura de estudante) seguida do número que lhe foi atribuído (de 1 a 72).

### **Apresentação de resultados**

A apresentação dos resultados é feita segundo os tipos de respostas e de estratégias usadas pelos estudantes no processo de resolução.

#### *Tipos de respostas*

Nesta tarefa, em que se pretende repartir berlindes pelo João e pela Rosa, estipula-se que o João deve receber 5 berlindes por cada 3 que a Rosa recebe. Qualquer dos três itens que se seguem podem ser respondidos recorrendo a várias



estratégias. Contudo, por razões de espaço, resolve-se cada um dos itens apenas por uma dessas estratégias.

No item a) afirma-se que o João recebeu 30 berlindes e pergunta-se quantos berlindes a Rosa deve receber. Estabelecendo a função de proporcionalidade direta  $f(x) = \frac{3}{5}x$ , em que  $x$  representa o número de berlindes que o João recebeu, tem-se  $f(30) = \frac{3}{5} \times 30 = 18$ . Conclui-se, assim, que a Rosa deve receber 18 berlindes.

No item b) afirma-se que a Rosa recebeu 21 berlindes e pergunta-se quantos berlindes as duas crianças devem receber. Como o operador escalar correspondente aos 21 berlindes recebidos pela Rosa é  $\frac{21}{3} = 7$  (ou  $3 \times 7 = 21$ ), que deve ser o mesmo para o João, tem-se  $5 \times 7 = 35$ . Ou seja, o João deve receber 35 berlindes e as duas crianças devem receber  $21 + 35 = 56$  berlindes.

Por fim, no item c) afirma-se que, em conjunto, as duas crianças receberam 40 berlindes e pergunta-se quantos berlindes deve receber cada uma. Considerando o total de 8 berlindes, referentes à soma de 5 com 3 berlindes, têm-se as regras de três simples:

$$\text{João: } \begin{array}{l} 8 \text{ — } 40 \\ 5 \text{ — } x \end{array}$$

$$\text{Rosa: } \begin{array}{l} 8 \text{ — } 40 \\ 3 \text{ — } y \end{array}$$

Portanto, o João deve receber  $x = \frac{5 \times 40}{8} = 25$  berlindes e a Rosa deve receber  $y = \frac{3 \times 40}{8} = 15$  berlindes.

Na Tabela 1 apresentam-se as frequências (em %) segundos os tipos de resposta correta e incorreta, bem como de não resposta nos itens da tarefa de proporcionalidade.

Tabela 1 – Frequências (em %) dos tipos de resposta na tarefa de proporcionalidade

Tipos de resposta	Itens		
	a)	b)	c)
Correta	67 (93)	63 (88)	42 (58)
Incorreta	4 (6)	8 (11)	23 (32)
Não resposta	1 (1)	1 (1)	7 (10)

Fonte: elaborado para a pesquisa

Pela Tabela 1 constata-se uma elevada percentagem de respostas corretas nos itens a) e b), e uma considerável diminuição dessa percentagem no item c). Em termos de processos de resolução, os itens a) e b) são muitos semelhantes, pois em ambos se conhece a quantidade de berlindes que uma das crianças recebeu. No item a) pretende-se saber a quantidade de berlindes que a outra criança deve receber e no item b) quer-se conhecer a quantidade de berlindes que as duas crianças conjuntamente devem receber. Muito embora o item b) difira do item a), o estudante poderia determinar a quantidade de berlindes que a outra criança deve receber e, de seguida, adicioná-la à quantidade de berlindes dada no enunciado, obtendo, assim, a quantidade de berlindes que as duas crianças devem receber em conjunto.

Diferentemente, no item c), o estudante precisa de relacionar o total de 8 berlindes, relativo à soma  $5 + 3$ , com o total de 40 berlindes dado no enunciado, seja qual for a estratégia (regra de três simples, escalar ou funcional) que adotem na resolução do item. Muito provavelmente, é ao facto de não estar explícito o valor 8 berlindes que se deve a maior dificuldade sentida pelos estudantes no item c).

#### *Tipos de estratégias*

Para aprofundar a compreensão acerca dos tipos de resposta, antes referidos, vamos, seguidamente, analisar as estratégias desenvolvidas pelos estudantes nos processos de resolução dos itens. Assim, na Tabela 2, registam-se as frequências (em %) das estratégias adotadas pelos estudantes em cada um dos itens da tarefa de proporcionalidade.

Tabela 2 – Frequências (em %) das estratégias na tarefa de proporcionalidade

Estratégia	Itens			Total
	a)	b)	c)	
Operador escalar	34 (47)	31 (43)	35 (49)	100 (46)
Regra de três simples	31 (43)	31 (43)	10 (14)	72 (33)
Equação	1 (1)	—	6 (8)	7 (3)
Funcional	1 (1)	2 (3)	3 (4)	6 (3)
Proporção	1 (1)	1 (1)	—	2 (1)

Incompreensível	3 (4)	6 (8)	11 (15)	20 (10)
-----------------	-------	-------	---------	---------

Nota: no cálculo das percentagens incluímos os não respondentes.

Fonte: elaborado para a pesquisa

Na continuação, analisam-se as estratégias registadas na tabela e apresentam-se algumas resoluções dos estudantes a fim de exemplificar essas estratégias.

*Operador escalar.* Esta estratégia baseia-se no facto de o operador escalar ser igual para qualquer das crianças e para o conjunto das duas crianças. Assim, basta multiplicar o valor do operador escalar pela quantidade de berlindes que a outra criança ou as duas crianças recebem, de cada vez, para se obter a respetiva quantidade de berlindes a receber. Na determinação do operador escalar, a maior parte dos estudantes recorreram ao produto/quociente dos valores conhecidos, mas houve alguns que adicionaram sucessivamente a quantidade de berlindes ou determinaram os múltiplos até obterem o valor dado.

Esta estratégia foi a mais usada pelos estudantes no conjunto dos três itens da tarefa, sendo um pouco mais usada no item c). Nas Figura 1 e 2 apresentam-se dois exemplos de utilização desta estratégia, relativas aos itens a) e c), respetivamente.

Figura 1 – Estratégia utilizada pelo aluno E2 no item a).

$\frac{30}{5} = 6$  → nº de vezes que o João recebeu 5 berlindes  
 $6 \times 3 = 18$  → Rosa  
 R O João recebeu 30 berlindes e a Rosa recebeu 18.

Fonte: elaborado para a pesquisa

No item a), o estudante determinou quantas vezes o João recebeu 5 berlindes em 30, obtendo, assim, o valor 6 para operador escalar, o qual é comum à Rosa. Portanto, de seguida, multiplicou os 3 berlindes que a Rosa recebe de cada vez por 6, obtendo os 18 berlindes que ela deve receber.

Figura 2 – Estratégia utilizada pelo aluno E49 no item c).

$x = 40$

5 — 3			
↓     ↓			
João   Rosa			

  

Rosa	João	= Total
3	5	= 8
6	10	= 16
9	15	= 24
12	20	= 32
15	25	= 40

$\therefore$  O João recebeu 25 e a Rosa recebeu 15 berlindes.

Fonte: elaborado para a pesquisa

Agora, no item c), o estudante determinou os sucessivos múltiplos de 3 e 5, número de berlindes que Rosa e João recebem de cada vez, respetivamente, adicionou esses múltiplos e terminou quando obteve a soma 40, que é exatamente o total de berlindes que as duas crianças devem receber. Finalmente, recorrendo aos múltiplos cuja soma é 40, conclui que João deve receber 25 berlindes e Rosa 15 berlindes.

Esta estratégia conduziu quase sempre à resposta correta, ocorrendo a única exceção no item b), em que o estudante em questão cometeu um erro de cálculo.

*Regra de três simples.* Esta estratégia foi também muito usada pelos estudantes, sendo a segunda mais usada na globalidade dos três itens. Entre os diferentes itens, destaca-se o maior uso desta estratégia nos itens a) e b), enquanto no item c) o número de estudantes que a usaram foi muito inferior.

Para além da diminuição da percentagem de respostas corretas, tal como discutimos antes, assiste-se também a uma variação da percentagem de uso desta estratégia ao longo dos vários itens. Especificamente, no caso do item c), o menor uso da regra de três simples deve-se, muito provavelmente, ao facto da aplicação da regra de três simples não ser imediata, sendo necessário relacionar o total de berlindes dado com 8 berlindes, que correspondem à soma dos 5 e 3 berlindes que o João e a Rosa recebem de cada vez.

Simultaneamente, verifica-se que ao menor uso desta estratégia no item c) corresponde um maior uso da estratégia operador escalar, o que indicia que os estudantes lidaram melhor com o reconhecimento de envolver o total de berlindes das duas crianças na estratégia escalar do que na estratégia regra de três simples. Nas Figuras 3 e 4 apresentam-se dois exemplos de utilização desta estratégia, referentes aos itens b) e c).

Figura 3 – Estratégia utilizada pelo aluno E25 no item b).

$$\begin{array}{l} 5 \text{ — } 3 \\ x \text{ — } 21 \end{array} \quad x = \frac{5 \times 21}{3} = \frac{105}{3} = 35 \text{ berlindes}$$

$$\text{Berlindes da Rosa} + \text{berlindes do João} = 21 + 35 = 56 \text{ berlindes}$$

R.: As duas crianças receberam, na totalidade, 56 berlindes.

Fonte: elaborado para a pesquisa

No item b), considerando que por cada 5 berlindes que o João recebe, a Rosa recebe 3 berlindes, o estudante determinou o número de berlindes que o João deve receber quando a Rosa recebe 21 berlindes. Por último, o estudante adicionou o número de berlindes que cada criança recebeu para obter o total de berlindes recebidos por ambas.

Figura 4 – Estratégia utilizada pelo aluno E52 no item c).

total	Rosa	
56	— 21	$56n = 21 \times 40$
40	— n	$56n = 840$
		$n = \frac{840}{56} = 15 \text{ berlindes}$

que a Rosa recebeu.

$40 - 15 =$  berlindes que o João recebeu

$= 25$  berlindes que o João recebeu

R.: O João recebeu 25 berlindes e a Rosa recebeu 15 berlindes.

Fonte: elaborado para a pesquisa

No item c), o estudante recorreu a um resultado obtido no item anterior, que a Rosa deve receber 21 berlindes de um total de 56 berlindes. Assim, aplicando a regra de três simples, concluiu que a Rosa deve receber 15 berlindes de um total de 40. Por fim, determinando a diferença entre o total 40 e os 15 berlindes recebidos, concluiu que o João deve receber 25 berlindes.

Em alternativa, tal como foi mencionado antes, o estudante podia considerar que a Rosa recebe 3 berlindes por cada 8 recebidos pelas duas crianças. Contudo, verificou-se que nenhum estudante usou essa relação na regra de três simples, confirmando-se a suposição anterior acerca da não preferência desta abordagem.

Tal como na estratégia operador escalar, também o uso da estratégia regra de três simples conduziu quase sempre à obtenção da resposta correta, sendo apenas sete os estudantes que apresentaram respostas incorretas. Nessas respostas incorretas, além de outros erros, salienta-se que alguns estudantes fixaram (sem explicação) o número de berlindes de uma das crianças e

determinaram, através de uma regra de três simples, o número de berlindes da outra criança.

*Equação.* Nesta estratégia, os estudantes relacionaram os dados fornecidos através de uma equação ou de um sistema de duas equações lineares. Constata-se que esta estratégia foi usada apenas nos itens a) e c) e, em qualquer caso, por poucos alunos, tendo conduzido à resposta correta no item a) e a respostas corretas e erradas no item c). Nas Figuras 5 e 6 apresentam-se dois exemplos de utilização desta estratégia, relativos a resolução dos itens a) e c).

Figura 5 – Estratégia utilizada pelo aluno E32 no item a).

A quantidade de berlindes que o João recebe pode ser determinada pela expressão  $5 \times \frac{k}{3}$ , sendo  $k$  a quantidade de berlindes que a Rosa recebeu

João recebeu 30 berlindes -  $5 \times \frac{k}{3} = 30$        $5k = 90$   
 $\frac{5k}{3} = 30$        $k = \frac{90}{5} = 18$   
 $5k = 3 \times 30$       R: A Rosa recebeu 18 berlindes

Fonte: elaborado para a pesquisa

No item a), representando por  $x$  o número de berlindes que a Rosa deve receber, o estudante considerou a expressão  $5 \times \frac{x}{3}$  como sendo o número de berlindes que o João deve receber, igualou-a a 30 e concluiu, assim, que a Rosa deve receber 18 berlindes.

Figura 6 – Estratégia utilizada pelo aluno E12 no item c).

João → 5 berlindes  
 Rosa ~~Rita~~ → 3 berlindes  
 TOTAL → 40 berlindes

Substituindo, então a Rita represento pela letra  $a$  e o João represento pela letra  $a+2$ .

Quando a Rita tem 19 berlindes e o João 21 berlindes.  
 $19+2=21$   
 No total da 40, pois  $21+19=40$ .

$Rosa + João = 40$   
 $a + a+2 = 40$   
 $2a + 2 = 40$   
 $2a = 40 - 2$   
 $2a = 38$   
 $a = \frac{38}{2}$   
 $a = 19 \rightarrow$  a Rita tem 19 berlindes

Fonte: elaborado para a pesquisa

No item c), o estudante, erradamente, representa por  $a$  e  $a + 2$  o número de berlindes a receber pela Rosa e pelo João, respetivamente, quando devia adotar uma relação multiplicativa e não aditiva, ou seja, representar essas quantidades por

$a$  e  $\frac{5}{3}a$ . Na continuação, o estudante escreve a equação, resolve-a e obtém o valor incorreto de 19 berlindes para a Rosa. Por substituição, o estudante obtém também o valor incorreto de 21 berlindes para o João.

*Funcional.* Esta estratégia, que consiste em definir uma função de proporcionalidade direta, foi usada em todos os itens, mas por poucos estudantes em qualquer deles. A adoção desta estratégia conduziu a respostas corretas nos itens a) e b) e a respostas incorretas no item c). As respostas incorretas derivaram, sobretudo, de considerar a razão entre as quantidades de berlindes das duas crianças em vez da razão entre as quantidades de berlindes de uma das crianças e o total de berlindes das duas crianças. Nas Figuras 7 e 8 apresentam-se dois exemplos de utilização desta estratégia, relativos à resolução dos itens a) e c).

Figura 7 – Estratégia utilizada pelo aluno E8 no item a).

$x =$  berlindes que a Rosa recebe

$$x = 30 \times \frac{3}{5}$$

$$x = \frac{90}{5}$$

$$x = 18$$

Fonte: elaborado para a pesquisa

No item a), o estudante obtém o número de berlindes da Rosa, representado por  $x$ , multiplicando 30 por  $\frac{3}{5}$ , ou seja, 18 berlindes. Embora o estudante não o tenha referido, a função  $f(x) = \frac{3}{5}x$  dá o número de berlindes que a Rosa deve receber para o número  $x$  de berlindes do João.

Figura 8 – Estratégia utilizada pelo aluno E27 no item c).

Rosa + João = 40 berlindes

Rosa = ?

João = ?

Se João recebe 5 berlindes por cada 3 que a Rosa recebe então:

$$40 : 5 = 8$$

$$8 \times 3 = 24$$

$$40 - 24 = 16$$

Fonte: elaborado para a pesquisa

No item c), o estudante dividiu o total 40 por 5 e multiplicou o valor obtido por 3, que corresponde a multiplicar o valor 40 por  $\frac{3}{5}$ . Deste modo, o estudante obteve uma resposta errada, pois, como vimos no exemplo da Figura 8, esta função permite

determinar o número de berlindes da Rosa a partir do número de berlindes do João, mas 40 não é o número de berlindes do João. Por exemplo, a função  $f(x) = \frac{5}{8}x$  dá o número de berlindes do João para o número total  $x$  de berlindes das duas crianças.

*Proporção.* Esta estratégia, em que se estabelece a igualdade de duas razões entre quantidades, é análoga à regra de três simples, diferindo apenas na possível configuração das quantidades implicadas. A estratégia proporção foi usada por um estudante apenas para responder aos itens a) e b), tendo conduzido, em ambos os casos, à obtenção da resposta correta. Na Figura 9 apresenta-se a resposta desse estudante ao item b).

Figura 9 – Estratégia utilizada pelo aluno E14 no item b).

Handwritten work for item b):

$$\frac{21}{21} \times \frac{3}{5}$$

Rosa  $\rightarrow$  21 berlindes  
João  $\rightarrow$  35 berlindes

$$21 = \frac{21 \times 5}{3}$$

Em conjunto receberam  $\rightarrow$  21 + 35 = 56 berlindes

R: Na totalidade, as duas crianças receberam 56 berlindes

Fonte: elaborado para a pesquisa

No item b), o estudante considera a proporção  $\frac{21}{x} = \frac{3}{5}$ , em que  $x$  representa o número de berlindes do João, embora tenha escrito o sinal  $\times$  em vez do sinal  $=$ . Assim, ele determina o número de berlindes que o João deve receber e adiciona-o ao número de berlindes da Rosa para obter o número total de berlindes das duas crianças.

*Incompreensível.* Por último, neste caso, não se compreende a resolução apresentada pelos estudantes, o que se deve, sobretudo, ao uso de valores que não eram fornecidos no enunciado e de que não se indica a sua origem. Portanto, nas respetivas resoluções não é possível identificar um tipo específico de estratégia.

Vários estudantes apresentaram estratégias incompreensíveis em qualquer dos itens, embora mais nos itens b) e c), sendo que todas as respostas dela resultantes foram consideradas incorretas. Na Figura 10 apresenta-se um exemplo em que é incompreensível a origem de valores usados na resolução.

Figura 10 – Estratégia utilizada pelo aluno E65 no item b).



Se a Rosa recebeu 21 berlindes, o João recebeu 35,  
logo  $21 + 35 = 56$ , ou seja, as duas crianças  
receberam 56 berlindes no totalidade.

Fonte: elaborado para a pesquisa

No item b), o estudante limita-se a indicar o número de berlindes de cada criança e o total de ambas as crianças, sem qualquer explicação acerca da origem desses valores. Donde, esta informação não permite descortinar a estratégia usada pelo estudante.

### Conclusão

Na resolução da tarefa, que foi proposta aos estudantes, salienta-se a elevada percentagem de respostas corretas obtida no conjunto dos três itens, sendo em cada um dos itens, em média, de 80%. Assim, regista-se um bom desempenho dos estudantes na tarefa que envolve razões internas ou homogéneas, melhor do aquele que foi obtido em tarefas envolvendo razões externas ou heterogéneas, nas quais se obteve 56% de respostas corretas (FERNANDES *et al.*, 2019) e 49% de respostas corretas (FERNANDES *et al.*, 2020). Portanto, a comparação destes resultados mostra que os estudantes foram mais sucedidos na tarefa envolvendo uma única grandeza (implicando razões homogéneas) do que nas tarefas envolvendo duas grandezas (implicando razões heterogéneas). Ora, o pior desempenho dos estudantes nas tarefas envolvendo duas grandezas pode dever-se, além de outras razões, ao facto de nessas situações ser necessário manter a mesma ordem das grandezas nas duas razões da proporção.

Ainda no que concerne aos tipos de resposta, salienta-se a menor percentagem de respostas corretas no item c). Neste item, não sendo dada, era necessário estabelecer a correspondência entre o número total de berlindes e o número de berlindes que cada uma das crianças devia receber. A omissão dessa correspondência, com a conseqüente necessidade de a determinar, certamente, aumentou a dificuldade dos estudantes na resolução correta do item, tal como também constataram outros autores (e.g., FERNANDES *et al.*, 2019, 2020).

Quanto às estratégias a que os estudantes recorreram na resolução dos itens da tarefa salienta-se o recurso às estratégias regra de três simples e operador escalar. No caso da estratégia regra de três simples, são variados os estudos em que se documenta o uso desta estratégia por um elevado número de estudantes,

futuros professores dos primeiros anos escolares (FERNANDES *et al.*, 2019, 2020) e futuros professores do ensino secundário (Burgos *et al.*, 2018), assim como modelo privilegiado do tratamento da proporcionalidade nos livros didáticos e currículos escolares (ALPHA; ALMOULOU, 2021).

Já a estratégia escalar, que foi a estratégia mais usada no presente estudo, o seu uso não é referido na literatura como sendo utilizada pelos estudantes. Em qualquer dos estudos antes referidos (BURGOS *et al.*, 2018; FERNANDES *et al.*, 2019, 2020), esta estratégia não foi adotada pelos estudantes, futuros professores dos primeiros anos escolares. Tal como já se mencionou antes, a propósito das respostas corretas, possivelmente o formato da tarefa, ao envolver apenas uma grandeza, terá levado os estudantes a recorrerem à estratégia escalar. Note-se que, nesta tarefa, basta dividir as quantidades de berlindes que a mesma criança recebe para obter o operador escalar ou então determinar os múltiplos sucessivos das quantidades de berlindes que cada criança recebe até se obter uma dada quantidade de berlindes, neste último caso podendo não usar explicitamente o fator escalar.

Em resumo, na resolução de situações de proporcionalidade, dos resultados obtidos no presente estudo, conclui-se a consolidação da maior dificuldade sentida pelos estudantes nas situações em que não é dada, explicitamente, a correspondência entre as quantidades da grandeza ou das grandezas implicadas, bem como a preferência de muitos estudantes pelo uso da estratégia de regra de três simples. Já em termos de novos resultados, destaca-se o melhor desempenho dos estudantes em termos de respostas corretas e a adoção da estratégia escalar pela maioria dos estudantes nas situações de proporcionalidade que envolvem razões homogêneas. No que concerne a estes novos resultados revela-se importante a realização de mais estudos com o propósito de consolidar os resultados agora obtidos.

## Referências

ALPHA, Ousmane; ALMOULOU, Saddo Ag. Das proporções à proporcionalidade: o impacto crucial ou hegemonia da regra de três. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 23, n. 1, p. 769-809, 2021.

BESWICK, Kim. Make your own paint chart: a realistic context to develop proportional reasoning with ratios. **Australian Mathematics Teacher**, v. 67, n. 1, p. 6-11, 2011.

BURGOS, María; GODINO, Juan D.; GIACOMONE, Belén; BELTRÁN-PELLICER, Pablo. Competencia de análisis epistémico de tareas de proporcionalidad de futuros profesores. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**, v. 31, n. 1, p. 706-713, 2018.

BURGOS, María; GODINO, Juan D. Semiotic conflicts in the learning of proportionality: Analysis of a teaching experience in primary education. **International Electronic Journal of Mathematics Education**, v. 15, n. 3, em0588, 2020.

FERNANDES, José António; LEITE, Laurinda. Compreensão do conceito de razão por futuros educadores e professores dos primeiros anos de escolaridade. **Bolema**, v. 29, n. 51, p. 241-262, 2015.

FERNANDES, José António; BARROS, Paula Maria; GONÇALVES, Gabriela. Resolver problemas envolvendo razões e proporções por futuros professores dos primeiros anos. In: Pires, Manuel Vara; Mesquita, Cristina; Lopes, Rui Pedro; Silva, Elisabete Mendes; Santos, Graça; Patrício, Maria Raquel; Castanheira, Manuel Luís Pinto (Eds.). **IV Encontro Internacional de Formação na Docência (INCTE): Livro de atas**. Bragança: Instituto Politécnico de Bragança, 2019. p. 394-405.

FERNANDES, José António; BARROS, Paula Maria; GONÇALVES, Gabriela. Resolução de uma tarefa de proporcionalidade por futuros professores dos primeiros anos escolares. In: Lopes, Rui Pedro; Mesquita, Cristina; Silva, Elisabete Mendes; Pires, Manuel Vara (Eds.). **V Encontro Internacional de Formação na Docência (INCTE): livro de atas**. Bragança: Instituto Politécnico de Bragança, 2020. p. 418-429.

LAMON, Susan. J. Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In: F. K. Lester (Ed.). **Second handbook of research on mathematics teaching and learning**. Charlotte, NC: Information Age Publishing, 2007. p. 629-667.

LIVY, Sharyn; VALE, Colleen. First year pre-service teachers' mathematical content knowledge: Methods of solution for a ratio question. **Mathematics Teacher Education and Development**, v. 3, n. 2, p. 22-43, 2011.

Ministério da Educação e Ciência. **Programa de matemática para o ensino básico**. Lisboa: Autor, 2013.

SINGH, Parmjit. Understanding the concepts of proportion and ratio among grade nine students in Malaysia. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 31, n. 4, p. 579-599, 2000.

VIANA, Odalea Aparecida; MIRANDA, Juliene Azevedo. Problemas de comparação de razões: uma avaliação do raciocínio proporcional de alunos do sexto ano. **Revemat**, v. 13, n. 1, p. 163-182, 2018.

WISEU, Floriano; FERNANDES, José António; LEITE, Laurinda. Prospective primary school teachers' use of the ratio and proportion concepts when solving a map-based task. In: Sablić, Marija; Škugor, Alma; Babić, Ivana Đurđević (Eds.). **42nd ATEE Annual Conference 2017: Changing perspectives and approaches in contemporary teaching**. Dubrovnik, Croatia: ATEE, 2018. p. 265-279.

Submetido em julho de 2021.

Aceito em março de 2022.

