

**O uso do GeoGebra Classroom na Elaboração de
Conjecturas no Estudo de Funções Trigonométricas: uma
Investigação com Licenciandos em Matemática**

**The use of GeoGebra Classroom in Elaborating
Conjectures in the Study of Trigonometric Functions: an
Investigation with Undergraduates in Mathematics**

Jean Lucas Acelino de Aguiar¹

Roberto Seidi Imafuku²

William Vieira³

Emanoel Fabiano Menezes Pereira⁴

RESUMO

Neste artigo, apresenta-se os resultados de uma pesquisa em que foi analisado se, e como, o uso do GeoGebra possibilita que futuros professores elaborem e validem conjecturas acerca da influência dos parâmetros no comportamento do gráfico da função cosseno. Para tal, aplicou-se uma oficina por meio das plataformas *Google Meet* e *GeoGebra Classroom*, para estudantes de Licenciatura em Matemática. Ao final, os participantes avaliaram as potencialidades e limitações envolvidas nas atividades respondendo a um questionário avaliativo. Os Três Mundos da Matemática são as ideias teóricas que embasam a análise das produções dos participantes. Verificou-se que o GeoGebra auxiliou na criação de conjecturas acerca da influência de parâmetros no domínio, imagem, amplitude e período de

¹ Licenciando em Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP – Guarulhos). Bolsista de Iniciação Científica do PIBIFSP. E-mail: jean.lucas@aluno.ifsp.edu.br. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8988-7677>.

² Docente e membro do Centro de Pesquisa e Inovação em Educação Matemática e Formação de Professores (CEPIN) do Instituto Federal de São Paulo (IFSP – Guarulhos). E-mail: roberto.imafuku@ifsp.edu.br. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4047-9533>.

³ Docente e membro do Centro de Pesquisa e Inovação em Educação Matemática e Formação de Professores (CEPIN) do Instituto Federal de São Paulo (IFSP – Guarulhos). E-mail: wvieira@ifsp.edu.br. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5592-891X>.

⁴ Docente e membro do Centro de Pesquisa e Inovação em Educação Matemática e Formação de Professores (CEPIN) do Instituto Federal de São Paulo (IFSP – Guarulhos). E-mail: emanoel.pereira@ifsp.edu.br. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6070-6561>.



cossenóides definidas por $f(x) = \cos(x+d)$. Os futuros professores manifestaram-se favoráveis ao uso de tecnologias e de atividades como as aplicadas na oficina para ensinar trigonometria.

PALAVRAS-CHAVE: Ensino de Trigonometria. TDIC. GeoGebra. Três Mundos da Matemática.

ABSTRACT

In this article, we present the results of a research in which we analyze if and how the use of GeoGebra allows future teachers to elaborate and validate conjectures about the influence of parameters on the behavior of the graph of the cosine function. To this end, a workshop was applied using the Google Meet and GeoGebra Classroom platforms, for undergraduate mathematics students. At the end, the participants evaluated the potentials and limitations involved in the activities by answering an evaluative questionnaire. The Three Worlds of Mathematics are the theoretical ideas that underlie the analysis of the participants' productions. It was found that GeoGebra helped in the creation of conjectures about the influence of parameters on the domain, image, amplitude, and period of cosines defined by $f(x) = \cos(x+d)$. The future teachers were in favor of using technologies and activities such as those applied in the workshop to teach trigonometry.

KEYWORDS: Teaching trigonometry. GeoGebra. Three Worlds of Mathematics.

Introdução

Ao longo da história, a trigonometria se mostrou uma ferramenta útil na solução de diversas questões da humanidade nas mais variadas áreas do conhecimento. No Egito antigo era utilizada na demarcação de terras; na era das grandes descobertas foi aplicada na astronomia como ferramenta de localização nas navegações oceânicas; e na cartografia se fez presente na triangulação de territórios. Nos dias atuais, a frequência cardíaca de uma pessoa, a órbita de corpos celestes e a frequência de ondas sonoras são alguns dos fenômenos periódicos modelados por funções trigonométricas.

O PCN+ (BRASIL, 2002) reconhece a trigonometria como um conhecimento responsável pelo avanço tecnológico em diferentes épocas, entretanto, aponta que apesar de ser um tema importante, no Ensino Médio a trigonometria não é trabalhada de modo que suas aplicações sejam exploradas e, como consequência, muito tempo é gasto com cálculos algébricos das identidades trigonométricas em detrimento dos aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos (BRASIL, 2002).

O pensamento geométrico estimulado no Ensino Fundamental desenvolve habilidades que permitem o aluno interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano (BRASIL, 2018). Os avanços tecnológicos impactam o mundo contemporâneo, sobretudo estudantes do Ensino Médio, e a BNCC destaca a importância de utilizar essas tecnologias e aplicativos como recurso para desenvolver o pensamento computacional dos alunos enquanto

desenvolvem atividades de investigação e estabelecem conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas (BRASIL, 2018).

O currículo de Matemática do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2012) reconhece as potencialidades das funções trigonométricas na representação de fenômenos periódicos, orientando uma abordagem dessas funções no Ensino Médio, uma vez que indica que os estudantes devem conhecer as principais características das funções trigonométricas básicas (senoides, cossenoides, tangentes), associá-las a fenômenos periódicos e construir seus gráficos de modo que compreendam os impactos dos coeficientes em suas transformações.

A popularização de tecnologias digitais na sociedade abriu espaço para discussões sobre o uso delas em sala de aula, em todos os níveis de ensino. Borba e Lacerda (2015) fizeram um levantamento de projetos e ações governamentais que buscaram a inserção de tecnologias nas escolas públicas brasileiras. Esses projetos culminaram na instalação de laboratórios de informática nas escolas públicas, porém diversas dificuldades foram encontradas como “a infraestrutura das escolas, falta de preparo dos professores para planejar atividades, além de problemas na configuração dos computadores e na velocidade da internet nas escolas” (BORBA; LACERDA, 2015, p. 496).

Na busca de identificar como os computadores de escolas públicas estaduais estavam sendo utilizados por professores de Matemática do Ensino Fundamental II, Chinellato (2014) entrevistou professores da cidade de Limeira/SP e concluiu que “a falta de equipamento, a falta de interesse dos alunos, a dificuldade do acesso à internet, [...], a deficiência da formação educacional do professor” (CHINELLATO, 2014, p. 91) são alguns dos motivos que impossibilitam professores de fazer uso de tecnologias em suas aulas. Motivos que também contribuem para o não uso das tecnologias são a formação inicial e a formação continuada dos professores de Matemática que não são satisfatórias e nem efetivas para que os professores se capacitem e consigam incorporar as tecnologias digitais em suas práticas pedagógicas (CHINELLATO, 2014).

As Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC) estão cada vez mais presentes na vida das pessoas, e a escola, enquanto instituição integrante da sociedade, não pode ignorar os efeitos que as TDIC trouxeram ao ser humano, e deve fomentar estudos que busquem incorporar esses recursos tecnológicos nas salas de aula.

Moreno-Armella e Hegedus (2009) argumentam que objetos matemáticos que antes eram definidos e explorados apenas em ambientes de aprendizagem com lápis e papel agora, por meio de softwares de Geometria Dinâmica, podem ser significativamente explorados em um ambiente que produz uma representação digital desses objetos, permitindo que os estudantes investiguem suas propriedades enquanto executam ações sobre eles. O conceito de *co-action* criado pelos autores descreve como usuários e ambientes dinâmicos exercem ações sobre o outro mutuamente, de modo que os softwares de Geometria Dinâmica transformam a interação que o estudante tem com a Matemática, pois permitem que os estudantes executem ações sobre representações de objetos matemáticos, manipulando suas características, de modo que por meio da investigação, o estudante pode perceber e entender propriedades, criar conceitos, significados e conjecturas ampliando seu conhecimento matemático (MORENO-ARMELLA; HEGEDUS, 2009).

Pesquisas como as de Costa, Figueiredo e Llinares (2019); Costa e Allevalo (2019), Braz, Castro e Oliveira (2019) e Neto (2010) têm apresentado novas possibilidades para o ensino de funções trigonométricas com o auxílio de softwares de Geometria Dinâmica, que resumimos brevemente a seguir.

Costa, Figueiredo e Llinares (2019), investigaram como um experimento de ensino promoveu a aprendizagem de estudantes a respeito da periodicidade de funções trigonométricas em um entorno tecnológico. A investigação foi realizada com dezesseis estudantes do primeiro ano de um curso de licenciatura em matemática por meio de uma trajetória hipotética de aprendizagem com elementos de *Design-Based Research* e *applets* do software GeoGebra. Os autores utilizaram a Taxonomia SOLO (*Structure of the Observed Learning Outcomes*) desenvolvida por Biggs e Collins (1982) para analisar a progressão do entendimento conceitual, a construção e consolidação do conceito de periodicidade de uma função trigonométrica, pois a mesma fornece um modelo para avaliação do desenvolvimento cognitivo do estudante a partir do pensamento matemático. Em suas conclusões, os autores apontam que as tarefas do experimento propiciaram uma coordenação de dois sistemas semióticos: o analítico e o geométrico e destacam que "[...] a construção de um conceito é um processo progressivo de extensão a novas situações e de coordenação entre diferentes sistemas semióticos" (COSTA; FIGUEIREDO; LLINARES, 2019, p. 18). A partir da análise, os autores constataram que a atividade realizada em contexto tecnológico propiciou uma interação e um dinamismo nas ações dos alunos de modo que a coordenação simultânea entre as representações analíticas e geométricas inter-

relacionadas auxilia os alunos a avançarem não só na construção do conceito de periodicidade das funções trigonométricas, mas também na compreensão de outros conceitos matemáticos.

A pesquisa de Costa e Allevato (2019), utilizando os constructos da Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel (1980), teve por objetivo aprofundar os conhecimentos que 40 estudantes do 2º ano do Ensino Médio já tinham sobre as funções trigonométricas, de modo que os alunos pudessem fazer uma avaliação dos efeitos dos parâmetros no gráfico das funções seno e cosseno. Utilizando atividades extraídas do Caderno do Aluno, material elaborado pela Secretaria de Estado da Educação de São Paulo (SEE-SP), e gráficos elaborados no software GeoGebra como ponte cognitiva entre os conhecimentos prévios dos alunos e o conteúdo novo a ser aprendido, os autores concluíram que o software potencializou a situação de aprendizagem, pois “[...] possibilitou explorar os parâmetros e como eles atuaram diretamente na variação de período, amplitude, translação e conjunto imagem de uma função trigonométrica” (COSTA; ALLEVATO, 2019, p. 137). Durante a análise dos resultados obtidos, os autores constataram que, apesar da falta de formalização matemática, os estudantes conseguiram responder as questões de forma satisfatória, no entanto, a pesquisa não conseguiu identificar se os alunos seriam capazes de construir os gráficos manualmente. É importante ressaltar que por conta de uma limitação no material disponibilizado pela SEE-SP, os autores não conseguiram abordar o parâmetro responsável pela translação horizontal dos gráficos das funções trigonométricas.

Por ser apontado na literatura como grande facilitador no estudo de funções, o software GeoGebra foi utilizado com uma abordagem baseada na investigação matemática na pesquisa de Braz, Castro e Oliveira (2019). Neste trabalho, os autores tiveram como objetivo introduzir o estudo das funções trigonométricas seno, cosseno e tangente através de um minicurso ofertado para alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma instituição pública de ensino. O referencial teórico da pesquisa é a investigação matemática (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2009). Os alunos registraram os resultados de suas investigações acerca das propriedades das funções trigonométricas, e os autores puderam concluir que em relação à função seno a maioria dos alunos apresentou conjecturas corretas, porém em relação a função cosseno e tangente, alguns apenas repetiram as respostas dadas na investigação sobre a função seno, evidenciando uma dificuldade de conceitualização desses objetos matemáticos, no entanto, durante o processo de socialização de respostas e

formalização do conteúdo, as conjecturas erradas foram corrigidas. Em suas conclusões, os autores destacam que “[...] o desenvolvimento das atividades no GeoGebra gerou resultados satisfatórios. [...] Contudo, acreditamos que somente desenvolver as atividades no GeoGebra não seja suficiente” (BRAZ; CASTRO; OLIVEIRA, 2019, p. 82) levantando a importância de promover um momento de socialização e discussão das conjecturas levantadas pelos estudantes.

Com uma metodologia baseada na teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (1993) e tendo o software GeoGebra como recurso didático, Neto (2010) conduziu uma sequência didática em forma de oficina para o ensino das funções trigonométricas cosseno e seno. Os sujeitos da pesquisa foram nove alunos de uma instituição pública de ensino de Santa Catarina que já tinham conhecimento sobre os tópicos abordados na oficina. O autor concluiu que “a aplicação de uma ferramenta computacional deve ser aliada a uma metodologia proposta; uma vez que por si só, não garante a eficácia do processo de ensino” (NETO, 2010, p.100). Ressalta que as vantagens do uso de ambientes informatizados que permitem manipulação de objetos abstratos se tornam evidentes por permitirem uma série de manipulações em pouco tempo, o que não seria possível em um ambiente de aprendizagem apenas com lápis e papel. Apesar dos resultados satisfatórios obtidos em sua pesquisa, o autor destaca que a ideia não é substituir métodos tradicionais de ensino pelo uso dos softwares educativos, mas sim aproveitar e extrair as melhores características dos dois ambientes de modo que um dê suporte ao outro.

Entendendo que uma formação inicial de professores de Matemática voltada para uso de tecnologias digitais é o primeiro passo para colaborar com a melhoria dos processos de ensino e de aprendizagem de funções trigonométricas. Nesta pesquisa, à luz dos Três Mundos da Matemática (TALL, 2013), buscamos analisar as contribuições do uso do GeoGebra, e da manipulação de objetos matemáticos corporificados representados no software, na criação e validação de conjecturas, estabelecidas por futuros professores de Matemática, acerca da influência do parâmetro responsável pela translação horizontal do gráfico da função cosseno.

Referencial Teórico

David Tall (2013) desenvolveu uma teoria sobre como o pensamento matemático de um indivíduo se desenvolve ao longo de todas as idades. O pensamento matemático envolve a compreensão de estruturas matemáticas por meio de conceitos que são conectados e combinados à estruturas de conhecimento,

levando a conceitos que se tornam cristalinos e sofisticados e que possuem uma estrutura matemática (TALL, 2013).

Segundo o autor, os diferentes tipos de desenvolvimento cognitivo possibilitam que o desenvolvimento do pensamento matemático se dê de três maneiras distintas, mas não disjuntas, e que os conceitos habitam Três Mundos da Matemática, o conceitual corporificado, o operacional simbólico e o axiomático formal.

Os Três Mundos da Matemática pensados por Tall (2013) são descritos brevemente a seguir.

O mundo conceitual corporificado está baseado nas percepções, experiências sensoriais e ações humanas sobre objetos matemáticos que tem como consequência a criação e o desenvolvimento de imagens mentais de tais objetos. As verbalizações das imagens mentais se mostram cada vez mais sofisticadas de modo que se tornam uma entidade mental perfeita do objeto matemático (TALL, 2013).

Utilizamos características desse Mundo, por exemplo, quando representamos física ou mentalmente gráficos de funções trigonométricas, de modo que suas características (período, amplitude, domínio, imagem) possam ser identificadas e compreendidas.

O mundo operacional simbólico baseia-se a princípio em ações no mundo corporificado e “se desenvolve a partir de ações humanas incorporadas em procedimentos simbólicos de cálculo e manipulação que podem ser compactados em procedimentos para permitir o pensamento operacional flexível” (TALL, 2013, p. 133, tradução nossa). Nesse mundo os símbolos matemáticos são utilizados em cálculos, manipulações aritméticas e na álgebra por meio de procedimentos que podem ter como objetivo obter uma resposta ou podem ser compreendidos como o próprio objeto a ser operado, tendo foco em suas propriedades e nos conceitos que esses símbolos representam.

Características desse Mundo são evidenciadas em cálculos algébricos de identidades trigonométricas, na representação numérica de relações métricas do triângulo retângulo, na representação de funções trigonométricas através de tabelas e de expressões algébricas de suas leis de formação.

O mundo axiomático formal surge da combinação de concepções corporificadas e manipulações simbólicas e diz respeito à construção do conhecimento formal através de sistemas axiomáticos, especificados de acordo com definições da Teoria dos Conjuntos e da Topologia, isto é, teoremas, definições e

axiomas de forma que as propriedades de objetos matemáticos possam ser deduzidas através de demonstrações matemáticas (TALL, 2013).

No estudo de funções trigonométricas, encontramos características do Mundo Formal em definições como, por exemplo, no estudo do período P da função $f(x) = \cos(a \cdot x)$, que é dado por $P = \frac{2\pi}{|a|}$.

Materiais e Métodos

Nesta sessão, descrevemos os procedimentos metodológicos utilizados na pesquisa, sobre as contribuições e limitações do software GeoGebra no estudo de funções trigonométricas de um grupo de alunos de Licenciatura em Matemática.

Adotando uma pesquisa de campo como base metodológica, foi realizada uma oficina intitulada *O papel dos parâmetros no gráfico de funções trigonométricas com o auxílio do GeoGebra* cujo objetivo foi resgatar alguns conceitos e ideias relacionadas à trigonometria e possibilitar que os participantes investigassem os impactos dos parâmetros no comportamento do gráfico da função cosseno, assim como apresentar algumas funcionalidades e ferramentas do software.

Os participantes da pesquisa são alunos de um curso de Licenciatura em Matemática de uma instituição pública de ensino do Estado de São Paulo. A oficina foi realizada remotamente em dois encontros, por meio das plataformas *Google Meet* e *GeoGebra Classroom*, e contou com a presença de treze estudantes no primeiro dia e, no segundo encontro, onze dos treze estudantes compareceram. Os encontros foram realizados nos dias 01 e 02 de Julho de 2021 com a duração de duas horas e meia cada.

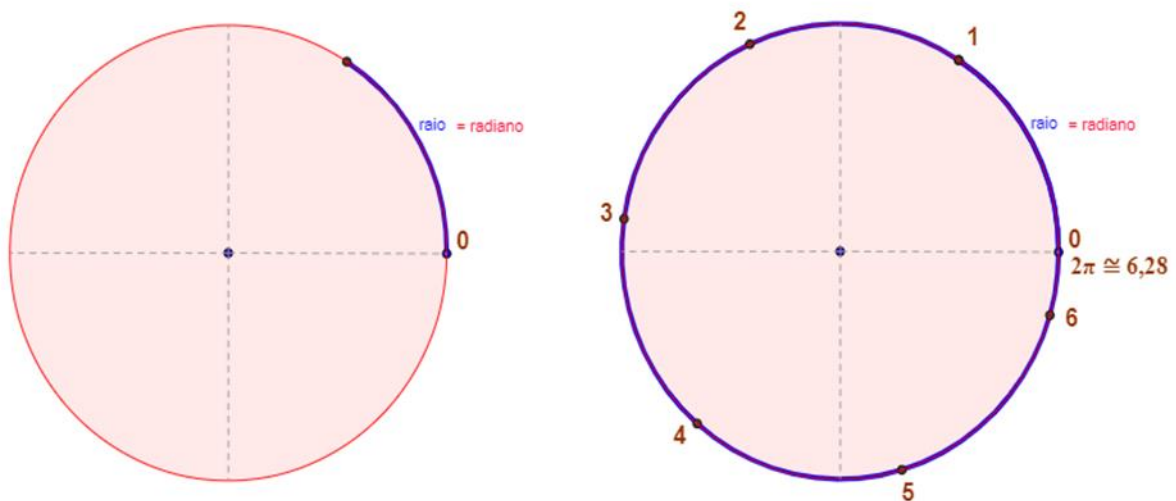
Os licenciandos que participaram da oficina estavam cursando a partir do terceiro semestre, ou seja, já haviam concluído a disciplina Fundamentos da Matemática II, ofertada no segundo semestre do curso, que aborda o estudo de conteúdos de trigonometria, juntamente com números complexos e polinômios.

Inicialmente, após todos os participantes acessarem a sala virtual na plataforma *Google Meet*, foi realizada uma leitura do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) disponibilizado por meio de um link da plataforma *Google Forms* para que os estudantes pudessem assinar, caso concordassem em participar da pesquisa.

De modo que todos tivessem acesso aos conceitos necessários para desenvolver todas as atividades realizadas na oficina, no primeiro encontro, por meio de aplicações interativas (*applets*) do *GeoGebra Classroom*, alguns conceitos de trigonometria foram discutidos e revisados. O primeiro conceito discutido foi o radiano.

Com o auxílio de um *applet* (Figura 01) foi possível demonstrar dinamicamente que um radiano é uma unidade de medida para arcos, ou seja, um arco de circunferência cujo comprimento tem a mesma medida do raio mede um radiano. Também foi possível ilustrar que no perímetro de uma circunferência cabem, aproximadamente, 6,28 radianos.

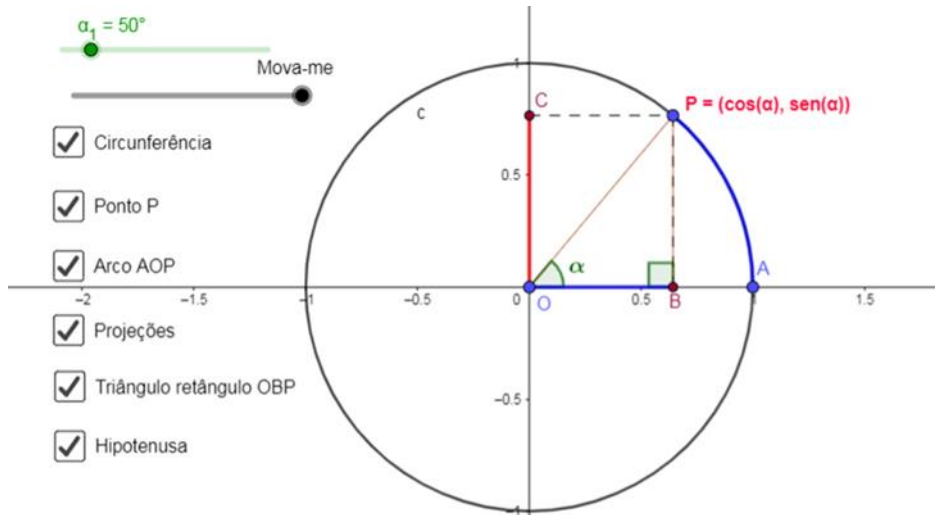
Figura 01 - primeiro *applet*: radiano.



Fonte: Adaptação do *applet* de Marco A. Manetta na plataforma geogebra.org (2020).

Com o segundo *applet*, apresentado na Figura 02, foi apresentado o círculo unitário (nome dado a uma circunferência cujo comprimento do raio é igual a uma unidade de medida), também chamado de círculo trigonométrico, apresentando as orientações dos arcos e, relacionando os elementos de um triângulo retângulo com um ponto da circunferência, foi demonstrado como os valores das razões cosseno e o seno de um arco de circunferência podem ser encontrados por meio de coordenadas do plano cartesiano.

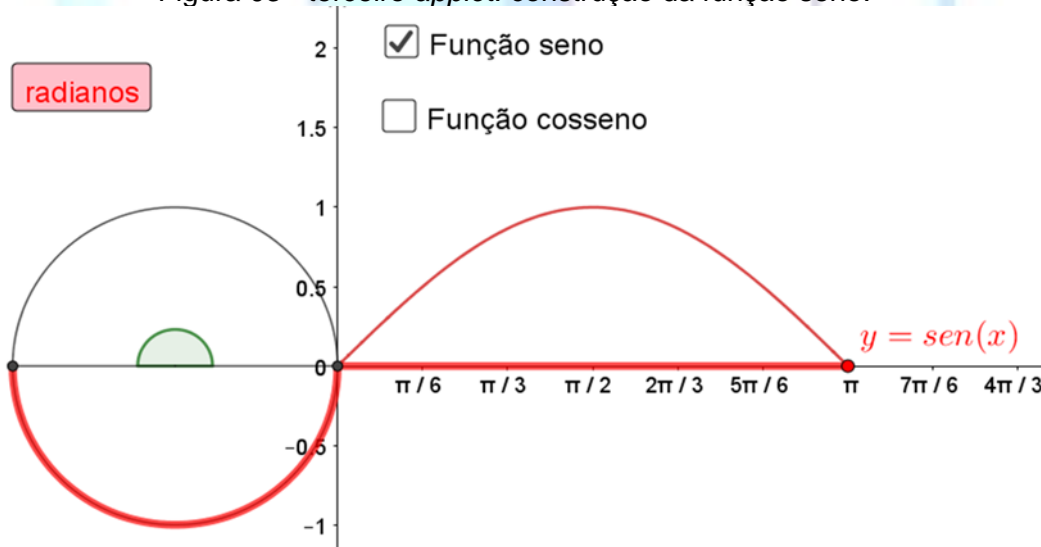
Figura 02 - segundo applet: cosseno e seno no ciclo trigonométrico.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Em seguida, utilizando outro *applet* do GeoGebra que permitia esticar o arco de uma circunferência ao longo do eixo das ordenadas, foram apresentadas e discutidas algumas características das funções trigonométricas cosseno e seno, tais como: domínio, contra domínio, conjunto imagem, período e amplitude. A utilização desse *applet*, ilustrado na Figura 03, permitiu que os alunos, de uma forma visual, percebessem as relações trigonométricas como funções que possuem a medida dos arcos em radiano como domínio.

Figura 03 - terceiro applet: construção da função seno.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Para que os participantes soubessem utilizar as ferramentas necessárias para o desenvolvimento da atividade da oficina, foram apresentadas algumas funcionalidades e ferramentas do software GeoGebra, em especial o controle deslizante, enfatizando como este recurso torna dinâmico o estudo do comportamento

de gráficos de funções. O controle deslizante é um parâmetro cujos valores são facilmente alterados no GeoGebra o que possibilita causar variações em objetos.

Utilizando como exemplo funções lineares, funções polinomiais de primeiro e de segundo grau, foi ilustrado como associar um controle deslizante a um coeficiente de uma função e como manipulá-lo, de modo que os impactos dos coeficientes no comportamento dos gráficos das funções citadas puderam ser observados de forma dinâmica e visual.

Após a etapa de discussão e apresentação dos principais conceitos e ferramentas necessários para o desenvolvimento das atividades, se iniciou a etapa de realização das investigações. As atividades foram elaboradas na plataforma GeoGebra *Classroom* e foram pensadas para que os participantes pudessem realizá-las em múltiplas plataformas como computadores *desktop*, *notebooks* e *smartphones*. A escolha pelo GeoGebra *Classroom* também se deve ao fato do ambiente servir como ferramenta de coleta de dados, uma vez que as respostas dos estudantes são registradas em tempo real e as atividades podem ser pausadas a qualquer instante para que as respostas não sejam alteradas depois de encerrada a atividade.

Os licenciandos investigaram a influência dos parâmetros no comportamento do gráfico da função cosseno ao longo quatro atividades que continham duas questões cada. Na primeira questão de cada atividade os parâmetros foram explorados individualmente de forma que os participantes deveriam construir no GeoGebra um controle deslizante, a função $f(x) = \cos(x)$ e a função $g(x)$ com o parâmetro a ser explorado.

Na primeira atividade os alunos exploraram a função $g(x) = \cos(a \cdot x)$. Na segunda, exploraram a função $g(x) = b \cdot \cos(x)$, na terceira a função $g(x) = c + \cos(x)$ e por último, na quarta atividade, exploraram a função $g(x) = \cos(x + d)$. Em cada etapa eles deveriam, através da manipulação do controle deslizante, investigar as transformações que os coeficientes a , b , c e d provocam no comportamento do gráfico, observando também o período, imagem e domínio dessas funções.

Cada atividade teve duração média de quinze minutos e, após o término de cada uma delas, foi realizada uma discussão sobre as observações dos participantes e uma formalização do conteúdo que validava, ou não, as conjecturas levantadas por eles.

Após a finalização de todas as atividades, foi solicitado aos alunos que respondessem a um questionário de forma que pudessem avaliar a oficina, as

atividades propostas e as estratégias utilizadas pelos pesquisadores no desenvolvimento destas. O questionário foi disponibilizado na plataforma *Google Forms* e continha perguntas que buscam entender se os futuros professores utilizariam atividades deste tipo em suas aulas, e quais as vantagens e dificuldades observadas por eles na implementação destas no Ensino Médio.

Resultados e Discussão

Neste artigo, analisamos apenas a questão sete, que aborda a função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \cos(x + d)$. A seguir, apresentamos a questão proposta e destacamos seu objetivo.

Questão 7 - Construa o gráfico da função $g(x) = \cos(x + d)$ e movimente livremente o seletor d . Qual a influência do parâmetro d para o gráfico da função? Fale sobre a imagem e o período dessa função.

O objetivo dessa questão foi verificar se a manipulação do controle deslizante auxilia os alunos na percepção dos impactos do parâmetro d no comportamento do gráfico da função $g(x) = \cos(x + d)$. Os licenciandos deveriam perceber que o parâmetro d provoca o deslocamento do gráfico no eixo das abscissas, isto é, o gráfico sofre uma translação horizontal. Era esperado que, em suas conjecturas, os estudantes evidenciassem que quando o parâmetro d é maior do que zero, o gráfico da função se desloca para a esquerda e quando o parâmetro d é menor do que zero a curva se desloca para a direita, ao mesmo tempo em que a imagem e o período da função não sofrem alterações.

Destacamos que a elaboração das atividades da oficina e a análise dos dados coletados foram realizadas à luz da teoria dos Três Mundos da Matemática proposta por Tall (2013) e que os participantes que tiveram suas respostas analisadas a seguir serão tratados por codinomes, de modo que o anonimato seja garantido.

A seguir, apresentamos a análise das respostas dos participantes à questão 7 da atividade. Vale ressaltar que no momento em que os participantes realizaram essa atividade, anteriormente, na oficina, foram estudados e formalizados os impactos que o parâmetro a (responsável por alterar o período da função $g(x) = \cos(a \cdot x)$), o parâmetro b (responsável por alterar a amplitude da função $g(x) = b \cdot \cos(x)$) e o parâmetro c (responsável pelo deslocamento vertical do gráfico da função $g(x) = c + \cos(x)$ em relação ao eixo das ordenadas) causam no comportamento do gráfico da função cosseno, e que na janela do GeoGebra utilizada pelos estudantes nessa

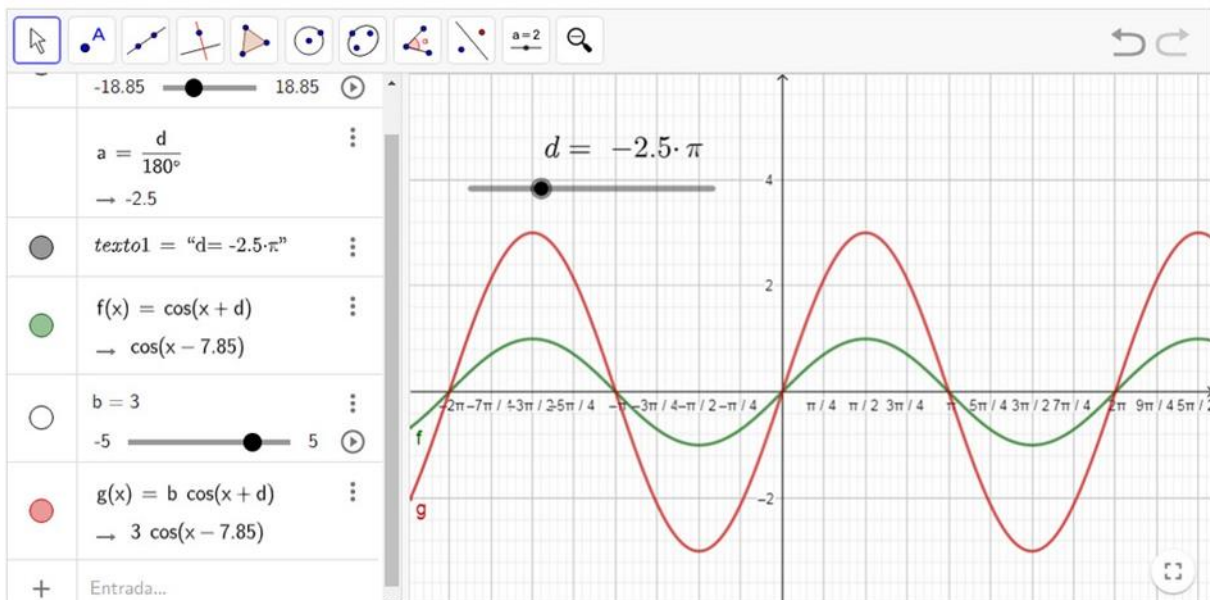
questão encontrava-se um controle deslizante previamente criado para facilitar o trabalho de exploração da função. Este controle estava com o incremento de $0,5\pi$.

Ao analisar as respostas, verificamos que os participantes conseguiram identificar a influência do parâmetro d no comportamento do gráfico da função, porém não apresentaram justificativas para suas conjecturas, destacando apenas a translação horizontal do gráfico sem relacionar o sentido dessa translação (direita ou esquerda) com o sinal do parâmetro. A resposta de Petrúcio (Figura 04) exemplifica algumas das respostas dadas à questão sete.

Figura 04 - resposta de Petrúcio para a questão 7.

Questão 7

O parâmetro d não altera a imagem e nem o período da função.
Conforme ele se altera, o gráfico da função apenas se desloca lateralmente.



Fonte: dados da pesquisa.

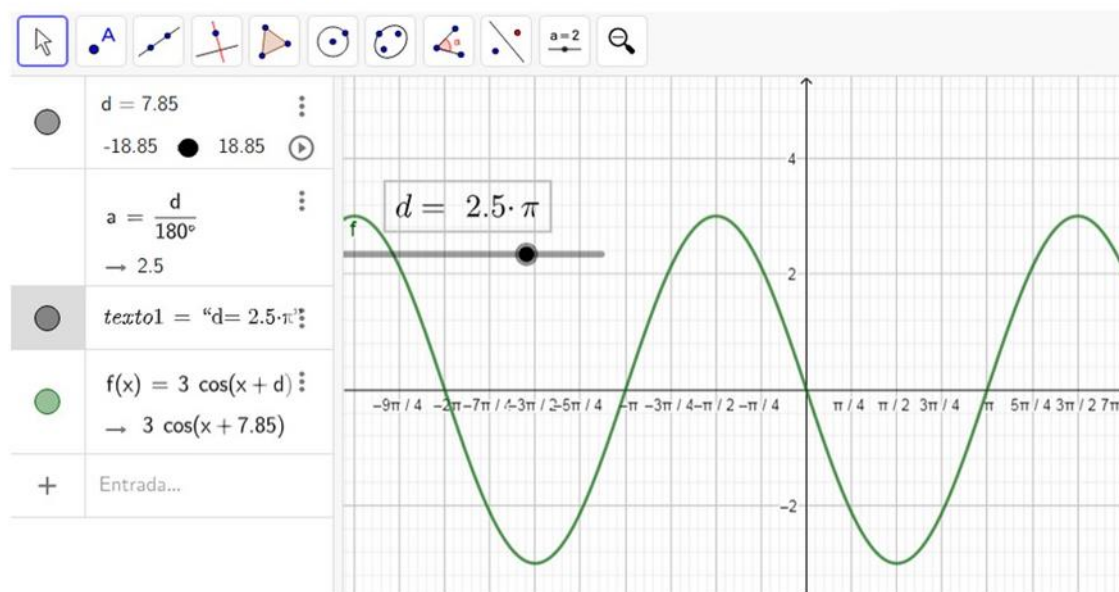
Por meio das respostas apresentadas, identificamos que os estudantes apresentaram características do Mundo Corporificado, evocadas por meio da manipulação do controle deslizante associado ao parâmetro d e das observações do gráfico da função.

Pedro (Figura 05), além de observar corretamente que o parâmetro estudado provoca uma translação horizontal no gráfico, conseguiu perceber a relação entre o sinal do parâmetro e o sentido da translação. Porém os sentidos observados por Pedro em relação ao sinal do parâmetro estariam corretos apenas se o parâmetro responsável por alterações no período tivesse o valor negativo, o que não era o caso.

Figura 05 - resposta de Pedro para a questão 7.

Questão 7

O parâmetro d realiza um movimento de translação horizontal do gráfico. Se o valor d é positivo, o gráfico é deslocado para direita, já se o valor d é negativo, o gráfico é deslocado para a esquerda. A imagem e o período se mantém os mesmos



Fonte: dados da pesquisa.

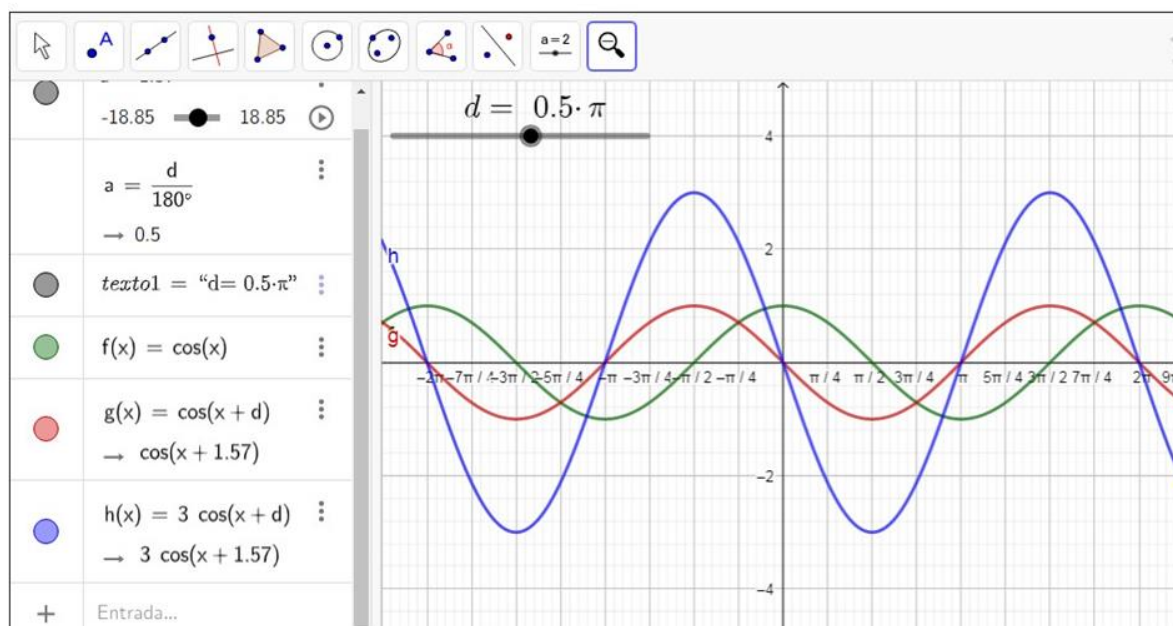
Através da manipulação de características corporificadas, o aluno conseguiu estabelecer uma conjectura e, mesmo cometendo um equívoco, ao levar em conta o sinal do parâmetro em sua análise sobre o deslocamento do gráfico, relacionando essas características as características simbólicas, demonstrou estar em transição do estágio da matemática prática, da manipulação e observação dos objetos, para a matemática teórica.

O controle deslizante previamente criado para facilitar o trabalho de exploração da função estava com o incremento de $0,5\pi$ e pode ter influenciado a conjectura de Diego (Figura 06). O aluno cometeu um equívoco ao dizer que o parâmetro vai multiplicar algo, quando o mesmo apenas é adicionado aos valores do domínio, e ao referir-se à curva como lei dos cossenos.

Figura 06 - resposta de Diego para a questão 7.

Questão 7

vai multiplicar por $0,5\pi$ por vez, isso faz a lei do cosseno andar meio pi por vez.



Fonte: dados da pesquisa.

O licenciando não evidenciou ter percebido a translação horizontal ocasionada pela variação do parâmetro, escrevendo apenas que a função “anda”, não conseguindo de fato registrar a influência do parâmetro no comportamento do gráfico e, apesar de apresentar características do Mundo Simbólico, confunde-se em relação à operação aritmética mencionada. A observação e percepção, características do Mundo Corporificado, não foram suficientes para que o participante estabelecesse as relações com os objetos do Mundo Simbólico e não possibilitou que realizasse conjecturas corretas, isto é, não o levou ao desenvolvimento de características formais.

Seguimos com a discussão das avaliações e percepções dos participantes sobre as atividades discutidas na oficina.

1 - Como professor de matemática, você usaria essas atividades no Ensino Médio? Por quê?

De maneira geral, os participantes se mostraram bastante entusiasmados e interessados com a oficina e atividades aplicadas. De modo unânime, os futuros professores de Matemática se mostraram dispostos a aplicar esse tipo de atividade em sala de aula. O participante João (Figura 07) destaca os aspectos intuitivos das atividades realizadas em etapas, que desenvolve um conceito por vez, de modo que a conhecimento seja adquirido de forma progressiva, sendo uma ótima opção para introduzir conteúdos matemáticos na sala de aula.

Figura 07 – respostas de João, Júlia e Diego.

Sim, pois elas forem bem intuitivas e construindo o conceito aos poucos, em cada pergunta, o que seria interessante para ingressar esses conceitos na aula.

Usaria, porque é uma série progressiva de exploração das relações dos parâmetros com a função cosseno, sendo úteis para ensino no ensino médio.

acredito que sim, não é algo muito avançado, e acredito que os alunos, assim como eu, gostariam de explorar

Fonte: dados da pesquisa.

A manipulação dos objetos matemáticos corporificados representados no software, de modo que as explorações das relações dos parâmetros com a função cosseno fossem realizadas de forma progressiva, é destacada pelos participantes Júlia e Diego (Figura 07) como uma justificativa para o uso dessas atividades no Ensino Médio, argumentando que os alunos provavelmente também gostariam de explorar essas relações.

2 - Quais dificuldades você identifica para a aplicação deste tipo de atividade no Ensino Médio?

Dentre as possíveis dificuldades indicadas pelos participantes Severino, Getúlio e João (Figura 08) para aplicação deste tipo de atividade no Ensino Médio estão a falta de conhecimentos prévios dos alunos e indisponibilidade de recursos tecnológicos nas escolas. Com relação a falta de conhecimentos dos alunos, há de se colocar que o estudo de funções trigonométricas deve estar encadeado com um estudo anterior de trigonometria, portanto ao realizar essas atividades os alunos já deveriam ter estudado outros tópicos relacionados ao conteúdo, observando a questão do horizonte curricular. Uma vez que o professor planeje suas aulas de maneira adequada, prevendo todos os pré-requisitos, esse é um problema fácil de ser resolvido.

Figura 08 – respostas de Severino, Getúlio e João.

Falta de conhecimento dos alunos e disponibilidade de tecnologia.

Escolas que não detenham recursos tecnológicos.

Em meu ver, as dificuldades estariam na infraestrutura das escolas em relação a possibilidade do uso de computadores, se há esta disponibilidade. No entanto, o uso de celular pode ser viável, talvez o problema estaria no tamanho das telas ou a concentração dos alunos.

Fonte: dados da pesquisa.

Com relação a disponibilidade de tecnologia, assim como João (Figura 08) apontamos o celular como alternativa para superar as dificuldades das escolas em suprir essa demanda, uma vez que o celular é um recurso tecnológico presente na vida da maior parte das pessoas hoje em dia, inclusive estudantes do Ensino Médio.

Conforme destacamos anteriormente, Chinellato (2014) argumenta que professores não implementam recursos tecnológicos em suas aulas pois têm dificuldade em utilizar uma abordagem educacional que eles mesmo não vivenciaram. E, em resposta a essa dificuldade, afirma que é necessário que na formação inicial o docente tenha contato com disciplinas que promovam uma interação com esses equipamentos, criando professores capacitados para atuar com tecnologias digitais e que possam futuramente utilizá-las em sala de aula.

Nesse sentido, a oficina e conjunto de atividades elaboradas e discutidas neste artigo constituem-se em uma resposta para as considerações colocadas por este pesquisador, pois buscam capacitar uma nova geração de futuros docentes que estão mais familiarizados com o uso da tecnologia em sala de aula, uma vez que a estão vivenciando em sua formação inicial.

3 – Quais vantagens você identifica na aplicação deste tipo de atividade no Ensino Médio?

Em sua resposta, José (Figura 09) destaca que a inserção deste tipo de atividade evita uma matemática mecânica, que valorize apenas algoritmos, pois possibilita que o aluno pense e reflita sobre o conceito que está aprendendo ao elaborar conjecturas, tendo mais atuação no processo de construção de seu conhecimento.

Figura 09 – respostas de José e João.

A compreensão do aluno vai além do calcular uma função, ele entende o porquê daquilo e acho que isso ajuda muito para a absorção do conteúdo.

Vantagens, principalmente, na interatividade dos alunos na conjectura dos conhecimentos e a dinamicidade que pode ser dada a aula.

Fonte: dados da pesquisa.

Neto (2010), destaca que a interação do aluno com o software é fundamental, uma vez que ele "precisa se envolver ao máximo com as atividades propostas, caso contrário ele responde qualquer coisa, e não observa todos os detalhes disponíveis na tela" (NETO, 2010, p. 101).

Entendemos que, o fato de poder interagir com construções dinâmicas no GeoGebra pode despertar o interesse dos aprendizes, pois a partir da manipulação dos objetos matemáticos representados no software, podem criar conjecturas e testá-las em um espaço pequeno de tempo, contribuindo para uma aula dinâmica, vantagem levantada por João (Figura 09) para o uso dessas atividades em aula.

O processo do pensamento matemático é elaborar conjecturas e tentar justificá-las ou refutá-las. A interatividade dos alunos e dinamicidade da aula viabilizadas pelo software abrem possibilidades para que os professores possam desenvolver e ensinar aos estudantes o processo de justificativa em Matemática em suas aulas.

Considerações Finais

Os resultados obtidos indicam que o software GeoGebra pode proporcionar um ambiente de aprendizagem de grande utilidade no estudo de funções trigonométricas, pois suas ferramentas possibilitam uma manipulação fácil e dinâmica de características e propriedades de atividades que envolvam estes objetos matemáticos. Ficou evidenciado, em nossas análises, que as atividades realizadas nesse contexto tecnológico promoveram a coordenação simultânea de representações da função cosseno, favorecendo a construção de conceitos por meio de ações interativas e dinâmicas dos participantes da pesquisa, perspectiva que corrobora as posições destacadas por Costa, Figueiredo e Llinares (2019).

O Geogebra *Classroom* revelou-se um ambiente de aprendizagem interessante e uma ótima ferramenta de coleta de dados, pois possibilitou a observação das respostas dos alunos em tempo real e o arquivamento das repostas para análises. Devido a essas funcionalidades, a oficina pôde ser realizada de forma remota e os

alunos puderam explorar as funções trigonométricas em múltiplas plataformas, como computador desktop, tablet e smartphone.

Do mesmo modo que Costa e Allevato (2019), em nossas atividades não foram realizadas construções manuais de gráficos, tendo em vista que a utilização do GeoGebra dinamiza essas construções. Isso permitiu que futuros professores de Matemática avançassem na criação de significados e conceitos sobre a influência dos parâmetros no comportamento do gráfico de funções trigonométricas, trabalhando com objetos dos mundos corporificado, simbólico e formal. Dessa maneira, os participantes puderam preocupar-se apenas em analisar as características corporificadas dos gráficos ao invés de desenhá-los, relacionando-os as características simbólicas presentes na janela de álgebra, estabelecendo e validando, ou não, conjecturas com características formais, de modo que o processo de transição entre os Três Mundos da Matemática fosse fluido durante a realização das atividades.

Observamos, assim como Braz, Castro e Oliveira (2019), que o momento de socialização e discussão das conjecturas levantadas pelos estudantes foi tão importante quanto a fase de exploração das funções, pois nas discussões pudemos identificar defasagens e obstáculos não somente relacionados às funções trigonométricas, mas também aos conhecimentos sobre trigonometria, tanto no triângulo retângulo quanto no círculo trigonométrico. Além disso, nessa etapa, formalizamos o conteúdo de modo que os participantes tiveram contato com elementos da Matemática formal, como definições teóricas e provas matemáticas, promovendo contato com os objetos do Mundo Axiomático Formal.

Observamos que os licenciandos indicaram, no questionário avaliativo das atividades, que pretendem utilizar o GeoGebra em suas futuras aulas no Ensino Médio, por terem considerado as atividades de exploração das funções trigonométricas propostas uma maneira de introduzir o conteúdo de uma forma progressiva e atrativa para os alunos. E, apesar de verem a falta de recursos tecnológicos nas escolas como uma barreira que impossibilita a realização dessas atividades no Ensino Médio, os futuros professores indicaram a possibilidade de utilizar o celular de seus futuros alunos como alternativa para que a tecnologia se faça presente nas aulas de Matemática.

Mesmo se mostrando uma ferramenta que potencializa o estudo de funções, vale ressaltar que as atividades desenvolvidas no GeoGebra não funcionaram completamente, de modo que não foi suficiente para que alguns estudantes elaborassem conjecturas com o detalhamento esperado para futuros professores de

Matemática, perspectiva que ficou evidenciada na análise da questão 7. Isso destaca a importância de aliar outros métodos de ensino ao uso de softwares educativos, de modo que melhores resultados sejam obtidos ao extrair características dos dois ambientes, como observado por Neto (2010).

Deixamos como sugestão para futuros trabalhos que a exploração dos parâmetros seja feita tomando-os, pelo menos, dois a dois, de modo que os alunos possam perceber as relações entre eles, e como essas interações afetam o comportamento do gráfico de uma função trigonométrica. Além disso, entendemos que as atividades propostas devem ser aplicadas para estudantes do Ensino Médio, para que suas potencialidades e limitações sejam estudadas e aprimoradas junto ao público a que elas originalmente se destinam.

Referências

- BORBA, M. C.; LACERDA, H. D. G. Políticas públicas e tecnologias digitais: um celular por aluno. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 17, n. 3, p. 490-507, 2015.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.
- BRASIL. **PCN+ Ensino Médio**: orientações curriculares complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.
- BRAZ, L. H. C.; CASTRO, G. T.; OLIVEIRA, P. M. O GeoGebra no estudo das funções trigonométricas: uma experiência em um minicurso com alunos do 2º ano do ensino médio. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, v. 8, n. 1, p. 70-84, 2019. Disponível em: <<https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/42089/29079>>. Acesso em: 28 mar. 2021.
- CHINELLATO, T. G. **O uso do computador em escolas públicas estaduais da cidade de Limeira/SP**. 2014. 104 f. Dissertação - (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2014. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/11449/91021>>. Acesso em: 28 mar. 2021.
- COSTA, F. A.; ALLEVATO, N. S. G. Estudo das funções trigonométricas a partir da teoria da aprendizagem significativa. **REVEMOP**, v. 1, n. 1, p. 126-142, jan./abr. 2019. Disponível em: <<https://periodicos.ufop.br/revemop/article/view/1721/1461>>. Acesso em: 29 mar. 2021.
- COSTA, N. M. L.; FIGUEIREDO, S. A.; LLINARES, S. Um experimento de ensino sobre periodicidade: fatores relevantes para a aprendizagem. **REVEMAT**, v. 14, n. 1, p.1-21, 2019. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2019.e61915>>. Acesso em: 28 mar. 2021.

MORENO-ARMELLA, L.; HEGEDUS, S. Co-action with digital technologies. **ZDM Mathematics Education**, [s. l.] v. 41, n. 4, p. 505–519, Ago. 2009.

NETO, J. R. D. **Registros de representação semiótica e o GeoGebra**: um ensaio para o ensino de funções trigonométricas. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – UFSC, Florianópolis, 2010.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo**: Matemática e suas tecnologias. 1. ed. São Paulo: SE, 2011.

TALL, D. O. **How humans learn to think mathematically**: exploring the three worlds of mathematics. 1. ed. New York: Cambridge University Press, 2013.

Submetido em abril de 2022.

Aceito em setembro de 2022.

