REVISTA DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL (UFMS)
Volume 8, Número 16 – 2015

Limites de Estudantes do 1º Ano do Ensino Médio na Resolução de Atividade de Potenciação

Students Limits from the First Year of High School in the Resolution of Potentiation Activity

Walter Aparecido Borges[1]
Maria Helena Palma de Oliveira[2]
Marlene Alves Dias[3]

Resumo

Este estudo estabelece discussão sobre limites de estudantes do 1º. ano do Ensino Médio na resolução de atividades de potenciação com vistas à aprendizagem de funções exponenciais e logarítmicas. O foco principal recai sobre atividade do Caderno do Aluno, material didático da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo da série e sobre discussões em relação ao ensino e aprendizagem do conteúdo, presentes nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN; nos livros didáticos e na literatura da área de Educação Matemática. As análises preliminares da Atividade do Caderno do Aluno indicaram que os conhecimentos matemáticos retrospectivos necessários são operações com potências e com frações e suas propriedades, principalmente, multiplicação e divisão de frações, e que a ausência desses conhecimentos levaria os alunos a cometer equívocos. O diálogo com a literatura da área permite concluir que os conhecimentos matemáticos retrospectivos dos alunos podem não ser suficientes para que o aluno complete corretamente a resolução e atinja o ponto de generalização.

Palavras-chave: Potenciação. Educação Básica. Dificuldades de alunos.

Abstract

This study aims to establish a discussion about the limits of students of the first year of high school in the resolution of potentiation activity, which assist in the learning process of exponential and logarithmic functions. The main focus is the activities of the Caderno do Aluno (Students Book), textbooks from the Secretary of Education of the State of Sao Paulo for the series about the discussions related to teaching and learning of content present on the National Curricular Parameters (PCN, in portuguese); on the textbooks and the literature on the field of the mathematical education. The preliminary analysis of the Activity of the Students Book indicated that the mathematical knowledge required by the students are the operations with potentiation and their properties, with

[1] Doutor em Educação Matemática pela Universidade Bandeirante de São Paulo. Secretaria da Educação, SEE-SP. São Paulo – SP - w53borges@gmail.com.
[2] Doutora em Psicologia da Aprendizagem pela Universidade de São Paulo – IPUSP. Docente da Universidade Anhanguera de São Paulo – UNIAN-SP. São Paulo- SP - mhelenapalma@gmail.com
[3] Doutora em Didática da Matemática pela Universidade de Paris 7. Docente da Universidade Anhanguera de São Paulo – UNIAN-SP. São Paulo- SP – alvesdias@ig.com.br.

fractions, mostly multiplication and division of fractions, and the the absence of these knowledge would make the student commit mistakes. The dialog with the literature of the field allows to conclude that the retrospective mathematical knowledge of the students may be not enough for the student to correctly complete the resolution and meet the point of generalization.

Keywords: Potentiation. Basic education. Difficulties students.

Introdução

Este estudo busca estabelecer uma discussão sobre limites de estudantes do 1º. ano do Ensino Médio, que encontram dificuldades na resolução de atividades de potenciação com vistas à aprendizagem de funções exponenciais e logarítmicas. O foco principal recai sobre atividade do Caderno do Aluno (SÃO PAULO, 2008a) para o 1º ano e sobre as discussões em relação ao ensino e aprendizagem destas noções presentes nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998); nos livros didáticos e na literatura científica da área de Educação Matemática.

Sendo um dos autores professor/pesquisador, este, ao introduzir as funções exponenciais por meio de proposta do Caderno do Aluno (SÃO PAULO, 2008a), verificou a dificuldade dos estudantes de sua turma na resolução de atividades de potências com base e expoentes naturais, base natural e expoente negativo, base fracionária e expoente natural e base fracionária e expoente negativo. Considerando estas dificuldades apresentadas pelos estudantes, a discussão sobre as funções acima consideradas acaba se orientando inicialmente para as atividades associadas à revisita da noção de potenciação e suas propriedades.

Conforme destaca Cassiari (2011), em 2007, a Secretaria de Educação do Estado de São Paulo (SEE/SP) constatou o baixo desempenho dos alunos pelos resultados do SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica) e do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio). Em decorrência, traçou um plano de dez metas a serem conquistadas em 2010 com a apresentação de dez ações, entre elas a distribuição de material de apoio, como o “Caderno do Aluno” e o “Caderno do Professor”.

Quando se consideram as noções de funções exponenciais e logarítmicas, essas são propostas para serem desenvolvidas ao longo do 3º bimestre do 1º ano do Ensino Médio, de acordo com a Proposta Curricular do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2008c). As atividades exigem conhecimentos retrospectivos como, por exemplo, noções de potenciação e suas propriedades supostamente disponíveis, cuja falta manifesta-se nos erros e nas dificuldades dos alunos. Alguns desses erros e dificuldades foram estudados em outras pesquisas, como Karrer (1999), Kastberg, (2002), Feltes (2007), Palis (2002), Zuffi e Pacca (2002) e nos auxiliaram nas análises preliminares.

Destaca-se que o material didático disponível para professores e alunos de escolas estaduais de Ensino Médio, não se restringe aos Cadernos (Aluno e Professor). É disponibilizada também, pelos órgãos oficiais, a adoção de um dos livro didáticos, aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio – PNLEM, entre os quais este trabalho toma para discussão, como referência os livros didáticos de Dante (2010) e Smole e Diniz (2005).

De acordo com a Proposta Curricular (SÃO PAULO, 2008c), nos cadernos do professor, são apresentadas situações de aprendizagem para orientação do professor no ensino de conteúdos disciplinares específicos, organizados por série e acompanhados de orientações para a gestão em sala de aula, para avaliação e recuperação, incluindo estratégias de trabalho nas aulas, atividades extraclasse e estudos interdisciplinares.

A esse respeito, Cassiari (2011) apresenta uma pesquisa que utilizou um questionário respondido por 63 professores da rede estadual de São Paulo, dos quais 27 disseram usar sempre o Caderno do Professor e 29, o livro didático, 37 usam simultaneamente o Caderno do Aluno e outro material didático, 57 afirmam que a utilização do Caderno do Professor é boa, mas este deve ser reformulado.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, PCN (BRASIL,1998, p. 112), o conceito de potenciação pode ser desenvolvido no terceiro ciclo (5ª série e 6ª séries, ou 6º ano e 7º anos) e quarto ciclo (7ª série e 8ª séries ou 8º ano e 9º anos) do Ensino Fundamental. O professor pode conduzir as atividades de modo que o aluno observe a presença de potenciação no Sistema de Numeração Decimal, por exemplo:

$$874.615=800.000+70.000+4.000+600+10+5$$
$$874.615=8x100.000+7x10.000+4x1.000+6x100+1x10+5$$
$$874.615=8x10^5+7x10^4+1x10^3+6x10^2+1x10+5$$

Ainda de acordo com os PCN (BRASIL, 1998, p.113), pela observação da regularidade das sequências numéricas construídas no quadro 1 (identificado nos PCN como Tabela), no Ensino Fundamental, nos 3º e 4º ciclos, conforme referido anteriormente, o aluno poderá identificar propriedades da potenciação e dessa forma compreender a potência de expoente 1 e de expoente zero, como no quadro 1 a seguir:

4^6	4^5	4^4	4^3	4^2	$4^{...}$	$4^{...}$
4096	1024	256	64	16	?	?

÷ 4 ÷ 4 ÷ 4 ÷ 4 ÷ 4 ÷ 4

Quadro 1 – Divisão de Potências de Mesma Base
Fonte: Brasil, 1998, p.113

Atividades com a potenciação envolvendo números naturais podem ser ampliadas para o estudo da potência cujo expoente é um número inteiro negativo, partindo da análise de uma tabela como a anterior. Estendendo para as potências de expoente negativo as regularidades observadas no quadro 2, (BRASIL, 1998, p.113), é possível obter os valores para 4^{-1}, 4^{-2}, 4^{-3}, por exemplo:

4^4	4^3	4^2	4^1	4^0	4^{-1}	4^{-2}	4^{-3}	4^{-4}
256	64	16	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{64}$	...

÷ 4 ÷ 4 ÷ 4 ÷ 4 ÷ 4 ÷ 4 ÷ 4 ÷ 4 ÷ 4

Quadro 2 – Divisão de Potências de Mesma Base
Fonte: Brasil, 1998, p.113

Após esta breve exposição das propostas nacional e estadual para o ensino dos objetos de estudo desta pesquisa, apresentam-se a seguir alguns trabalhos que discutem as dificuldades de alunos do Ensino Fundamental e Ensino médio, na resolução de atividades associadas à divisão de frações e que se constituem como elementos de apoio à análise apresentada neste estudo.

Em relação às frações, Lopes (2008, p.4), que levantou dados junto a estudantes do Ensino Fundamental, anos finais, afirma que o ensino de frações é marcado pelo exagero de prescrições de regras, macetes, aplicações inúteis, como “João comeu 3/17 avos de um bolo, seu irmão comeu 5/9 do que restou... quanto sobrou para sua irmã?”; o que, segundo o autor, empobrece as aulas de matemática, uma vez que essa fixação pelo adestramento toma o lugar de atividades instigantes, com potencial para introdução e aprofundamento de ideias matemáticas.

Considerando o trabalho de Feltes (2007) que foi realizado com estudantes de 5ª série (6º ano) até a 8ª série (9º ano), a autora definiu e classificou 47 erros que, entre outros, envolvem o uso incorreto da base e do expoente, multiplicando a base pelo expoente como “3^2=6”, ou “2^{-1} =-2”. Destacam-se os seguintes exemplos: erro 1: o aluno multiplica a base da potência pelo expoente, exemplo, 2^3=6; erro 4: o aluno efetua corretamente a operação de potenciação, mas não calcula o resultado final; erro 13: o aluno considera que $(-a)^2= - a^2$; erro 22: ele considera que elevar a^{-1} é multiplicar por -1 (FELTES, 2007, pp. 43-45).

As dificuldades dos estudantes com conteúdos de potenciação e de fração, em geral, podem induzir a erros, durante o curso de Ensino Médio, como na aprendizagem de função exponencial e logarítmica, como aqueles encontrados por Karrer (1999). O estudante pode repetir um discurso familiar, mas, às vezes, não é capaz de aplicar corretamente as técnicas associadas a esse discurso de resolução, ou seja, não articula discurso e técnica. Muitos fatores podem contribuir para as dificuldades. Karrer (1999) aponta 9 categorias de erros encontrados com alunos da 3º série do Ensino Médio:

> E_1 Dificuldade nas manipulações algébricas básicas;
> E_2 Problemas na concepção de potência;
> E_3 Problemas na concepção de função exponencial;
> E_4 Tendência ao pensamento linear nas situações não lineares;
> E_5 Dificuldade de se expressar na forma escrita;
> E_6 Problemas de interpretação;
> E_7Erro proveniente do não estabelecimento do logaritmo como ferramenta de resolução de equações exponenciais;
> E_8 Problemas na técnica de cálculo do logaritmo;
> E_9 Desconhecimento ou uso inadequado de ferramentas (calculadora) para o cálculo de logaritmos (KARRER, 1999, p. 157).

Desse estudo, destaca-se o erro associado ao conceito de variação, classificado como E_4, isto é, a tendência ao pensamento linear em situações não lineares.

A dificuldade dos alunos de interpretar o conceito de variação de função exponencial foi foco de estudo de Zuffi e Pacca (2002) que entendem a noção de variação como um dos aspectos essenciais na aprendizagem de função que pode surgir de uma concepção espontânea. Para as autoras, a concepção de variação não é suficiente para caracterizar por completo o conceito matemático de função. Afirmam que essa pode ser uma das causas das dificuldades da compreensão do conceito de função.

Considerando que o estudo apresentado neste artigo toma como referência a Proposta Curricular do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2008c), mais especificamente, o Caderno do Aluno (SÃO PAULO, 2008a), 1º ano, vol. 3, destinado ao 3º bimestre do ano letivo, apresenta-se a seguir um breve detalhamento do mesmo.

No início do Caderno do Aluno (SÃO PAULO, 2008a), para a 1ª série do Ensino Médio, os autores sugerem aos alunos que retomem as atividades com potenciação e no Caderno do Professor (São Paulo, 2008b), para a mesma série, recomenda que o professor revisite as atividades de potenciação já ensinadas no Ensino Fundamental. Essa retomada necessária poderá servir de embasamento mais consistente para o trabalho com as operações.

Do Caderno do Aluno (SÃO PAULO, 2008a), destacamos a seguinte situação-problema: como calcular em um ano qualquer, a partir de 2010, a produção de alimentos que triplica a cada ano, uma tonelada no primeiro ano, três no segundo, nove no terceiro e assim por diante do. A tabela 1 abaixo ilustra a situação-problema.

Ano	Cálculo	Produção P
2000	$3^0 = 1$	1
2001	$3^1 = 3$	3
2002	$3^2 = 9$	9
...	...	...
2010	$3^{10} =$	59049
2000+n	3^n	3^n

Tabela 1 - Produção De Alimentos Em Um País X
Fonte: Caderno do Aluno (SÃO PAULO, 2008a, p.3)

Para a resolução, espera-se que o aluno aplique seus conhecimentos de potenciação e resolva as potências com base 3, podendo usar uma calculadora quando necessário. Em seguida, utilizando a mesma tabela, exercícios são sugeridos pelo Caderno, como calcular a produção em frações de ano, como meio ano ou quatro anos e três meses. Nesse ponto, o professor deve trabalhar com os alunos a extensão do conceito de potenciação, uma vez que o expoente deixa de ser um inteiro. Novamente, pode ser usada uma calculadora, mas é possível deduzir o resultado de $3^{\frac{1}{2}}$ com base em propriedades de multiplicação de potência de mesma base, mostrando-se que $3^{\frac{1}{2}} . 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 3^1$, deduzindo-se daí que a potência $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$, já que $\sqrt{3} . \sqrt{3} = \sqrt{3^2} = 3$. O mesmo se aplica ao tempo de 4 anos e 3 meses, com a dificuldade adicional de ser um número racional no qual 3 meses podem ser representados pela fração $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$, e da mesma maneira pode-se deduzir que $3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3}$.

Além disso, no Caderno do Aluno (SÃO PAULO, 2008a), existem outras atividades que envolvem resolução de potências como crescimento populacional de micróbios, produção de veículos em progressão geométrica, entre outras. A abordagem dessas atividades utilizam a contextualização superando enfoques tidos como tecnicistas. Ao que parece, está de acordo com o que é sugerido nas Orientações Curriculares Nacionais (BRASIL, 2006):

> Sempre que possível, os gráficos das funções devem ser traçados a partir de um entendimento global da relação de crescimento/decrescimento entre as variáveis. A elaboração de um gráfico por meio da simples transcrição de dados tomados em uma tabela numérica não permite avançar na compreensão do comportamento das funções (BRASIL, 2006, p.72).

Cabe ressaltar que as técnicas de cálculo para realização das atividades de potenciação do quadro 4 apresentado na sequência não são tratadas diretamente no Caderno do Aluno, é preciso que o professor articule a atividade proposta com o livro didático e/ou com o Caderno do Professor (SÃO PAULO, 2008b). Também é importante observar que os exemplos contextualizados precisam ser discutidos, uma vez que, em particular, quando se introduz a noção de função exponencial, esta é definida dos reais nos reais, o que pode conduzir a dificuldades relacionadas ao domínio da função, em particular, quando se trabalha com sua representação gráfica, pois a falta de uma discussão sobre qual o conjunto que pode representar o domínio da função, poderá conduzir à ideia de que o crescimento populacional de micróbios e produção de veículos são definidos para conjuntos contínuos.

Convém destacar que os alunos da pesquisa mais ampla que orientou este estudo têm acesso também a livros didáticos por estudarem em escola pública. Os livros são disponibilizados no início do ano letivo, no entanto, as atividades são orientadas pela utilização do Caderno do Aluno, conforme descrito anteriormente.

Para melhor compreender as possíveis articulações entre o Caderno do Aluno e o livro didático, pois ambos são indicados para serem utilizados no desenvolvimento do curso, apresentam-se as propostas de dois livros didáticos: o de Dante (2010), adotado na escola onde a pesquisa de campo foi realizada e o de Smole e Diniz (2005), utilizado para comparação das propostas.

O livro didático de Dante (2010, v.1, p. 232) propõe em um texto destacado “Para refletir” uma abordagem à técnica de resolução de potência com expoentes inteiros, semelhante à proposta dos PCN, como já vimos:

2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	2^{-1}	2^{-1}	2^{-3}
16	8	4	2	1	?	?	?

Ressalta-se que potências com expoentes irracionais não são tratados especificamente no Caderno do Aluno, utilizado neste estudo. Tais expoentes ocorrem somente na situação de aprendizagem de logaritmos, no mesmo caderno.

Nos livros de Dante (2010) e de Smole e Diniz (2005), há uma breve abordagem a esse respeito, tomando como exemplo $2^{\sqrt{2}}$, calculando por meio de aproximações de $\sqrt{2}$ por números racionais, como $2^{1,4}$; $2^{1,41}$; $2^{1,414}$ e assim por diante, utilizando uma calculadora científica.

Verificou-se também como Dante (2010) e Smole e Diniz (2005), abordam as funções exponenciais. Dante (2010) introduz a noção de função exponencial utilizando como exemplo uma população de bactérias que dobra a cada hora, o que corresponde a um contexto que não se insere na realidade. Se há 1000 bactérias no início, o autor sugere calcular a quantidade de bactérias depois de 3 horas, 10 horas e x horas. Após, apresenta uma revisão de potenciação, começando pela potência com expoente natural e exemplifica com $a^n = a.a.a.a...a$, com *a* se repetindo *n* vezes, uma multiplicação com *n* fatores *a*, e segue com uma revisão das operações com potência, potência com expoente zero, com expoente negativo, com expoente racional e expoente irracional, visto no exemplo anterior.

Em seguida, o autor aborda a função exponencial com alguns exemplos numéricos como 2^x, $\frac{1}{2}^{x}$, $\left(\sqrt{2}\right)^x$ e assim por diante. Logo após, há uma atividade para representar graficamente a função $y=2^x$, com a realização de cálculos em uma sequência numérica dos valores de x, a expressão correspondente para $y=2^x$ e o cálculo dos valores para essas expressões, como se observa no quadro 3 a seguir:

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
2^x	2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	2^0	2^1	2^2	2^3
$y=2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

Quadro 3 - Valores de X e da Função $Y=2^x$
Fonte: Dante (2010, p.237)

Com base nesses valores, é desenhado um gráfico da função $y=2^x$ no plano cartesiano:

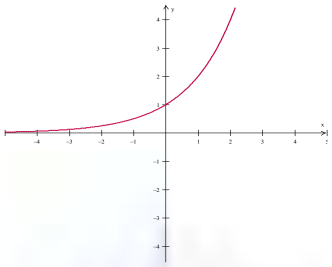


Figura 1 – gráfico da função $y = 2^x$
Fonte: Dante (2010) p.237

Em outra tabela, Dante (2010) propõe a determinação de alguns pontos e a representação gráfica da função exponencial $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, obtendo o gráfico:

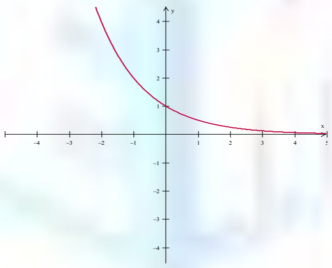


Figura 2 – gráfico da função $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Fonte: Dante (2010), p. 238

Dante (2010) ainda explicita em sua definição de função exponencial as restrições necessárias dadas pelas condições de existência:

> Dado um número real ***a*** (*a > 0 e a ≠ 1*), denomina-se *função exponencial de base* ***a*** uma função f de R em $\mathbb{R}_+^*$ definida por f (x) = $\boldsymbol{a}^x$ ou y = $\boldsymbol{a}^x$.
> **Observação**: As restrições *a* > 0 e *a* ≠ 1 são necessárias pois:
> Para a = 0 e x negativo, não existiria $\boldsymbol{a}^x$ (não teríamos uma função definida em IR).
> Para a < 0 e x = $\frac{1}{2}$, por exemplo, não haveria $\boldsymbol{a}^x$ (não teríamos uma função em IR).
> Para a = 1 e x qualquer número real, $\boldsymbol{a}^x = 1$ (função constante) (DANTE, 2010, p.237).

As autoras Smole e Diniz (2005) definem corretamente a função exponencial, como sendo uma função f de R em R. Nesse caso, pode-se considerar a função $f(x) = a^x+b$ como uma função exponencial, o que não seria possível na definição de Dante (2010).

Smole e Diniz (2005) fazem uma abordagem com o crescimento de uma planta aquática de forma circular, cujo diâmetro triplica a cada mês, para a função exponencial, associa essa informação a uma tabela e esboça um gráfico do crescimento dessa planta. Na sequência, as autoras definem a função exponencial, revisitam a noção de potência com expoente natural, inteiro, racional introduzem a noção de potência com expoente irracional, dando o mesmo exemplo que Dante (2010) em que é possível verificar o interesse de utilizar uma calculadora e a necessidade de um método que determine uma potência por aproximações.

Andrade (2012) ressalta a diferença entre a definição de função exponencial de Smole e Diniz (2005) e a utilização da condição de existência de Dante (2010), assinalando que considerar a condição de existência como definição pode criar dificuldades futuras para os estudantes, pois as funções exponenciais do tipo $f(x)= a^x + b$ não poderiam ser definidas enquanto funções exponenciais quando $b < 0$.

Smole e Diniz (2005) apresentam uma sequência numérica para os valores de x e analisam as funções $y=2^x$ e $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, obtendo uma curva crescente e a outra decrescente. As tabelas e os gráficos são construídos de forma semelhante ao de Dante (2010), por essa razão não são reproduzidas aqui.

Analisando os livros didáticos e a mobilização da história da matemática, Gomes (2010) estudou cinco livros didáticos, entre eles o de outra edição do mesmo livro de Dante (2007) e o de Smole e Diniz (2005), focou a prática escolar de se mobilizar a história da matemática, que segundo ele, em geral, é meramente informativa. Ainda que possa trazer algum conhecimento adicional, dificilmente poderia trazer uma contribuição orgânica, significativa e problematizadora para a aprendizagem matemática dos estudantes.

Conforme Gomes (2010), as autoras Smole e Diniz (2005) não só seguiram o desenvolvimento histórico de alguns conteúdos, como também mobilizaram a história de forma implícita, que foge à observação dos usuários do livro didático. Segundo ele, a avaliação do Ministério da Educação (MEC), por meio do Programa Nacional do Livro Didático, PNLD e do Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio, PNLEM, identificou que essa coleção mobiliza a história da matemática, indo além da contextualização do conteúdo escolar. Essa mobilização parece apontar para uma valorização positiva da aprendizagem com significado, com envolvimento do estudante com o que aprende, com sequências didáticas alternativas, diferentes das que tradicionalmente se encontram nos livros e práticas escolares e ainda da necessidade de problematização da relação entre história e epistemologia da matemática presente nas práticas escolares com relação à Educação Matemática (GOMES, 2010, p. 442).

Gomes (2010) relata uma entrevista com o autor Luiz Roberto Dante, descrevendo a característica principal do livro deste autor. Gomes afirma que todo profissional da área acadêmica aprofunda suas pesquisas e seu trabalho em determinada área, em detrimento de outras. Por isso, a principal linha de pesquisa de Dante é a resolução de problemas, tendência que predomina em sua coleção didática, em que busca estimular o aluno como sujeito ativo na construção do seu conhecimento.

Conforme Gomes (2010), esse aspecto da carreira acadêmica de Dante poderia conduzi-lo à uma prática orgânica da mobilização da história da matemática, no entanto, essa mobilização, consiste em textos apenas informativos, deficiência que foi apontada pelo próprio autor em sua entrevista e foi destacada no catálogo do PNLEM.

O presente estudo decorre de pesquisa mais ampla (BORGES, 2013) que envolveu 10 alunos do 1º ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual da cidade de São Paulo que participaram da resolução de atividade com potências e suas propriedades, no contexto de sala de aula de Matemática, envolvendo questões específicas selecionadas. Os temas abordados constam do currículo do Ensino Médio, relacionados nas Orientações Curriculares do Ensino Médio (BRASIL, 2006).

Buscou-se apresentar os limites a que os alunos do 1º ano do Ensino Médio podem estar expostos no processo de resolução de atividades com potências e suas propriedades, para isso traz estudos que abordam as dificuldades de alunos para os conteúdos envolvidos e estudos que discutem as possibilidades de dois livros didáticos no desenvolvimento dessas noções. Nesse sentido, este trabalho apresenta-se como um tipo específico de análise preliminar sobre o possível desempenho de alunos do 1º ano do Ensino Médio na resolução de atividade que, posteriormente, foi aplicada à coleta de dados junto aos alunos participantes da pesquisa de campo (BORGES, 2013). A análise da atividade do Caderno do Aluno, 1º ano do Ensino Médio, 3º bimestre (SÃO PAULO, 2008a), apresentada a seguir, mostra a importância de o professor verificar as dificuldades de seu grupo de alunos e, se necessário, revisitar essas noções.

Limites na resolução de atividade de potências

A atividade proposta aos alunos pelo Caderno do Aluno (SÃO PAULO, 2008a), v. 3, do 1º. ano do Ensino Médio, e selecionada para este estudo consiste na resolução de potências com base e expoentes naturais, base natural e expoente negativo, base fracionária e expoente natural e base fracionária e expoente negativo. Inicialmente, os alunos devem realizar atividades como as que estão no Quadro 4 a seguir.

Atividade: Complete a tabela a seguir, use os espaços em branco como rascunho.

x	2^x	3^x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	$\left(\frac{1}{3}\right)^x$
1	2		$\frac{1}{2}$	
2	$2^2=4$			$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{9}$
3	$2^3=8$	$3^3=27$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$	
0		$3^0=1$	$\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$	
-3		$3^{-3}=\frac{1}{3^3}=\frac{1}{27}$		$\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 3^3 = 27$
$\frac{1}{2}$	$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \approx 1{,}41$		$\frac{1}{2}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}71$	

Quadro 4 – Completar os Valores
Fonte: Caderno do Aluno (SÃO PAULO, 2008a, p.6)

Espera-se que um aluno que acompanhou e participou do desenvolvimento da atividade em sala de aula não tenha dificuldade para resolver potências com bases e expoentes inteiros positivos. Especificamente, o aluno deve substituir o valor do expoente x pelos valores da coluna x e calcular o valor das potências de base 2, base 3, base $\frac{1}{2}$ e base $\frac{1}{3}$. Dessa forma, deve resolver e preencher o Quadro 4.

Da mesma maneira que a resolução que já aparece impressa no quadro, o aluno deve calcular na primeira linha a potência $2^0 = 1$. Feltes (2007) e Kastberg (2002) mostraram que os alunos têm dificuldades nessas operações, como será visto adiante. Em geral, em sala de aula, o professor percebe que essa resolução é feita de forma mecânica, com o aluno recitando a fala "todo número elevado a zero é igual a um", como se fosse um eco, o que o deixa inseguro quanto a esse resultado, estranho para ele. O aluno não tem a resposta ao porquê desse resultado. Nessas condições, a solução surge como um mistério da matemática, algo que é assim e assim deve ser aprendido.

É possível que esse modo autômato de resolução de atividades matemáticas seja a consequência de uma tradição de abordagem tecnicista do ensino de matemática, conforme esclarece Fiorentinni (1995):

> O tecnicismo mecanicista procura reduzir a Matemática a um conjunto de regras e algoritmos, sem grande preocupação em fundamentá-los ou justificá-los. Na verdade esse tecnicismo mecanicista procurará enfatizar o fazer em detrimento de outros aspectos importantes como o compreender, o refletir, o analisar e o justificar/provar (FIORENTINNI, 1995, p.3).

Em contrapartida, Veiga (2006) destaca o domínio da técnica de resolução como fator essencial na aprendizagem, nesse sentido afirma que podemos considerar a escola como espaço para a aplicação de técnicas de ensino e de aprendizagem. A autora explica que essas técnicas, se supervalorizadas, podem fortalecer uma atitude autoritária do professor, impedindo a inovação de elementos que constituem o processo de ensino, como objetivos, conteúdos, método e avaliação. No entanto, para a autora, é possível repensar o uso da técnica de ensino, que pode ser considerada como um instrumento de emancipação, fortalecendo competências sócio afetivas e cognitivas (VEIGA, 2006).

Entre a interpretação de uma potência com base inteira ***a*** e o expoente positivo ***n***, isto é, a potência a^n **(*a*** elevado a ***n****)*, que significa a repetição da base ***a*** multiplicando-se ***n*** vezes (***a.a.a.a***..., ***n*** vezes), por exemplo, $3^4 = 3.3.3.3 = 81$ e a interpretação de uma potência com base inteira ***a*** e o expoente negativo ***m*,** a potência a^m**,** por exemplo 3^{-4} não pode ser entendida simplesmente como a repetição do produto da base 3, “menos quatro vezes”.

Ao resolver mecanicamente uma expressão como $2^0 = 1$, o aluno, em geral não apresenta o resultado com segurança. Em sala de aula, a linguagem pode revelar dúvida quando expressa perguntas como “por que todo número elevado a zero é igual a um?”, ou “qualquer número elevado a zero é igual a um, até fração?”

Para justificar um resultado como esse, por exemplo, $2^0 = 1$, é possível utilizar a sequência a seguir (Quadro 5) que mostra como se pode obter 4^0=1, sugerida pelo PCN (BRASIL, 1998, p.113):

4^6	4^5	4^4	4^3	4^2	$4^{\cdots}$	$4^{\cdots}$
4096	1024	256	64	16	?	?
÷ 4	÷ 4	÷ 4	÷ 4	÷ 4	÷ 4	

Quadro 5 – Divisão de Potências de Mesma Base
Fonte: Brasil, 1998, p.113

Segundo a sequência, cada termo seguinte é uma potência cujo expoente diminui uma unidade e pode ajudar nessa compreensão, mas é necessário mostrar, ou lembrar que: $\frac{4^6}{4} = \frac{4.4.4.4.4.4}{4} = \frac{4}{4}.4.4.4.4.4 = 1.4.4.4.4.4 = 4^5$ e que esse cálculo pode ser facilitado com as propriedades da divisão de potência de mesma base, manter a base e subtrair o expoente do denominador, do expoente do numerador, isto é: $\frac{4^6}{4} = \frac{4^6}{4^1} = 4^{6-1} = 4^5$. Dessa forma, é possível que o aluno compreenda o significado da potência com expoente 1 como resultado de $\frac{4^2}{4} = \frac{4^2}{4^1} = 4^{2-1} = 4^1 = 4$ e não como o produto da base 4 pelo expoente 1 (FELTES, 2007), o que o leva ao erro de multiplicar a base 4 pelo expoente 0, no caso de “$4^0 = 0$” (KASTBERG, 2002), porque não compreendeu o significado do expoente 0 como resultado de $\frac{4}{4} = \frac{4^1}{4^1} = 4^{1\ 1} = 4^0$ ou 1.

Para potências de bases com números racionais, os alunos teriam que resolver problemas de divisão de fração o que poderia gerar dificuldades. Em relação a isso, é importante retomar o trabalho de Lopes (2008), que relata um estudo feito com alunos da 6ª série, na faixa etária de 12 anos, realizado na Escola da Vila, em 1994. Nesse relato, descreve as discussões e os argumentos apresentados pelos alunos para a divisão $\frac{14}{15} \div \frac{2}{5}$. Logo que o professor a escrevera, os alunos resolveram da forma $\frac{14}{15} \div \frac{2}{5} = \frac{7}{3}$. A argumentação dos alunos em favor da operação feita o surpreendeu, ao mostrarem que $\frac{7}{3} x \frac{2}{5} = \frac{14}{15}$, e com a explicação do aluno 1: "Ué! A divisão não é a operação inversa da multiplicação?", que não dá margem a dúvidas (LOPES, 2008, p.18).

De acordo com o autor, essa discussão foi concluída com uma generalização para explicar a divisão de frações aos alunos, da seguinte maneira:

Se *a*,*b*,*c* e *d* são números inteiros, com *a*,*b*,*c* e *d≠0*, dada a divisão $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ e sabendo que $\frac{a}{b}$ é equivalente a $\frac{acd}{bcd}$, a operação pode ser feita do seguinte modo: $\frac{acd}{bcd} \div \frac{c}{d} = \frac{acd \div c}{bcd \div d} = \frac{ad}{bc}$ (LOPES, 208, p.20).

Essa forma de dividir duas frações, como relata Lopes (2008), apoia-se no conceito de frações equivalentes. Para ele, é necessária uma generalização envolvendo frações equivalentes para o entendimento da divisão de frações. Espera-se que o aluno do 1º ano do Ensino Médio domine basicamente as generalizações desse tipo.

Para este estudo, foram buscados outros autores que discutiram as dificuldades nas divisões com frações como Amorim (2007), que em sua pesquisa sobre apropriação de conceitos sobre números racionais, em uma abordagem histórico-cultural, destaca a necessidade de apropriação dos conceitos associados à divisão de frações. Para ela, é um conhecimento negligenciado no ensino de matemática, devido a algumas concepções de ensino que buscam alternativas didáticas que prendam a atenção do aluno, pretendendo que dessa forma ele aprenda de forma mais rápida.

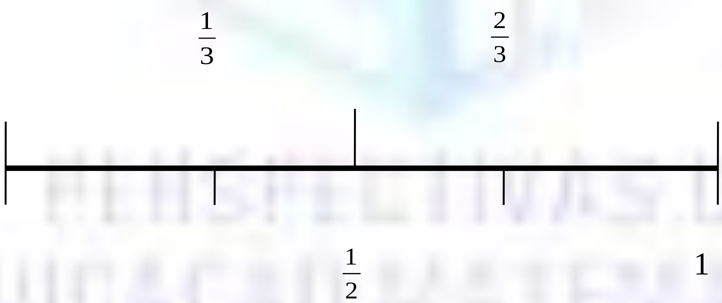
Para a autora, a divisão entre racionais envolve relações complexas e requer saltos qualitativos dos alunos se comparadas à divisão entre os números naturais. Por isso, não são muito produtivas as tentativas de ensinar as operações com os números racionais por meio de técnicas de memorização (AMORIM 2007).

Em seu trabalho, Amorim (2007) cita Caraça (2003) que propõe uma explicação para a divisão de frações usando álgebra:

$$\frac{p}{q} \div \frac{r}{s} = x \Rightarrow \frac{p}{q} = x.\frac{r}{s} \Rightarrow x = \frac{p.s}{q.r},\ q, r \text{ e } s \neq 0.$$

Essa operação é possível porque o conjunto dos racionais Q, munido das operações usuais de adição e multiplicação (Q, +, •), é um *corpo*, isto é, (Q, +) e (Q, •) são grupos comutativos. O conjunto dos racionais Q munido da operação de adição (Q, +) satisfaz as propriedades comutativa, associativa, existência do neutro da adição (0) e para todo elemento não nulo de Q existe oposto; da mesma forma o conjunto Q munido da operação de multiplicação (Q, •) satisfaz as propriedades comutativa, associativa, existência do neutro da multiplicação (1) e para todo elemento não nulo de Q existe inverso. Além disso, todo corpo é um anel de integridade, isto é, se para todo $a, b \in$ Q e $a.b = 0$, implica $a = 0$ ou $b = 0$ (lei do anulamento do produto). Como (Q, +, •) é um corpo, podemos aplicar essas propriedades à explicação de Caraça.

Essa discussão traz elementos que permitem afirmar que a divisão de frações está longe de ser uma operação trivial; há um salto entre a divisão dos números naturais, privilegiada pelos currículos escolares (AMORIM, 2007) e a divisão dos números racionais. A apropriação desse conceito passa pelo entendimento do significado da operação, por exemplo, o que significa dividir $\frac{1}{2}$ por $\frac{1}{3}$? Uma possível interpretação pode ser a de quantas vezes $\frac{1}{3}$ de um segmento cabe em $\frac{1}{2}$ desse segmento.



É possível se orientar pelo desenho geométrico que $\frac{1}{3}$ de um segmento cabe uma vez e meia em $\frac{1}{2}$ desse segmento, ou, pelos critérios que já vistos, $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = x; \frac{1}{2} = x.\frac{1}{3}; x = \frac{3.1}{2.1}; x = \frac{3}{2}$.

A primeira ilustração, representando os segmentos de reta, apenas facilita a visualização, a segunda operação exige uma aplicação de conhecimentos de álgebra, que ultrapassa os conhecimentos retrospectivos da grande parte dos alunos.

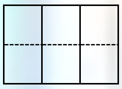
Ainda sobre dificuldades de alunos na divisão de frações, Silva e Almouloud (2008) apresentaram uma reflexão com foco na concepção parte-todo, com atividades que pudessem contribuir para a educação básica. Segundo eles, suas considerações restringiram-se à concepção parte-todo representadas por figuras planas por ser a mais frequente, tanto nos livros didáticos quanto na prática do professor.

Como foi observado na realização das atividades do Quadro 4, a respeito das dificuldades com divisão de frações para a resolução de potências com base racional (frações) e com expoente negativo, Silva e Almouloud (2008) afirmam que, das quatro operações, a divisão é a que mais apresenta dificuldades à compreensão, mesmo no estudo com números naturais e acreditam que, a partir de conhecimentos anteriores, com a ideia de "quantos cabem" possam dar algum significado para a divisão com números fracionários. Os autores fornecem algumas sugestões de atividades a serem apresentadas aos alunos, destacam-se as atividades que se seguem:

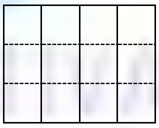
Atividade 1
a). Quantas metades cabem em um inteiro? Como você pode representar essa situação?
b). Quantos terços cabem em um inteiro? Como você pode representar essa situação?
A partir de conhecimentos anteriores, o aluno percebe, na questão (a), que em um inteiro cabem duas metades e, (b) que em um inteiro, cabem três terços. Na representação da situação surgem então as divisões: $1 \div \frac{1}{2} = 2$ e $1 \div \frac{1}{3} = 3$ (SILVA e ALMOULOUD, 2008, p.71).

Atividade 2
Observe os desenhos abaixo e complete:

a) $\frac{1}{3} \div 2 =$



b) $\frac{1}{4} \div 3 =$



Com a ajuda das figuras e da dupla contagem das partes, pode-se perceber que $\frac{1}{3} \div 2 = \frac{1}{6}$, o que significa *a metade de um terço*, cuja representação é $\frac{1}{3} \text{x} \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ e que $\frac{1}{4} \div 3 = \frac{1}{12}$, analogamente significa um terço de um quarto, cuja representação é $\frac{1}{4} \text{x} \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$ (SILVA e ALMOULOUD, 2008, p.72).

Utilizando conhecimentos anteriores, de que a divisão é a operação inversa da multiplicação, como se define com os números naturais, podemos sugerir que os alunos a apliquem no caso dos fracionários, ou seja, se $\frac{1}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{15}$, então $\frac{2}{15} \div \frac{1}{5} = \frac{2}{3}$ e $\frac{2}{15} \div \frac{2}{3} = \frac{1}{5}$. Analogamente, se $\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$ então $\frac{2}{9} \div \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ e $\frac{2}{9} \div \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.
Alguns alunos podem perceber que o *produto em cruz* pode nos dar a solução e que esta é equivalente ao produto do primeiro fracionário pelo inverso do segundo. Isto é: $\frac{2}{15} \div \frac{1}{5} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ e $\frac{2}{15} \div \frac{2}{3} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$. É importante que o educador tome as

> devidas precauções para que ele não confunda este procedimento com o utilizado no tratamento de proporções (SILVA e ALMOULOUD, 2008, p.73).

Em razão das dificuldades apresentadas na divisão de frações como a compreensão do conceito de frações equivalentes, a extensão da ideia de "quantos cabem" e a verificação de que o quociente pode ser maior do que o dividendo – no caso dos racionais menores de 1 –, é possível supor que um aluno poderá encontrar mais dificuldades ao operar com potências de base racional e expoente negativo.

Ao encerrar a discussão sobre os possíveis limites dos alunos na atividade selecionada no Caderno do Aluno (SÃO PAULO, 2008a), convém destacar o trabalho de Cassiari (2011) que estudou a implementação do Caderno do Aluno e do Caderno do Professor, dentro da Proposta Curricular do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2008c). A autora, por meio das respostas de 63 professores de escolas da rede estadual, fez um levantamento sobre as potencialidades e fragilidades na implementação dos cadernos do professor e do aluno. Como potencialidades, os professores apontaram a unificação do currículo, o auxílio no planejamento e na gestão, a ampliação dos conhecimentos do professor, a melhor aceitação por parte de professores titulares de cargo efetivos e que fazem mestrado. Enfim, o material foi considerado como bom pela maior parte dos professores e não deve ser abolido. Como fragilidades, apontaram que a aceitação por parte dos alunos não foi satisfatória, que a falta de conhecimento prévio dos alunos é o motivo mais frequente para a não utilização do material e que o apoio fornecido aos professores acontece de forma superficial.

Algumas considerações

Nessas análises, buscou-se manter uma sintonia com os estudos de outros autores que pesquisaram as dificuldades frequentes cometidos de estudantes ao realizar atividades semelhantes, isto é, potenciação, operações com frações, entre outras. Também buscamos verificar como os livros didáticos atuais e os documentos oficiais como os PCN podem contribuir para o entendimento das possíveis dificuldades encontradas pelos alunos na resolução de uma atividade que envolve potenciação e operações com frações presente no Caderno do Aluno.

Além disso, foram considerados trabalhos de outros autores que estudaram a influência do tecnicismo no ensino regular e trabalhos que sugerem, por exemplo, o uso de técnicas de resolução como fator benéfico para o ensino.

Cabe lembrar que as operações com potências e suas propriedades devem ser trabalhadas na última fase do Ensino Fundamental, ou seja, de 5ª até a 8ª série, ou do 6º até o

9º ano, e que também devem ser desenvolvidas nas séries seguintes, para que não representem uma barreira aos alunos para aprendizagem de funções no 1º ano do Ensino Médio. Sem dúvida, essa aprendizagem é uma abordagem inicial ao conceito de funções, mas conceitos mais diretamente ligados às funções como continuidade, crescimento, decrescimento, transformações, acabam sendo prejudicados, pois os alunos, geralmente, precisam resgatar uma aprendizagem anterior, dessas operações. Essa defasagem acaba transferindo o problema para o futuro, pois os conhecimentos retrospectivos esperados ficam comprometidos para o ano letivo seguinte.

As análises preliminares da Atividade do Caderno do Aluno (SÃO PAULO, 2008a) indicaram que os conhecimentos matemáticos retrospectivos necessários são os conhecimentos de operações com potências e de operações com frações, principalmente multiplicação e divisão de frações, e que a ausência desses conhecimentos retrospectivos levaria os alunos a cometer equívocos. Com base nessas análises, e principalmente no diálogo com a literatura da área, é possível concluir que os conhecimentos matemáticos retrospectivos dos alunos podem não permitir que completem corretamente a resolução e atinjam o ponto de generalização. Os conhecimentos retrospectivos necessários representam conteúdos que fazem parte do currículo regular do Ensino Fundamental e, por isso, esperava-se que houvesse domínio sobre eles.

Observou-se que os discursos de alunos do 1º ano do Ensino Médio, na resolução de atividades de potenciação devem apoiar-se, em grande parte, nas técnicas de resolução de operações com potências de mesma base e de divisão de frações, conhecimentos retrospectivos, supostamente disponíveis, pois devem ser introduzidos no Ensino Fundamental para utilização no Ensino Médio, como instrumentos importantes para o desenvolvimento do trabalho matemático, do qual destacam-se as funções exponenciais e logarítmicas.

De modo geral, os discursos dos estudantes podem apresentar-se fragmentados, incertos. Por exemplo, diante de uma divisão de potências de mesma base é comum o aluno ter dúvida sobre o que fazer com os expoentes. Ele pode não saber se subtrai ou se divide os expoentes, ocorrendo o mesmo nos casos de multiplicação de potências de mesma base, em que o aluno não está certo quanto à multiplicação ou à soma dos expoentes. Essa incerteza, de modo geral, é evidenciada em discursos entrecortados como *"... mantém a base e soma... não... multiplica..."* ou *"mantém a base e subtrai ... não... divide..."*, nas operações com potências ou "*mantém a fração de cima e multiplica pela de baixo... não...inverte...*, multiplica em x", nas operações com frações.

Assim, os possíveis limites dos alunos na resolução da atividade analisada são decorrentes da insuficiência de conhecimentos retrospectivos construídos durante a escolarização, da prática pedagógica muitas vezes marcada pelo modelo tecnicista, da consideração da pouca eficácia administrativa e metodológica da escola pública e da desconsideração das condições concretas dos estudantes.

A Secretaria da Educação, na busca de unificar os conteúdos matemáticos da escola básica, elaborou a Proposta Curricular do Estado de São Paulo, incluindo a implantação dos Cadernos (do Aluno e do Professor). Essa ação promoveu potencialidades e apresentou algumas fragilidades como observou Cassiari (2011). O viés tecnicista, na perspectiva de Marrach (1996), veio com a implementação unilateral desse material didático por parte da Secretaria de Educação, pois não houve um amplo debate. É possível que tenha sido uma medida emergencial e, nesse caso, não haveria mesmo tempo hábil para debates. Mas, como a própria pesquisa de Cassiari (2011) aponta, é um material que não deve ser abolido. Uma sugestão é que seja validado, mesmo que tenha que passar por reformulações.

De modo geral, os documentos oficiais da Educação e, de alguma forma, os livros didáticos são marcados pela abordagem em massa, e por isso não conseguem considerar as dificuldades do aluno real e, pelo que essa discussão pode evidenciar, estão em um nível incompreensível para a maioria dos alunos. Sem dúvida que é importante evitar uma forte diretividade sobre a ação do professor que deveria contar com condições de formação, de trabalho e, também engajamento, para avaliar as reais condições de sua classe e preparar ou eleger os materiais didáticos que, mais de perto, pudessem dar conta das necessidades pedagógicas de seus alunos.

Referências

ALMOULOUD, S.A. ; SILVA, M. J. F. As operações com números racionais e seus significados a partir da concepção parte-todo. **Bolema. Boletim de Educação Matemática.** UNESP. Rio Claro. Impresso, v. 21, p. 55-78, 2008.

AMORIM, M. P. **Apropriação de significações do conceito de números racionais:** uma abordagem histórico-cultural. 2007. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, SC 2007.

BORGES, W.A. **Processos de linguagem na aprendizagem matemática de um grupo de alunos do 1º ano do Ensino Médio.** 2013. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Anhanguera de São Paulo - UNIAN, São Paulo, 2013.

BRASIL, Ministério da Educação e Cultura. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio.** Brasília: 2000.

CASSIARI, E. R. **Potencialidades e fragilidades na implementação do “Caderno do Professor” e “Caderno do Aluno” da rede estadual de São Paulo**. 2011. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo- PUC SP, São Paulo, 2011.

DANTE, L.R.**Matemática, contextos e aplicações.** Vol. 1. São Paulo: Ática, 2010.

FELTES, R. Z. **Análise de erros em potenciação e radiciação**: um estudo com alunos de Ensino Fundamental e Médio. 2007. Dissertação (Mestrado em Educação Ciências e Matemática) Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul - PUC RS, Porto Alegre, 2007.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino de matemática no Brasil. Campinas: **Zetetiké**, 1995. v. 3, n. 4, p. 1-38.

GOMES**,** M. L. As práticas culturais de mobilização de história da matemática em livros didáticos destinados ao Ensino Médio. **Zetetiké**, v. 18, Número Temático 2010.

IEZZI, G.; DOMINGUES, H. H. **Álgebra moderna**. São Paulo: Atual Editora, 2003.

KARRER, M. **Logaritmos:** proposta de uma sequência de ensino utilizando calculadora. 1999. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC-SP, São Paulo, 1999.

KASTBERG, S. **Understanding mathematical concepts**: the case of the logarithmic function. 2002. Thesis (Doctor of Philosophy) – Graduate Faculty of the University of Georgia, Athens, 2002.

LOPES, A. J**.** O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações**.** Rio Claro: **Bolema**, 2008. ano 31, n 21, p. 1-22.

MARRACH, S.A.A. Neoliberalismo e educação. **Anais: I Simpósio Internacional da Faculdade de Filosofia e Ciências.** UNESP, Marília, SP. UNESP Publicações, 1996.

PALIS, G. R. **1º colóquio de história e tecnologia no ensino da matemática** (I HTEM), Vol. 1, p: 251-260. Luiz M. Carvalho e Luiz. C. Guimarães (organizadores). Rio de Janeiro: Editora IME-UERJ, 2002.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria de Educação. **Caderno do Aluno**. Ensino Médio 1ª série Vol3. Fundação para o Desenvolvimento da Educação FDE, 2008a.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria de Educação. **Caderno do Professor**. Ensino Médio 1ª série. Vol3. Fundação para o Desenvolvimento da Educação FDE, 2008b.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria de Educação. Proposta Curricular do Estado de São Paulo. Fundação para o Desenvolvimento da Educação FDE, 2008c.

SMOLE, K.C.S., DINIZ, M.I.V. **Matemática, Ensino Médio.** São Paulo: Saraiva, 2005.

VEIGA, I. P. A. (Org.). **Técnicas de ensino:** novos tempos, novas configurações. Campinas/SP: Papirus, 2006.

ZUFFI**,** E. M.; PACCA, J. L. A**.** Conceito de Função e sua Linguagem para os Professores de Matemática e de Ciências**. Ciência & Educação**, Vol. 8, nº 1, p.1 – 12, São Carlos: USP, 2002.

Submetido em dezembro de 2014

Aprovado em setembro de 2015