REVISTA DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL (UFMS)

ISSN 2359-2842 Volume 16, número 42 – 2023 DOI: 10.46312/pem.v16i42.18315

Tarefas Matemáticas Investigativas de Alta Demanda Cognitiva

Investigative Mathematics Tasks of High Cognitive Demand

Agostinho Iaqchan Ryokiti Homa[1]

Claudia Lisete Oliveira Groenwald[2]

Salvador Llinares[3]

RESUMO

Com o objetivo de interpretar com professores como observar as tarefas matemáticas, planejar o ensino, olhar para o próprio ensino e interpretar o pensamento matemático dos alunos para aprimorar a prática docente, realizou-se uma pesquisa com professores em formação inicial e continuada que utilizaram os objetos de aprendizagem apresentados neste artigo, que fundamentam-se no reconhecimento e interpretação da demanda cognitiva necessária para a realização das atividades com os objetos de aprendizagem propostos e, desta forma, antecipar as respostas dos alunos, levando o professor a novos cursos de ação com base na interpretação dessas respostas e dos eventos em sala de aula. Os resultados indicam que os professores em formação inicial e continuada necessitam se apropriar das tarefas no que tange a sua execução pelos alunos, refletindo sobre as possibilidades didáticas das mesmas, como um meio de desenvolver as competências profissionais que aprimoram a prática docente. Também, identifica-se que as tarefas investigativas propostas são tarefas de alta demanda cognitiva que possibilitam que os alunos pensem em fazer matemática, superando a memorização e procedimentos soltos, sem conexão.

PALAVRAS-CHAVE: Educação Matemática. Formação de Professores. Tarefas matemáticas. Demanda Cognitiva. Tarefas investigativas.

ABSTRACT

To discuss with teachers how to observe mathematical tasks, plan teaching, reflect on their own teaching, and interpret students' mathematical thinking to improve teaching practice, a study was

[1] Doutor em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Luterana do Brasil. Docente na Universidade Luterana do Brasil. E-mail: iaqchan@hotmail.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5771-1319

[2] Doutora em Ciências da Educação pela Universidade de Salamanca na Espanha, e Pós-doutora em Educação Matemática pela Universidade de La Laguna em Tenerife, Espanha. Docente na Universidade Luterana do Brasil. E-mail: claudiag@ulbra.br. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7345-8205.

[3] Doutor em Ciências da Educação pela Universidad de Sevilla, Docente na Universidad de Alicante. E-mail: sllinares@ua.es. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0801-316X.

conducted with teachers in initial and continuing education and who used the learning objects presented in this article.These learning objects are based on the recognition and interpretation of the cognitive demand required for the completion of activities with the proposed learning objects, thereby anticipating student responses and leading the teacher to new courses of action based on the interpretation of these responses and classroom events. The results indicate that teachers in initial and continued education need to appropriate the tasks with regards to their execution by students, reflecting on the didactic possibilities of the tasks as a means of developing the professional competencies that improve teaching practice. In addition, it is identified that the proposed investigative tasks are tasks of high cognitive demand that allow students to think about doing mathematics, overcoming memorization and loose procedures, without connection.

KEYWORDS: Mathematics Education. Teacher Education. Mathematical Tasks. Cognitive Demand. Investigative Tasks.

Introdução

Este artigo apresenta três objetos de aprendizagem que são resultados da pesquisa em formação de professores de Matemática focada em caracterizar o desenvolvimento de competências profissionais na formação inicial e continuada. Os exemplos apresentados são tarefas investigativas (tarefas de alta demanda cognitiva) desenvolvidas pelos pesquisadores do Grupo de Estudos Curriculares de Educação Matemática (GECEM), que atuam no Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIM) da Universidade Luterana do Brasil (ULBRA), em Canoas, Rio Grande do Sul, em parceria com o professor Salvador Llinares Ciscar da Universidade de Alicante, na Espanha, que contribuiu com a fundamentação teórica e sua importância na relação teoria e prática na formação de professores de Matemática. As tarefas foram desenvolvidas pelos pesquisadores e validadas com professores em formação inicial e continuada em termos de aplicabilidades e perspectivas metodológicas.

De acordo com Llinares (2013) as reflexões sobre a aprendizagem profissional dos professores destacam a aprendizagem ao longo de suas carreiras como um caminho para a melhoria da prática pedagógica. Ele também afirma que a aprendizagem profissional não ocorre apenas em cursos de formação institucionalizados, mas permeia cada ação pedagógica do professor, incluindo a elaboração deliberada de tarefas matemáticas detalhadas, a previsão do que e como se espera que o aluno resolva uma tarefa proposta e a reflexão (pelo professor) sobre a eficácia do planejado. Esses processos exemplificam ciclos de melhoria contínua da prática docente, com planejamento, reflexão e replanejamento (LLINARES, 2013).

Os pontos teóricos que fundamentam este texto são a prática docente profissional do professor de Matemática e as tarefas matemáticas, descritas a seguir.

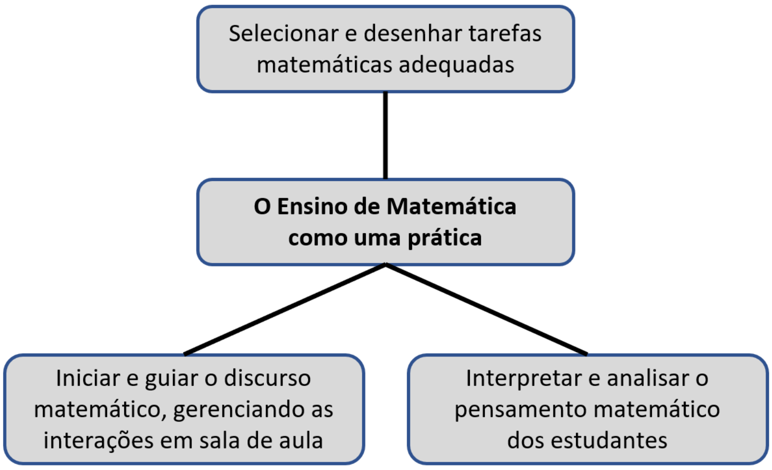
A prática docente profissional do professor de Matemática

O ensino de Matemática é considerado uma tarefa complexa que envolve a tomada de decisões que incluem diferentes conhecimentos (BALL, THAMES e PHELPS, 2008; ESCUDERO, SÁNCHEZ, 2007), exigindo que os docentes possuam uma compreensão ampla e aprofundada do conhecimento matemático a ser ensinado, bem como uma visão clara acerca do desenvolvimento e progresso do aprendizado dos estudantes. Em outras palavras, o ensino de matemática (entendido como uma prática que deve ser aprendida) requer uma compreensão clara do que os alunos precisam para se desenvolverem matematicamente; dos objetivos da formação em Matemática; e de considerar esses objetivos para orientar a tomada de decisões durante o processo de ensino (NCTM, 2015).

Portanto, o professor precisa aprender a gerar conhecimento e informações sobre as situações nas quais precisa agir, a fim de tomar decisões pertinentes para desenvolver o processo de ensinar e aprender matemática.

Llinares (2008) apresenta um sistema de atividades do ensino da Matemática como uma prática a ser aprendida, conforme a Figura 1.

Figura 1– O ensino da Matemática como uma prática



Fonte: Adaptada de Llinares (2008).

Destaca-se, de acordo com Llinares (2013), que existem três elementos que devem ser caracterizados para poder maximizar a prática de ensinar Matemática: o significado de matematicamente competente; as características da tarefa matemática dirigida ao desenvolvimento da competência matemática; as características da classe que apoiam a geração/criação da competência Matemática.

Ainda, para Llinares (2013), chegar a ser matematicamente competente está relacionado ao desenvolvimento da compreensão do conteúdo matemático. Quando se compreendem as noções e procedimentos matemáticos se pode utilizá-los de maneira flexível e adaptá-los em novas situações, permitindo estabelecer relações entre eles e utilizá-los para aprender um novo conteúdo matemático.

Compreender está associado a entender o significado do conceito a ser desenvolvido, compreender como funcionam os procedimentos, entender como se relacionam uns com os outros e compreender por que funcionam da maneira como são feitos. Tais conhecimentos devem ser desenvolvidos na formação inicial e, também, ao longo da vida profissional, pois exige ações profissionais bem definidas e relações profundas entre a teoria e a prática docente.

Portanto ser competente matematicamente deve relacionar-se com o ser capaz de realizar determinada tarefa matemática e compreender por que podem ser utilizadas algumas noções e procedimentos para resolvê-las, assim como a possibilidade de argumentar a conveniência de seu uso (LLINARES, 2015).

O professor deve estar sempre preparado para desenvolver aulas que vão ao encontro do interesse e entendimento do aluno, buscando integrar seu conhecimento às tarefas que possibilitem ao professor intervir como agente construtor do seu pensamento.

A escolha de tarefas não é um processo simples, o professor deve analisar, refletir e idealizar o que pretende alcançar na aprendizagem do aluno. Ao escolher uma determinada tarefa o professor cria a expectativa de auxiliar seu aluno a superar suas dificuldades, este processo exige a reflexão constante sobre suas práticas ao desenvolver seu planejamento didático.

Neste contexto apresenta-se o conceito de tarefas matemáticas.

Tarefas matemáticas: possibilidades e perspectivas didáticas

Para Jesus, Cyrino e Oliveira (2018) a expressão tarefa matemática é frequentemente utilizada com significados diferentes – pode se referir (nem sempre de forma adequada) a “questões, atividades, problemas, práticas, novas aprendizagens, lições, exemplos, experiências de aprendizagem, projetos, investigações ou propostas de trabalho para casa” (WALLS, 2005, p. 752).

Stein, Grover e Henningsen (1996, p. 460) definem como tarefa "uma atividade em sala de aula cujo objetivo é focar a atenção dos alunos em um tópico particular."

Smith e Stein (1998) definem tarefa matemática como uma proposta de trabalho para os alunos. Trata-se de uma situação ou conjunto de situações direcionadas ao desenvolvimento de uma ideia matemática particular e que se situa “na interação entre ensino e aprendizagem” (STEIN et al., 2000, p. 25), já que o professor seleciona as tarefas matemáticas tendo em conta promover o engajamento dos alunos no processo de ensino e aprendizagem, para os quais elas constituem (diferentes) oportunidades de aprendizagem.

Uma tarefa matemática é definida como parte de uma atividade de aula que visa desenvolver um determinado conceito ou conteúdo matemático (SMITH, STEIN, 1998). Essa tarefa pode ser classificada como boa quando tem o potencial de envolver o aluno em altos níveis de pensamento cognitivo e raciocínio lógico. De acordo com Smith e Stein (1998), uma tarefa rotineira não é necessariamente classificada como uma tarefa Matemática. Além disso, é importante considerar que o nível de dificuldade de uma tarefa matemática pode variar de acordo com a idade, o ano escolar e o conhecimento prévio do aluno. Portanto, uma tarefa que não é considerada desafiadora para um aluno de um determinado ano letivo pode ser considerada difícil para outro aluno de um ano letivo anterior.

Segundo Smith e Stein (1998), os tipos de tarefas devem corresponder aos objetivos que se quer atingir na aprendizagem do aluno: se o objetivo é aumentar a capacidade e a eficácia dos alunos de lembrar fatos básicos, definições e regras (lembrá-los da memória), então as tarefas - atividades centradas na memorização - podem ser apropriadas; se o objetivo é aumentar a velocidade e a precisão dos alunos na resolução de problemas de rotina, então tarefas - atividades focadas no uso de procedimentos sem ter um "senso conceitual" do procedimento podem ser apropriadas; se o objetivo é envolver os estudantes em formas mais complexas de raciocínio e desenvolver habilidades de comunicação, é necessário propor outros tipos de tarefas – atividades que exigem o fazer Matemática, a partir de um pensamento complexo e não algorítmico no qual os alunos possam explorar e compreender os conceitos matemáticos.

Ao apresentar uma tarefa matemática aos seus alunos, o professor a planeja a fim de que estes atinjam um objetivo, criando assim uma interação entre o professor, o conteúdo e os alunos, com o propósito de que estes desenvolvam a competência matemática prevista.

Smith e Stein (2011) descrevem várias tarefas matemáticas que podem ser utilizadas em sala de aula para desenvolver habilidades dos alunos. Alguns exemplos incluem:

- Problemas - Os alunos são apresentados a um problema para resolver e devem usar suas habilidades matemáticas para encontrar uma solução;

- Tarefas de modelagem matemática - Os alunos trabalham em projetos que requerem o uso de habilidades matemáticas para resolver um problema do mundo real;

- Tarefas de visualização - Os alunos utilizam gráficos, diagramas e outros tipos de representações visuais para compreender conceitos matemáticos;

- Tarefas de estimativa - Os alunos fazem estimativas aproximadas de quantidades, para desenvolver sua compreensão dos números e da magnitude;

- Tarefas de justificação - Os alunos são convidados a justificar seus raciocínios e soluções, fornecendo uma justificativa matemática para seu pensamento;

- Tarefas de investigação matemática - Os alunos exploram um conceito matemático de forma livre e investigativa, para desenvolver uma compreensão mais profunda;

- Tarefas de conexão - Os alunos fazem conexões entre diferentes conceitos matemáticos, para desenvolver uma compreensão mais holística da disciplina.

Para tanto, o professor deve propor atividades matemáticas do tipo: formulação, representação, resolução e (ou) comunicação de problemas matemáticos a partir de uma situação. Com isso busca-se desenvolver no aluno uma determinada competência Matemática, junto a seu processo de aprendizagem. Devido à importância das tarefas no processo de ensino e aprendizagem, o professor deve ter claro que essas tarefas são mais abertas do que o conteúdo que será mobilizado para realizá-las, deve-se rever as formas de implementá-las a fim de focar a atenção dos alunos sobre uma determinada ideia matemática (STEIN et al., 2000) porque implicam processos cognitivos relacionados com a compreensão, estabelecimento de estratégias, procedimentos e validação (CYRINO, JESUS, 2014)

Penalva e Llinares (2011) trazem o termo demanda cognitiva informando que se trata da classe e nível de pensamento que se é exigido dos estudantes para a resolução da tarefa, apontando o que se alcança e o que se aprende em cada nível.

Segundo Stein e Smith (1998) as tarefas matemáticas podem ser consideradas em duas categorias, aquelas com baixo nível de exigência cognitiva, que exigem que os alunos memorizem rotineiramente procedimentos que levam a um tipo de oportunidade para o aluno pensar; e as de alto nível de demanda cognitiva, que exige que os alunos pensem conceitualmente e os encoraja a realizarem conexões que levam a um conjunto diferente de oportunidades para os alunos pensarem. Os autores classificam em quatro níveis de demanda cognitiva:

tarefas que exigem a memorização (Nível 1); tarefas que usam procedimentos sem conexão (Nível 2); tarefas que utilizam procedimentos com conexão (Nível 3); tarefas que exigem o "fazer Matemática" (Nível 4).

De acordo com Smith e Stein (1998) as características de cada nível são as descritas a seguir.

Tarefa de Nível 1 são tarefas que envolvem a reprodução de fórmulas e regras, com memorização, sem reflexões sobre as definições que estão sendo vistas. Classificam-se como atividades de nível 1 de demanda cognitiva, pois requerem apenas a aplicação de uma regra memorizada, sem fazer reforços ao conceito a ser apresentado.

Tarefas de Nível 2 são tarefas que exigem recurso por algoritmo, focada na obtenção das respostas que ainda não fazem conexão com os conceitos matemáticos. Classificam-se como atividades de nível 2 de demanda cognitiva, por ainda dar ênfase na resposta, portanto uma tarefa que utiliza procedimento sem conexão.

Tarefas de Nível 3 são tarefas que estão intimamente relacionadas com os conceitos ou procedimentos buscando a compreensão destes, apresentando claras conexões com as ideias ao subvalorizar o algoritmo pois o êxito se dará pela exigência de algum grau de esforço cognitivo. Classificam-se como atividades de nível 3 de demanda cognitiva, pois existe uma relação com conceitos matemáticos, exigindo interpretação por parte do aluno, mesmo que exista um indicativo do conhecimento a ser aplicado. É uma tarefa que exige um procedimento com conexão.

Tarefas de Nível 4 são tarefas que exigem um alto esforço cognitivo pois executam a tarefa por conhecerem e apresentarem a compreensão conceitual da Matemática, verificado pelo pensamento complexo e muito distante do algorítmico em questões que não apresentam um indicativo de qual recurso deverá ser usado nem uma instrução prévia. Classificam-se como atividades de nível 4 de demanda cognitiva, pois exigem o fazer Matemática, uma vez que é necessário um aprofundado nível cognitivo a partir de uma questão que não dá indicativos de resolução. O aluno deve resgatar seus conhecimentos matemáticos e testá-los, em um contexto de maior complexidade.

Compreendendo os diferentes níveis de exigência cognitiva, o professor pode selecionar ou planejar as tarefas que atendam aos objetivos didáticos. É importante ter presente que a seleção de tarefas de alto nível não conduz necessariamente à participação dos alunos em formas complexas de raciocínio (CYRINO, JESUS, 2014), porque a forma como a tarefa é realizada em sala de aula pode alterar o nível de exigência cognitiva.

Apesar de serem desenvolvidas tarefas de alto nível cognitivo, que proporcionem situações que exijam pensamentos complexos e não algorítmicos (fazer Matemática) ou procedimentos que desenvolvam o nível de compreensão de conceitos matemáticos (procedimentos com conexões a conceitos e significados), é preciso entender que essas tarefas são definidas de acordo com as expectativas dos alunos ao se envolverem com a tarefa, mas que podem não ocorrer em sala de aula.Por isso, é fundamental que o professor, em tarefas com alto nível de exigência cognitiva, dê tempo suficiente para a execução da tarefa e não a simplifique, eliminando os aspectos desafiadores das tarefas para os alunos, bem como não dando as respostas ou caminhos para os alunos seguirem (STEIN et al., 2000).

Apresentam-se a seguir objetos de aprendizagem que exigem alto nível de demanda cognitiva ao serem resolvidos. Os objetos referidos foram construídos no software GeoGebra e validados por um grupo de estudantes de Licenciatura em Matemática da ULBRA e por professores de um grupo de formação continuada.

Tarefas investigativas em matemática

As ações exigidas nos objetos de aprendizagem são consideradas tarefas que incentivam os alunos a realizarem investigações matemáticas e propiciam oportunidades de aprendizagem para os estudantes, mas também são valiosas para os professores, que podem refletir sobre as possibilidades pedagógicas que elas proporcionam.

Pesquisas segundo Demo (2011); Mishra e Koehler, (2006); Niess e Gillow-Wiles, (2017); Ronau, Rakes e Niess (2011) mostram que alguns dos motivos para o não uso da tecnologia em sala de aula são: a falta de preparo do professor em seu uso; a precariedade dos laboratórios; e a falta de conectividade. Entende-se que a formação dos professores diante das constantes atualizações tecnológicas torna-se uma tarefa desafiadora e difícil para os professores manterem-se atualizados.

Nessa perspectiva, os esforços do GECEM no desenvolvimento de materiais didáticos têm como prerrogativa aliviar os professores em sua formação técnica e específica em tecnologias, como a programação. Dessa forma, os docentes podem concentrar seus esforços no processo de como utilizar essas tecnologias em sala de aula e antecipar o pensamento matemático exigido dos alunos por meio delas.

Apresentam-se três objetos de aprendizagem que foram trabalhados com um grupo de professores de matemática em formação inicial e outro grupo em formação continuada. Os professores analisaram, refletiram e idealizaram o que pretendiam alcançar na aprendizagem dos alunos, visando auxiliar seu aluno a superar suas dificuldades e qualificando suas práticas ao desenvolver seu planejamento didático.

Jogos didáticos que levam a investigações e desenvolvimento de estratégias matemáticas

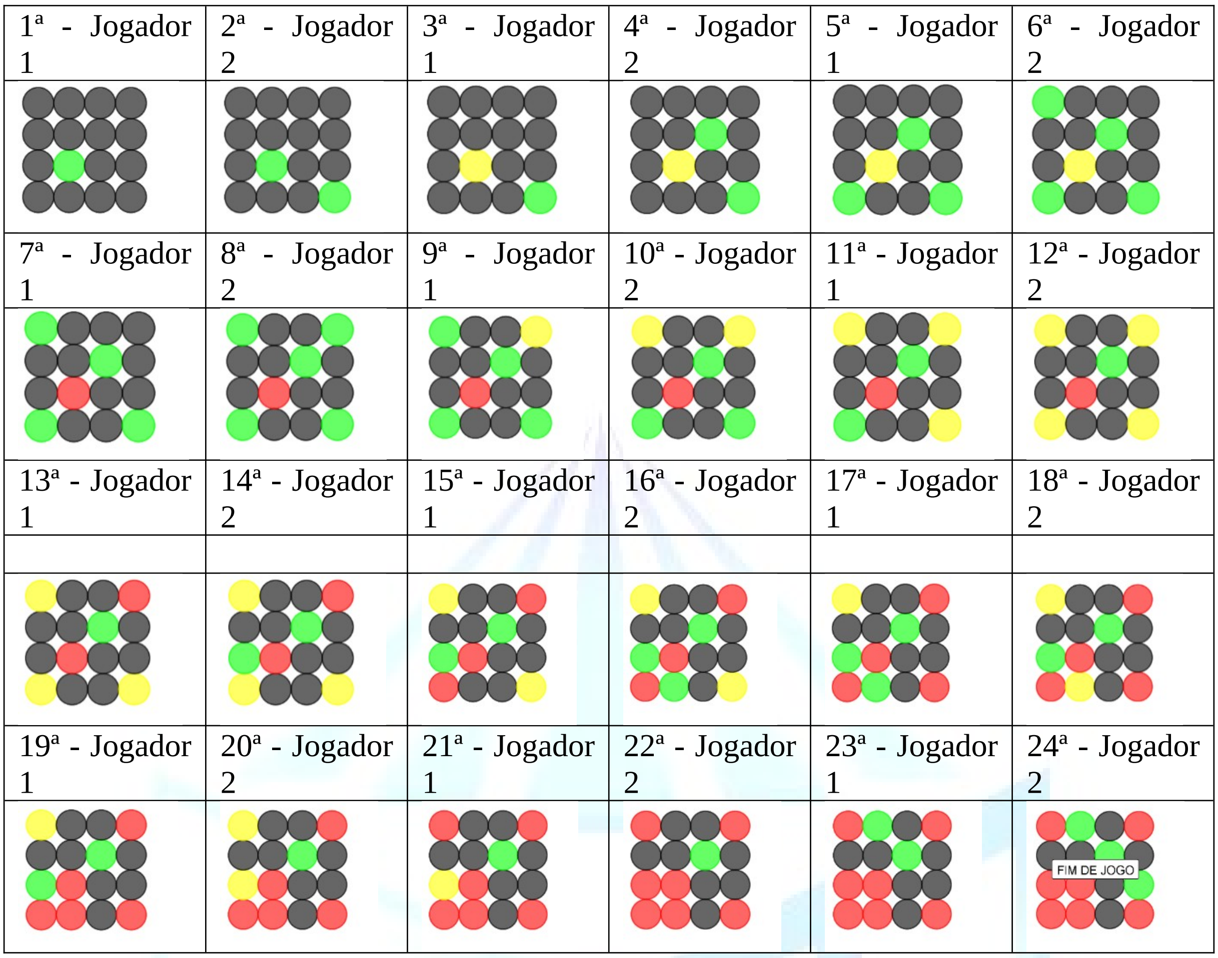
O Jogo da Sinaleira é um jogo de estratégia, cujo objetivo é montar uma sequência colinear de três peças, com cores iguais, podendo ser verde, amarelo, ou vermelho, que dá origem ao nome sinaleira, em alusão às cores utilizadas nos semáforos, também conhecidos como sinaleiras. Apesar de ter um objetivo semelhante ao Jogo da Velha, o jogo da sinaleira difere nas estratégias utilizadas. Enquanto no Jogo da Velha só se adicionam peças para formar ou bloquear a jogada do oponente, com cada jogador utilizando um conjunto de peças diferentes, no jogo da Sinaleira os jogadores podem usar uma sequência iniciada pelo outro para formar a sua sequência de cores iguais, ou seja, os jogadores não têm suas próprias peças, o que vale é a cor das peças que está no tabuleiro, não importando quem colocou as peças iniciais, e sim, quem coloca a última peça que forma a sequência.

A estratégia consiste em cada jogador adicionar ou mudar a cor de peça de modo que na próxima jogada o oponente não forme a sequência de três cores iguais. No Jogo da Velha, o bloqueio é realizado adicionando uma peça, interferindo na sequência do adversário, mas no jogo da Sinaleira, os jogadores podem adicionar uma peça verde, ou podem mudar a cor das peças que já estão no tabuleiro tentando formar uma sequência nas cores verde, amarelo ou vermelho. Desse modo a estratégia do jogador consiste em realizar movimentos, analisando de maneira preditiva, a ação do oponente, forçando este a realizar um movimento que lhe permita montar a sua sequência, assim como, avaliar e jogar de modo que o oponente não o coloque em um impasse, que o force a montar sequência de duas peças da mesma cor, pois dessa forma seu adversário poderá formar a sequência de três cores iguais colineares.

Os professores que participaram da pesquisa, validaram o referido jogo como de estratégia, uma vez que permite que os jogadores reflitam e investiguem quais estratégias são necessárias para ganhar. Isso, por sua vez, exigirá dos alunos criatividade e habilidade analítica para prever situações futuras e realizar análises das consequências de suas ações.

A Figura 2 apresenta uma sequência de jogadas realizadas por uma dupla de participantes da pesquisa, ilustrando as estratégias envolvidas. Observa-se que na 16ª jogada já não é possível adicionar mais peças, pois se um jogador adicionar uma peça, o outro jogador ganha a partida, situação que acaba por ocorrer da 23ª para a 24ª jogadas.

Figura 2 – Sequência de jogadas em uma partida da Sinaleira



Fonte: Homa e Groenwald (2020).

Verifica-se na sequência de jogadas as possibilidades e desdobramentos, sendo necessária a análise das jogadas subsequentes para a tomada de decisão da jogada atual. Desse modo, os jogos de estratégia envolvem analisar não somente a ação do jogador, mas também, a ação do adversário, que traz a incerteza do que está por vir levando ao desenvolvimento da capacidade de análise preditiva das situações.

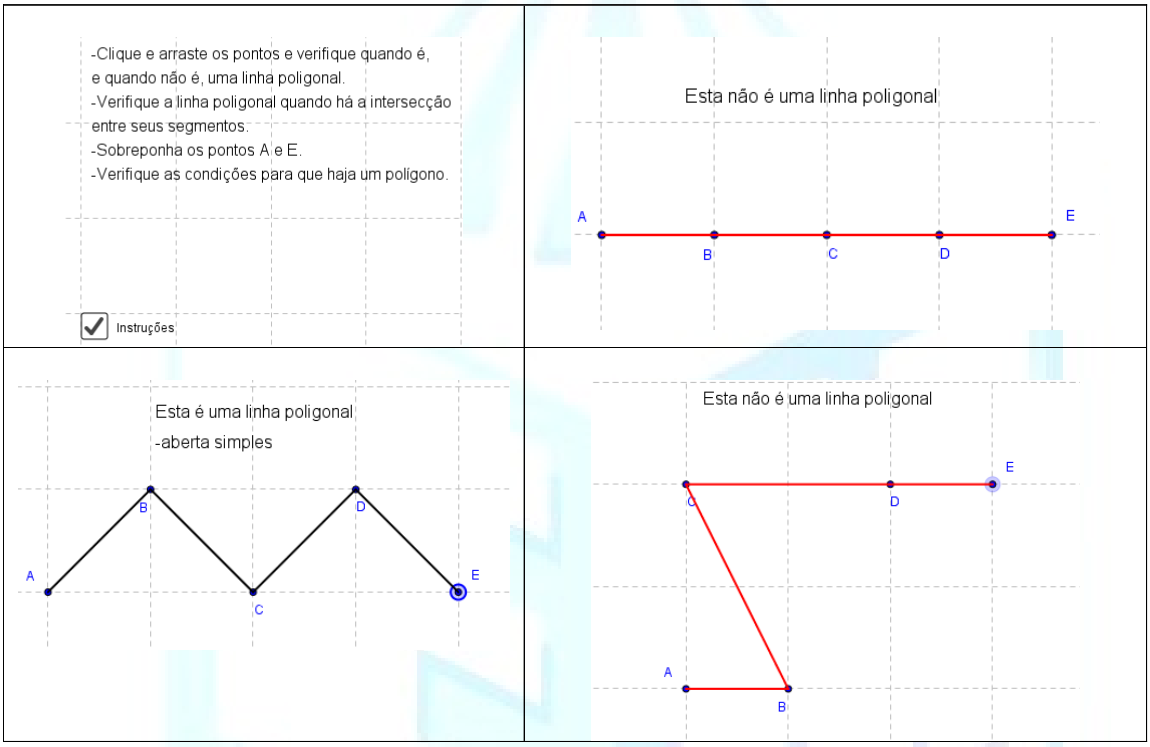
Modelo matemático para o número de diagonais de um polígono

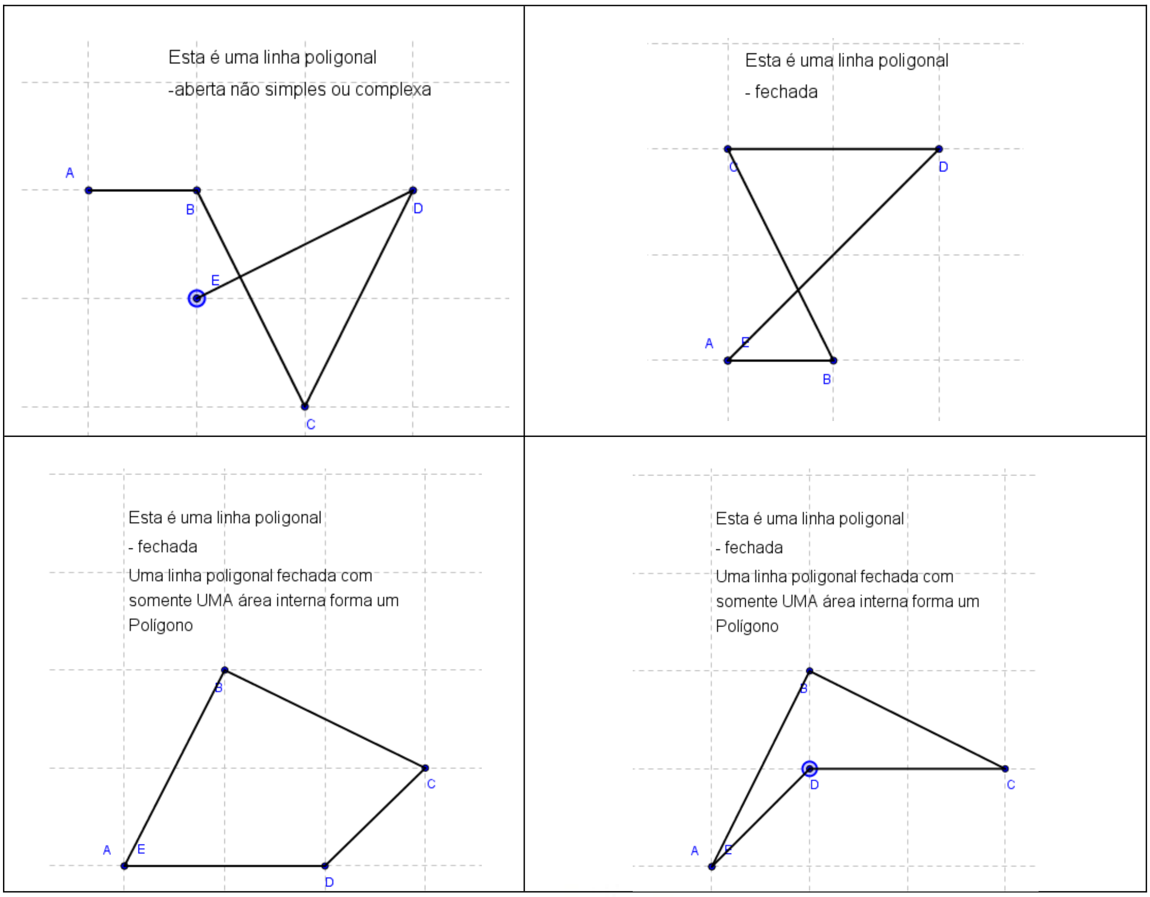
Na Educação Matemática, o Ensino da Prova é entendido como uma atividade que serve para elucidar ideias que valem a pena serem transmitidas aos alunos, ou seja, como argumento convincente. Hanna (1998), introduz na discussão uma distinção explícita entre Provas que provam e Provas que explicam. Para Hanna (1990), uma prova só é explicativa quando revela e faz uso das ideias matemáticas que a motivam. Isto é, uma prova explica quando mostra a “propriedade característica” que implica o teorema que se pretende provar.

A tarefa apresentada a seguir é composta por um conjunto de objetos de aprendizagem organizados em uma sequência didática, que são: objeto para conceito de Polígono; objeto para o conceito de Classificação de Polígonos; objeto para o conceito de número de Diagonais de um polígono; objeto para deduzir o modelo matemático para o número de diagonais de um polígono

Na Figura 3 o objeto de aprendizagem "Estudando linha poligonal", tem por objetivo, segundo Homa e Groenwald (2016), que o estudante ao manipular os pontos identifique qual configuração constitui uma linha poligonal, identificando quando é formada uma linha poligonal aberta, fechada, simples ou complexa.

Figura 3 – Estudando linha poligonal

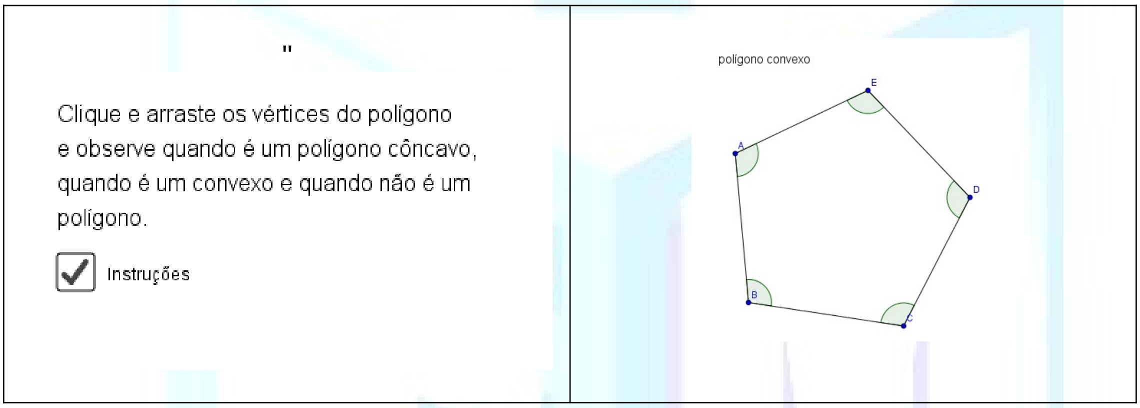


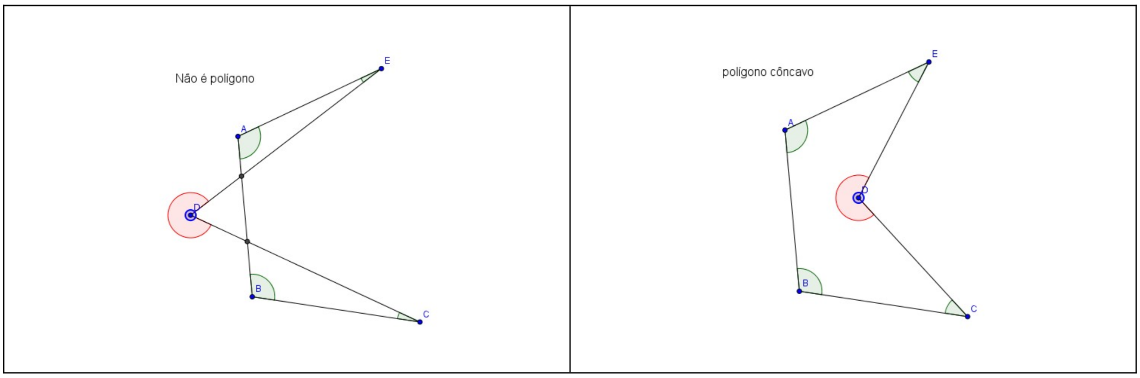


Fonte: http://ppgecim.ulbra.br/laboratorio.

Na sequência de atividades, o objeto de aprendizagem Estudando os tipos de Polígonos" (Figura 4), possibilita que o aluno compreenda, por meio da manipulação dos pontos, a classificação de polígono convexo e côncavo (HOMA; GROENWALD, 2016).

Figura 4 – Estudando os tipos de polígonos

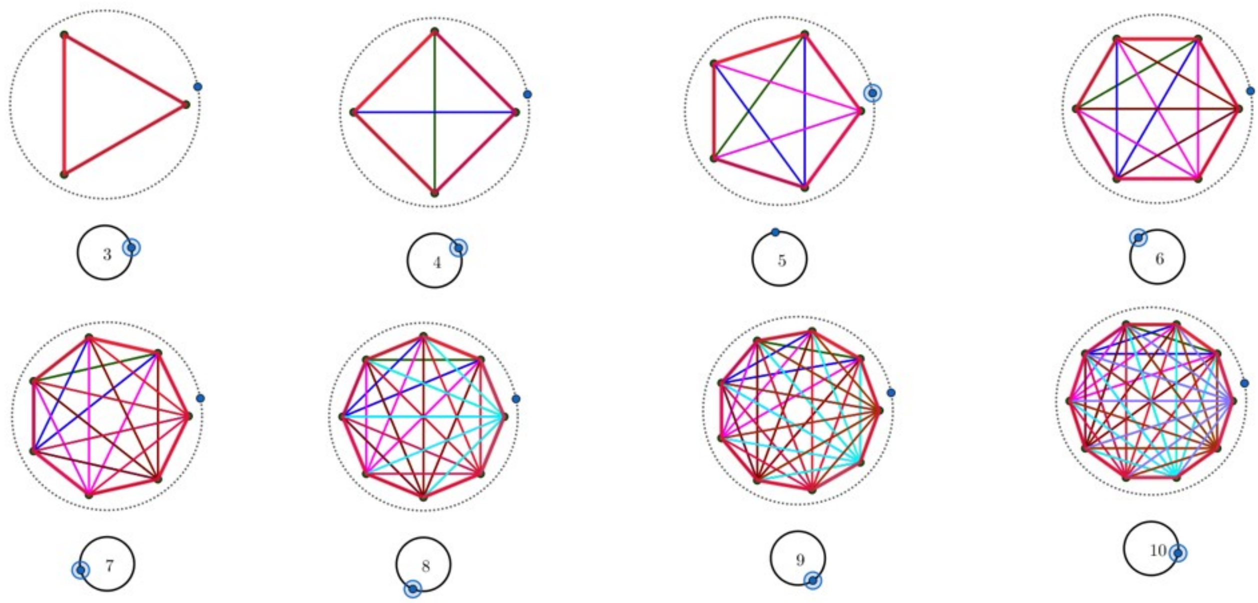




Fonte: http://ppgecim.ulbra.br/laboratorio.

O objeto de aprendizagem "Diagonais do Polígono" (Figura 5), permite que o estudante defina o polígono pelo número dos seus lados e observe as diagonais associadas a cada vértice e todas as diagonais simultaneamente e, deste modo, faça suas hipóteses e deduza o modelo matemático para o número de diagonais de um polígono de n lados. É neste ponto da sequência didática que os professores, participantes da pesquisa, identificaram a tarefa como de alta demanda cognitiva pois exige que o aluno observe, conjecture, verifique e generalize o modelo matemático para determinar o número de diagonais de um polígono de n lados.

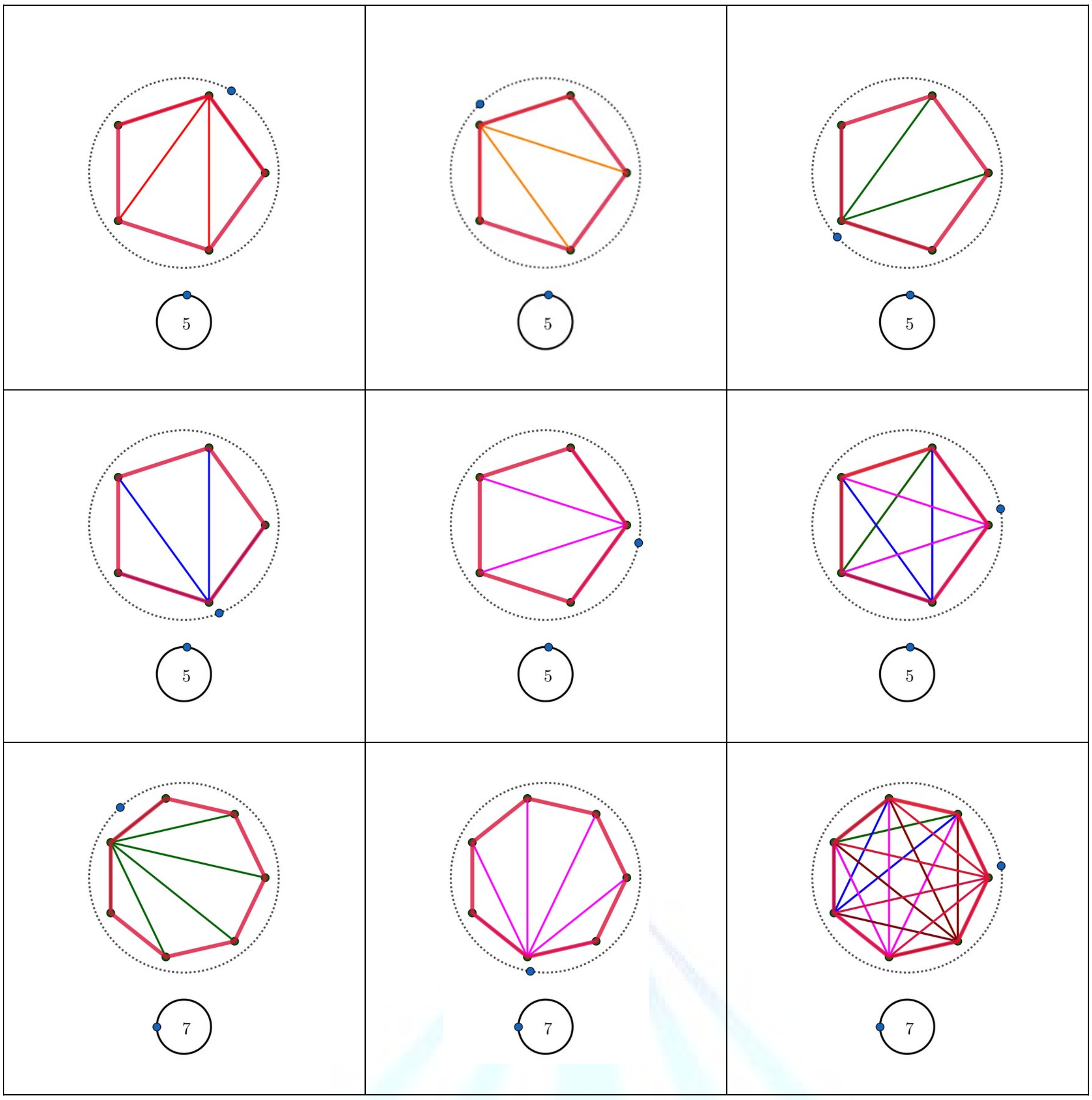
Figura 5 - Polígonos de até 10 lados e suas diagonais



Fonte: http://ppgecim.ulbra.br/laboratorio.

A Figura 6 apresenta as interações para polígonos de cinco e sete lados. As diagonais são traçadas tomando por referência o vértice mais próximo do ponto azul sobre o círculo pontilhado, que pode ser manipulado.

Figura 6 – Interações possíveis do polígono de cinco e sete lados



Fonte: http://ppgecim.ulbra.br/laboratorio.

Pela observação das interações é possível verificar que cada vértice se liga a todos os outros vértices, mas as ligações com os adjacentes não contam como sendo a diagonal. Deste modo o número das diagonais (d) por vértice (n) é dado por:

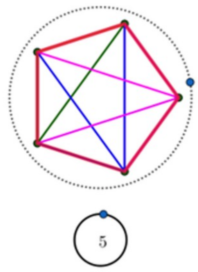
$$d(n) = n(n-3)$$

Para um polígono de cinco lados totalizaria 10 diagonais, mas na representação de todas as diagonais se apresentam somente 5 diagonais. Para o desenvolvimento do pensamento matemático a atividade deve ser trabalhada de modo que o estudante identifique o motivo do total de diagonais ser a metade, que no caso, cada diagonal é contada duas vezes. Logo, a hipótese para n lados é:

$$d(n) = \frac{n(n-3)}{2}$$

Como exemplo na Figura 7 apresenta-se a generalização das diagonais para um polígono de cinco lados.

Figura 7 - Generalização das diagonais para um polígono de 5 lados

Modelo	Visualização
$d(5) = \frac{5(5-3)}{2} = 5\, diagonais$	

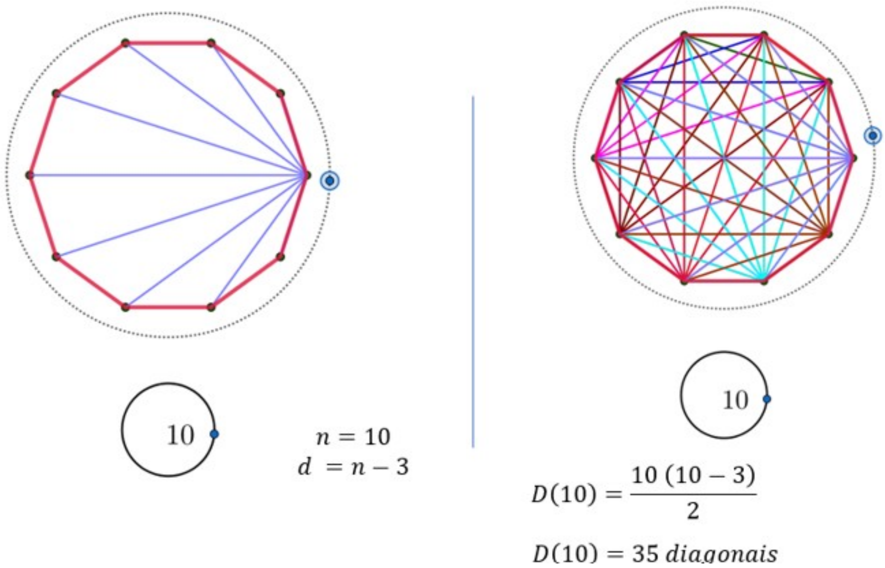
Fonte: os autores.

Para a verificar essa hipótese o estudante seleciona outros polígonos e compara o número total de diagonais calculado com o número contado, partindo da hipótese para uma generalização. Na representação do polígono de 7 lados verifica-se que o número calculado de diagonais é o mesmo do representado anteriormente

$$d(7) = \frac{7(7-3)}{2} = 14\, diagonais$$

Para facilitar a contagem das diagonais estas são apresentadas em cores diferentes. Como as diagonais vão se sobrepondo, a contagem (no polígono de 7 lados) em sentido horário mostra 4 vermelhas, 4 marrons, 3 rosas, 2 azuis e 1 verde, totalizando as 14 diagonais. Para um polígono de 10 lados (Figura 8) temos:

Figura 8 - Modelo de 10 lados



Fonte: os autores.

Os professores envolvidos no estudo, ao concluírem as atividades propostas na sequência didática, constataram a necessidade da habilidade de identificar padrões e inferiram que, a fim de generalizar o modelo matemático do número de diagonais para polígonos com n lados, é necessário que os alunos inicialmente trabalhem com polígonos de menor número de lados, testando suas conjecturas em polígonos com um maior número de lados.

Atividade investigativa com Simuladores de aprendizagem

Entende-se que as atividades com simuladores consideram que a abstração, o raciocínio e a lógica são essenciais para a aprendizagem Matemática, e valorizam a compreensão mais do que o processo algorítmico, fazendo uso de imagens como suporte para o pensamento matemático, proporcionando um ambiente experimental interativo que permite aos alunos observar, realizar e provar as suas conjecturas, levando-os a refletir para generalizar propriedades e conceitos abstratos (HOMA, 2019a).

Os simuladores matemáticos podem ser numéricos ou analíticos. Nos simuladores numéricos, os resultados numéricos são observados através dos modelos matemáticos utilizados. Em simuladores analíticos são utilizados modelos matemáticos nos quais se observa o comportamento de uma determinada característica de interesse.

Os simuladores de realidade representam um ambiente ou modelo que se baseia em algum comportamento da realidade, ou fenômeno científico ou natural (D’ANGELO et al., 2014; PSOTKA, 2013), são comumente usados em procedimentos de aprendizagem, ou seja, tão que o aprendiz possa realizar tarefas bem definidas de forma adequada, por isso os simuladores representam um ambiente em que, durante o aprendizado, um erro pode ocasionar um acidente com prejuízo físico ou econômico.

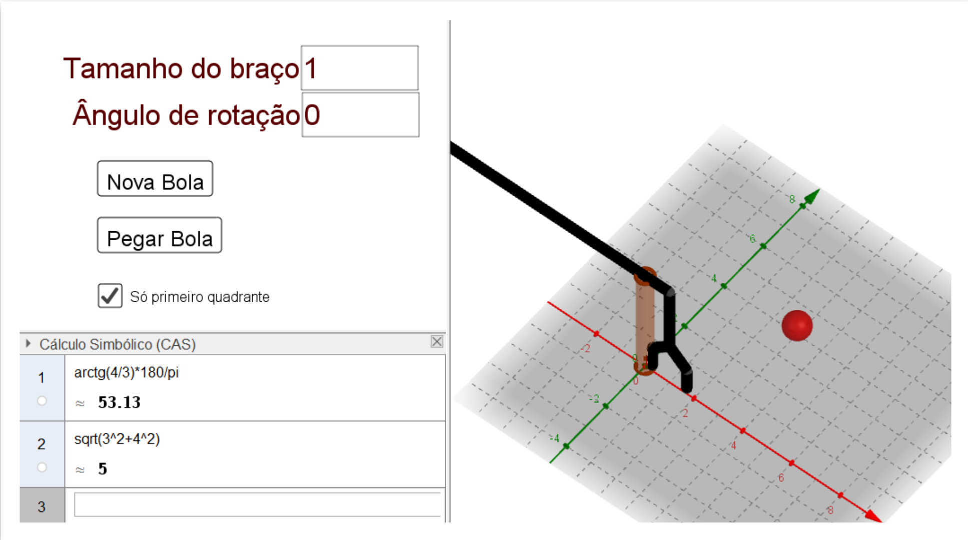
A possibilidade de o aluno observar o que acontece após suas interações, identificando padrões e comportamentos, potencializa o desenvolvimento de habilidades de visualização. Entende-se que a visualização é uma forma de organizar o pensamento, auxiliando na compreensão de conceitos matemáticos (HOMA, 2019b), o que vem sendo abordado em pesquisas que trazem como pauta de discussão, um ensino que valoriza a construção de conceitos em detrimento de processos algorítmicos. A pesquisa sobre visualização, habilidade espacial e imagem mental na Educação Matemática é baseada em estudos de psicologia cognitiva que levam em conta aspectos do pensamento visual na aprendizagem Matemática, no campo da didática da Matemática, semiótica e perspectivas socioculturais (FLORES, WAGNER e BURATTO, 2012).

Gutiérrez (1996) explica que para a Educação Matemática a visualização é uma ação mental na qual as imagens mentais estão envolvidas nos dois processos de visualização, a interpretação da informação para criar imagens mentais e a interpretação da imagem mental para gerar informações, sendo o segundo: observação e análise de imagens mentais; transformação de imagens mentais em outras imagens; e transformar imagens em outros tipos de informação.

Como um dos conhecimentos fundamentais aplicados aos braços robóticos é a compreensão dos movimentos no espaço, neste caso as rotações, surgem situações em que os alunos devem comandar os braços robóticos dando informações angulares, sendo necessário que o aluno conheça trigonometria, razões trigonométricas, e seus inversos para resolver problemas de movimento robótico.

Nesta categoria de problemas, as habilidades espaciais são desenvolvidas por meio da observação e previsão dos movimentos que os braços robóticos virtuais realizam. Apresenta-se um Simulador de braço robótico para aprofundar conhecimentos de geometria espacial, trigonometria, relações trigonométricas e suas inversas. Para o simulador do Braço Robótico 1 (Figura 9) é necessário que o aluno saiba calcular a hipotenusa do triângulo retângulo, as relações trigonométricas, suas inversas e a conversão de radianos para graus. Apenas com a imagem do braço robótico pergunta-se: “Como fazer o robô pegar a bola vermelha?”.

Figura 9 – Figura do objeto de aprendizagem Braço Robótico 1



Fonte: os autores.

Importante salientar que o professor deve apresentar o objeto de aprendizagem para que os alunos investiguem seu funcionamento fazendo tentativas de pegar a bola, fornecendo os valores de extensão e rotação do braço. Ao identificar que os valores aproximados não funcionam, o professor deve mostrar a necessidade de valores precisos para que o robô possa realizar a tarefa, sem dizer qual conhecimento deve ser mobilizado, cabendo aos alunos explorar as diferentes visões do braço em movimento durante suas tentativas, até identificarem que as coordenadas e a distância da bola à base formam um triângulo retângulo.

Para a situação apresentada na Figura 9, o braço deve estender a distância da base até a bola, ou seja, a diagonal do triângulo retângulo com lados menores de tamanho 3u e 4u, para que o aluno resolva pelo Teorema de Pitágoras tal que a distância é dada por:

$$d=\sqrt{y^2+x^2}=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$$

Para calcular o ângulo de rotação, o aluno deve conhecer as relações trigonométricas, suas inversas e utilizar a calculadora:

$$sen\theta=\frac{y}{d} \qquad cos\theta=\frac{x}{d} \qquad tan\theta=\frac{y}{x}$$

$$\theta=arcsen\left(\frac{y}{d}\right) \qquad \theta=arccossen\left(\frac{x}{d}\right) \qquad \theta=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\theta=arcsen\left(\frac{4}{5}\right) \qquad \theta=arccossen\left(\frac{3}{5}\right) \qquad \theta=\arctan\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$\theta=0.927295218\,rad \qquad \theta=0.927295218\,rad \qquad \theta=0.927295218\,rad$$

$$\theta=53.13° \qquad \theta=53.13° \qquad \theta=53.13°$$

Vale ressaltar que o GeoGebra possui um Sistema de Álgebra Computadorizado (CAS) integrado que é uma poderosa ferramenta para cálculos algébricos e numéricos que permite ao aluno explorar as situações que surgem sem que o cálculo e a álgebra sejam um problema, podendo assim prestar atenção nos conceitos envolvidos. Caso o aluno utilize o GeoGebra CAS, ele deverá converter os resultados das inversas trigonométricas de radianos para graus.

A atividade pode então avançar colocando a bola não apenas no primeiro quadrante, para isso, ao desmarcar a caixa "Somente no primeiro quadrante", o simulador coloca aleatoriamente a bola em qualquer um dos 4 quadrantes. Isso requer atenção por parte do aluno no uso das relações trigonométricas inversas, pois para o uso do arco seno, arco cosseno e arco tangente devem ser considerados os ângulos suplementares.

As simplificações adotadas neste simulador são: as coordenadas da bola são com valores inteiros; o braço robótico tem 2 graus de liberdade, um linear e outro angular; a área de colocação da bola é restrita à região quadrada de 20×20 com a base do braço no centro. Considerando que a circunferência de raio 10, definida pelo alcance do braço estendido ao máximo, a bola pode estar fora de alcance, dando origem a situações em que não basta um cálculo de hipotenusa, mas sim uma análise da situação que se apresenta, em que a bola está fora de alcance.

As ações com o simulador foram desenvolvidas pelos professores participantes da pesquisa e consideradas tarefas que exigem fazer matemática (tarefa de alta demanda cognitiva). Além disso, destacaram a relevância do simulador por abordar uma temática contemporânea e por fornecer uma perspectiva contextualizada acerca das relações trigonométricas e suas inversas, as quais, muitas vezes, são abordadas de forma abstrata e desconectada da vida prática em sala de aula.

Considerações finais

Diante do contexto de crescimento tecnológico e transformações sociais decorrentes desse progresso, torna-se imprescindível ampliar o uso de recursos tecnológicos no ambiente educacional. No entanto, é crucial destacar que a utilização dessas tecnologias deve ser feita de forma crítica, permitindo a adoção de novas práticas que auxiliem a escola a desempenhar, com sucesso, sua função pedagógica e social, o que foi possível concluir na pesquisa realizada. Os resultados indicam que os professores em formação inicial e continuada necessitam se apropriar das tarefas no que tange a sua execução pelos alunos, refletindo sobre as possibilidades didáticas das mesmas como um meio de desenvolver as competências profissionais que aprimoram a prática docente.

Entende-se que é possível estabelecer um vínculo entre aprendizagem e gerenciamento de tarefas desde que elas, as tarefas, façam o aluno seguir um caminho claro para a compreensão do conteúdo matemático (DAMASCO, GROENWALD e LLINARES, 2020; LLINARES et al., 2019).

As tarefas por si só não são suficientes para o aprendizado, mas são fatores que podem contribuir para o alcance dos objetivos propostos e para o aprendizado dos alunos. Para isso, reforça-se a ideia de que tarefas investigativas são tarefas de alta demanda cognitiva que possibilitam que os alunos pensem em fazer matemática, superando a memorização e procedimentos soltos, sem conexão.

Defende-se que, no processo de formação inicial de professores de Matemática, seja reservado um espaço para a discussão e reflexão sobre quais tipos de tarefas são relevantes para o desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes. Além disto, ressalta-se que na formação continuada seja dada ênfase a esses momentos de debate e reflexão sobre a seleção de tarefas apropriadas, visando aprimorar o processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Referências

BALL, Deborah Loewenberg; THAMES, Mark Hoover; PHELPS, Geoffrey Charles. Content knowledge for teaching: What makes it special?. **Journal of Teacher Education**, v. 59, p. 398–407, 2008.

CYRINO, Márcia Cristina de Costa Trindade; JESUS, Cristina Cirino de. **Análise de tarefas matemáticas em uma proposta de formação continuada de professoras que ensinam matemática**. Ciência & Educação (Bauru), v. 20, n. 3, p. 751–764, 2014.

D'ANGELO, Cynthia et al. **Simulations for STEM Learning**: Systematic Review and Meta-Analysis. Melo Park, CA: SRI Education, 2014.

DAMASCO, Fabiana Caldeira; GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira; LLINARES, Salvador Ciscar. **A competência docente de Observar com Sentido situações de ensino e aprendizagem na Matemática**. Canoas: Editora da ULBRA, 2020. v. 1

DEMO, Pedro. **Olhar do educador e novas tecnologias**. Senac: a R. Educ. Prof, v. 37, n. 2, p. 15–26, 2011. Disponível em: http://pedrodemo.sites.uol.com.br.

ESCUDERO, Isabel; SÁNCHEZ, Victoria. How do domains of knowledge integrate into mathematics teachers' practice? **Journal of Mathematical Behavior**, v. 4, p. 312–327, 2007.

FLORES, Cláudia Regina; WAGNER, Débora Regina; BURATTO, Ivone Catarina Freitas. **Pesquisa em visualização na educação matemática**: conceitos, tendências e perspectivas. Educação Matemática Pesquisa, v. 14, n. 1, p. 31–45, 2012.

GUTIÉRREZ, Ángel. Visualization in 3-Dimensional Geometry: In Search of a Framework. In: **Proceedings of the 20th PME Conference**, 1996. p. 3–19. Disponível em: http://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/Gut96c.pdf. Acesso em: 25 mar. 2016.

HANNA, Gila. **Proof as explanation in geometry**. Focus on learning problems in mathematics, v. 20, p. 4–13, 1998.

HANNA, Gila. Some pedagogical aspects of proof. Interchange, v. 21, n. 1, p. 6–13, 1990.

HOMA, Agostinho Iaqchan Ryokiti. Objetos de aprendizaje tridimensionales construidos con el software Geogebra. **Revista Paradigma**, v. 40, n. 1, p. 69–79, 2019.

HOMA, Agostinho Iaqchan Ryokiti. **Robotics Simulators in STEM Education**. Acta Scientiae, v. 21, n. 5, p. 178–191, 2019.

HOMA, Agostinho Iaqchan Ryokiti; GROENWALD, Cláudia Lisete Oliveira. Área de figuras planas com objetos de aprendizagem no Geogebra. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, v. 9, n. 123–147, 2016.

HOMA, Agostinho Iaqchan Ryokiti; GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira. Jogos didáticos e tecnologias digitais: uma integração possível no planejamento didático do professor de Matemática. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**. ISSN 2237-9657, v. 9, n. 3, p. 30–45, 2020.

JESUS, Cristina Cirino de; CYRINO, Márcia Cristina de Costa Trindade; OLIVEIRA, Hélia. **Análise de tarefas cognitivamente desafiadoras em um processo de formação de professores de Matemática**. Educação Matemática Pesquisa, v. 20, n. 2, p. 21–46, 2018.

LLINARES, Salvador. **Aprendizaje del estudiante para profesor de matemáticas y el papel de los nuevos instrumentos de comunicación.** III Encuentro de Programas de Formación Inicial de Profesores de Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional, Santa Fe de Bogotá, Colombia. 2008.

LLINARES, Salvador Ciscar. El desarrollo de la competencia docente “mirar profesionalmente” la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. **Educar em Revista**, v. 50, p. 17–133, 2013.

LLINARES, Salvador Ciscar et al. Mirar profesionalmente las situaciones de Enseñanza: Una competencia basada en el conocimiento. In: **INVESTIGACIÓN SOBRE EL PROFESOR DE MATEMÁTICAS**: PRÁCTICA DE AULA, CONOCIMIENTO, COMPETENCIA Y DESARROLLO PROFESIONAL. Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca, 2019. p. 177–192. E-book. Disponível em: https://eusal.es/index.php/eusal/catalog/view/978-84-1311-073-8/5054/4202-1.

MISHRA, Punya; KOEHLER, Matthew J. **Technological Pedagogical Content Knowledge**: A Framework for Teacher Knowledge. Teachers College Record: The Voice of Scholarship in Education, v. 108, n. 6, p. 1017–1054, 2006.

NCTM. **De los principios a la acción** – para garantizar el éxito matemáticos para todos. México: Editando libros S.A., 2015.

NIESS, Margaret L.; GILLOW-WILES, Henry. Expanding teachers' technological pedagogical reasoning with a systems pedagogical approach. **Australasian Journal of Educational Technology**, v. 33, n. 3, p. 77–95, 2017.

PENALVA, M. Carmen; LLINARES, Salvador Ciscar. Tareas Matemáticas en la Educación Secundaria. In: GOÑI, Jesus María; COLL, César (org.). **Didáctica de las Matemáticas/Formación y Desarrollo Profesional del Profesorado** N° 12 Vol. II. Madrid: Graó, 2011. p. 27–51.

PSOTKA, Joseph. **Educational Games and Virtual Reality as Disruptive Technologies**. Educational Technology & Society, v. 16, n. 2, p. 69–80, 2013.

RONAU, Robert N.; RAKES, Christopher R.; NIESS, Margaret L. **Educational technology, teacher knowledge, and classroom impact:** A research handbook on frameworks and approaches. Hershey, PA: IGI Global, 2012.

SMITH, Margaret Schan; STEIN, Mary Kay. **5 Practices for Orchestrating Productive Mathematics Discussions Includes Professional Development Guide**. National Council of Teachers of Mathematics, 2011.

SMITH, Margaret Schan; STEIN, Mary Kay. **Selecting ans Creating Mathematical Tasks**: Foram Research to Practice. Matehmatics Teaching in the Middle Scholl, v. 3, p. 344–350, 1998.

STEIN, Mary Kay et al. **Implementing standarts based mathematics instruction**: A casebook for professional development. New York, NY: Teachers College Press, 2000.

STEIN, Mary Kay; BARBARA W. GROVER; HENNINGSEN, Marjorie. Building Student Capacity for Mathematical Thinking and Reasoning: An Analysis of Mathematical Tasks Used in Reform Classrooms. **America Educational Research Journal**, v. 33, n. 2, p. 455–488, 1996.

WALLS, Fiona. **Challenging task-driven pedagogies of mathematics**. In: 28th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. Melbourne, Sydney: Merga, 2005. p. 751–758.

Submetido em: março de 2023.

Aceito em: maio de 2023.