

Razões Trigonométricas no Ensino Médio: Uma Análise das Técnicas Aplicadas por Estudantes na Resolução de Itens do SAEPE

Trigonometric Ratio in High School: An Analysis of Students' Techniques Regarding SAEPE Items.

Cláudia Danielle da Silva Oliveira¹

Marilene Rosa dos Santos²

RESUMO

O presente artigo parte de um recorte da dissertação de mestrado em Educação Matemática, com foco na Didática da Matemática. Nesse trabalho buscamos analisar as técnicas mobilizadas por estudantes do 3º ano do ensino médio, ao resolverem itens da avaliação externa Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco (SAEPE), quanto ao saber razões trigonométricas no triângulo retângulo. Para tal, a análise foi realizada à luz da Teoria Antropológica do Didático, desenvolvida por Yves Chevallard (1999). Os dados foram produzidos por meio de um teste contendo quatro itens das avaliações do SAEPE de anos anteriores, o qual aplicamos com 54 estudantes do 3º ano do ensino médio. Os resultados, mediante a análise das técnicas mobilizadas pelos estudantes, apontam desde dificuldades no reconhecimento dos elementos geométricos de um triângulo retângulo, para a identificação correta da razão trigonométrica, até dificuldades relativas aos cálculos envolvendo equações do 1º grau e operações aritméticas básicas. Tal resultado, focado nas técnicas inadequadas dos estudantes, indica que o ensino das razões trigonométricas no triângulo retângulo no 3º ano do ensino médio requer uma atenção especial, o que explica os resultados abaixo do esperado, nas avaliações do SAEPE nos últimos anos.

PALAVRAS-CHAVE: Razão trigonométrica no triângulo retângulo, Teoria Antropológica do Didático, Avaliação externa.

ABSTRACT

¹ Mestre em Educação Matemática e Tecnológica (EDUMATEC-UFPE). Professora de Matemática na Rede Municipal do Cabo de Santo Agostinho dos Anos Finais e EJA. E-mail: claudia.danielle80@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-9844-9659>.

² Doutora em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Federal Rural de Pernambuco. Professora-formadora da Prefeitura Municipal do Paulista/PE na área de matemática. Professora Adjunta e coordenadora do curso de licenciatura em matemática - UPE/Campus Mata Norte. Professora colaboradora do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica/UFPE(EDUMATEC). E-mail: marilene.rsantos@upe.br. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1409-1364>.



This article is part of a master's degree in Mathematics Education, focusing on Mathematics Didactics. In this work, we seek to analyze the mobilized techniques by students of the 3rd year of high school, when solving items from the external evaluation of SAEPE, regarding knowing trigonometric ratios in the right triangle. For such, the analysis was carried out through the Anthropological Theory of Didactics, developed by Yves Chevallard (1999). Data were produced through a test containing four items from SAEPE evaluation from previous years, which we applied with 54 students from the 3rd year of high school. The results, through the analysis of the mobilized techniques by the students, point from difficulties in recognizing the geometric elements of a rectangle (right) triangle to the correct identification of the trigonometric ratio, as well as difficulties related to calculations involving 1st degree equations and basic arithmetic operations. This result indicates that the teaching of trigonometric ratios in the rectangle(right) triangle in the 3rd year of high school, requires special attention, which explains the lower-than-expected results, in SAEPE evaluations in last years.

KEYWORDS: Trigonometric ratio in the rectangle (right) triangle, Anthropological Didactic Theory, External evaluation.

Introdução

Dentro do campo da Geometria, podemos identificar diversas aplicabilidades quanto aos saberes referentes à Trigonometria que estão presentes em nosso cotidiano. Tais aplicações requerem conhecimentos mínimos para o desenvolvimento de práticas, sejam elas mais simples, como, por exemplo, medir a altura de um muro, ou mais elaboradas, como determinar distâncias inacessíveis, ou calcular a distância entre as margens de um rio.

Pesquisas em Educação Matemática nas últimas décadas mostram um avanço quanto ao estudo voltado para, dentre outros, o ensino da Geometria no Brasil. Tais investigações (Sena; Dorneles, 2013; Caldato; Pavanello, 2015; Pereira da Costa; Rosa dos Santos, 2018; Rodrigues; Kaiber, 2019) apresentam discussões sobre a abordagem de conceitos relacionados a esse campo da Matemática.

O presente artigo trata-se de um recorte de uma dissertação de mestrado da primeira autora, cujo objetivo geral era analisar as relações entre a praxeologia matemática presente em uma coleção de livro didático e as técnicas utilizadas pelos estudantes do 3º ano do ensino médio, quanto ao estudo das razões trigonométricas no triângulo retângulo. No entanto, aqui nos interessamos em analisar as técnicas inadequadas, quando diferem das corretas ou esperadas pela instituição, aplicadas por estudantes do 3º ano do ensino médio ao resolverem itens da Avaliação externa do SAEPE quanto ao saber razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Resultados de avaliações externas no Brasil apontam dificuldades apresentadas pelos estudantes que estão concluindo o ensino médio, em relação aos conceitos da Geometria. O Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) revela que, em 2019, antes da Pandemia do Covid-19, 67% dos estudantes

concluintes do ensino médio se encontravam com desempenho crítico em Matemática.

Quando esse recorte é feito para a região do Nordeste, esse desempenho piora, chegando em torno de 76%, no que se refere ao estudante não conseguir, ou conseguir desenvolver poucas habilidades e comandos elementares compatíveis com a 3ª série do ensino médio, dentre outras: a construção, leitura e interpretação gráfica; uso de propriedades de figuras geométricas planas e compreensão de outras funções.

No estado de Pernambuco, o Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco (SAEPE) tem por objetivo possibilitar mudanças na educação ofertada pelo estado, de modo que seja possível apontar meios para a melhoria no ensino. Seus resultados apresentados antes da pandemia mostraram dificuldades dos estudantes quanto ao campo da Geometria, resultados esses que não apresentaram melhoras com o avançar dos últimos anos.

Dentre os conteúdos trazidos na Matriz de Referência do SAEPE para o 3º ano do ensino médio, o descritor referente à resolução de problemas que envolvam razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno e tangente), se apresenta entre os que menos têm avançado, quando se refere ao conhecimento do estudante em relação a esse saber. Tal resultado nos traz o seguinte questionamento: Quais são as técnicas de resolução utilizadas pelos estudantes diante das tarefas referentes às razões trigonométricas no triângulo retângulo?

Em busca de responder tal questionamento, e trilharmos o objetivo principal desse artigo, optamos por tomar como aporte teórico e metodológico a Teoria Antropológica do Didático (TAD) desenvolvida por Chevallard (1999) e seus colaboradores, de modo que tal teoria nos fornece ferramentas suficientes para realizarmos as análises necessárias para a nossa investigação.

As razões trigonométricas: SAEPE e estudos anteriores

Desde o ano de 2000, o SAEPE aplica testes de desempenho aos estudantes do ensino fundamental e médio das escolas públicas do estado de Pernambuco, para avaliar os conhecimentos de leitura e escrita em Língua Portuguesa e Matemática, e, a partir de seus resultados, promoverem políticas públicas de melhorias no ensino e aprendizagem dos estudantes da educação básica.

Desde o ano de 2015, as avaliações promovidas pelos estudantes do 3º ano do ensino médio, até então não divulgadas após sua realização, passaram a ser disponibilizadas ao público para consulta e estudo. E, de posse dos resultados

divulgados na plataforma de avaliação e monitoramento, é possível observar o nível de desempenho dos estudantes, quanto à proficiência dos conteúdos avaliados de acordo com a Matriz de Referência de cada etapa de ensino.

De acordo com os resultados, o campo da Geometria apresentou baixo desempenho nos conteúdos avaliados da matriz de referência nos últimos anos, e dentre eles, o descritor 05 - Resolver problemas que envolvam razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno, tangente). A matriz de referência do SAEPE é um recorte da Matriz Curricular do Estado de Pernambuco, e em ambas, esse conteúdo da trigonometria está presente como necessário para o ensino e aprendizado do estudante, ao longo do ensino médio.

Nas últimas edições em que foi avaliado, de 2016 a 2018, o crescimento do descritor 05 tem sido muito tímido, ficando aquém do desejável para o que se espera do estudante, ao concluir a 3ª série do ensino médio, conforme apresenta o quadro abaixo:

Quadro 1: Grau de Domínio do D05 – 3º ano do ensino médio.

DESCRITOR	DESCRIÇÃO	AÇÃO	GRAU DE DOMÍNIO			
			2016	2017	2018	MÉDIA HISTÓRICA
D05	Resolver problemas que envolvam razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno, tangente).	Priorizar	31%	32%	35%	33%

Fonte: Plataforma Foco PE.

Os motivos pelos quais esses resultados se apresentam podem ser oriundos de diversos fatores que vão desde a abordagem desse conteúdo nos livros didáticos adotados, até a proximidade dos docentes com esse conceito. No entanto, quando tomamos como foco a concepção dos estudantes para conteúdos relacionados à Trigonometria, algumas pesquisas (Fortes, 2012, Pastor, 2020, Santos, 2017, Vasconcelos, 2019) apontam dificuldades e erros cometidos por estudantes na resolução de problemas envolvendo razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Fortes (2012) e Santos (2017) observaram em suas pesquisas que muitas das dificuldades apresentadas por parte dos estudantes do ensino médio, relativas à identificação das razões trigonométricas, estão relacionadas à falta de atenção e de conhecimentos prévios necessários, como a identificação da nomenclatura dos lados de um triângulo retângulo.

Dentre os erros cometidos pelos estudantes ao responderem problemas relacionados a esse conteúdo, Pastor (2020) verificou que alguns deles estavam relacionados às quatro operações da matemática, e não necessariamente à Trigonometria. Em sua investigação, o autor também observou como os participantes, estudantes do 9º ano do ensino fundamental, mobilizam suas técnicas ao resolverem questões que envolvem problemas com razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Lacunas conceituais referentes aos significados esperados quanto às razões trigonométricas como proporcionalidade, ângulos em figuras semelhantes e identificação do triângulo retângulo em diversas representações também foram identificadas nos resultados da pesquisa de Vasconcelos (2019).

Seguindo nessa perspectiva de proporcionar avanço na investigação quanto aos saberes mobilizados por estudantes do ensino médio, ao concluir essa etapa escolar, é necessário considerar os dados apresentados nas últimas avaliações e pesquisas para propor caminhos ao ensino e aprendizagem das razões trigonométricas.

Para tal, concordamos com Almouloud (2015, p.10) quando aponta que a TAD caracteriza os “conhecimentos e saberes matemáticos, bem como fatores que interferem nos processos de ensino e de apropriação de conhecimento/saberes pelo aluno”, conforme iremos discutir a seguir.

Alguns elementos da Teoria Antropológica do Didático (TAD)

Partindo do princípio de que todo trabalho matemático manifesta-se como resposta a um tipo de tarefa, Chevallard (1999) afirma que a TAD toma como foco o estudo do homem frente ao saber matemático, em especial, frente às situações matemáticas.

Em sua teoria, Chevallard considera três conceitos primitivos da TAD, que são: os objetos, podendo tudo ser considerado como objeto; as instituições, que são dispositivos sociais parciais ou totais, como uma sala de aula, uma família, uma igreja, etc; e os indivíduos que ocupam essas instituições, se sujeitando às posições impostas por elas, tornando-se assim, sujeitos delas.

Assumimos em nossa pesquisa, como objeto, o saber razões trigonométricas no triângulo retângulo; o 3º ano do ensino médio como instituição; e os estudantes como os sujeitos dessa instituição. A relação do estudante com o objeto do saber se constitui com a vivência que o mesmo mantém com esse saber, a partir do momento

em que esse objeto é conhecido pelo sujeito pertencente a essa instituição. Ou seja, com as práticas que ele executa com o objeto na instituição escola.

Um importante postulado da TAD é que toda atividade humana, enquanto atividade matemática, pode ser materializada por meio de uma praxeologia, ou organização matemática. Tal praxeologia é formada por um modelo praxeológico que é representado pelo quarteto $[T, \tau, \theta, \Theta]$, no qual T representa o tipo de tarefa a ser cumprida por meio de uma técnica (τ), que é a maneira de resolver a tarefa. Essas técnicas são justificadas por uma tecnologia (θ), a qual também é justificada e legitimada por uma teoria (Θ). É importante salientar que a ideia de tarefa se refere a algo preciso e direto que, geralmente, se expressa por meio de um verbo de ação, como calcular o cosseno de um ângulo, por exemplo. Esse verbo calcular é denominado por Chevallard (1999) de gênero da tarefa, que pode evoluir e enriquecer ao longo da escolaridade.

Os elementos desse quarteto praxeológico se dividem em dois blocos. O primeiro bloco denomina-se prático-técnico e é representado por $[T/\tau]$, referente ao “saber fazer” um determinado tipo de tarefa T , com uma maneira, ou uma técnica τ para realizar as tarefas desse tipo. O segundo bloco é chamado de tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]$ que se refere aos saberes.

A organização matemática do objeto do saber razões trigonométricas no triângulo retângulo pelos estudantes do 3º ano do ensino médio, necessita de uma condução, no sentido de observar as respostas dos estudantes perante os itens do SAEPE, referente a esse objeto do saber.

Logo, para que seja possível caracterizar e determinar a praxeologia matemática segundo Chevallard (1999), é necessário que se faça uma análise do saber a ser estudado, como por exemplo: Que procedimentos são necessários para resolver as tarefas propostas? Qual habilidade os estudantes precisam ter para resolver tais tarefas? Quais justificativas matemáticas legitimam os procedimentos mobilizados pelos estudantes ao resolverem as tarefas?

A utilização desse aporte teórico nos possibilitou caracterizar as técnicas desenvolvidas pelos estudantes por meio dos elementos trazidos da organização ou praxeologia matemática, e, a partir delas, realizar uma análise quanto ao objeto do saber razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Percurso Metodológico

A pesquisa se dá em uma abordagem qualitativa, pois através dessa abordagem é possível compreender os fenômenos e processos existentes nas

relações (Reis, 2007). Logo, buscamos analisar as técnicas mobilizadas por estudantes concluintes do Ensino Médio, ao resolverem itens do SAEPE, a fim de compreender possíveis dificuldades encontradas quanto ao objeto do saber razões trigonométricas no triângulo retângulo.

O público alvo participante dessa pesquisa foram estudantes do 3º ano que cursavam o ensino médio de uma escola estadual de Pernambuco. Tais participantes compunham duas turmas do turno da manhã, totalizando 54 estudantes que estavam se preparando para participarem da avaliação do SAEPE do ano corrente, que aconteceria em poucos dias.

Com o intuito de analisarmos as técnicas desenvolvidas pelos estudantes, com foco nas técnicas inadequadas, aplicamos um teste composto de quatro itens (ou questões) das últimas avaliações do SAEPE, compreendidas nos anos de 2015 a 2018. Esses itens eram referentes ao descritor da Matriz de Referência de matemática dessa avaliação para o 3º ano do ensino médio, discriminado por D05 Resolver problemas que envolvam razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno e tangente).

Para tal, procuramos identificar inicialmente o tipo de tarefa de cada item. Observamos então que dois desses itens são referentes ao cálculo do cosseno, enquanto que os outros itens se referiam ao seno e à tangente. No entanto, os quatro itens propostos no teste são do mesmo tipo Calcular a medida do comprimento de um lado de um triângulo retângulo, dados o comprimento de um dos seus lados e a abertura de um de seus ângulos agudos. O que diferencia um item do outro é se pede para calcular o seno, cosseno ou a tangente.

De modo que pudéssemos distinguir essa diferença, dentro desse tipo de tarefa que caracterizamos, identificamos os tipos de tarefas abaixo, caracterizados por Ramalho (2016) em seu trabalho, referente a esse saber, que são:

Ts: Calcular a medida do comprimento do cateto oposto a um ângulo, dadas as medidas da hipotenusa e da abertura desse ângulo;

Tc: Calcular a medida do comprimento da hipotenusa, dadas as medidas do comprimento do cateto adjacente e da abertura de um ângulo;

Tt: Calcular a medida do comprimento do cateto oposto a um ângulo, dadas as medidas do comprimento do cateto adjacente e da abertura desse ângulo.

O quadro abaixo mostra os tipos de tarefas identificados nos itens do SAEPE de 2015 a 2018:

Quadro 02 – Tipos de tarefas identificados nos Itens do SAEPE, referente ao D05

Itens – D05	Tipos de tarefas
SAEPE 2015	Ts: Calcular a medida do comprimento do cateto oposto a um ângulo, dadas as medidas da hipotenusa e da abertura desse ângulo.
SAEPE 2016	Tc: Calcular a medida do comprimento da hipotenusa, dadas as medidas do comprimento do cateto adjacente e da abertura de um ângulo.
SAEPE 2017	Tc: Calcular a medida do comprimento da hipotenusa, dadas as medidas do comprimento do cateto adjacente e da abertura de um ângulo.
SAEPE 2018	Tt: Calcular a medida do comprimento do cateto oposto a um ângulo, dadas as medidas do comprimento do cateto adjacente e da abertura desse ângulo.

Fonte: Autoria própria

Podemos observar que, dos quatro itens presentes no teste, dois deles apresentam o mesmo tipo de tarefa Tc: Calcular a medida do comprimento da hipotenusa, dadas as medidas do comprimento do cateto adjacente e da abertura de um ângulo (calcular o cosseno de um ângulo). Logo, teremos três tipos de tarefas distintas, sendo que o primeiro item refere-se ao seno, o segundo e terceiro item se referem ao cosseno, e o quarto e último item, à tangente.

Ao analisarmos os elementos praxeológicos mobilizados pelos estudantes ao responderem os itens presentes nos testes, utilizamos a seguinte nomenclatura: E01, E02, E03, ..., E54, no qual E se refere a estudante, e o algarismo se refere a numeração conforme a análise iria sendo realizada, de forma aleatória.

Por causa da Pandemia do Covid-19 que se deu ao longo do desenvolvimento dessa pesquisa, não foi possível realizar entrevistas individuais com os estudantes. No entanto, as mobilizações apresentadas pelos mesmos foram suficientes para realizar a análise desejada.

O Teste

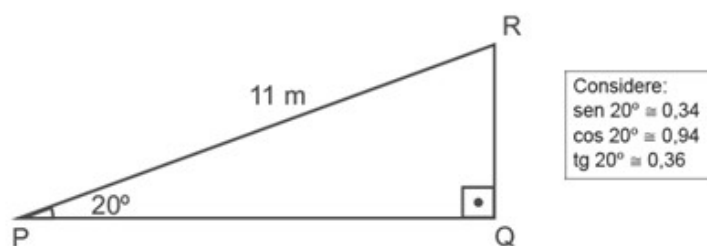
A sequência dos itens apresentados no teste seguiu a ordem dos anos em que o descritor D05 se apresentou nas avaliações do SAEPE nas edições de 2015 a 2018. Vale salientar que, nas avaliações externas, todos os itens apresentam múltiplas escolhas, ou seja, nas avaliações do ensino médio, cada item apresenta cinco alternativas de respostas, no qual quatro delas são os distratores (respostas erradas), e apenas uma é o gabarito (resposta correta).

Para que pudéssemos observar as técnicas apresentadas pelos estudantes, optamos por suprimir as alternativas e reservamos um espaço para que os mesmos pudessem desenvolver suas resoluções. Dessa forma, evitamos que os estudantes

marcassem por impulso as questões que porventura não conseguissem resolver, além de possibilitar a mobilização de possíveis técnicas, sejam corretas ou não.

O primeiro item foi: O telhado da casa de Paulo deixa em sua lateral uma abertura na forma de um triângulo retângulo, conforme mostra o desenho abaixo. Ele irá tampar essa abertura e para isso precisa calcular a medida da altura QR dessa abertura para comprar o material necessário. Qual é a medida da altura QR dessa abertura?

Figura 01 - Imagem relativa ao item do descritor 05 da Matriz de Referência – SAEPE 2015



Fonte: SAEPE (2015)

A descrição da técnica, que nesse caso se trata da institucionalmente esperada, é: identificar os elementos geométricos do triângulo retângulo correspondentes aos seus lados (cateto oposto ao ângulo dado e hipotenusa), identificar a medida da abertura do ângulo, substituir os valores na razão trigonométrica seno 20° e resolver a equação do 1º grau. Temos abaixo a sua resolução.

$$\text{Sen } 20^\circ = \frac{x}{11m}$$

$$0,34 = \frac{x}{11m}$$

$$x = 0,34 \cdot 11m$$

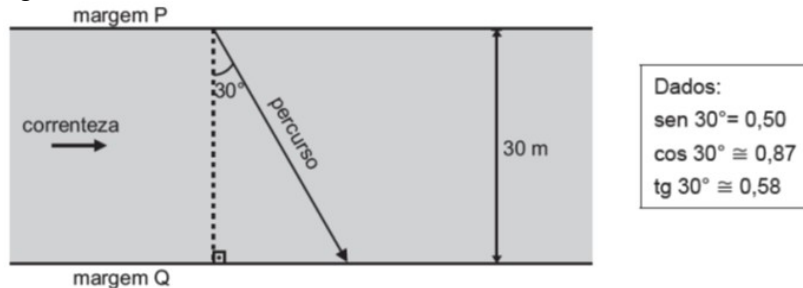
$$x = 3,74 m$$

As possíveis técnicas inadequadas dos estudantes quanto a esse item, assim como em relação aos demais que se seguem, são: o uso da razão trigonométrica inadequada ao problema; a utilização, ausência ou inadequação da unidade de medida; possíveis erros referentes aos cálculos numéricos; e dificuldades na resolução de equações, de acordo com pesquisas que já apontaram tal dificuldade, como a de Pastor (2020).

O segundo item tem como proposta calcular o valor do cosseno de um ângulo e apresenta o seguinte enunciado: Um barco realizou a travessia em um rio partindo

da margem P com trajetória retilínea em direção à margem oposta Q. Devido à correnteza desse rio, o percurso do barco foi deslocado 30° em relação à trajetória retilínea predeterminada, conforme representado no desenho abaixo. Qual o percurso aproximado, em metros, realizado pelo barco para atravessar esse rio?

Figura 02 - Imagem relativa ao item do descritor 05 da Matriz de Referência – SAEPE 2016



Fonte: SAEPE (2016)

Para a resolução desse item, tomamos como descrição da técnica:

$$\cos 30^\circ = \frac{30\text{m}}{x}$$

$$0,87 = \frac{30\text{m}}{x}$$

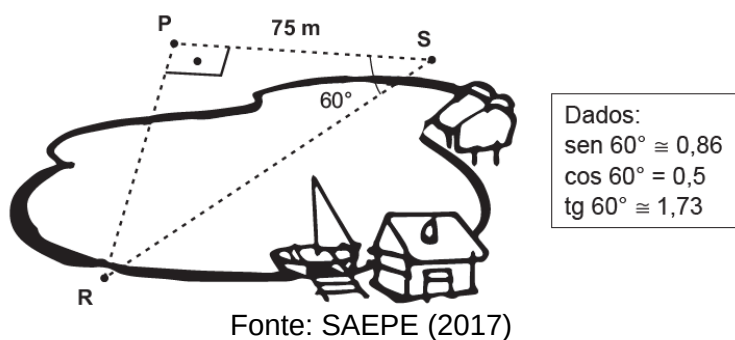
$$0,87 \cdot x = 30\text{m}$$

$$x = \frac{30\text{m}}{0,87}$$

$$x \cong 34,48 \text{ m}$$

O terceiro item posto no teste se apresenta com o seguinte enunciado: Para estimar a largura RS de um lago, Pedro, que é topógrafo, fez três demarcações próximas às margens desse lago, representadas pelos pontos P, R e S, e utilizou um teodolito para fazer algumas medições. Do ponto S ele avistou os pontos P e R segundo um ângulo de 60° e, do ponto P, avistou os pontos R e S segundo um ângulo de 90° , conforme ilustrado no desenho abaixo. Aproximadamente, quanto mede a largura RS desse lago, em metros?

Figura 03 - Imagem relativa ao item do descritor 05 da Matriz de Referência – SAEPE 2017



Dentre possíveis resoluções desse item, podemos ter a seguinte descrição:

$$\text{cos } 60^\circ = \frac{75m}{x}$$

$$0,5 = \frac{75m}{x}$$

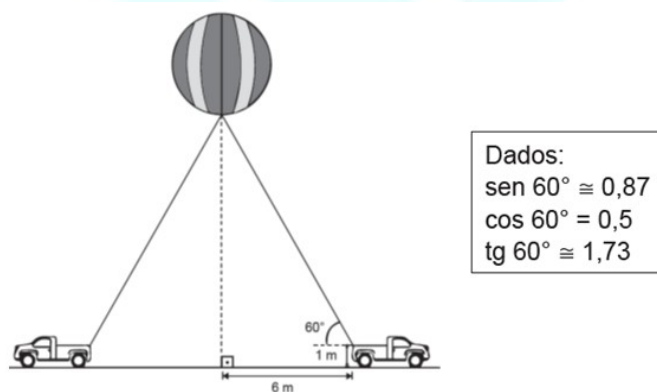
$$0,5x = 75m$$

$$x = \frac{75m}{0,5}$$

$$x = 150m$$

O quarto e último item presente no teste teve como enunciado: Em um balão de propaganda cheio com gás hélio, foram fixadas duas cordas que estavam amarradas em veículos distintos, conforme representado no desenho abaixo. De acordo com esse desenho, qual é a altura desse balão em relação ao solo?

Figura 04 - Imagem relativa ao item do descritor 05 da Matriz de Referência – SAEPE 2018



Fonte: SAEPE (2018)

Para a resolução desse item, tomamos como possível técnica:

$$\text{tg } 60^\circ = \frac{x}{6m}$$

$$1,73 = \frac{x}{6m}$$

$$x = 1,73 \cdot 6m$$

$$x = 10,38m$$

Altura do balão em relação ao solo

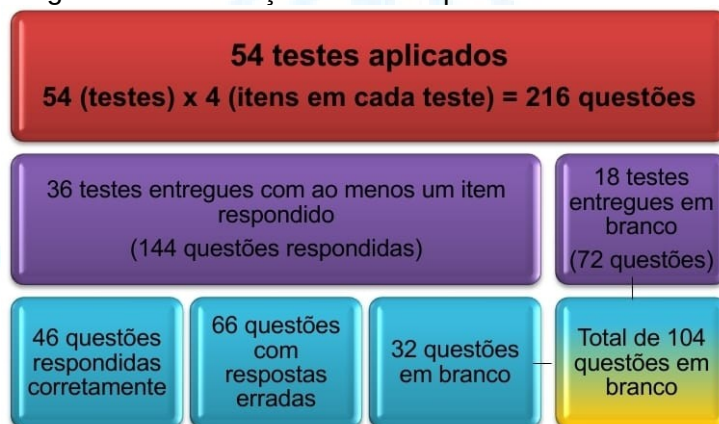
$$10,38m + 1m = 11,38m$$

Identificamos que todos os itens desse descritor 05, presentes nas avaliações do SAEPE e no teste, estão de acordo com o proposto na Matriz de Referência para o referido ano escolar (3º ano do ensino médio), bem como apresentam a mesma estrutura quanto às técnicas necessárias para serem resolvidas e o mesmo bloco tecnológico-teórico.

Análise dos dados encontrados

Podemos observar que, dos 54 testes aplicados aos estudantes, 18 deles (33,3%) foram entregues totalmente em branco, e 36 (66,7%) responderam ao menos um dos quatro itens do teste. A figura abaixo ilustra detalhadamente esses valores encontrados.

Figura 05 – Descrição dos itens presentes nos testes



Fonte: Dados da pesquisa

De acordo com os dados apresentados, e considerando os 36 testes que apresentavam ao menos um dos seus itens respondidos (144 respostas), 46 deles estavam corretos (41%), contra 66 respostas que apresentaram erros na sua resolução. Esses números reforçaram a importância de olharmos para as técnicas dos estudantes, especificamente para os equívocos apresentados e, principalmente, o que os levou a cometê-los.

A tabela a seguir apresenta o quantitativo de acertos, erros e abstenções referentes às 216 questões dos 54 testes que foram aplicados aos estudantes.

Tabela 01 – Quantitativo de acertos, erros e abstenções dos itens nos testes aplicados

Questões/Itens Tipos de tarefa	Acertos		Erros		Abstenções	
	Quantidade	%	Quantidade	%	Quantidade	%
1 – SAEPE 2015 (Tarefa do tipo Ts)	10	18,5	21	38,9	23	42,6
2 – SAEPE 2016 (Tarefa do tipo Tc)	07	13	21	38,9	26	48,1
3 – SAEPE 2017 (Tarefa do tipo Tc)	17	31,5	09	16,7	28	51,8
4 – SAEPE 2018 (Tarefa do tipo Tt)	12	22,2	15	27,8	27	50

Fonte: Dados da pesquisa

Podemos observar, diante dos dados apresentados, que, dos quatro itens presentes no teste, os dois primeiros foram os que obtiveram uma maior quantidade de respostas. A diferença é pequena em relação aos dois últimos itens. No entanto, podemos verificar que, em relação aos itens respondidos e aos que não obtiveram respostas, houve praticamente a mesma incidência.

Com quase metade de cada item não respondido, ou seja, deixado em branco, podemos inferir uma possível dificuldade de aprendizado dos estudantes dessa etapa escolar, quanto ao objeto do saber razões trigonométricas no triângulo retângulo. Essa conclusão se reforça quando nos voltamos para a outra metade dos itens que foram respondidos, mas a predominância é de erros.

Mediante as análises das respostas dos estudantes em cada questão dos testes, pudemos identificar as técnicas mobilizadas por eles, observando as regularidades e possíveis escolhas para desenvolvimento de suas resoluções. Apresentaremos alguns extratos das técnicas mobilizadas pelos estudantes, referentes a cada item do teste proposto a eles.

A figura abaixo apresenta o extrato de um dos estudantes cuja técnica utilizada não alcançou o resultado esperado, não conseguindo identificar corretamente a razão trigonométrica seno, confundindo com o cosseno.

Figura 06 – Técnica desenvolvida pelo estudante E22 no item 01

1) (SAEPE – 2015) O telhado da casa de Paulo deixa em sua lateral uma abertura na forma de um triângulo retângulo, conforme mostra o desenho abaixo. Ele irá tampar essa abertura e para isso precisa calcular a medida da altura QR dessa abertura para comprar o material necessário.

RESPOSTA: Qual é a medida da altura QR dessa abertura? Justifique a sua resposta.

RESOLUÇÃO:

$$\cos 20^\circ = \frac{CA}{Hi}$$

$$0,94 = \frac{x}{11} = 10,34$$

Fonte: Dados da pesquisa

Mesmo que o estudante E22 tenha resolvido corretamente os cálculos numéricos, ele não conseguiu identificar corretamente os elementos geométricos, uma vez que trocou o cateto oposto pelo cateto adjacente. Esse equívoco, também observado em outros estudantes ao responderem esse item, mostra que o conhecimento deles, em relação as razões trigonométricas no triângulo retângulo, ainda não foi consolidado. No entanto, também encontramos técnicas em que os estudantes mobilizaram corretamente as razões trigonométricas, mas não conseguiram realizar os cálculo das operações aritméticas.

No quadro a seguir, apresentamos as técnicas inadequadas mobilizadas pelos estudantes ao resolverem o primeiro item:

Quadro 02 – Técnicas mobilizadas pelos estudantes no item 01

Tipo de tarefa (Ts)	Técnicas inadequadas
Calcular a medida do comprimento do cateto oposto a um ângulo, dadas as medidas da hipotenusa e da abertura desse ângulo.	<ul style="list-style-type: none"> - Identificação da razão trigonométrica cosseno, ao invés da razão seno; - Resolução dos cálculos numéricos incorretamente; - Soma do quadrado da medida do ângulo agudo apresentado no triângulo retângulo pelo quadrado da medida da hipotenusa e realizar cálculos para encontrar a medida desejada.

Fonte: Autoria própria

Quando nos voltamos para o segundo item posto no teste, pudemos observar que ele obteve a mesma quantidade de técnicas inadequadas que o primeiro item, mesmo sendo de diferentes tipos de tarefas. Porém, foi o item que menos teve acertos dentre os quatro itens apresentado no teste.

Observamos nos protocolos que, dentre os 21 estudantes que apresentaram técnicas inadequadas, alguns deles conseguiram mobilizar corretamente os conhecimentos referente às razões trigonométricas no triângulo retângulo, porém se

equivocaram no cálculo numérico ou se confundiram nas medidas dos lados do triângulo ao substituir na razão, como apresenta a figura abaixo:

Figura 07 – Técnica desenvolvida pelo estudante E04 no item02

RESOLUÇÃO:

$$\cos 30^\circ = \frac{CA}{H}$$

$$0,87 = \frac{x}{30} \Rightarrow x = 30 \cdot 0,87$$

$$x = 26,40$$

$$\begin{array}{r} 0,87 \\ \times 30 \\ \hline 0100 \\ 264 \\ \hline 26,40 \end{array}$$

Fonte: Dados da pesquisa

É importante destacar que dos 21 estudantes que responderem esse segundo item, 10 o fizeram com técnicas que não correspondem ao objeto razões trigonométricas no triângulo retângulo, cinco deles identificaram a razão trigonométrica tangente ao invés do cosseno, e três identificaram o seno, ao invés do cosseno.

Apresentamos, no quadro abaixo, as técnicas inadequadas mobilizadas pelos estudantes, ao resolverem o segundo item do teste, mediante a análise:

Quadro 03 – Técnicas mobilizadas pelos estudantes no item 02

Tipo de tarefa (Tc)	Técnicas inadequadas
Calcular a medida do comprimento da hipotenusa, dadas as medidas do comprimento do cateto adjacente e da abertura de um ângulo.	<ul style="list-style-type: none"> - Identificação da razão trigonométrica seno, ao invés da razão trigonométrica cosseno; - Identificação da razão trigonométrica tangente, ao invés da razão trigonométrica cosseno; - Resolução dos cálculos numéricos incorretamente; - Substituição incorretamente as medidas dos lados do triângulo retângulo nas razões trigonométricas; - Substituição da medida dos catetos do triângulo retângulo no Teorema de Pitágoras para encontrar a medida da hipotenusa.

Fonte: Autoria própria

Ao analisarmos as técnicas mobilizadas pelos estudantes no terceiro item, observamos conformidade com as técnicas esperadas pela instituição. Em relação aos estudantes que não mobilizaram as técnicas corretas ou esperadas, apresentaram dificuldades semelhantes às dos itens anteriores, como veremos na figura abaixo:

Figura 08 – Técnica desenvolvida pelo estudante E14 no item03

RESOLUÇÃO:

$$\text{Sen } 60^\circ = 0,86$$

$$\frac{0,86}{x} = \frac{75}{90}$$

$$75x = 77,4$$

$$x = \frac{77,4}{75} = 1,032$$

$$\frac{0,74}{0,90} = \frac{0,82}{0,90}$$

Fonte: Dados da pesquisa

Podemos perceber que o estudante E14, ao mobilizar a sua técnica, não conseguiu identificar corretamente os elementos geométricos e a razão trigonométrica, pois considerou a razão seno em sua resolução, ao invés do cosseno. Constatamos também que o estudante tomou o valor do seno de 60° como sendo a medida do cateto oposto, na substituição da razão trigonométrica, assim como a medida do ângulo de 90° , ao substituí-la na razão. O mesmo mobilizou a técnica de resolver a equação do 1° grau, porém não obtendo o resultado esperado.

Mediante análise feita, o quadro abaixo apresenta as técnicas inadequadas que foram mobilizadas pelos estudantes ao resolverem o terceiro item do teste:

Quadro 04 - Técnicas mobilizadas pelos estudantes no item 03

Tipo de tarefa (Tc)	Técnicas inadequadas
Calcular a medida do comprimento da hipotenusa, dadas as medidas do comprimento do cateto adjacente e da abertura de um ângulo.	<ul style="list-style-type: none"> - Identificação a razão trigonométrica seno, ao invés da razão trigonométrica cosseno; - Resolução os cálculos numéricos incorretamente; - Substituição da medida do ângulo agudo dado no triângulo retângulo, no denominador da razão que define o cosseno; - Substituição do valor do seno de um ângulo no numerador da razão que define seno.

Fonte: Autoria própria

Em relação às análises feitas nas técnicas dos estudantes referentes ao quarto e último item presente no teste, podemos observar que a mobilização das técnicas dos estudantes foi semelhante às utilizadas nos itens anteriores. No entanto, esse item se diferencia dos anteriores no sentido de necessitar de uma técnica a mais para resolvê-lo, e isso pode explicar alguns equívocos apresentados nos protocolos, uma vez que os estudantes podem ter seguido uma sequência lógica de resolução dos três primeiros, não se atendo ao detalhe a mais para resolver esse último item.

Abaixo segue um recorte de um protocolo resolvido por um dos estudantes:

Figura 09 – Técnica desenvolvida pelo estudante E03 no item04

Dados:
 $\text{sen } 60^\circ \cong 0,87$
 $\text{cos } 60^\circ = 0,5$
 $\text{tg } 60^\circ \cong 1,73$

RESPOSTA: De acordo com esse desenho, qual é a altura desse balão em relação ao solo?

RESOLUÇÃO:

$$\text{Tg } 60^\circ = \frac{CO}{CA}$$

$$1,73 = \frac{6}{CA}$$

$$CA = 6 \cdot 1,73 \quad CA = 10,38$$

$$\begin{array}{r} 1,73 \\ \times 6 \\ \hline 10,38 \end{array}$$

Fonte: Dados da pesquisa

O estudante E03 mobilizou técnicas referentes ao quarto item que foram as mais identificadas dentre os estudantes que não conseguiram determinar a medida final solicitada. Observamos que todo o seu desenvolvimento corresponde ao esperado pela instituição, porém, faltou mobilizar a técnica de somar à medida encontrada a outra medida dada (1m), para encontrar a medida total, referente à altura do balão em relação ao solo.

No quadro a seguir, apresentamos as técnicas utilizadas pelos estudantes ao resolverem a terceira questão do teste, mediante a análise:

Quadro 05 – Técnicas mobilizadas pelos estudantes no item 04

Tipo de tarefa (Tt)	Técnicas inadequadas
Calcular a medida do comprimento do cateto oposto a um ângulo, dadas as medidas do comprimento do cateto adjacente e da abertura desse ângulo.	<ul style="list-style-type: none"> - Identificação da razão trigonométrica cosseno, ao invés da razão trigonométrica tangente; - Resolução dos cálculos numéricos incorretamente, substituindo o valor do cosseno de um ângulo no numerador da razão que define cosseno.

Fonte: Autoria própria

Podemos salientar que dos 15 estudantes que, apresentaram técnicas inadequadas nesse quarto item, nove deles mobilizaram suas técnicas corretamente, com exceção de somar ao final a medida dada na questão (1m) com a medida encontrada. Dois estudantes apenas identificaram inadequadamente a razão trigonométrica cosseno, ao invés da razão trigonométrica tangente. Por fim, quatro estudantes não conseguiram realizar corretamente os cálculos numéricos.

Diante dessas análises, podemos observar que esses resultados convergem com as pesquisas anteriormente apontadas, pois, assim como enfatizam Fortes (2012) e Santos (2017), muitas dessas dificuldades estão relacionadas à identificação das razões trigonométricas. Observamos, também, erros relacionados às operações aritméticas básicas, como apontou Pastor (2020), além da ausência de conhecimentos prévios necessários para o trabalho com razões trigonométricas, também apontada na pesquisa de Vasconcelos (2019).

Considerações finais

Ao desenvolvermos essa pesquisa, tomamos como objetivo analisar às técnicas mobilizadas por estudantes do 3º ano do ensino médio, ao resolverem itens do SAEPE quanto às razões trigonométricas no triângulo retângulo. Tomamos como foco, as técnicas inadequadas, ou seja, as técnicas que divergem das consideradas corretas ou esperadas pela instituição, uma vez que se trata de um recorte da dissertação da primeira autora. Para tal análise, tomamos como base a Teoria Antropológica do Didático (TAD) desenvolvida por Chevallard (1999), a qual possibilitou caracterizar as técnicas desenvolvidas pelos estudantes.

A TAD possibilitou a caracterização das técnicas mobilizadas pelos estudantes, de modo que pudéssemos fazer a análise de suas respostas aos itens propostos no teste. Dessa forma, foi possível verificar as relações existentes entre a instituição com as técnicas, nesse caso, as técnicas consideradas inadequadas pela instituição, desenvolvidas pelos estudantes.

Mediante as análises realizadas, podemos destacar que 46 respostas estavam corretas e/ou eram técnicas de acordo com a esperadas pela instituição. Porém, observamos que, das técnicas mobilizadas inadequadas pelos estudantes, foram identificados 66 erros, sendo que: 23 deles identificaram inadequadamente as razões trigonométricas; 20 estavam relacionadas ao erro no desenvolvimento dos cálculos numéricos; 14 não consideraram a trigonometria no triângulo retângulo para a resolução das questões, e nove deles, apesar de responderem tudo corretamente, não utilizaram a última técnica necessária para obter a medida correta.

De acordo com os dados obtidos, podemos inferir que, além da quantidade das abstenções ao responderem os itens do teste, a grande dificuldade apresentada pelos estudantes ainda se refere à correta identificação das razões trigonométricas no triângulo retângulo, além das dificuldades quanto aos cálculos com equações do 1º grau e com as operações aritméticas, já antes identificadas em pesquisas, como a de Pastor (2020).

E, diante disso, como sugestão para superar tais dificuldades, seria interessante reforçar saberes prévios necessários para o trabalho com a Trigonometria. Ademais é importante que o professor possa explorar novamente as razões trigonométricas na 3ª série do ensino médio, para que seja possível uma melhora nos resultados das avaliações externas.

Portanto, acreditamos que esses fatores podem explicar os números apresentados nas últimas avaliações do SAEPE, evidenciando a importância do fortalecimento do ensino e aprendizagem do saber razões trigonométricas no triângulo retângulo ao longo do ensino médio, além de ampliar estudos voltados para esse saber, uma vez que o mesmo é abordado na 1º série do ensino médio e avaliado ao final dessa etapa escolar.

Referências

ALMOULOU, Saddo Ag. Teoria antropológica do didático: metodologia de análise de materiais didáticos. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**. n 42, p. 09-34, 2015.

CALDATTO, Marlova Estela; PAVANELLO, Regina Maria. Um panorama histórico do ensino de geometria no Brasil: de 1500 até os dias atuais. **Revista Quadrante**. Vol. XXIV nº 01, 2015.

CHEVALLARD, Yves. L'analyse des pratiques enseignantes en Théorie Anthropologie Didactique. In: **Recherches en Didactiques des Mathématiques** 19(2). Grenoble: La Pensée Sauvage, 1999. p. 221-266.

FORTES, Adriana Wachtmann Borges. **Razões trigonométricas no triângulo retângulo**: uma análise de erros no ensino médio. 2012. 97f. Dissertação (Mestrado profissionalizante em ensino de física e matemática) – Pró-Reitoria de Pós-Graduação Pesquisa e Extensão, Universidade Franciscana, Santa Maria, 2012.

PASTOR, Ederson Sales. **Análise de questões de trigonometria propostas aos alunos do Ensino Fundamental pelo SARESP**. 2020. 92f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2020.

PEREIRA DA COSTA, André; ROSA DOS SANTOS, Marilene. Uma análise praxeológica do ensino de triângulos no 8º ano do ensino fundamental. **EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA - RS**, v. 2, p. 189-197, 2018.

RAMALHO, Luana Vieira. **Trigonometria em livros didáticos do 9º ano do ensino fundamental**. 2016. 88f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2016.

RODRIGUES, Danielle dos Santos; KAIBER, Carmen Teresa. A Geometria Espacial no Ensino Médio: contribuições da utilização de uma Unidade de Ensino e Aprendizagem (UEA). **Perspectivas de Educação Matemática**. Mato Grosso do Sul, v. 12, n. 28, p. 149 – 167, 2019.

SANTOS, Jamison Luiz Barros. **Uma sequência didática para a aprendizagem das noções de trigonometria fundada na teoria das Inteligências múltiplas.** 2017. 139f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Pró-Reitoria de Pós- Graduação e Pesquisa, Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2017.

SENA, Rebeca Moreira; DORNELES, Beatriz Vargas. Ensino de Geometria: Rumos da Pesquisa (1991-2011). **REVEMAT**, Florianópolis (SC), v. 08, n. 1, p. 138-155, 2013.

VASCONCELOS, Danilo Monteiro de. **Entre palavras, quadros e números: uma análise ontossemiótica da construção do conceito de razões trigonométricas com a utilização de histórias em quadrinhos.** 2019. 170f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciência e Matemática) – Centro Acadêmico do Agreste, Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru, 2019.

Submetido em: julho de 2022.

Aceito em: novembro de 2023.

