REVISTA DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL (UFMS)

ISSN 2359-2842 Volume 16, número 42 – 2023 DOI 10.46312/pem.v16i42.18165

Tarefas de Modelagem Matemática na Mobilização de Sistemas Lineares de Equações: o Caso dos Fluxos de Água

Mathematical Modelling Tasks in Encouraging Linear Systems of Equations: the Case of Water Flows

Guillermo Enrique Ramírez Montes[1]

RESUMO

Este estudo objetiva descrever os processos de modelagem desenvolvidos por estudantes costarriquenhos de uma turma de álgebra linear, ao resolverem uma tarefa de modelagem no contexto de fluxos envolvendo conceitos de Sistemas de Equações Lineares. A recolha de dados incluiu resoluções escritas dos estudantes da tarefa e seus ficheiros produzidos no *Wolfram Mathematica*. A análise revelou a utilização dos conceitos de Sistema de Equação Linear e conceitos associados para construir modelos matemáticos na turma toda. No entanto, os conhecimentos baseados em conceitos de álgebra linear não foram suficientes para evitar que os estudantes evidenciassem dificuldades em interpretar e/ou validar resultados matemáticos, o que sugere maior fomento deste tipo de tarefas na sala de aula de matemática.

PALAVRAS-CHAVE: Álgebra Linear. Sistemas de Equações Lineares. Tarefa de Modelagem Matemática. Fluxos. Educação Superior.

ABSTRACT

This study aims to describe the modelling processes developed by Costa Rican students in a linear algebra class, when solving a modelling task in the context of flows involving concepts of Systems of Linear Equations. Data collection included students' written resolutions of the task and their files produced in *Wolfram Mathematica*. The analysis revealed the use of System of Linear Equation concepts and associated concepts to build mathematical models in the whole class. However, knowledge based on linear algebra concepts was not enough to prevent students from showing difficulties in interpreting and/or validating mathematical results, which suggests greater promotion of this type of task in the mathematics classroom.

[1] Professor do Departamento de Educação Matemática e do “Centro de Investigações Matemáticas y Metamatemáticas (CIMM)” da Universidade da Costa Rica. Doutor em Educação, com ênfase em Didática da Matemática, pela Universidade de Lisboa. E-mail: guillermo.ramirez_m@ucr.ac.cr. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2524-1674.

KEYWORDS: Linear Algebra. Linear System Equations. Mathematical Modelling Task. Flows. Higher Education.

Introdução

A Álgebra Linear é uma das disciplinas a frequentar, de caráter obrigatório, na aprendizagem de estudantes que cursam alguma engenharia ou curso com grande demanda de matemática; seja porque seus tópicos se tornam requisitos de aprendizagem indispensáveis para cursar com sucesso outras disciplinas de Matemática, ou seja porque alguns tópicos como matrizes, sistemas de equações lineares (SEL) e vetores são de vital utilidade para trabalhar situações problema dentro e fora da Matemática (POSSANI; TRIGUEROS; PRECIADO; LOZANO, 2010). Em particular, a aprendizagem de conceitos e procedimentos de resolução de SEL baseados em métodos matriciais (Gauss-Jordan, função determinante) resulta fundamental para a aprendizagem do resto de conceitos da álgebra linear, sendo que o trabalho desses conceitos leva de alguma ou outra forma à resolução de um SEL. Vários são os problemas da vida cotidiana que podem ser modelados com SEL (COSTA; ROSSIGNOLI, 2017), contudo, cabe se perguntar: esses contextos estão sendo aproveitados pelo professor para o ensino de conceitos da álgebra linear?

Não aproveitar os contextos que fornecem aplicabilidade da álgebra linear na sala de aula tem consequências na aprendizagem, entre estas, não diminuir com a abstração que se atribui a alguns conceitos matemáticos. Nesta linha, a aprendizagem da álgebra linear tem resultado um desafio para o estudante universitário, principalmente por esse o caráter abstrato associado a vários dos conceitos envoltos e o formalismo com que são ensinados na sala de aula (CÁRCAMO; GÓMEZ, FORTUNY, 2016), resultando relevante pensar em ambientes de aula que incorporem na disciplina de álgebra linear o contexto real. Além disso, “uma das caraterísticas das condições de aprendizagem de alta-qualidade é que os estudantes devam ser convidados a interagir significativamente com conteúdo matemático” (CHINNIPPAN, 2010, p.10). Nesse sentido, a contextualização dos conceitos em situações reais utilizando tarefas matemáticas *significativas* surge como uma possibilidade e uma necessidade para motivá-los (BIGGS; TAGG, 2011). A modelagem matemática permite uma abordagem diferente na disciplina de Álgebra Linear, no qual o estudante é encorajado a mobilizar conhecimentos prévios e a criar novas construções conceituais que o ajudem no tratamento de conceitos abstratos (TRIGUEROS; POSSANI, 2013). Por outro lado, existe uma necessidade de realizar mais estudos que investiguem práticas de ensino e aprendizagem a nível universitário em que se incluam as tecnologias digitais no trabalho de modelagem matemática (GREEFATH, 2011).

Tendo presente o anterior, os ambientes educativos baseados no trabalho de tarefas de modelagem matemática surgem não só como uma possibilidade para que o professor mostre ao estudante como se aplicam os conceitos que está aprendendo, mas também para promover competências matemáticas que o estudante comumente não desenvolve ao trabalhar com contextos meramente matemáticos (KAISER; SRIRAMAN, 2006), incluindo como utilizar o recurso tecnológico no processo de modelagem. Nesse sentido, este estudo forma parte de uma investigação maior baseada no trabalho de tarefas de modelagem matemática para a aprendizagem de conceitos de álgebra linear (RAMÍREZ, 2022). Em particular, este estudo objetiva descrever os processos de modelagem, desenvolvidos por estudantes costarriquenhos de uma turma de álgebra linear, ao trabalharem uma tarefa em um contexto de fluxo de água a partir da utilização de modelos baseados em SEL.

Para atender o objetivo referido, pretende-se responder as duas seguintes perguntas: 1) como são os processos de modelagem que os estudantes desenvolvem ao trabalhar a tarefa, particularmente, em relação às fases do ciclo de modelagem que conseguem ultrapassar, a forma como transitam entre estas fases e o tipo de conhecimento que mobilizam?; 2) quais as principais dificuldades que se evidenciam nos processos de modelagem dos estudantes?

Estudos prévios sobre aprendizagem de SEL

No contexto latino-americano, Bianchini, Lima e Gomes (2019) realizaram uma pesquisa sobre os principais estudos em ensino e aprendizagem da álgebra linear frequentados por estudantes de cursos de Engenharia. Para estes autores, os SEL não são propriamente um tópico de estudo da álgebra linear, mas uma ferramenta em que se apoia o estudo de tópicos da álgebra linear, como as transformações lineares, os espaços vetoriais e os autovalores e autovetores associados a uma matriz.

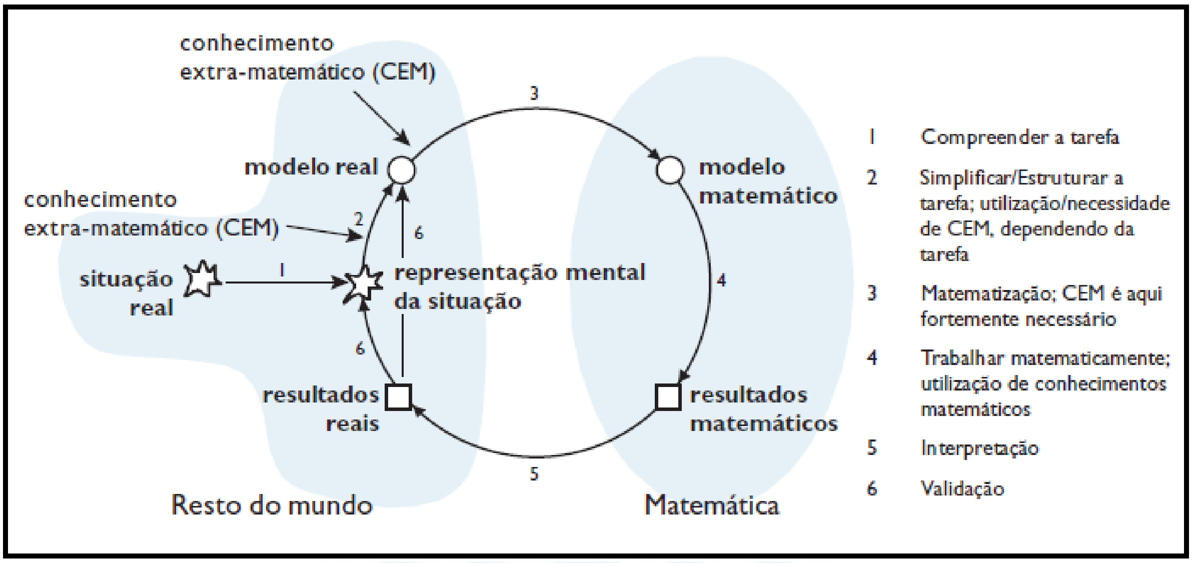
Por outro lado, existem autores que consideram os SEL como parte das temáticas de estudo da álgebra linear, importando-se por indagarem mais sobre como os estudantes percebem a aprendizagem de um SEL ou levarem propostas de ensino centradas na aprendizagem de conceitos associados. Entre esses autores encontramos a Mallet (2007), autor que trabalha com o software Maple para fomentar nos estudantes a compreensão do conceito de SEL e o conceito de solução e conjunto solução associado a um SEL, através das diferentes representações que pode proporcionar o Maple sobre um SEL. Os resultados deste estudo revelam a utilidade do recurso tecnológico para que os estudantes façam conexões entre a representação algébrica e a representação visual de um SEL, e evidenciam dificuldades de interpretação que os estudantes apresentam quando se centram na representação algébrica, em particular, ao interpretarem o conjunto solução de um SEL com infinitas soluções.

No que se refere a tarefas envolvendo modelagem matemática, Possani et al. (2010) propõem uma tarefa no contexto de fluxo veicular para introduzir conceitos associados ao estudo de SEL. Os resultados do estudo evidenciaram que a tarefa foi demandante, mas significativa para os estudantes, pois puderam aplicar conceitos da disciplina de álgebra linear numa situação real, fazendo algo diferente àquilo que habitualmente é resolver exercícios matemáticos. Além disso, a tarefa permitiu que os estudantes pudessem discutir sobre o papel de conceitos como matriz aumentada e conjunto solução dentro do contexto da situação colocada. Entre as dificuldades evidenciadas nos estudantes, os autores mencionam algumas associadas à demanda cognitiva das tarefas de modelagem, nomeadamente, estabelecer e identificar hipóteses para simplificar a situação problema, identificar variáveis pertinentes para construir o modelo matemático e interpretar o conjunto solução de um SEL obtido como parte dos resultados matemáticos.

Tarefas de modelagem e o processo de modelagem matemática

Por tarefa de modelagem matemática perceberemos aquela tarefa com uma grande exigência de processos cognitivos envolvidos no ciclo de modelagem matemática (BLUM; BORROMEO FERRI, 2009). Dependendo da perspectiva de modelagem em que o autor se focar, este ciclo poderá ter mais ou menos fases associadas e diferentes objetivos. Assim, por exemplo, encontramos a perspectiva *realista* cujo objetivo se centra em promover competências próprias da modelagem matemática; a perspectiva *educacional* cujo objetivo é promover estruturas de aprendizagem e a introdução e consolidação de conceitos; ou a perspectiva *cognitiva* com objetivos nos processos cognitivos que surgem nos estudantes ao avançarem no seu processo de modelagem, incluindo as dificuldades (KAISER; SRIRAMAN, 2006). Em particular, desde uma perspectiva cognitiva, o ciclo de modelagem tem seis fases e seis subprocessos associados, conforme pode ser observado na figura 1:

Figura 01 - ciclo de modelagem perspectiva cognitiva



Fonte: Borromeo Ferri (2010)

O ciclo começa com a fase da situação real, no chamado *resto do mundo*. O estudante deve fazer a leitura da situação e tentar compreender a mesma (1), para o qual deve recorrer a estruturas mentais e conhecimentos prévios que lhe permitam discernir que tipo de objetos matemáticos poderia utilizar para resolver a situação, conseguindo assim uma representação mental da situação. Posteriormente, chega a hora de tomar decisões quanto às hipóteses do enunciado que devem ser consideradas e as hipóteses que poderia considerar para simplificar a complexidade da situação (2), conseguindo o que se conhece como o modelo real, um modelo idealizado de como o estudante concebe a situação. A seguir, este modelo deve ficar escrito em termos matemáticos (3), para o qual o estudante deve juntar a informação do enunciado da tarefa e as simplificações feitas, a partir de uma representação matemática que possua todos os dados necessários para resolver a tarefa, podendo utilizar para tal fim uma representação algébrica, uma representação visual, entre outros tipos de representação. Esse subprocesso requer que o estudante escolha um tipo de conhecimento matemático prévio que lhe resulte melhor para trabalhar, pois pode ser possível que lhe seja mais fácil trabalhar com um ou outro tipo de modelo matemático, segundo sua experiência.

Construído o modelo matemático, o estudante ingressa ao chamado mundo matemático. O modelo deve ser usado para obter resultados matemáticos (4), onde novamente serão importantes os conhecimentos prévios que o estudante tenha, neste caso, quanto a processos de resolução para trabalhar esse tipo de modelo (no caso de SEL, processos baseados em procedimentos puramente algébricos, procedimentos de redução de matrizes, procedimentos com determinantes, entre outros). Os resultados obtidos deverão ser posteriormente interpretados dentro da situação real proposta (5), obtendo dessa forma resultado reais. O processo termina quando se verifica que esses resultados satisfazem as condições iniciais impostas na situação (6).

Demandas e dificuldades associadas ao trabalho de tarefas de modelagem

Para Borromeo Ferri (2018), o processo de modelagem que o estudante desenvolve pode ser influenciado principalmente por três fatores: (1) estilos de pensamento matemático (visual, analítico, integrado), (2) experiências e conhecimento extra-matemático e (3) competências matemáticas de que o estudante dispõe. Por estilos de pensamento matemático entende-se “o modo como uma pessoa gosta de compreender e aprender matemática, e não à sua capacidade de compreender a matemática” (Borromeo Ferri, 2018, p.34).

No que concerne às competências matemáticas, as competências de modelagem constituem demandas de alta exigência cognitiva, pois, embora contribuam para a aprendizagem do estudante e para exercitar sua prática matemática, representam capacidades que o estudante comumente não exercita ao trabalhar com exercícios ou problemas em contextos meramente matemáticos (Blum, 2015). Essas competências estão diretamente ligadas com os subprocessos cognitivos que o estudante deve ultrapassar ao transitar entre uma e outra fase do ciclo de modelagem. O quadro 01 apresenta a relação entre competências de modelagem e os subprocessos associados ao modelo de processo de modelagem matemática segundo a perspectiva cognitiva.

Quadro 01 – competências envoltas em cada subprocesso do ciclo de modelagem

Competências de modelagem	Ações associadas às competências de modelagem	Subprocessos cognitivos
Para compreender o problema real e estabelecer um modelo baseado na realidade	Fazer suposições sobre o problema e simplificar a situação; reconhecer quantidades que influenciam a situação, identificar variáveis-chave; construir relações entre as variáveis; procurar informações disponíveis e fazer a diferenciação entre informações relevantes e irrelevantes.	(1) Compreender a tarefa (2) Simplificar/ estruturar a tarefa
Para criar um modelo matemático a partir do modelo real	Matematizar quantidades relevantes e suas relações; simplificar as quantidades relevantes e suas relações, se necessário, e reduzir seu número e complexidade; escolher notações matemáticas apropriadas e representar situações graficamente.	(3) Matematizar o modelo

Para resolver questões matemáticas dentro deste modelo matemático	Usar estratégias heurísticas, como a divisão do problema em problemas parciais, estabelecendo relações com problemas semelhantes ou análogos, reformulando o problema, visualizando o problema de uma forma diferente, variando as quantidades ou os dados disponíveis, etc; usar o conhecimento matemático para resolver o problema.	(4) Trabalhar matematicamente no modelo
Para interpretar resultados matemáticos em uma situação real	Interpretar resultados matemáticos em contextos extra-matemáticos; generalizar soluções que foram desenvolvidas para uma situação especial; visualizar soluções para um problema usando linguagem matemática apropriada e/ou para se comunicar sobre as soluções.	(5) Interpretar resultados matemáticos
Para validar a solução	Verificar criticamente e refletir sobre as soluções encontradas; revisar algumas partes do modelo ou passar novamente pelo processo de modelagem se as soluções não se ajustarem à situação; refletir sobre outras maneiras de resolver o problema ou se as soluções podem ser desenvolvidas de maneira diferente; geralmente questionam o modelo.	(6) Validar resultados dentro da situação real

Fonte: Maaß (2006, p. 116-117)

Para Blum (2015), é normal muitos estudantes apresentarem dificuldades logo na primeira atividade ou transição do ciclo de modelagem matemática (compreender a situação do problema), resistindo a fazer suposições (simplificar e estruturar), e a maior parte dos estudantes tem dificuldade para verificar se as suas soluções matemáticas fazem sentido no contexto do problema (validação).

Por outro lado, Galbraith e Stillman (2006) afirmam que a atividade de matematizar constitui umas das transições mais difíceis que o estudante deve enfrentar ao realizar tarefas de modelagem, e salientam que a tecnologia deve ser incluída no trabalho de tarefas de modelagem, sempre que seja possível, ajudando no tratamento dos dados.

Metodologia

Contexto, participantes e gestão de aula

Este estudo é baseado em um projeto de investigação que segue a linha de *investigação baseada em design* (PONTE; CARVALHO, MATA-PEREIRA; QUARESMA, 2016); investigação realizada em uma disciplina de álgebra linear da Universidade da Costa Rica, com recolha de dados fundamentada em dois ciclos de implementação, durante o segundo ciclo de 2021 e o primeiro ciclo de 2022. Em ambos os ciclos foram implementadas três tarefas de modelagem em diferentes momentos, nomeadamente, depois que os estudantes receberam a lecionação do conteúdo matemático correspondente à tarefa em estudo. As unidades temáticas trabalhadas em cada ciclo com as tarefas implementadas foram SEL e matrizes, espaços de vetores e transformações lineares. As tarefas foram implementadas com o objetivo de consolidar a aprendizagem dos conceitos de álgebra linear e promover competências de modelagem não trabalhadas usualmente com tarefas tradicionais baseadas em contextos matemáticos.

Os estudantes trabalharam individualmente cada tarefa durante uma semana, fora das aulas; posteriormente, enviaram suas resoluções em formato digital ao professor da disciplina de álgebra linear, que por sua vez entregou ao investigador as resoluções via e-mail.

Participaram do estudo doze estudantes de graduação (seis do sexo masculino e seis do sexo feminino) que frequentavam a disciplina de álgebra linear na mesma turma, a maioria estudantes de Engenharia cursando o primeiro ano do ensino superior. Os estudantes participantes frequentavam uma turma onde o professor a cargo utilizava o recurso tecnológico (o *Wolfram Mathematica* e/ou o *Geogebra*) para trabalhar a simplificação de cálculos ou visualizar objetos matemáticos associados a conceitos de álgebra linear. Ainda assim, a metodologia da disciplina se enfocava no trabalho de tarefas matemáticas baseadas em exercícios e/ou problemas em contextos matemáticos. Os estudantes foram escolhidos a partir de uma listagem com os nomes daqueles que manifestaram estar de acordo em participar do estudo investigativo, sem serem prejudicados na sua nota da disciplina, mas com a finalidade de complementar sua formação das aulas.

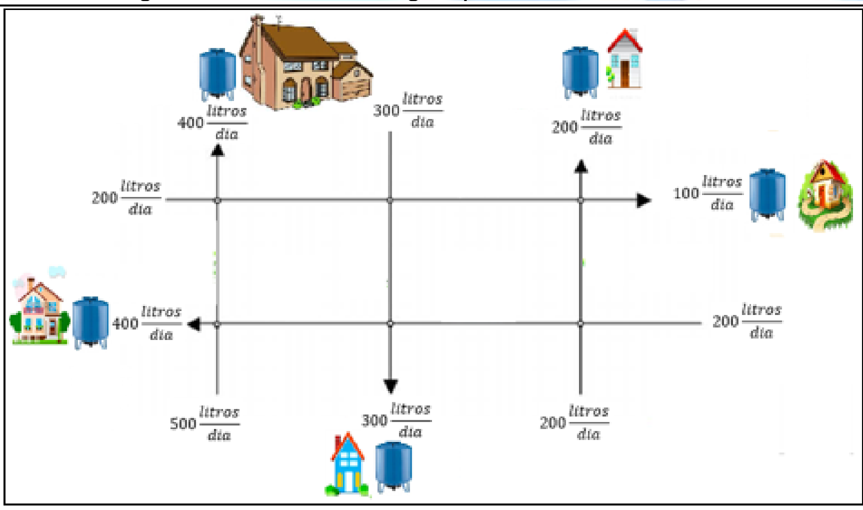
O investigador teve um papel não participante, sendo que seu papel foi o de fornecer a tarefa de modelagem ao professor da turma em tempos específicos do ciclo letivo, para que este último solicitasse aos estudantes participantes sua resolução, com caráter meramente formativo.

A tarefa de modelagem proposta

Este estudo incide sobre o trabalho desenvolvido pelos participantes na resolução de uma das tarefas de modelagem propostas durante o segundo ciclo de 2021, a primeira fase de implementação do projeto de investigação. A tarefa foi adaptada de Possani et al. (2010), visando fortalecer o conceito de SEL e conceitos associados através da aplicabilidade do conceito matemático em contextos extra-matemáticos. A tarefa de modelagem foi proposta após o ensino da unidade de matrizes e SEL, sendo a primeira tarefa desta natureza que os estudantes trabalhavam. Assim, os estudantes resolveram exercícios matemáticos sobre SEL antes de trabalhar na tarefa, mas não tinham trabalhado tarefas de modelagem previamente.

A tarefa adaptada refere-se a um contexto de fluxos de água em canos domésticos, e ela foi pensada como parte do contexto que envolve a maioria dos estudantes da turma, em particular o estudo do conceito de caudal, que é estudado por estudantes de diferentes engenharias, quer como parte de disciplinas de Física que devem frequentar, quer como parte de disciplinas próprias da área da Engenharia, por fazerem parte do seu programa de estudo. Os estudantes foram solicitados a utilizar seus conhecimentos matemáticos para analisar fluxos mínimos e máximos de água a considerarem em alguns trajetos da região apresentada na Figura 02, onde se desconhecia informação referente aos fluxos desses trajetos (segmentos entre intersecções de canos) e se conhecia informação referente aos fluxos de entrada constante nas casas representadas mediante imagens.

Figura 02 - fluxos de água por canos domésticos.



Como estudiante de ingenieria, ciencias exactas, u otras áreas de formación, se le ha solicitado ayuda por parte del funcionario que desarrolló el plano. Ayuda al funcionario a responder las siguientes preguntas:

1) Si pudiéramos establecer cantidades mínimas y máximas de flujo de agua por cada tubo que conforma el sistema de tubería (cada tramo) ¿cuál sería esta cantidad para cada tramo?, es decir, ¿cuáles son las cantidades de flujo que circulan por cada tramo de forma a mantener el agua circulando con normalidad, según la figura 1?
2) ¿Es posible cerrar el flujo de agua por uno de los tubos que conforma el sistema de tubería manteniendo la normalidad de caudal indicada en la figura 1? Si es así, indica al menos un tramo de la tubería que se puede cerrar
3) ¿En qué otra situación de la vida cotidiana se podría usar su modelo matemático utilizado para resolver este problema?

Fonte: Adaptado de Possani et al. (2010).

Na figura, as setas representam as direções dos fluxos de água. Os estudantes foram convidados a assumirem o papel de assessores, para dar informação vital sobre possíveis valores de fluxo a considerar nos trajetos desconhecidos, com resposta dirigida a profissionais de uma entidade costarriquenha dedicada ao fornecimento de água (*Acueductos y Alcantarillados*).

A tarefa inclui três perguntas que deveriam levar ao uso de conceitos de álgebra linear para criar um modelo matemático da situação real e fornecer soluções para o problema no mundo real, no sentido de que um modelo envolve um sistema conceitual para descrever, interpretar ou fazer previsões sobre uma situação real (Czocher, 2018). Em particular, foi solicitado encontrar as quantidades possíveis de fluxo pelos trajetos desconhecidos para que a quantidade de água que entra nas casas não fosse afetada (pergunta 1); foi também solicitado analisar se era possível ter zero caudal por algum dos trajetos com fluxo desconhecido sem afetar os fluxos de entrada nas casas (pergunta 2); e finalmente foi solicitado indicarem outros contextos onde eles poderiam utilizar o modelo matemático construído (pergunta 3), com o fim de evidenciar se eles eram capazes de fazer conexões entre o conceito de SEL e outros contextos extra-matemáticos que não fossem os fluxos de água.

Um modelo matemático razoável para descrever a situação exigiria que os estudantes escolhessem um SEL formado por seis equações (uma por cada intersecção entre canos), de tal forma que a análise de fluxos máximos e mínimos pudesse ser estudada a partir do conjunto solução associado ao SEL.

Recolha e análise de dados

A recolha de dados incluiu os trabalhos escritos dos estudantes sobre a tarefa proposta, incluindo o seus relatórios quanto a dificuldades manifestadas, e os arquivos digitais contendo seus trabalhos em *Wolfram Mathematica* (no caso dos estudantes que utilizaram o recurso tecnológico).

A análise descritiva e interpretativa dos dados (COHEN; MANION; MOHINSON, 2007) assenta no ciclo de modelagem segundo a perspectiva cognitiva (Figura 01), visando captar o processo de modelagem dos estudantes e as dificuldades que evidenciaram na resolução do problema proposto, para dessa forma descrever seus processos de modelagem.

Na próxima seção de resultados estão descritos esses processos e dificuldades realizados por dois estudantes, representativos de grupos diferentes identificados a partir das resoluções recolhidas. Alguns trechos de seus trabalhos são apresentados para destacar também as competências de modelagem que foram evidenciadas nas transições entre as diferentes fases do ciclo de modelagem, seguindo o quadro 01. Para garantir a confidencialidade dos dados, os nomes dos estudantes aqui utilizados são fictícios.

Análise de dados

As resoluções dos estudantes revelaram diferentes processos de modelagem, mas todos recorrendo ao SEL como modelos matemáticos construídos, pelo que a transição do resto do mundo ao mundo matemático foi com base nas conexões que os estudantes conseguiram fazer entre o conhecimento matemático adquirido em aulas prévias com a situação real fornecida. Alguns dos estudantes utilizaram o *Wolfram Mathematica* para trabalharem o modelo, enquanto outros trabalharam o modelo a pé, utilizando procedimentos de redução de matrizes (método Gauss-Jordan), e um estudante trabalhou o modelo por inspeção, isto é, provando valores que satisfizessem as equações do modelo. Ainda mais, houveram estudantes que acabaram seu processo de modelagem com a construção do modelo matemático, outro obtendo resultados matemáticos, e outros interpretando os resultados matemáticos obtidos. No Quadro 02 é apresentado um resumo de alguns elementos importantes relacionados ao trabalho da tarefa dos participantes, dividido em dois grupos, segundo o subprocesso cognitivo não evidenciado no processo de modelagem.

Quadro 02 – elementos associados ao processo de modelagem dos estudantes

Grupo	Subprocesso não evidenciado	Forma como trabalha o modelo matemático	Contexto extra-matemático com que associa seu modelo	Uso de tecnologia
1	Interpretar e validar resultados	Método Gauss-Jordam	Eletricidade	Sim (três estudantes) Não (dois estudantes)
2	Validar resultados	Método Gauss-Jordam (seis estudantes). Inspeção (um estudante)	Relações Insumo-produto e fluxo veicular.	Sim (três estudantes) Não (quatro estudantes)

Fonte: Elaboração própria.

A partir do quadro é possível observar que a metade dos estudantes recorre à utilização do recurso tecnológico para trabalhar a tarefa, no entanto, sua função é limitada à simplificação de resultados, em particular, em reduzir uma matriz aumentada associada a um SEL a sua forma escalonada. Além disso, percebe-se que nenhum dos estudantes consegue validar seus resultados reais, embora alguns deles tenham dado resposta à tarefa com os resultados matemáticos obtidos.

No que segue, é descrito o processo de modelagem de dois estudantes: o único estudante que evidenciou não obter resultados matemáticos e não utilizou recurso tecnológico (grupo 1), e um outro estudante que utiliza o recurso tecnológico e trabalhou o modelo mediante o método Gauss-Jordan, interpretando resultados matemáticos (grupo 2). A escolha desses estudantes se faz considerando que são polos opostos, no sentido em que se diferenciam em gênero e o primeiro estudante termina seu processo no modelo matemático, trabalhando-o um pouco, mas sem obter resultados matemáticos; enquanto o segundo estudante termina seu processo nos resultados reais, chegando a dar uma interpretação dos resultados matemáticos obtidos.

O caso da Joana e o Marcelo

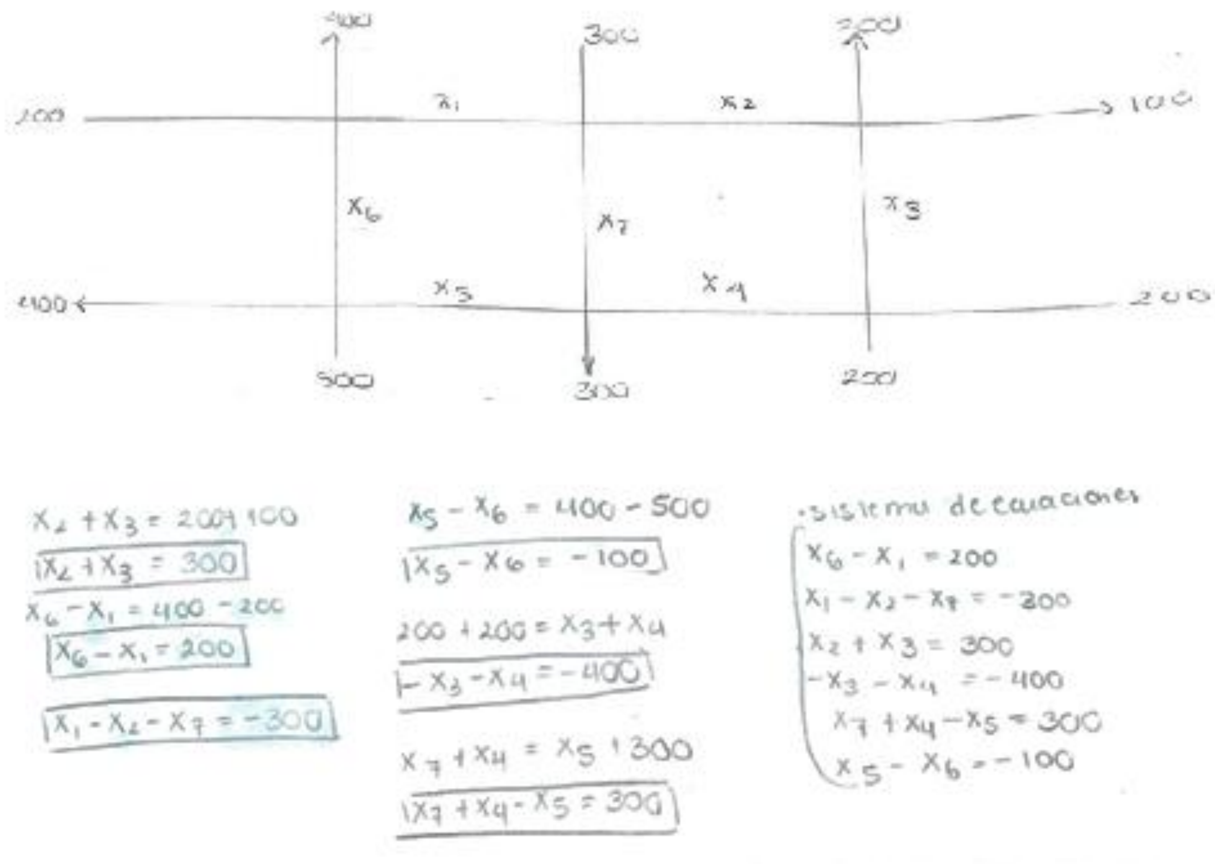
Competências para se deslocar do resto do mundo (começando por compreender a situação) ao mundo matemático (chegando à construção do modelo matemático) foram bem conseguidas pelos dois estudantes. Essas competências incluem (1) fazer suposições sobre a situação problema, em particular, assumir que o fluxo total que entra em um determinado ponto ou nó é igual à quantidade de fluxo que sai do mesmo ponto ou nó; (2) estruturar e simplificar a situação para construir um modelo real, atribuindo variáveis mediante subíndices às quantidades e entendendo a situação como um problema que pode ser modelado usando um SEL; (3) matematizar quantidades e variáveis conhecidas a partir de igualdades para formar um SEL. Algumas evidências dos aspectos anteriores se mostram a seguir.

Figura 03 - Explicação da Joana da construção do seu modelo matemático.

Para elaborar estas ecuaciones se debe tomar en cuenta que el
diagrama posee nodos, estos nodos pueden adquirir o dar energía
por lo que para averiguar los valores del flujo de cada casa hay
que tomar en cuenta que si el flujo se dirije hacia el nodo se toma
con signo positivo mientras que si se aleja se considera con
signo negativo. Para elaborar las ecuaciones se tomaran las entradas
del flujo de agua.

Fonte: Resolução digitalizada da Joana.

Figura 04 - modelo real e matemático da Joana.



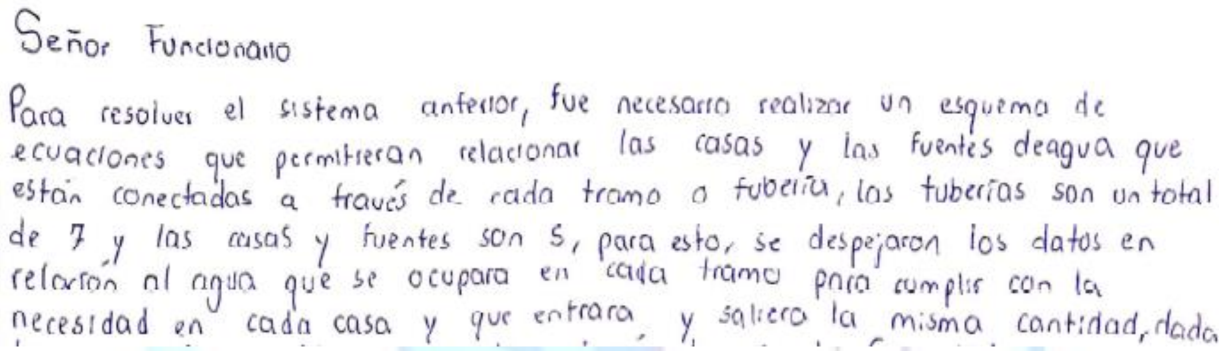
Fonte: Resolução digitalizada da Joana.

O diálogo da Figura 03 evidencia que o modelo real pensado pela Joana é baseado na experiência dela com outras situações similares de fluxo, em particular, a Joana utiliza o termo *nós* e acrescenta o termo *energia*. Essa declaração destaca uma representação mental de como ela pensou a construção do seu modelo real, não diretamente ligada a conhecimentos da álgebra linear, mas a quantidades vetoriais associadas a redes de nós, semelhante a como são pensados os problemas de circuitos elétricos na análise de nós em engenharia. Além disso, isso permite inferir que a Joana é uma das estudantes que associa seu modelo matemático construído com o contexto de eletricidade.

Na Figura 04 é possível apreciar o esquema que a Joana cria como modelo real (parte superior da figura), definindo variáveis para os trechos desconhecidos de fluxo com subíndices, consequência direta da simbologia que foi aprendida por ela e o resto da turma ao trabalharem SEL na assinatura da álgebra linear. Por outro lado, observa-se também o modelo matemático que a Joana cria a partir desse esquema, onde é possível evidenciar que a forma como ela cria as equações (lado inferior esquerdo) é efetivamente pensada em quantidades vetoriais centradas nos fluxos de entrada. Pode-se observar isso na segunda equação, onde $x_6 - x_1 = 200$ faz referência ao fluxo de entrada na primeira intersecção (canto esquerdo superior), sendo que x_6 é colocado com sinal positivo na frente porque o fluxo vai entrando nesse nó, enquanto x_1 é colocado com sinal negativo na frente, pois por hipótese o fluxo vai saindo do nó, logo, $-x_1$ representa o fluxo que vai entrando no nó. Ainda assim, é interessante ver que a Joana não coloca a quantidade de fluxo constante entrante -$200 = (200 + -400)$ com o sinal negativo junto aos outros fluxos variáveis no lado esquerdo, mas coloca-o do lado direito da igualdade com sinal positivo, o que se interpreta que ela faz internamente uma arrumação de quantidades variáveis de um lado e constantes de outro, possivelmente com o objetivo de ir deixando da forma *típica* como se apresenta um SEL.

No caso do Marcelo, também se podem observar nas seguintes figuras certas evidências do seu trabalho:

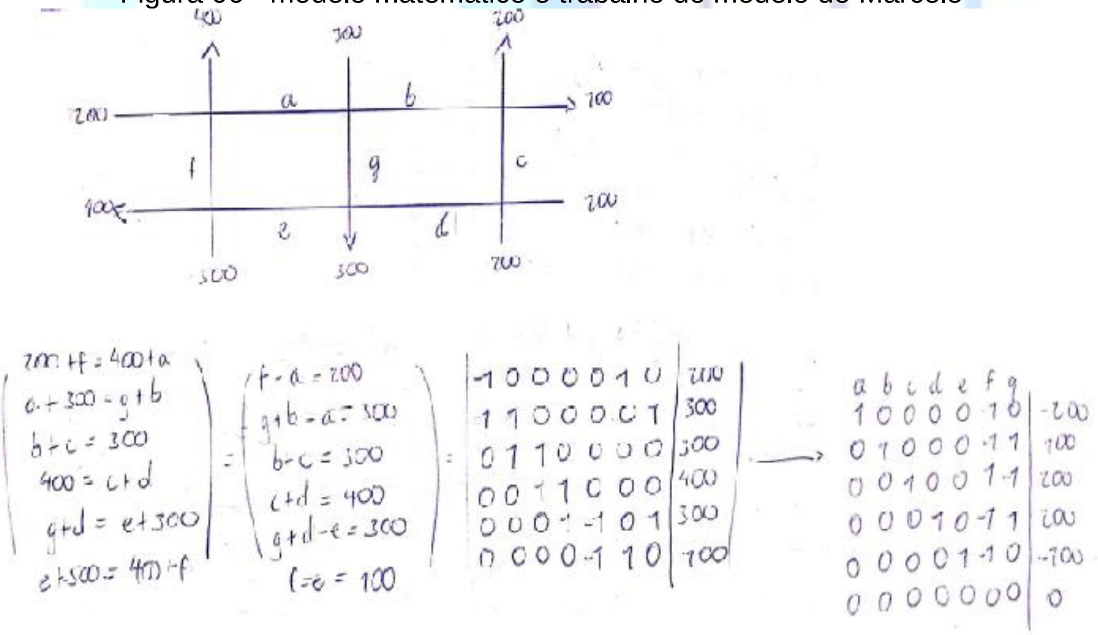
Figura 05 - Explicação do Marcelo sobre a construção do seu modelo matemático.


Señor Funcionario

Para resolver el sistema anterior, fue necesario realizar un esquema de ecuaciones que permitieran relacionar las casas y las fuentes deagua que están conectadas a través de cada tramo o tubería, las tuberías son un total de 7 y las casas y fuentes son 5, para esto, se despejaron los datos en relación al agua que se ocupara en cada tramo para cumplir con la necesidad en cada casa y que entrara y saliera la misma cantidad, dada

Fonte: Resolução digitalizada do Marcelo.

Figura 06 - modelo matemático e trabalho do modelo do Marcelo



Fonte: Resolução digitalizada do Marcelo.

Da Figura 05 é notável detectar que o Marcelo entra no papel de assessor, conforme solicitado no enunciado da tarefa. Além disso, ele, diferentemente da Joana, associa diretamente a situação problema com conhecimentos da álgebra linear, em particular o conceito de SEL e conjunto solução de um SEL, pois faz referência a encontrar quantidades desconhecidas a partir de "esquemas de equações" e "isolar os dados em relação à água". Essa afirmação, junto com a conta que ele faz de casas e trechos com fluxo desconhecido, é indicação de um modelo real pensado em função de um SEL, com o fim de, nas palavras dele, "cumprir com a necessidade de que em cada casa entre e saia a mesma quantidade dada", isto é, satisfazer as condições inicias da tarefa em quanto ao fluxo constante nas casas.

Em referência à Figura 06, pode-se observar o esquema do Marcelo (parte superior da figura) e o seu modelo matemático e trabalho sobre esse modelo com matrizes (parte inferior da figura). O Marcelo, diferentemente da Joana, utiliza letras do abecedário para nomear as variáveis, e formula as equações efetivamente pensadas como uma igualdade entre fluxos de entrada e saída, o qual se pode observar após analisar a primeira equação $200 + \mathrm{f} = 400 + a$, onde é possível inferir que o lado esquerdo corresponde ao fluxo de entrada e o lado direito ao fluxo de saída correspondente à primeira intersecção (canto superior esquerdo). Outro aspecto interessante é a forma como trabalha o modelo, mediante o método Gauss-Jordan. Na figura 06, observa-se a matriz aumentada associada ao SEL construído por Marcelo e uma matriz equivalente na forma escalonada. Marcelo recorre ao *Wolfram Mathematica* para obter esta última matriz - evidência disso é seu arquivo digital proporcionado como parte da resolução da tarefa.

Figura 07 - trabalho do modelo com recurso tecnológico do Marcelo

```
In[3]:= M = 
 -1 0 0 0  0 1 0 200
 -1 1 0 0  0 0 1 300
  0 1 1 0  0 0 0 300
  0 0 1 1  0 0 0 400
  0 0 0 1 -1 0 1 300
  0 0 0 0 -1 1 0 100

Out[3]= {{-1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 200}, {-1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 300},
 {0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 300}, {0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 400},
 {0, 0, 0, 1, -1, 0, 1, 300}, {0, 0, 0, 0, -1, 1, 0, 100}}

In[4]:= MatrixForm[RowReduce[M]]
        forma de mat·· reduce filas

Out[4]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -200 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 200 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 200 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Fonte: Arquivo Wolfram do Marcelo

Na Figura 07 é possível apreciar que o Marcelo utiliza a função *RowReduce* do *Wolfram Mathematica* para obter uma matriz na forma escalonada equivalente à matriz aumentada do SEL, pondo em prática algumas das aprendizagens adquiridas na aula da álgebra linear para o tratamento de exercícios matemáticos.

Apesar das evidências anteriores, ao princípio, esses dois estudantes, igual que o resto da turma, manifestaram ter dificuldades para criar seu modelo real, conforme evidencia, por exemplo, um trecho do relatório da Joana, em relação a suas dificuldades percebidas na tarefa.

Figura 08 - Dificuldade da Joana na resolução da tarefa.

Problemas:

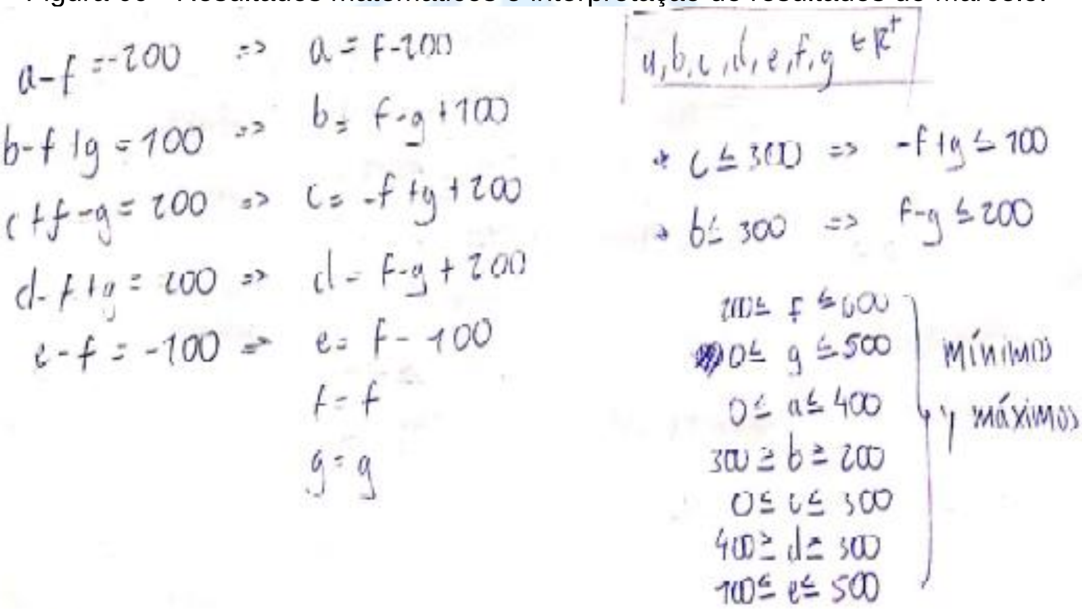
El relacionar el sistema de ecuaciones con los flujos de agua y poder desarrollarlos, encontrar estrategias que ayudaran a averiguar el valor que conforma cada flujo. de cada entrada.

Fonte: Resolução digitalizada da Joana.

A resposta da Joana evidencia a presença de dificuldades no princípio do trabalho da tarefa, associadas a fazer conexões entre a situação problema e os conhecimentos matemáticos adquiridos no curso de álgebra linear, embora ela e a turma toda tenha conseguido superar essas dificuldades; no caso da Joana, possivelmente mediante as conexões que conseguiu fazer entre o contexto da eletricidade e o contexto da situação problema apresentada.

No que concerne a competências para os estudantes se deslocarem do modelo matemático novamente à situação problema apresentada, a Joana não mostra mais que o trabalho feito na Figura 04, não conseguindo obter resultados matemáticos. No caso do Marcelo, a partir da matriz obtida com o recurso tecnológico ele traduz essa informação matricial novamente como SEL, obtendo o conjunto solução do SEL e fazendo interpretações desse conjunto solução segundo a situação problema, conforme deixa ver a Figura 09

Figura 09 - Resultados matemáticos e interpretação de resultados do Marcelo.



Fonte: Resolução digitalizada do Marcelo.

Pela Figura 09 pode-se observar que o Marcelo possui competências para generalizar soluções matemáticas em termos da situação problema, em particular, para interpretar que as variáveis do conjunto solução devem ficar em termos dos parâmetros f e g, e estes ao mesmo tempo devem ser quantidades positivas igual que as variáveis do conjunto solução. O anterior é evidenciado depois que ele escreve a, b, c, d, e, f, g como quantidades que pertencem ao conjunto dos números reais positivos, mas também evidenciado das desigualdades que ele planteia, produto de considerar as variáveis a, b, c, d, e como quantidades positivas e em termos de f e g. Além disso, o Marcelo evidencia visualizar soluções para um problema usando linguagem matemática apropriada, nomeadamente os símbolos de conjuntos e as desigualdades escritas em linguagem matemática e não em linguagem coloquial.

Apesar de que o Marcelo obtém algumas desigualdades válidas, como é, por exemplo, o caso de $f \geq 200$ (deduzida da informação das soluções associadas às variáveis a e e), existem outras desigualdades que não chega a analisar bem, achando que os máximos e mínimos dados satisfazem as demandas da situação problema. Essa confiança se torna uma dificuldade evidenciada do Marcelo, produto dele não validar os seus resultados reais obtidos, conforme acontecido também com o resto da turma que obteve resultados matemáticos e tentou interpretar os mesmos. Assim, por exemplo, o fato dele considerar $200 \leq f \leq 600$ e $0 \leq g \leq 500$ não leva a resultados válidos totalmente dentro do contexto da situação problema, pois para o fluxo $d = f - g + 200$ se obtém uma quantidade negativa no caso de, por exemplo, $f = 200, g = 500$; e sendo d um fluxo seu valor sempre deve ser positivo.

Conclusões

O presente estudo foi resultado de uma investigação desenvolvida em torno da incorporação de tarefas de modelagem matemática numa disciplina de Álgebra Linear, como tarefas que permitem a aprendizagem e consolidação de conceitos a partir da aplicabilidade destes em contextos extra-matemáticos e o desenvolvimento de competências matemáticas pouco fomentadas em aulas tradicionais.

Foram estabelecidas duas questões em relação ao trabalho feito pelos estudantes envolvidos neste estudo. No que concerne à primeira questão, referente aos processos de modelagem dos estudantes, é possível concluir que as tarefas de modelagem permitiram mobilizar conhecimentos de álgebra linear em todos os estudantes, ligados em particular ao conceito de SEL, conjunto solução de um SEL, métodos de resolução de SEL como são os métodos matriciais baseados na busca de matrizes equivalentes. A forma de usar os SEL para encontrar resultados matemáticos esteve enquadrada na resolução a pé e a resolução mediante recurso tecnológico. Esta mobilização de conceitos, embora difícil ao princípio para os estudantes, permite refletir sobre a importância de propor este tipo de tarefas para consolidar conceitos aprendidos e levar o estudante a indagar mais por si mesmo sobre como se aplicam os conceitos matemáticos para dar resposta à tarefa, permitindo concluir que, embora uma tarefa de modelagem seja planejada desde certa perspectiva, no caminho podem ver-se involucradas outras perspectivas de modelagem segundo o papel que o estudante tome. Por outro lado, em relação às fases do ciclo de modelagem, os estudantes conseguem se deslocar do resto do mundo ao mundo matemático, mas têm dificuldade para se deslocar no sentido contrário, o que está associado não estarem acostumados a trabalhar atividades que fomentem a interpretação e validação de resultados, consequência de uma formação prévia carente do fomento de competências matemáticas ligadas a refletir sobre o sentido dos resultados matemáticos num determinado contexto real.

No que concerne à segunda questão, sobre dificuldades evidenciadas nos estudantes, pode-se dizer que existem as dificuldades manifestadas, mas superadas pelos estudantes, e as dificuldades não superadas. O primeiro tipo de dificuldade está associado ao deslocamento do resto do mundo ao mundo matemático, e ela é superada quando o estudante tem tempo de refletir sobre a situação problema, enquanto o segundo tipo de dificuldade não depende do tempo dado ao estudante para trabalhar a tarefa de modelagem, mas da experiência previa que tem tido o estudante com tarefas de modelagem, conforme referido por Borromeo (2018) como um dos aspetos que afeitam o processo de modelagem do indivíduo. O anterior implica uma necessidade de dar mais continuidade ao trabalho deste tipo de tarefas, não começando na disciplina de Álgebra Linear, mas em disciplinas previas de Matemática onde o estudante se enfrenta a algumas aplicações dos conceitos aprendidos, como é o caso do cálculo em uma variável ou disciplinas de menor abstração dos conceitos matemáticos.

Referências

BIANCHINI, Barbara; DE LIMA, Gabriel; GOMES, Eloiza. Linear algebra in engineering: an analysis of Latin American studies. **ZDM**, v. 51, n. 7, p. 1097–1110, 2019.

BIGGS, John; TANG, Catherine. **Teaching for quality learning at the university**. 4. ed. London: Mc Graw-Hill, 2011.

BLUM, Werner.; BORROMEO FERRI, Rita. Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? **Journal of Mathematical Modelling and Application**, v. 1, n. 1, p. 45–48, 2009.

BLUM, Werner. Quality Teaching of Mathematical Modelling: What Do We Know, What Can We Do? **The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education**, p. 73–96, 2015.

BORROMEO FERRI, Rita. Estabelecendo conexões com a vida real na prática da aula de Matemática. **Educação e Matemática**, n. 110, p. 19–25, 2007.

BORROMEO FERRI, Rita. **Learning How to Teach Mathematical Modeling in School and Teacher Education**. Cham: Springer International Publishing, 2018.

CÁRCAMO, Andrea; FORTUNY, Josep Maria; GÓMEZ, Joan Vicenç. Mathematical modelling and the learning trajectory: tools to support the teaching of linear algebra. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 48, n. 3, p. 338–352, 2016.

CHINNAPPAN, Mohan. Cognitive load and modelling of an algebra problem. **Mathematics Education Research Journal**, v. 22, n. 2, p. 8–23, 2010.

COSTA, Viviana; ROSSIGNOLI, Raúl. Enseñanza del algebra lineal en una facultad de ingeniería: Aspectos metodológicos y didácticos. **Revista Educación en Ingeniería**, v. 12, n. 23, p. 49, 2017.

COHEN, Louis; MANION, Lawrence; MOHINSON, Keith. **Research methods in education**. 7. ed. Routledge, London: 2011.

DA PONTE, João Pedro; CARVALHO, Renata; MATA-PEREIRA, Joana; QUARESMA, Marisa. Investigação baseada em design para compreender e melhorar as práticas educativas. **Quadrante**, v. 25, n. 2, p. 77–98, 30 dez. 2016.

GALBRAITH, Peter; STILLMAN, Gloria. A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. **ZDM**, v. 38, n. 2, p. 143–162, 2006.

GREEFRATH, Gilbert. Using Technologies: New Possibilities of Teaching and Learning Modelling – Overview. **International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling**, p. 301–304, 2011.

KAISER, Gabriele; SRIRAMAN, Bharath. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. **ZDM**, v. 38, n. 3, p. 302–310, 2006.

MALLET, Dann. Multiple representations for systems of linear equations via the computer algebra system Maple. **International Electronic Journal of Mathematics Education**, v. 2, n.1, p. 16-32, 2007.

POSSANI, Edgar; TRIGUEROS, María; PRECIADO, Gustavo; Lozano, María Dolores. Use of models in the teaching of linear algebra. **Linear Algebra and its Applications**, v. 432, n. 8, p. 2125–2140, 2010.

RAMÍREZ, Guillermo. **El papel de la modelación matemática en el aprendizaje del álgebra lineal con estudiantes de áreas de la Ingeniería, Ciencias Básicas y Ciencias Económicas**. Sistema de Información y Gestión de Proyectos, Programas y Actividades (SIGPRO), dezembro, 2022. Disponível em https://vinv.ucr.ac.cr/sigpro/web/projects/C0239. Acceso em: 24 de abril, 2023.

TRIGUEROS, Maria.; POSSANI, Edgar. Using an economics model for teaching linear algebra. **Linear Algebra and its Applications**, v. 438, n. 4, p. 1779–1792, 2013.

Submetido em abril de 2023.

Aceito em maio de 2023.