PERSPECTIVAS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

REVISTA DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL (UFMS)

ISSN 2359-2842 Volume 15, número 39 – 2022 DOI 10.46312/pem.v15i39.16101

Uma Proposta para Produção de Significados em Disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral

A Proposal for the Production of Meanings in Differential and Integral Calculus Subjects

Vinícius Aparecido Salatta[1]

Sérgio Dantas[2]

RESUMO

Essa pesquisa surgiu de levantamentos e discussões acerca dos índices de reprovação na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Diante das estratégias adotadas por universidades que buscam a diminuição destes índices, destaca-se a utilização de tecnologias ligadas ao uso de *softwares* como o GeoGebra. Portanto, nos aliamos a esse recurso a fim de apresentar duas atividades que podem ser utilizadas como forma de levantar discussões acerca de alguns temas presentes dentro desta disciplina ou disciplinas afins. Para isso, nós utilizamos do Modelo dos Campos Semânticos, o qual nos permite uma leitura mais fina das direções de interlocução que surgem tanto de alunos quanto de professores quando debatem sobre as atividades apresentadas. Para isso, utiliza-se a ideia de leitura positiva e leitura plausível, uma forma de ler o outro não pela falta, mas de um modo em que seja plausível considerar certas afirmações que em outras situações não seriam.

PALAVRAS-CHAVE: Cálculo Diferencial e Integral. GeoGebra. Modelo dos Campos Semânticos.

ABSTRACT

This research emerged from surveys and discussions about the failure rates in the Differential and Integral Calculus subject. In view of the strategies adopted by universities that seek to reduce these rates, the use of technologies linked to the use of software such as GeoGebra stands out. Therefore, we join this resource in order to present two activities that can be used as a way to raise discussions about some themes present within this subject or related subjects. For this, we used the Semantic Fields Model, which allows us to have a finer reading of the interlocution directions that arise from both

---

[1] Mestre em Educação Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual do Paraná. E-mail: vi.salatta@hotmail.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4905-7203.

[2] Doutor em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista. Professor Adjunto do Centro de Ciências Humanas e da Educação, Colegiado de Matemática da Universidade Estadual do Paraná, campus de Apucarana. E-mail: sergio.dantas@unespar.edu.br. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7043-1664.

students and teachers when they discuss about the activities presented. For this, the idea of positive reading and plausible reading is used, a way of reading the other not for lack, but in a way in which it is plausible to consider certain statements that in other situations would not be.
KEYWORDS: Differential and Integral Calculus. GeoGebra. Semantic Fields Model.

Motivações iniciais

A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral[3] ministrada em cursos de Matemática ou disciplinas semelhantes dadas em outros cursos de Licenciatura ou Bacharelado são normalmente um dos fatores responsáveis por causar a evasão de alunos logo que entram em contato com tais disciplinas. Entre os motivos que se destacam para tal evasão está o fato de a disciplina de Cálculo ser, geralmente, a mais distante dos conteúdos estudados durante o ensino básico, por exigir habilidades que até então não eram exigidas por seus antigos professores. Isso pode ser observado em um trecho de um dos boletins informativos da SBM (1995, apud. AMORIM, 2011, p. 18)

> O ensino de cálculo nas Universidades brasileiras tem sido objeto de questionamento em diversos fóruns em função das dificuldades apresentadas pelos alunos na sua aprendizagem, bem como pela alta evasão dos estudantes dos primeiros períodos, matriculados nesta disciplina.

Alguns dados evidenciados por Barufi (1999) mostram que o índice de reprovação na Universidade de São Paulo entre os anos de 1990 e 1995 variou entre 20% e 75%, enquanto entre os anos de 1996 a 2000, um índice de não-aprovação que variou de 45% a 95% na Universidade Federal Fluminense, segundo Rezende (2003).

Diante desses números, algumas estratégias têm sido adotadas, como a promoção de cursos de formação de professores, utilização de novas tecnologias e também a elaboração e oferta de disciplinas como o Pré-Cálculo, as quais, em suas propostas, funcionariam como uma disciplina de "matemática básica" preparatória para a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.

A fim de contribuir com o debate e fomentar possibilidades de avanços, nos aliamos ao GeoGebra e ao Modelo dos Campos Semânticos (MCS) para propormos duas atividades que possam auxiliar na abordagem do professor do Ensino Superior em aulas de Cálculo ou qualquer outra disciplina que aborde os temas tratados neste texto. As atividades em questão foram apresentadas por Salatta (2021) com o

---

[3] Com o objetivo de dinamizar a leitura, chamaremos apenas de Cálculo durante o texto.

objetivo de realizar um estudo das produções de significado[4] para infinito por estudantes de Cursos de Graduação em Matemática.

No entanto, antes de apresentarmos as atividades, convém abordarmos algumas noções relacionadas ao Modelo dos Campos Semânticos (MCS) proposto por Lins (1993).

O Modelo dos Campos Semânticos (MCS)

Antes de apresentar o MCS, segundo nossa perspectiva de uso, discutimos o que compreendemos por epistemologia, para que o leitor possa se apropriar de nosso posicionamento em relação à essa pesquisa.

Tomamos como epistemologia a noção adotada por Lins (1993) "[...] epistemologia é a atividade humana que estuda as seguintes questões: (i) o que é conhecimento?; (ii) como é que conhecimento é produzido?; e, (iii) como é que conhecemos o que conhecemos?" (p. 77).

Romulo Lins concebe o Modelo dos Campos Semânticos a fim de responder tais perguntas. Suas ideias acerca desse modelo epistemológico são resultado de suas inquietações ao tentar conhecer o que os alunos estavam pensando quando "erravam", no entanto, sem recorrer a ideia de erro (LINS, 2012, p. 11). Com isso, o MCS parte de discussões de Piaget e Vygotsky, em que ora o outro é secundário e ora o objeto é secundário, resultando em um modelo epistemológico em que o sujeito, o objeto e o outro são elementos básicos, e não podem ser reduzidos uns aos outros (LINS, 1993, p. 77).

Apresentamos no decorrer dessa seção algumas noções que consideramos essenciais tanto para o MCS quanto para essa pesquisa, baseando-se em leituras feitas de trabalhos produzidos por Lins (1993; 2012).

Para tanto, apresentamos inicialmente um exemplo que nos ajudou em nossa construção dessas noções.

Um exemplo inicial

Imaginemos a seguinte situação. Uma professora de matemática está ensinando o conteúdo de dízimas periódicas aos seus alunos após terem iniciado frações decimais e, em uma de suas aulas provoca o seguinte diálogo:

Professora: Como podemos escrever $1{,}23$ (e escreve o número no quadro) em forma de fração?

---

[4] Para o MCS, significado é tudo aquilo que efetivamente se diz sobre um objeto, sendo objeto aquilo para o que se produz significado.

Classe: $123/100$ (respondem em coro)!

Professora: E o número $0{,}2323\ldots$? (escreve novamente)

Classe: $23/99$ (respondem sem dificuldades)!

Por fim, a professora pergunta

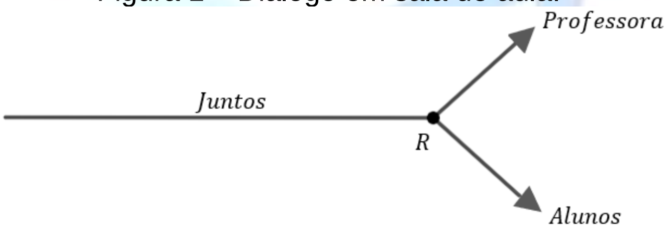
Professora: E o número $0{,}999\ldots$?

O silêncio toma conta da classe. A professora não entende. Ela ensinou corretamente seus alunos a representar dízimas periódicas como frações. O que há de errado então? Finalmente um dos alunos toma coragem e responde à professora.

Aluno 1: Professora, eu acho que dá 1, mas acho que está errado.

O que podemos retirar desse diálogo? Primeiramente, vamos tomar a professora e esse aluno representando a classe como dois sujeitos cognitivos distintos, de modo que no início da conversa podemos afirmar que estão conversando um com o outro e se "entendendo", até o momento em que não se "entendem" mais. Essa situação, de acordo com Lins (1993), poderia ser representada pela Figura 1.

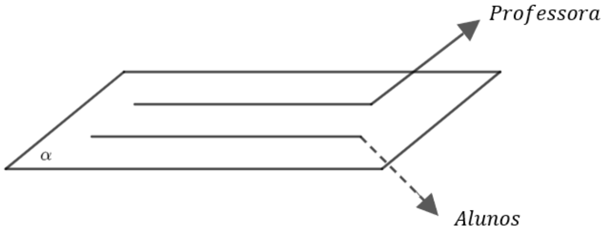
Figura 1 – Diálogo em sala de aula.



Fonte: Adaptado de Lins (1993, p. 81).

O ponto *R* na Figura 1 indica a ruptura que houve durante o diálogo. No entanto, podemos supor que os alunos não estão com dificuldades em utilizar as técnicas ensinadas pela professora, uma vez que um deles disse achar que a dízima periódica $0{,}999\ldots = 1$ (apesar de não acreditar em si mesmo). Sendo assim, Lins (1993) sugere que olhemos a Figura 1 por outra perspectiva. Para isso, imaginemos que essa figura na verdade está sob um plano α, de modo que ao invés dos diálogos irem para dois lados diferentes, na verdade estão indo para cima e para baixo. Assim chegamos à Figura 2.

Figura 2 – Outra perspectiva para a Figura 1.



Fonte: Adaptado de Lins (1993, p. 83).

O modelo apresentado na Figura 2 sugere que, desde o início, tanto a professora quanto os alunos já estavam seguindo caminhos diferentes em seus diálogos. Isso pode ser justificado se considerarmos que enquanto os alunos se basearam nas técnicas que sua professora ensinou para representar as dízimas periódicas como frações, a professora se baseou no conceito de infinito atual (onde um processo infinito pode resultar em um número finito), e por isso o desencontro em seus diálogos.

Essa mudança de perspectiva nos permite afirmar de onde cada um dos sujeitos está falando, quais são as crenças que os permitem dizer o que dizem e o que os autorizam a dizer o que dizem. Em outras palavras, o MCS nos permite uma maneira diferente de analisar a produção de conhecimento de um sujeito cognitivo. Mas se estamos falando de produção de conhecimento, o que seria conhecimento segundo o MCS?

Conhecimento

Conhecimento é um par-ordenado em que a primeira coordenada é dada por uma crença-afirmação, e a segunda coordenada sendo a justificação. Em outras palavras, conhecimento é quando o sujeito enuncia algo em que acredita, baseando-se em algo que o autoriza a dizer o que disse. Neste sentido a justificação não precisa ser explicitada, mas é essencial quando pensamos neste modelo, pois isso pode diferenciar o conhecimento de um adulto e de uma criança, por exemplo, quando ambas afirmam que $2 + 4 = 4 + 2$, uma vez que enquanto um dos sujeitos pode se basear em propriedades aritméticas da soma, o outro pode se basear apenas nos dedos de suas mãos que quando trocadas de lugar ainda resultam em 6. Portanto, o que diferencia um conhecimento de outro é a justificação que cada sujeito assume para a sua crença-afirmação.

Por exemplo, vamos supor que após o diálogo apresentado entre a professora e seus alunos, a professora pediu para que seus alunos se dividissem em dois grupos a fim de pesquisarem e discutirem a afirmação $0{,}999 \ldots = 1$, a qual deveria ser justificada na próxima aula por eles mesmos. No dia seguinte, são escolhidos representantes de cada grupo, de modo que o grupo 1 justifica a igualdade da seguinte maneira no quadro:

$$0{,}999\ldots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \cdots = \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{9}{10} \cdot \frac{10}{9} = 1.$$

O representante do segundo grupo diz terem encontrado uma justificação diferente, e escreve no quadro:

$$x = 0{,}999\ldots \implies 10x = 9{,}999\ldots \implies 10x = 9 + 0{,}999\ldots \implies 10x = 9 + x$$

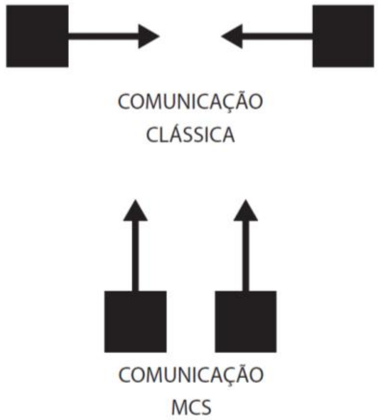
$$10x - x = 9 \therefore x = 1$$

Em ambos os casos foram apresentadas justificações diferentes para a mesma enunciação, pois enquanto o primeiro grupo se baseou em progressões geométricas infinitas, o segundo grupo utilizou operações algébricas. Seguindo a definição de epistemologia de Lins (1993) cada caso representa um conhecimento diferente por conta da diferença de suas justificações, e ambas são válidas dentro do contexto em que estão inseridas. É possível afirmar que ambos os sujeitos constituíram um objeto "dízima periódica" atribuindo um significado diferente para cada objeto constituído. Quando dizemos alguma coisa sobre algo, o que estamos fazendo é produzindo um (ou mais) significados para este algo. Dessa forma, este algo se torna um objeto dentro de um campo semântico no qual somos produzidos e instituídos de modo que nossos significados sejam legítimos. Sendo assim, não podemos dizer que existe "o" significado para um objeto, uma vez que este dependerá do contexto em que se fala do objeto, bem como do sujeito que produziu a enunciação.

Interlocutor

"O interlocutor é uma direção na qual se fala. Quando falo na direção de um interlocutor é porque acredito que este interlocutor diria o que estou dizendo e aceitaria/adotaria a justificação que me autoriza a dizer o que estou dizendo" (LINS, 2012, p. 19). Este interlocutor não é necessariamente um ser biológico, mas sim um sujeito cognitivo instituído por quem enuncia. Apesar de ser comum imaginarmos que no diálogo inicial existe uma conversa entre a professora e alunos, o MCS admite que na verdade o diálogo acontece de acordo com a Figura 3.

Figura 3 – Comunicação no MCS.



Fonte: Lins (2012, p. 14).

Na perspectiva do MCS "'comunicação' não corresponde mais a algo do tipo 'duas pessoas falando uma para a outra', e sim a 'dois sujeitos cognitivos falando na direção de um mesmo interlocutor'" (LINS, 2012, p. 24).

Sendo assim, o que podemos extrair daquele diálogo é que o que inicialmente parecia ser a professora e os alunos falando na direção de um mesmo interlocutor, no final acabou se mostrando que desde o início os interlocutores eram diferentes, e o que diferenciou isso foi a justificação que cada um deles atribuiu para a afirmação $0{,}999\ldots = 1$. Por esse motivo, na perspectiva do MCS podemos afirmar que não houve comunicação, mas sim apenas uma interação entre os sujeitos.

Autor-Texto-Leitor

Ao produzir um enunciado, assumimos o papel de o autor, o qual fala na direção de um leitor, o qual foi criado pelo o autor. Quem produz significado para o enunciado é o leitor, que fala na direção de um autor, o qual foi criado pelo o leitor. Ambos um autor e um leitor podem ser associados à papeis que os interlocutores podem assumir.

Um exemplo pode ser dado quando digo que, assumindo o papel de o autor, escrevo esse texto para um interlocutor (um leitor) que instituí, o qual seria capaz de legitimar e reproduzir as mesmas coisas que enunciei durante a escrita. Sendo assim, o que escrevi se torna um resíduo de enunciação, ou seja, algo que quem lê acredita ter sido dito por alguém. Essa pessoa que lê está assumindo o papel de o leitor ao mesmo tempo em que institui um autor, a fim de tentar entender de onde um autor estava falando quando produziu estes enunciados. Qual era o contexto cultural, social e pessoal que lhe fizeram dizer o que ele disse?

Após este conceito, parece viável apresentar o conceito de legitimidade.

Legitimidade/Verdade

Na perspectiva do MCS, não tomamos a palavra "verdadeiro" no sentido de atributo para algo que foi dito, mas sim como um atributo do conhecimento produzido. Já as legitimidades podem ou não serem atribuídas aos modos de produção de significado. Como consequência podemos dizer que todo conhecimento é verdadeiro, mas não necessariamente é legítimo (LINS, 2012).

Podemos pensar em um exemplo bem simples que expresse o significado destes dois termos. Se a professora escreve no quadro que $2 \times 2 = 2 + 2 = 4$, um dos alunos pode dizer que $3 \times 3 = 3 + 3 = 6$. Isto porque o conhecimento que produziu está associado a justificação de que um número vezes ele mesmo é o mesmo que o dobro desse número. Esse conhecimento é verdadeiro para o interlocutor que o aluno criou, ou em outras palavras, dizemos que esse conhecimento é verdadeiro localmente. Agora, o que aconteceria se esse aluno contasse seu pensamento para sua professora? Certamente que ela acharia tal raciocínio um absurdo e diria que seu apontamento não é verdadeiro, ou seja, o conhecimento que produziu é verdadeiro localmente, mas não é legítimo para a cultura que está inserido naquele momento: a Matemática. Cabe então à professora apresentar a sua justificação do porquê associou a multiplicação com a soma, e cabe a esse aluno tornar essa justificação da professora sua também, para que possa fazer parte dessa cultura.

Por conta disso, talvez você possa imaginar que o que determina o que é ou não legítimo são seres biológicos que em um certo período do tempo instituíram um interlocutor comum que determina a Matemática como ela é, de modo que "absurdos" do tipo $3 \times 3 = 6$ não são permitidos. E se o desejo desse aluno é ser aceito por esta cultura, cabe a ele seguir as regras do grupo. No entanto, tais situações como a descrita sobre esse aluno são necessárias para que ocorra o avanço, caso contrário a Matemática ainda seria feita apenas com desenhos em paredes de pedra. Isso pode ser um dos gatilhos para se pensar sobre a importância da "diferença" como oportunidade de aprendizagem.

Todos os termos apresentados anteriormente nos fornecem a base para apresentar Campo Semântico.

Campo Semântico

Quando o aluno disse que $3 \times 3 = 6$, ele o fez porque no mundo que criou existe um interlocutor que permitiu tal afirmação baseando-se nos enunciados de sua professora. Nesse mundo foi instituída uma regra em que "$a \times a = 2a$" e isso é verdadeiro localmente. Já o interlocutor da professora está em um mundo criado por ela em que a afirmação $2 \times 2 = 2 + 2 = 4$ se baseia na regra instituída localmente por ela (e globalmente pela cultura Matemática) sendo esta "$a \times b$ igual a soma de a, b vezes" ou vice-versa. Sendo assim, esse "mundo" criado pela professora e aluno são chamados de campos semânticos.

> Um campo semântico, de modo geral, é como se fosse um jogo no qual as regras (se existem) podem mudar o tempo todo e mesmo serem diferentes para os vários jogadores dentro de limites; que limites são estes, só sabemos a posteriori: enquanto a interação continua, tudo indica que as pessoas estão operando em um mesmo campo semântico (LINS, 2012, p. 17).

Outro significado possível dado ao campo semântico é "um processo de produção de significado, em relação a um núcleo, no interior de uma atividade" (LINS, 2012, p. 17). O núcleo do campo semântico são as estipulações locais que fazemos e não necessariamente precisam de uma justificação. Por exemplo, em uma comunidade de matemáticos não seria necessária a explicação do porquê $9 + 7 = 8 + 8$, diferente do que aconteceria com uma criança que está começando a aprender adição. Já o termo atividade assume um significado diferente do usual.

O termo atividade utilizado no MCS parte do significado atribuído por Leontiev e utilizado aqui de forma muito mais superficial do que a discutida pelo autor em seus trabalhos. De forma simples, dizemos que uma atividade é quando uma necessidade se encontra em um objeto, tornando-se então um motivo. Por exemplo, no momento em que a professora fez perguntas aos seus alunos, ela criou uma necessidade neles a qual podemos dizer que seria "responder à pergunta". O objeto é a resposta dessa pergunta e, ao aceitarem essa proposta, transformam esse objeto em um motivo o qual movimenta a interação entre os sujeitos.

Com isso, o MCS parece viável e pertinente quando buscamos uma maneira de entender o que leva um sujeito a dizer ou afirmar determinadas coisas, mas sem depender da ideia de "erro". Em outras palavras, o MCS apresenta um ponto de vista em que, querendo saber de onde o outro está falando, levantamos as possíveis motivações de determinados comportamentos que aparentemente parecem não ter justificativa ou até mesmo "absurdos" levando-se em consideração uma comunidade científica em questão. Como é o caso da afirmação feita pelo aluno ao afirmar que $3 \times 3 = 6$. Por mais que a professora soubesse que o aluno estava errado, é interessante que ela também saiba o porquê de ele ter dito isso.

Após a discussão do MCS, apresentamos na próxima seção as atividades propostas para o ensino de Cálculo.

Propondo as atividades

As atividades que foram criadas e serão apresentadas aqui só foram possíveis a partir do momento em que discutimos quem é o nosso interlocutor, nesse caso, o aluno. No entanto, esse aluno é constituído por legitimidades e significados não só de uma cultura acadêmica na qual está inserido, mas também em uma cultura cujas legitimidades e significados provém de uma sociedade em que falar de limites infinitos, por exemplo, pode não fazer o menor sentido.

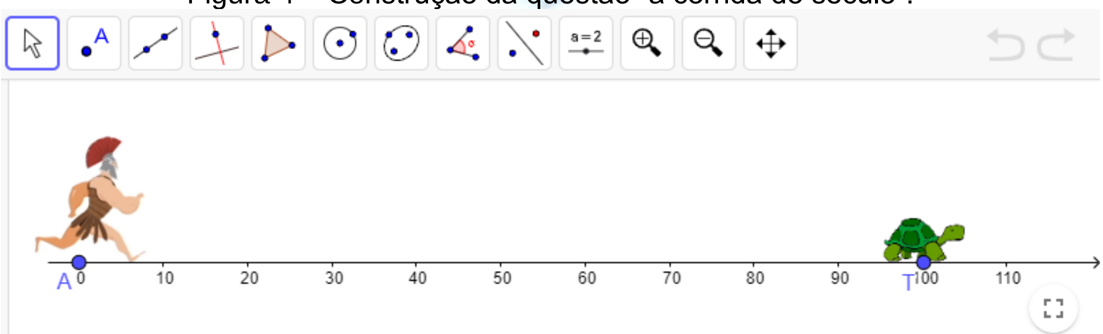
Sendo assim, quando nos colocamos do lugar do aluno, estamos promovendo o que chamamos de leitura positiva, em que o aluno não é lido pela falta, e ao mesmo tempo uma leitura plausível, pois queremos analisar os possíveis motivos dele fazer certas afirmações considerando-se as duas culturas citadas anteriormente.

Diante disso, ao propor as atividades não estamos interessados em obter esse ou aquele modo de produção de significado dentro de um determinado campo semântico, mas sim deixar as questões abertas a fim de investigar todos os significados que podem surgir do sujeito quando são convidados a dissertar sobre as situações propostas.

Atividade 1: A corrida do século

A primeira atividade apresenta uma construção prévia no GeoGebra antecedida pelo seguinte enunciado: "Certa vez uma tartaruga desafiou o veloz Aquiles para uma corrida. Aquiles, sabendo que é dez vezes mais rápido do que a tartaruga, aceitou o desafio, deixando até mesmo uma vantagem de 100m para a tartaruga antes de iniciar a corrida. O desenho abaixo ilustra esta história." (Figura 4).

Figura 4 – Construção da questão “a corrida do século”.



Fonte: Adaptado pelo autor a partir de imagens do Google Imagens.

Em seguida, o enunciado continua: “Segundo Zenão, Aquiles nunca venceria esta corrida, pois quando ele alcançasse o ponto de onde a tartaruga partiu, esta já teria avançado uma certa distância a sua frente, e quando Aquiles alcançasse este novo ponto onde a tartaruga estava, ela já teria avançado mais um pouco a sua frente. Zenão afirma que obviamente esta série seria interminável, pois a tartaruga sempre estaria alguma distância a frente de Aquiles por menor que seja esta distância”.

Após o enunciado, o aluno é questionado sobre sua crença em relação ao argumento apresentado por Zenão e convidado a apresentar uma justificação para sua resposta.[5]

Essa atividade foi elaborada a partir de um dos famosos Paradoxos de Zenão de Eleia, o qual pode ter criado esses paradoxos com o objetivo de provar a impossibilidade do movimento. No entanto, outra ideia defendida por alguns filósofos é a de que Zenão queria mostrar que o espaço e o tempo eram indivisíveis, pois caso contrário uma situação como a de Aquiles e a tartaruga chegaria em conclusões que desafiavam o senso comum.

Partindo dessa questão, algumas possíveis direções de interlocução surgem. A primeira delas e a mais comum entre os matemáticos é provar matematicamente que Aquiles alcançaria a tartaruga em algum ponto. Para isso, para facilitar os cálculos, podemos imaginar que Aquiles e a tartaruga estão à $100m$ de distância um do outro e que Aquiles é 10 vezes mais rápido do que a tartaruga. Com isso, quando Aquiles alcançar o ponto em que a tartaruga iniciou a corrida, esta já terá corrido $1/10$ da distância percorrida por Aquiles, ou seja, $10m$. Quando Aquiles chegar novamente no novo ponto em que a tartaruga estava, ela ainda estará $1m$ à sua frente, e assim sucessivamente. Sendo Aquiles representado por P_1 e a tartaruga por P_2, a Tabela 1 é apresentada com uma relação entre cada uma dessas etapas e a distância entre os dois competidores.

[5] Apesar da justificação não precisar ser explícita para o MCS, optamos por pedir que o aluno apresentasse a mesma a fim de evitar respostas apenas do tipo “sim”, “não” e similares.

Tabela 1 – Distância entre Aquiles e a tartaruga

Etapa	0	1	2	3	4	5	6
Distância $\underline{P_1P_2}$ (m)	100	10	1	$0{,}1$	$0{,}01$	$0{,}001$	$0{,}0001$

Fonte: Produzida pelo autor.

Observando a Tabela 1, podemos ser enganados a ponto de chegarmos a mesma conclusão que Zenão talvez queria demonstrar, pois mesmo que o número de etapas tendesse ao infinito, a distância entre Aquiles e tartaruga apenas seria um número muito pequeno, mas nunca 0. O segredo para resolver o problema está em observar que os valores da distância $\underline{P_1P_2}$ seguem uma progressão geométrica infinita de razão $1/10$. Sendo assim, considerando a como o primeiro termo desta progressão e q a razão, podemos utilizar a expressão abaixo para calcular a soma destas distâncias, de onde obtemos:

$$\frac{a}{1-q} = \frac{100}{1-\frac{1}{10}} = \frac{100}{\frac{9}{10}} = \frac{1000}{9}$$

O resultado obtido parece estranho, mas não é. Apesar de a fração obtida representar uma dízima periódica infinita, o resultado dessa dízima é um número finito racional: $1000/9$. Este processo infinito que resulta em algo finito é chamado de infinito real (também conhecido como infinito atual ou infinito em ato) e mostra que, neste caso, Aquiles alcançaria a “veloz” tartaruga quando atingisse aproximadamente $111{,}11\ m$ ou, precisamente, em $111,\underline{11}\ m$.

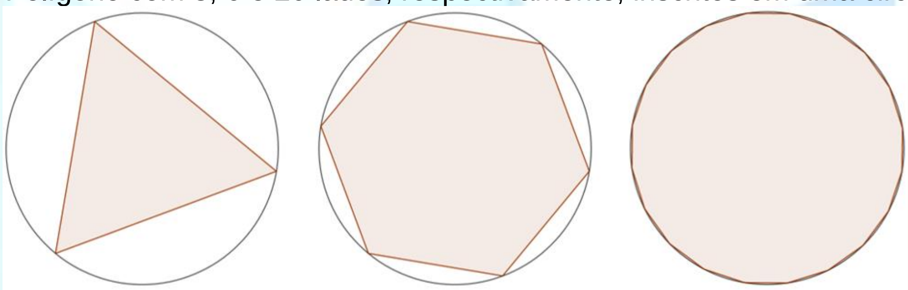
No entanto, apesar da possibilidade de o aluno saber que é impossível que Aquiles não alcance a tartaruga (pois isso iria contra qualquer racionalidade de seu dia a dia), também é plausível que este seja levado a acreditar que a afirmação feita por Zenão é legítima por pelo menos dois motivos: (i) o resultado encontrado para a distância em que Aquiles alcança e logo após ultrapassa a tartaruga é $1000/9$, ou seja, uma dízima periódica. Isso pode levar à conclusão de que não é possível representar uma distância com infinitas casas decimais em uma reta, o que mesmo sendo impossível a olho nu, hoje em dia existem recursos tecnológicos suficientes que facilitam a representação desses valores na reta numérica e até mesmo manualmente por construção. (ii) A forma como o enunciado é apresentado por Zenão (e também na questão) pode provocar a falsa conclusão de um movimento não contínuo, em que os personagens Aquiles e Tartaruga se movem de forma independente, o que sabemos não ser verdadeiro.

Por fim, acreditamos que esta construção possa ser utilizada em aulas de Limites ou Séries e Sequências.

Atividade 2: Aproximando as áreas

A segunda atividade teve como inspiração o método da exaustão de Eudoxo de Cnido, o qual levou adiante as ideias de Zenão ao utilizar um número infinito de etapas para obter um resultado finito. O que ele fez foi utilizar a ideia de números infinitamente pequenos para calcular áreas e volumes. Para exemplificar e facilitar a demonstração, utilizamos a primeira opção ao aproximar a área de uma circunferência utilizando a área de um polígono regular inscrito nela. A Figura 5 mostra que à medida que se aumenta o número de lados do polígono, este se aproxima cada vez mais do formato da circunferência.

Figura 5 – Polígono com 3, 6 e 20 lados, respectivamente, inscritos em uma circunferência



Fonte: Produzida pelo autor.

Podemos mostrar que a área de um polígono regular de n lados tende à área da circunferência quando n tende a infinito. Para isto, lembremos da fórmula de área de um polígono regular de n lados, a qual é dada por:

$$A_{pol} = \frac{n \cdot a \cdot h}{2}$$

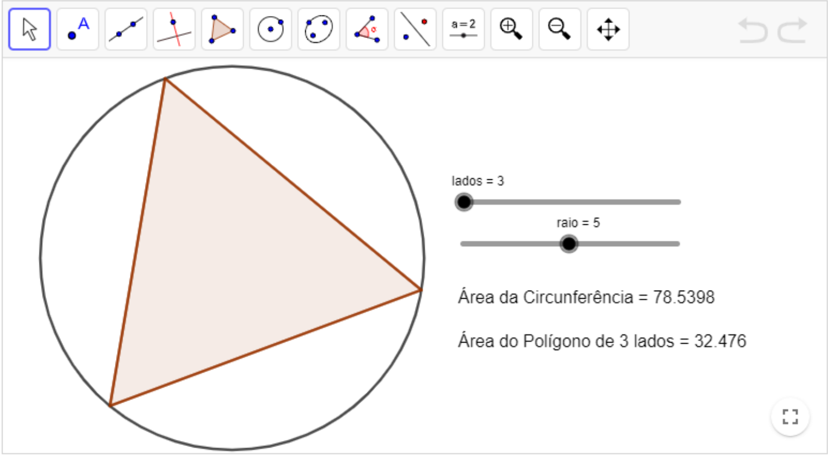
em que a e h representam as medidas do lado e do apótema do polígono, respectivamente. Intuitivamente, podemos observar pelos desenhos dados na Figura 5 que, à medida que o número de lados do polígono se torna suficientemente grande, a forma do polígono regular se aproxima da forma da circunferência. Assim o limite de h acaba tendendo à medida do raio r da circunferência, enquanto o perímetro do polígono $a \cdot n$ tende à medida do comprimento da circunferência, ou seja, $2\pi r$. Assim, a fórmula da área do polígono pode ser reescrita como:

$$A_{pol} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot r}{2} = \pi r^2$$

sendo esta a área da circunferência que utilizamos atualmente.

Ao propor esta atividade, apresentamos a construção da Figura 6, antecedida pelo seguinte texto: “Imagine que você precise calcular a área de uma circunferência sem utilizar a fórmula usual. Foi então que você teve uma ideia: desenhar um polígono regular inscrito na circunferência e calcular a sua área. A situação descrita pode ser observada no desenho abaixo” (Figura 6).

Figura 6 – Construção da questão “aproximando as áreas”



Fonte: Produzida pelo autor.

Após a apresentação da construção, o aluno é orientado a aumentar o valor do controle deslizante destinado ao número de lados do polígono regular a fim de responder a três perguntas: (a) O que você pode dizer em relação à área do polígono regular quando o número de lados é aumentado cada vez mais?; (b) Arraste o ponto do controle deslizante para o máximo permitido. Mesmo com 100 lados a área do polígono regular ainda não é a mesma área da circunferência, embora estejam bem próximas. Seria possível aproximar ainda mais essas áreas? Como?; (c) É possível tornar as duas áreas iguais, ou elas apenas serão muito próximas independentemente do número de lados que o polígono tenha? Por quê?

As perguntas foram criadas em uma sequência de tal forma que tornasse plausível uma reflexão sobre a área do polígono que se aproximava da área da circunferência à medida que o número de lados no controle deslizante se tornasse cada vez maior, bem como a verificação de que o número de lados máximo para o controle não seria suficiente, de modo que, para tornar as áreas cada vez mais próximas, seria necessário um número de lados suficientemente grande. Por fim, pretendemos com a última pergunta verificar se o aluno produz significados no sentido de que, tendendo o número de lados ao infinito, a área do polígono seria igual a área da circunferência.

Uma das maneiras de se chegar a esta conclusão é imaginando outro polígono regular, mas desta vez circunscrito a circunferência, de modo que

$$A_{pol(i)} \leq A_c \leq A_{pol(c)}$$

Tal relação indica as áreas dos polígonos inscrito e circunscrito nas extremidades esquerda e direita, respectivamente, bem como a área da circunferência em si no centro desta relação. Para chegar ao resultado, basta mostrar que $A_{pol(i)} = A_{pol(c)} \quad = L$ e, pelo Teorema do Confronto, $A_c = L$.

Uma possível direção de interlocução também esperada para esta questão está voltada ao conceito de limites, pois a construção feita no GeoGebra pode causar uma falsa impressão de que, por mais lados que o polígono possa ter, basta apenas um *zoom* para verificar que ainda irá existir um espaço em branco entre o lado do polígono e o comprimento da circunferência. No entanto, quando trabalhamos com limites, devemos nos lembrar que n está tendendo a um número tão grande quanto se queira, e assim, por definição, o limite da área do polígono de n lados é (e não tende) a área da circunferência.

Propomos esta atividade para serem trabalhadas conjuntamente em aulas de Limites ou Integrais.

Considerações finais

Apresentamos neste artigo duas possibilidades para se trabalhar alguns conteúdos em uma disciplina de Cálculo ou outras disciplinas em que os conteúdos abordados sejam comtemplados. Ambas as atividades foram desenvolvidas pensando-se no Modelo dos Campos Semânticos e na utilização do GeoGebra como uma ferramenta capaz de trazer as direções de interlocução para debate.

A primeira atividade é apresentada a partir de um dos paradoxos de Zenão, de modo que, a partir da visualização dos objetos Aquiles e tartaruga e a explicação de como um se move em direção ao outro, os alunos possam ser levados a produzir significados acerca das consequências de uma corrida que desafia a realidade. Nesse ponto, o professor pode também apresentar modos diferentes de pensar, ao mesmo tempo em que evidencia os significados mais comuns dentro da cultura matemática.

Já a segunda atividade propõe que o aluno movimente um controle deslizante a fim de verificar como podemos aproximar a área de um polígono regular à área da circunferência de tal forma que quando o número de lados se torna suficientemente grande as duas áreas se tornam iguais. Nessa atividade, podemos nos deparar com situações em que o recurso do *zoom* possa interferir nos significados produzidos por um aluno, pois ao aplicá-lo na construção, podemos notar que mesmo que o número de lados seja muito grande, ainda haverá um espaço entre as duas figuras, implicando então que as duas áreas talvez nunca se tornem iguais por mais lados que o polígono venha a ter. Deste modo, o zoom pode surgir como um recurso que pode tanto confirmar uma direção de interlocução que o aluno já estava apresentando, quanto alterar uma direção de interlocução prévia.

E é por este motivo que não podemos deixar de evidenciar que um tema central surge ao observarmos como ambas as atividades se apresentam: o infinito. Este que é o que consideramos um dos conceitos mais importantes dentro do Cálculo e ao mesmo tempo tão complexo. E é por isso que estas atividades também foram criadas com a intenção de levantar discussões não só entre alunos, mas entre professores igualmente.

Outro ponto que deve ser destacado é a importância da leitura positiva e plausível, pois a partir disso evitamos priorizar certos modos de pensar e nos abrimos a novas possibilidades de interlocução acerca das atividades. Uma decisão que consideramos importante nesse processo é conhecer nosso interlocutor (aluno) não só como alguém cujas legitimidades e significados são produzidos dentro de duas culturas, acadêmica e não acadêmica, em que certas direções de interlocução são mais possíveis do que outras.

Por fim, gostaríamos que esta pesquisa possibilitasse modos de pensar diferentes quanto ao ensino de Cálculo. Essas são apenas duas atividades que tentam promover um debate acerca dos possíveis significados que podem estar em jogo dentro de uma sala quando conceitos como Limites, Integrais ou Séries e Sequências são levantados durante uma aula. No entanto, sabemos que podem existir outros significados dos quais desconhecemos e, por este motivo, não trazemos aqui. Portanto, evidenciamos a importância da leitura plausível e positiva a fim de preparar o professor para novas direções de interlocução.

Referências

AMORIM, Lilian Isabel. Ferreira. **A (re)construção do conceito de Limite do Cálculo para a Análise**: Um estudo com alunos do curso de Licenciatura em Matemática. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal do Ouro Preto, Ouro Preto, 2011.

BARUFI, Maria Cristina Bonomi. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. Tese (Doutorado em Educação). Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

LINS, Romulo Campos. Epistemologia, História e Educação Matemática: tornando mais sólidas as bases da pesquisa. **Revista de Educação Matemática da Sociedade Brasileira de Educação Matemática**, São Paulo, ano 1, n. 1, p. 75-91, set. 1993.

LINS, Romulo Campos. O Modelo dos Campos Semânticos: estabelecimentos e notas de teorizações. In: ANGELO, C. L. et al. (Orgs.). **Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática**: 20 anos de história. São Paulo: Midiograf, 2012, v. 1, p. 11-30.

REZENDE, Wanderley Moura. **O ensino de Cálculo**: Dificuldades de natureza epistemológica. Tese (Doutorado em Educação), Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

SALATTA, Vinícius Aparecido. **Produzindo infinitos**: um estudo sob o olhar do Modelo dos Campos Semânticos. Orientador: Sérgio Carrazedo Dantas. 2021. 111 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual do Paraná, Campo Mourão, 2021.

Submetido em junho de 2022.

Aceito em agosto de 2022.