

Unidades de Referência e Frações Unitárias em Tarefas Matemáticas: uma Revisão Integrativa de Literatura

Referent Unit and Unit Fractions in Mathematics Task: an Integrative Literature Review

Camila Augusta do Nascimento Amaral¹

Poliana Figueiredo Cardoso Rodrigues²

Maria Alice Veiga Ferreira de Souza³

Arthur Belford Powell⁴

RESUMO

Este artigo apresenta revisões sistemática e narrativa de literatura sobre professores em serviço e em formação que ensinam ideias matemáticas emergentes de tarefas sobre unidades de referência e frações unitárias. Usando descritores em inglês sem limite de tempo, realizamos uma pesquisa bibliográfica sistemática em bancos de dados contendo artigos revisados por pares sobre Educação Matemática. Para a revisão sistemática, nove artigos atenderam aos nossos critérios de inclusão e mostraram o papel fundamental das unidades de referência para a compreensão de números racionais e frações unitárias para a resolução de problemas matemáticos. Além disso, os artigos indicaram as limitações demonstradas pelos professores em sua concepção da unidade de referência. Uma revisão narrativa incluiu dois artigos sobre o mesmo tópico de periódicos brasileiros. Nossa análise revela a necessidade de aumentar a compreensão dos professores sobre unidades de referência e frações unitárias e de ampliar as discussões sobre esses tópicos nos cursos de aprendizagem profissional de professores de matemática, tanto antes quanto durante o serviço.

¹ Mestre em Educação em Ciências e Matemática. Instituto Federal do Espírito Santo/Ifes. Secretaria de Educação do Estado do Espírito Santo/SEDU. Vila Velha, Espírito Santo, Brasil. cam.amaral@yahoo.com.br. ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-5721-7783>.

² Mestre em Engenharia de Produção. Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro/UENF. Instituto Federal Fluminense/IFF. Campos dos Goytacazes, Rio de Janeiro, Brasil. polianacar@gmail.com. ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-2385-1727>.

³ Doutora em Psicologia da Educação Matemática. Universidade Estadual de Campinas/Unicamp. Instituto Federal do Espírito Santo/Ifes. Vila Velha, Espírito Santo, Brasil. E-mail: alicevfs@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2038-813X>.

⁴ Doutor em Educação Matemática. Rutgers University-New Brunswick. Rutgers University-Newark. Newark, New Jersey, Estados Unidos. powellab@newark.rutgers.edu. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6086-3698>.



PALAVRAS-CHAVE: Ensino de Frações. Conhecimento de Professores. Tarefas Matemáticas. Unitização.

ABSTRACT

This article presents systematic and narrative literature reviews about pre- and in-service teachers who teach mathematical ideas emerging from tasks about reference units and unit fractions. Using English descriptors with no time limit, we conducted a systematic bibliographic search in databases containing peer-reviewed articles on mathematics education. For our systematic review, nine articles met our inclusion criteria and showed the fundamental role of reference units for understanding rational numbers and unit fractions for solving mathematical problems. In addition, the articles indicated limitations demonstrated by teachers in their conception of the unit of reference. A narrative review included two articles on the same topic from Brazilian journals. Our review reveals the need to increase teachers' understanding of reference units and unit fractions and to expand discussions of these topics in pre- and in-service mathematics teachers' professional learning courses.

KEYWORDS: Teaching Fractions. Teachers' Knowledge. Mathematics Tasks. Unitizing.

Introdução

O estudo de frações integra diversos conceitos matemáticos iniciados na escola básica (e.g., razão, proporção, regra de três, porcentagem) e aplicados em outras áreas da Ciência (por exemplo, na Economia, Engenharias, Estatística e Probabilidade). Essa capilaridade faz crescer sua importância, ao lado do reconhecimento pela comunidade de educadores de que a apreensão de sua essência é nuclear para desenvolvimento da matemática mais avançada como a Álgebra (BOOTH; NEWTON; TWISS-GARRITY, 2014; POWELL; GILBERT; FUCHS, 2019). Não basta aos professores ou autores de livros didáticos criarem ambientes de aprendizagem de suas diferentes interpretações: parte-todo, quociente, razão, operador, medida e medição (KIEREN, 1976, BEHR *et al.*, 1983, DOYLE *et al.*, 2016, POWELL, 2019), mas sublinhar o que há de central nessas diferentes visões: a unidade de referência (ou unidade de medida) e a noção de fração unitária como ponto de partida para compreensão do todo (SOUZA, 2021). A construção da unidade desempenha papel fundamental no desenvolvimento do senso numérico de números racionais (LEE; BROWN; ORRILL, 2011; ZHANG; STECKER; BEQIRI, 2017; STEVENS *et al.*, 2020, POWELL; ALI, 2018). Já o conhecimento da magnitude de frações unitárias facilita e promove fluência em Álgebra e resolução de problemas em Matemática (OLIVE, 1999; BOOTH; NEWTON, 2012; POWELL, 2023).

O todo envolve compreender relações numéricas existentes em frações, ou seja, conceber um todo de partes e relacionar essas partes de um todo. A carência dessa compreensão acarretou resultados como revelados na investigação de Souza (2021) cujo não reconhecimento da unidade de medida comprometeu o apoio para

solução de tarefas por 75 dos 121 professores e futuros professores brasileiros que ensinam matemática na escola básica. Nessa esteira, é igualmente relevante o reconhecimento da fração unitária associada ao todo – fração com 1 como numerador, $1/n$. Powell *et al.* (2022) constataram que 14 de 19 professores estadunidenses que ensinam matemática nos anos iniciais do ensino básico apresentaram interpretações equivocadas de como a perspectiva parte-todo define frações unitárias, mediante a propositura de uma tarefa denominada Frame Task (CIOSEK; SAMBORSKA, 2016). A propósito, a respeito da perspectiva parte-todo e reconhecimento de frações unitárias, Ciosek e Samborska (2016, p. 22) confirmaram em uma investigação a convicção de alunos de diferentes níveis básicos escolares e universitários que “um procedimento iterativo de dissecar algo em n partes iguais para constituir uma fração $1/n$ pode deixar a falsa crença de que se um inteiro está dividido em n partes desiguais, nenhuma delas pode ser $1/n$ do seu comprimento”.

Essas investigações, em geral, examinam conhecimento, domínio, representação, interpretação e crença de professores do ensino básico. Há nesse ínterim, o envolvimento de tarefas matemáticas para aquelas elucidações. As tarefas são aqui entendidas – tais como Christiansen e Walther (1986) – como objeto para a atividade do aluno. Elas constituem o principal meio pelo qual se espera que a matemática seja incorporada e socializada pelos e com os alunos.

Pela importância do tema – unidade de referência e frações unitárias – propomos conhecer, por meio de uma revisão integrativa (sistemática mais narrativa) de literatura, noções sobre unidade de referência e fração unitária de professores e futuros professores que ensinam matemática, emersas de tarefas planejadas para investigação, reveladas em artigos da Educação Matemática.

Revisão Integrativa de Literatura

A revisão de literatura é importante meio para pesquisadores conhecerem determinado tema, sob ponto de vista específico, a partir de resultados divulgados pela comunidade científica. Nossa exploração foi marcada inicialmente por descritores acerca de frações unitárias e unidade de referência (ou de medida) em bases de dados costumeiras da área de Educação. Paulatinamente, os resultados das buscas em artigos foram denunciando outros descritores característicos do tema de nosso interesse, formando, assim, o conjunto de palavras-chave de que necessitávamos para uma revisão sistemática.

Entretanto, a sistematização, embora ampla, não trouxe artigos relevantes publicados em periódicos brasileiros por não estarem indexados nas bases tradicionais da Educação. Os artigos brasileiros são significativos para nós, pois esta revisão faz parte de um estudo maior sobre frações unitárias a ser desenvolvido no Brasil. Tendo em vista essa particularidade, foi incluída uma seção para abrigar uma revisão narrativa de dois artigos não contemplados na sistematização, revelados com os mesmos descritores da língua inglesa para a língua portuguesa, emersos do Google Scholar. A revisão sistemática inaugura o próximo tópico, seguida da revisão narrativa.

Revisão Sistemática de Literatura

Nossa revisão sistemática de literatura (RSL), de caráter qualitativo e descritivo (BOGDAN; BIKLEN, 1994), sobre tarefas planejadas para investigar unidade de referência ou fração unitária visa a estimular novas investigações sobre o tema na área da Educação Matemática, sobretudo para a formação inicial e continuada de professores. Para isso, a RSL foi elaborada tomando os cinco passos descritos por Khan *et al.* (2003): (1) esboçar questões para uma revisão; (2) identificar trabalhos relevantes; (3) avaliar a qualidade dos estudos; (4) resumir a evidência; (5) interpretar os achados.

Nessa direção, a revisão foi realizada a partir de buscas por artigos científicos publicados em periódicos e anais de eventos, ambos nacionais e internacionais, com amplo acervo científico na área de Educação Matemática – Scielo, Springer, Science Direct, Scopus, Web of Science, Eric e Doaj – tendo em conta responder ao seguinte questionamento: Que noções emersas de tarefas planejadas para investigação sobre unidade de referência e fração unitária apresentam professores e futuros professores que ensinam matemática, reveladas em trabalhos científicos da Educação Matemática? (1º passo, KHAN *et al.*, 2003). Os resultados de buscas preliminares que antecederam nossa RSL indicaram poucos estudos sistemáticos e epistemológicos sobre o tema, e, por essa razão, não colocamos limitações temporais na pesquisa de artigos.

A busca por trabalhos relevantes foi planejada segundo o protocolo (2º passo, KHAN *et al.*, 2003) com eleição de uma combinação de descritores na língua inglesa (*strings*) unidos por conectores lógicos aplicados em títulos, palavras-chave e resumos de artigos científicos. Para atender o critério de seleção de artigos que tratassem apenas de tarefas matemáticas planejadas sobre unidade de referência

ou fração unitária, foram usadas as *strings task*, *fraction**, *unit fraction*, *referent whole*, *unit*, *instruction*, *teach**, *teacher training* e *referent unit*.

Inicialmente a pesquisa identificou 175 artigos, após remoção de duplicidades. Esses trabalhos seguiram para leitura dos resumos, ou de outras partes textuais, com objetivo de verificar aderência aos propósitos desta RSL (3º passo, KHAN *et al.*, 2003). Essa verificação excluiu 129 artigos por apresentarem foco na aprendizagem do aluno, currículo, livros didáticos ou outros temas que não estavam em sintonia com ensino da matemática. Dos 46 restantes, 15 não apresentavam tarefas e 22 estavam desconectados com ensino da unidade de referência em uma fração ou fração unitária. Por fim, nove artigos, todos emersos da Springer e Eric, aqui rotulados A1, A2, ..., A9, constantes no Quadro 1, seguiram para leitura completa, verificação e classificação de aderência por dois outros autores desta investigação e posterior análise. A divergência de pareceres sobre aderência de algum trabalho culminou em confronto de argumentações entre os autores até o atingimento de um consenso.

Quadro 1 – Artigos científicos selecionados segundo protocolo da RSL para análise

Objetivo da RSL: Identificar noções de professores e futuros professores que ensinam matemática emersas de tarefas planejadas para investigação sobre unidade de referência ou fração unitária apontadas em artigos científicos da Educação Matemática.					
	Base	Ano	Título	Autor(es)	Periódico
A1	Springer	2012	Assessing elemental validity: the transfer and use of mathematical knowledge for teaching measures in Ghana	Cole, Y.	ZDM
A2	Eric	2013	Lesson Study with Mathematical Resources: A Sustainable Model for Locally-led Teacher Professional Learning	Lewis, C. e Perry, R.	Mathematics Teacher Education and Development
A3	Springer	2015	Knowledge and motivation as mediators in mathematics teaching practice: the case of drawn models for fraction arithmetic	Jacobson, E. e Izsák, A	Journal of Mathematics Teacher Education
A4	Springer	2018	Pre-K-8 prospective teachers' understanding of fractions: An extension of fractions schemes and operations research	Lovin, L., Stevens, A., Siegfried, J., Wilkins, J. e Norton, A.	Journal of Mathematics Teacher Education

A5	Springer	2020	Promoting sophisticated fraction constructs through instructional changes in a mathematics course for PreK-8 prospective teachers	Stevens, A., Wilkins, J., Lovin, L., Siegfried, J., Norton, A. e Busi, R.	Journal of Mathematics Teacher Education
A6	Springer	2021	Spotlight on Area Models: Pre-service Teachers' Ability to Link Fractions and Geometric Measurement	Lee, M. e Lee, J-E	International Journal of Science and Mathematics Education
A7	Springer	2022	Primary teachers' preferred fraction models and manipulatives for solving fraction tasks and for teaching	Wilkie, K. e Roche, A.	Journal of Mathematics Teacher Education
A8	Springer	2022	Mathematics teacher educator noticing: examining interpretations and evidence of students' thinking	Amador, J.	Journal of Mathematics Teacher Education
A9	Springer	2023	Validating psychometric classification of teachers' fraction arithmetic reasoning	Olmez, I. B. e Izsák, A.	Journal of Mathematics Teacher Education

Fonte: Springer e Eric.

Embora não sejam recentes as preocupações com o conhecimento conceitual de professores e futuros professores sobre frações, de modo geral, (BALL, 1990; MA, 1999; NI, 2001; YOSHIDA; SAWANO, 2002; LIN *et al.*, 2013; SOUZA, 2021; SOUZA; POWELL, 2021; 2023), a atenção da comunidade científica sobre tarefas que identifiquem, especificamente, conhecimentos de professores sobre unidade de referência ou fração unitária datam dos últimos 11 anos.

Resultados da Revisão Sistemática de Literatura

A leitura e análise integral dos nove artigos (Quadro 1) nos conduziu à identificação de quatro categorias relativas às noções de professores e futuros professores sobre a unidade de referência e fração unitária emersas de tarefas matemáticas (4º passo, KHAN *et al.*, 2003):

1. identificação de noções baseadas em esquemas,
2. apoio em partição e iteração,
3. compreensão de fração unitária, e
4. reconhecimento da unidade de referência e respectivo uso para solucionar tarefas.

Pela facilidade, os artigos constantes em cada categoria serão referenciados pelos rótulos A1, A2, ..., A9, apresentados no Quadro 1.

Para aprofundamento de nossas análises, descreveremos a essência de cada uma das quatro categorias. A primeira categoria reuniu artigos cujas tarefas estavam baseadas em esquemas de frações (Quadro 2) modeladores de meios para assimilação de situações e posteriores ações mentais (VON GLASERSFELD, 1995). As ações mentais, conforme Von Glasersfeld (1995), são componentes essenciais dos esquemas como Stevens *et al.*, (2020) explicam e exemplificam no Quadro 2.

Quadro 2 – Esquemas de frações e ações mentais associadas

Esquemas	Ações mentais associadas	Exemplos
Esquema de fração parte/todo (PWS)	Produzir m/n particionando um todo em n pedaços e desencaixar m desses pedaços	Ao serem perguntados para fazer $3/5$ de uma barra retangular, um aluno deve demarcar cinco pedaços iguais e cortar três delas, sabendo que essas três partes estão contidas nas cinco partes iguais que compõem o todo
Esquema partitivo de fração unitária (PUFS)	Determinar o comprimento de uma fração unitária relativa a um todo dado não-particionado, iterando a fração unitária para produzir um todo particionado contínuo	Ao serem perguntados se uma dada parte é $1/5$ de uma barra retangular inteira, um aluno deve deslizar a parte ao longo do comprimento da barra checando se cinco daquela parte compõem a barra retangular toda
Esquema partitivo de fração (PFS)	Determinar o comprimento de uma fração própria relativa de um todo não particionado, particionando a fração própria para produzir uma fração unitária e iterar a fração unitária para reproduzir a fração própria e o todo	Dar duas barras retangulares e perguntar qual fração a menor barra é da maior barra, um aluno deve antecipar que cada barra pode ser medida em unidades que são $1/5$ do todo. Portanto, ele particionaria o todo em cinco partes iguais e mediria a menor barra como três dessas partes, a fração de $3/5$
Esquema partitivo de fração reversível (RPFS)	Reproduzir o todo de uma fração própria particionando a fração para produzir uma fração unitária e iterá-la um número apropriado de vezes	Dar uma barra retangular inteira que é cinco vezes o comprimento de outra barra, um aluno determina o comprimento da outra barra particionando a barra inteira em cinco pedaços iguais, sabendo que cinco medidas de qualquer uma dessas partes compreende o todo
Esquema iterativo de fração (IFS)	Reproduzir o todo de uma fração imprópria particionando a fração para produzir uma fração unitária e iterá-la um número apropriado de vezes	Dar uma barra retangular não particionada e dizer ela é $3/5$ do todo, um aluno pode fazer o todo particionando a barra dada em três pedaços iguais e tomar cinco medidas de uma dessas partes como o todo

Fonte: Stevens *et al.* (2020), tradução nossa.




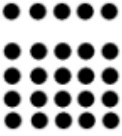



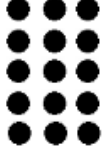
A segunda categoria agrupou trabalhos com tarefas de particionar e iterar – tarefas que utilizam o padrão de particionamento de pedaços de mesmo comprimento combinado com desencaixe de frações unitárias para gerar frações de magnitudes maiores. A terceira categoria refere-se à tarefa sobre a compreensão da fração unitária. O único artigo desta categoria explorou a desnecessidade de particionamento do todo de uma fração em partes iguais para obtenção do comprimento da fração unitária. Finalmente, a quarta categoria tem a ver com tarefas sobre a compreensão e reconhecimento da importância da unidade de referência. Apenas um trabalho investigou a necessidade de professores de identificar a unidade de referência quando os números fracionários estão integrados em situações-problema. O desconhecimento da unidade de referência pode (e deve) remeter a equívocos na comparação de frações.

A seguir apresentaremos uma análise dos nove artigos elencados nesta RSL que se configura como o 5º passo descrito por Khan *et al.* (2003).

Primeira categoria: Tarefas baseadas em esquemas

Os artigos A4, A5 e A7 objetivaram identificar como o conhecimento do conteúdo do professor se desenvolve a partir de tarefas baseadas nos esquemas PUFs e RPFS (veja Quadro 2). Nesse ínterim, por um lado, as tarefas, cujas resoluções possuíam esquemas partitivos de frações unitárias (PUFS) (Figura 1 – Tarefa 2) tinham como ações mentais determinar o comprimento relativo de uma fração unitária a um dado todo não particionado, e iterar frações unitárias para formar um todo contínuo particionado. Por outro lado, as tarefas cujas resoluções possuíam esquemas partitivos de frações reversíveis (RPFS) (Figura 1 – Tarefa 4) tinham como ações mentais reproduzir o todo de uma fração particionando-o para obtenção de uma fração unitária e, então, iterá-la uma quantidade apropriada de vezes.

Figura 1 – Exemplos do artigo A7 de tarefas de esquemas PUFs e RPFS

Tarefa 2	Qual fração o menor biscoito representa em relação ao biscoito maior? 	Qual fração o menor pedaço de chocolate representa em relação ao pedaço maior? 	Qual fração a menor barra representa em relação a maior barra? 	Qual fração a menor coleção de adesivos representa em relação a coleção maior? 
Tarefa 4	Esse é o pedaço de torta do seu amigo. Ele é $\frac{3}{4}$ do comprimento do seu pedaço. Desenhe o seu pedaço. 	Esse é o pedaço de chocolate do seu amigo. Ele é $\frac{3}{4}$ do comprimento do seu pedaço. Desenhe o seu pedaço. 	Essa é a barra do seu amigo. Ela é $\frac{3}{4}$ do comprimento da sua barra. Desenhe a sua barra. 	Essa é a coleção de adesivos do seu amigo. Ela é $\frac{3}{4}$ do comprimento da sua coleção. Desenhe a sua coleção. 

Fonte: Wilkie e Roche (2022), tradução nossa.

A Figura 1 apresenta uma tarefa do artigo A7, cujo intuito era apresentar diferentes versões de modelos contínuos e discretos para uma mesma tarefa de fração, e investigar as preferências pessoais de resolução e de ensino de professores. Para resolver a Tarefa 2 (Figura 1 - PUFs), os professores deveriam determinar que o pedaço menor correspondia a $\frac{1}{4}$ do maior, ao perceberem que com quatro pedaços menores eles obteriam a mesma área, o mesmo comprimento, ou conjunto do todo (ou seja, que quatro vezes um quarto representaria o todo). Na Tarefa 4 (Figura 1 – RPFS), os professores deveriam particionar a figura em três partes iguais para determinarem a fração unitária $\frac{1}{4}$, e depois iterar quatro vezes para obterem o todo.

Exceto pela Tarefa 2, o modelo de preferência eleito pelos professores para resolver todas as outras tarefas (inclusive a Tarefa 4) foi o de conjunto discreto. Eles acreditaram que esse modelo facilitaria a visualização de parte de um inteiro e, depois disso, bastaria contar, e não medir ou estimar. Na Tarefa 2, o modelo circular de área foi escolhido sob argumentação de proporcionar clareza e facilitar a percepção da fração, sobretudo pela necessidade de identificação do comprimento de um quarto como parte de um círculo inteiro. A predominância do modo discreto também esteve presente em respostas sobre preferências de modelos para ensino, seguido do retangular de área.

Segunda categoria: Tarefas apoiadas em partição e iteração

Essa categoria reuniu os artigos A1, A3, A8 e A9 em função das tarefas de particionar e iterar. O padrão de combinar particionamento de uma quantidade em pedaços de mesmo comprimento, e desencaixar frações unitárias para criar frações de magnitudes maiores (ou seja, particionar e iterar) também se repetiu nos artigos A1, A3 (Figura 2), A8 (Figura 3) e A9 (Figura 4).

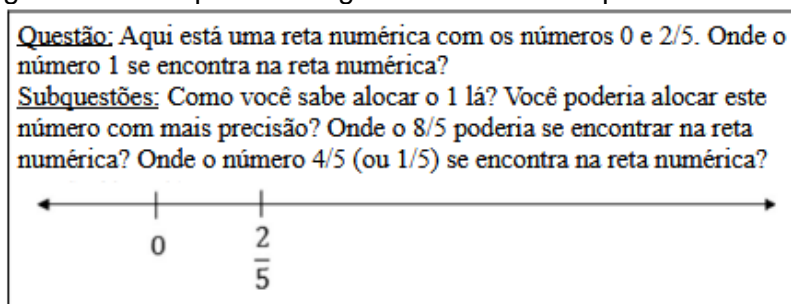
Figura 2 – Exemplo do artigo A3 de tarefas de particionar e iterar

Sr. Roland deu para suas alunas o seguinte problema para resolver:
Candice tinha $\frac{4}{5}$ do metro de um tecido. Ela usou $\frac{1}{8}$ do tecido para um projeto. Quanto de tecido sobrou pra ela depois do projeto?
 Ela deixou os alunos usarem a reta numérica assim eles podiam desenhar os comprimentos. Qual dos seguintes diagramas mostra a solução? Assuma que todos os intervalos estão divididos igualmente.

Fonte: Jacobson e Izsák (2015), tradução nossa.

Os autores do artigo A3 procuraram compreender, por exemplo, como professores examinavam seus conhecimentos e suas motivações para uso de modelos de desenhos para ensinar fração. Em outras palavras, como a motivação interagia com o conhecimento do conteúdo especializado e suas práticas de ensino. Os participantes responderam questionários e tarefas como a da Figura 2 que trabalhava dois atributos simultaneamente: unidade de referência e, particionar e iterar. Nessa tarefa, o registro das letras (a) ou (c) como corretas, indicava confusão sobre a unidade de referência para $\frac{1}{8}$. Assinalar a letra (e) indicava uma partição incorreta baseada em cinco grupos de seis pedaços que formavam um trinta avos. Por outro lado, apontar a letra (b) como correta, demonstrava como corretas tanto a unidade de referência para $\frac{1}{8}$ (ou seja, um metro), quanto a partição baseada em cinco grupos de oito pedaços que formavam um quarenta avos.

Figura 3 – Exemplos do artigo A8 de tarefas de particionar e iterar





Fonte: Amador (2022), tradução nossa.

O artigo A8 buscou identificar o entendimento de professores de Matemática e sua capacidade de interpretar o pensamento dos alunos e conectar essas interpretações a essas evidências. Embora esse trabalho não esteja investigando diretamente a compreensão de professores mediante alguma tarefa, optamos por mantê-lo nesta RSL, pois há, em alguma medida, exposição dos modos de professores entenderem tarefa a partir do raciocínio de alunos. Os professores participantes foram solicitados a analisar respostas para algumas tarefas – uma delas está representada na Figura 3, cujo objetivo era o de avaliar a habilidade dos alunos em alocar frações nas retas numéricas, e isso inclui suas habilidades em compreender frações como uma composição de frações unitárias, assim como suas habilidades em particionar e iterar valores fracionários. Nesse caso, para identificar o número um na reta numérica, bastava particionar pela metade a distância entre os números zero e $\frac{2}{5}$ para, então, iterar cinco vezes a fração unitária $\frac{1}{5}$. Do mesmo modo, para identificar os números $\frac{8}{5}$ e $\frac{4}{5}$ na reta numérica, bastava iterar oito e quatro vezes, respectivamente, a fração unitária $\frac{1}{5}$.

Assim, os professores compreenderam que o valor do numerador da fração descreve a quantidade de um quinto na fração, que o valor do denominador indica o número de frações unitárias presentes em um inteiro e que cinco quintos é o mesmo valor que um inteiro.

Figura 4 – Exemplos do artigo A9 de tarefas de particionar e iterar

Tarefa 1	<p>A barra abaixo é 28 polegadas e é $\frac{7}{4}$ de outra barra. Por favor desenhe a outra barra e determine o comprimento dela em polegadas.</p> 
Tarefa 3	<p>Jason e Tom tem cada um uma casa para seus cachorros. A barra abaixo indica a altura da casa do cachorro de Jason, que tem $\frac{3}{4}$ metros de altura, e isto é $\frac{2}{3}$ da altura da casa do cachorro de Tom. Qual é a altura da casa do cachorro do Tom? Por favor resolva o problema com um desenho matemático.</p> 

Fonte: Olmez e Izsák (2023), tradução nossa.

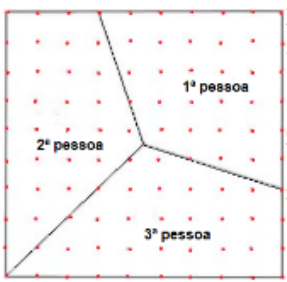
O artigo A9 examinou se professores tiveram uma proficiência crescente no raciocínio sobre aritmética de frações. Para isso, os participantes foram entrevistados e responderam tarefas antes e depois de um curso de formação. A Figura 4 mostra duas dessas tarefas. Na Tarefa 1 (Figura 4), os professores deveriam particionar a barra em sete partes iguais para obterem a fração unitária $\frac{1}{4}$, e depois iterar quatro vezes para obterem o todo. Na Tarefa 3 (Figura 4), os professores tinham de particionar três partes do metro para obterem a fração unitária $\frac{1}{4}$ e a barra pela metade para obterem a fração unitária $\frac{1}{3}$. Depois, os professores precisavam pensar em uma subdivisão comum que divide três partes e duas partes, ou seja, seis partes. E assim, compreenderem que $\frac{1}{3}$ da casa do cachorro de Tom corresponde a $\frac{3}{8}$ metros. Iterando $\frac{3}{8}$ metros três vezes resulta na altura da casa do cachorro de Tom, ou seja, $\frac{9}{8}$ metros.

Terceira categoria: Tarefa sobre a compreensão da fração unitária

O artigo A6, único para esta categoria, pretendeu explorar a compreensão de frações e de área por meio de uma tarefa que envolvia modelo de área de forma atípica. Essa tarefa, apesar de também vislumbrar o particionar e o iterar, os autores afirmam que além da fração $\frac{1}{n}$ ser parte de um inteiro, que é particionado em n partes de mesmo comprimento, uma fração por si só não diz nada sobre o atual comprimento do todo ou o comprimento atual das partes, mas somente representa a relação entre a parte e o todo. A tarefa da Figura 5 apresenta que o que está em questão não é o fato de os terrenos possuírem formatos diferentes, mas as áreas

em si serem as mesmas. Desse modo, uma figura pode estar dividida em três partes diferentes e, mesmo assim, uma dessas partes pode representar $1/3$ da figura.

Figura 5 – Exemplo do artigo A6 de tarefas de particionar e iterar



Há um bolo com formato quadrado. Três pessoas querem dividir igualmente o bolo todo como mostrado. Você acha que cada pessoa terá $1/3$ do bolo? Você acha que cada parte representa $1/3$ do bolo?

Questão
 Se “sim”, modela e explica seu raciocínio para justificar que cada parte representa $1/3$ do bolo.
 Se “não”, explica a razão.

Sua explicação deverá focar no significado, explicitamente correlacionada com o seu raciocínio, e usar linguagem apropriada para que um aluno de Ensino Fundamental pudesse compreender facilmente.

Fonte: Lee, M. e Lee, J-E (2021), tradução nossa.

Na tarefa de Lee e Lee (2021), cerca de 48% dos participantes responderam corretamente que cada pedaço representava $1/3$ do bolo, e 52% responderam que os três pedaços não eram iguais. As estratégias adotadas por aqueles que responderam corretamente à tarefa estavam relacionadas, em sua maioria, com a contagem seguida do cálculo da área das partes. Por outro lado, os professores que erraram a tarefa demonstraram: (1) concepção equivocada sobre o uso da malha pontilhada; (2) entendimento incorreto do que seja área; (3) checagem visual dependente; (4) compreensão equivocada sobre modelos de área de frações; e (5) pensamento estereotipado sobre tarefas.

Quarta categoria: Tarefa sobre a compreensão da importância da unidade de referência

O artigo A2 foi o único aderente à esta categoria. Os autores estudaram o conhecimento de professores nos quesitos de equabilidade das partes, frações como números, compreensão do todo (Figura 6) e frações unitárias. Nesse ínterim, há reflexão de que não basta a tarefa dizer que $1/2$ dos livros da casa de Steve são de ficção e que $1/5$ dos livros de Andrew são desse mesmo gênero pois, nesses casos, como não conhecemos a unidade de referência em ambas as situações, torna-se impossível comparar as duas frações. Por exemplo, se em ambas as casas, as famílias possuem 30 livros ao todo, então, na casa de Steve terá mais livros de ficção do que na casa de Andrew pois, $1/2$ de 30 livros são 15 livros e, $1/5$ de 30 livros são 6 livros, respectivamente. No entanto, se na casa de Steve possuir 30 livros em geral e na casa de Andrew 90 livros, então na casa de Andrew terá mais livros de ficção pois $1/5$ de 90 livros são 18 livros e 18 é maior do que 12.

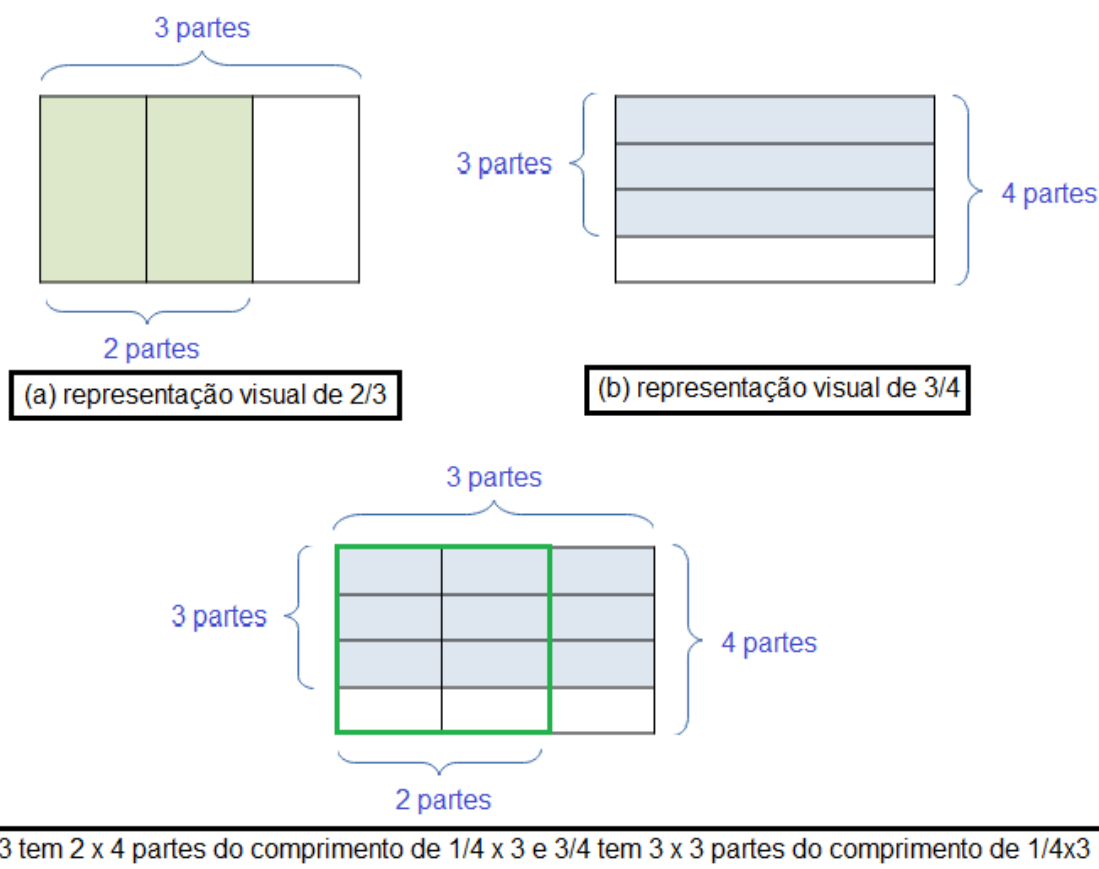
Figura 6 – Exemplos do artigo A2 de tarefas de compreensão do todo

Compreensão do todo.
 Um grupo de alunos estão investigando os livros que eles têm em suas casas. Steve percebeu que $1/2$ dos livros da sua casa são livros de ficção, enquanto Andrew percebeu que $1/5$ dos livros de sua família são de ficção. Steve afirma que sua família tem mais livros de ficção que a família de Andrew.
 a) O Steve está necessariamente correto? Sim ou Não.
 b) Por que / Por que não?
 c) Qual ação, caso exista, você tomaria como professor para responder a Steve?

Fonte: Lewis e Perry (2013), tradução nossa.

A necessidade de identificar a unidade de referência quando os números fracionários estão integrados em situações-problema também foi apontado no artigo A3 ao trazer a reflexão de que, na divisão $2/3 \div 3/4 = 8/9$, por exemplo, geralmente ao se perguntar quantas vezes $3/4$ cabem em $2/3$, é respondido que cabem $8/9$ grupos do todo ($2/3$), mas o correto seria $8/9$ grupos de $3/4$, como ilustrado na Figura 7.

Figura 7 – Algoritmo da divisão baseado no significado da unidade de referência



Fonte: Adaptado de Copur-Gencturk (2021).

O exemplo da Figura 7 expõe que, $2/3 \div 3/4$ pode ser conceitualizado como o número de grupos do divisor e $3/4$ como um número que pode ser formado a partir do dividendo, $2/3$. Tendo em conta que representações fracionárias dependem de repartições iguais, é necessário criar um denominador comum para essas duas

frações, $2/3$ e $3/4$, para a representação fracionária do quociente. Como mostrado na Figura 7c-cor azul, um grupo do divisor $3/4$ pode ser feito com 3×3 partes iguais. O dividendo $2/3$ pode ser feito com 2×4 partes iguais (Figura 7c-cor verde). O quociente (isto é, o número de grupos do divisor) pode, então, ser achado dividindo o número total de partes, 2×4 , pelo número de partes de uma unidade de referência, 3×3 . Essa abordagem fornece uma explicação conceitual do algoritmo de divisão no qual $a/b \div c/d = (a \times d)/(c \times b)$, que foca no fato de que a unidade de referência para o quociente é o divisor, e também cria uma explicação significativa para o denominador do quociente.

Revisão Narrativa de Literatura

Assim como a sistemática, a revisão narrativa de literatura (RNL) tem caráter qualitativo e descritivo (BOGDAN; BIKLEN, 1994), sobre tarefas planejadas para investigar unidade de referência ou fração unitária. A busca por artigos científicos harmonizados com esse tema ocorreu no Google Scholar com os mesmos descritores da sistemática, traduzidos para a língua portuguesa.

Inicialmente a pesquisa identificou 81 trabalhos (artigos, livros, dissertações, teses, projetos, citações, etc). Desses, um foi excluído por estar em duplicidade e 66 por não serem artigos científicos. Os 14 restantes seguiram para leitura dos títulos, resumos, palavras-chaves e outras partes textuais com intuito de verificar se atingiam o objetivo proposto para o presente trabalho. As leituras revelaram distanciamento de 12 trabalhos. Os dois artigos que seguiram para descrição e análise estão apresentados no Quadro 3, com rótulos B1 e B2, entre outras identificações.

Quadro 3 – Artigos científicos selecionados no Google Scholar

Objetivo da RNL: Identificar noções de professores e futuros professores que ensinam matemática emersas de tarefas planejadas para investigação sobre unidade de referência ou fração unitária apontadas em artigos científicos da Educação Matemática.					
	Base	Ano	Título	Autor(es)	Periódico
B1	Google Scholar	2014	A abordagem do conteúdo de frações em um curso de formação de professores dos anos iniciais	Schastai, M.; Da Silva, S.; Soistak, M	Espacios
B2		2021	Fração: conceito e aplicação da unidade de medida por professores e futuros professores	Souza, M.	Boletim Gepem

Fonte: Google Scholar (2023).

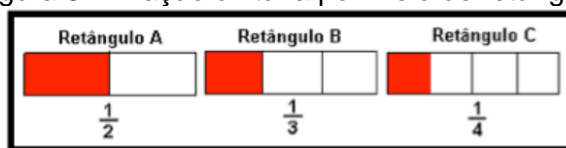
Resultados da Revisão Narrativa de Literatura

A leitura e análise dos dois artigos (Quadro 3) nos conduziram à identificação de duas categorias relativas às noções de professores e futuros professores sobre a unidade de referência e fração unitária emersas de tarefas matemáticas: a primeira tem a ver com a compreensão da fração unitária e a segunda sobre a compreensão da importância da unidade de referência.

O artigo B1 pode ser reconhecido como pertencendo às duas categorias. Embora os autores não tenham declarado se a investigação versou sobre tarefas com intuito de discutir a unidade de referência ou fração unitária, na verdade, houve argumentações importantes nesse sentido que nos impediram de excluí-lo de nossa revisão. As argumentações aconteceram ao longo de oficinas propostas em uma formação continuada com 20 professores dos anos iniciais do ensino básico. As oficinas objetivavam oportunizar aprofundamento conceitual em relação aos números fracionários e à vivência de práticas de ensino, incluindo a ideia de fração como unidade de medida.

Inicialmente o formador estabeleceu que as frações unitárias são a unidade de medida e que, para obtê-las, é necessário dividir o todo em partes iguais, e tomar uma parte. Mais tarde, realizou uma analogia entre o conceito de medida de comprimento e as frações, por meio de uma atividade, com o objetivo de definir fração unitária. Para isso, usou três retângulos divididos em partes iguais (Figura 8) e conduziu um diálogo com os cursistas a fim de levá-los à compreensão da unidade de medida e de sua importância.

Figura 8 – Fração unitária por meio de retângulos



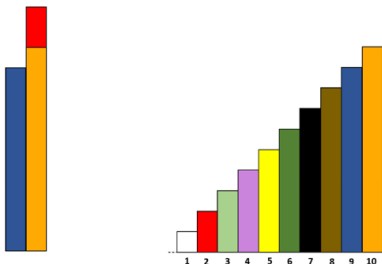

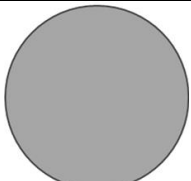
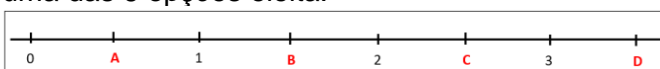
Fonte: Schastai; Da Silva; Soistak (2014, s/p).

O trabalho com a tarefa da Figura 8 permitiu que os cursistas concluíssem que o denominador é o responsável pelo “tipo de divisão”, nas palavras deles próprios, e que a representação de uma dessas partes leva às frações unitárias $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, respectivamente, que podem ser consideradas como unidades de medida. Outras tarefas similares compuseram a oficina e permitiram que os autores concluíssem pelo estabelecimento de um elo entre a teoria e a prática, contribuindo para a compreensão de significados conceituais e procedimentais. Para os autores,

os professores conceituaram as frações como o resultado de medir algo, tendo a fração unitária como unidade de medida.

O artigo B2 está alinhado com a segunda categoria – compreensão da importância da unidade de referência. A autora investigou o conceito e como – e se – a unidade apoia tarefas com números fracionários de 121 participantes que atuam no ensino básico (professores, gestores, pedagogos). Para isso, elaborou cinco itens, quatro dos quais são tarefas que requeriam compreensão de unidade (Quadro 9).

Quadro 9 – Quatro tarefas exploratórias da importância do reconhecimento da unidade de medida

Tarefa	
1	<p>“Foi oferecido a Marcos escolher entre $\frac{1}{3}$ de pizza ou $\frac{1}{2}$ de pizza. Como ele está com fome e gosta de pizzas, ele escolheu $\frac{1}{2}$. Seu amigo Carlos pegou $\frac{1}{3}$ de uma pizza e acabou comendo mais pizza do que Marcos. Como pode ser isso?”</p>
2	<p>“Assuma a unidade como sendo o comprimento de uma barra laranja mais uma barra vermelha. A barra azul representa $\frac{9}{12}$ em relação à unidade. Como você explicaria para uma pessoa o fato de $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$, somente com uso das barras?”</p>  <p>Type equation here.</p>
3	<p>Que fração é  comparada a  ?</p>
4	<p>“Qual a localização de $\frac{3}{2}$ na reta abaixo?” e solicitava uma justificativa para uma das 6 opções eleita.</p>  <p> <input type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/> nenhuma das posições <input type="checkbox"/> em qualquer uma das posições </p>

Fonte: Souza (2021, p. 92-96).

A autora concluiu pela existência de lacunas sobre as compreensões básicas do que seja a unidade de medida para apoio à análise de situações que envolvam

números fracionários. Ademais, a unidade de medida não parece ter apoiado os participantes para a resolução das tarefas.

À guisa de conclusão

As noções de unidade de referência e fração unitária são fundamentais para uma compreensão robusta sobre frações tanto conceitualmente como procedimentalmente. Assim, as duas noções, portanto, são centrais para a Álgebra (VIZCARRA; SALLÁN, 2005; SIEGLER *et al.*, 2012; BOOTH; NEWTON, 2012; COPUR-GENCTURK, 2021; LEWIS; PERRY, 2013), cuja capilaridade é indiscutível para a Matemática, as Ciências, a Engenharia e a Tecnologia, o que nos levou a investigar nesta RSL e RNL, que noções emersas de tarefas planejadas para investigação sobre unidade de referência e fração unitária apresentam professores e futuros professores que ensinam matemática, reveladas em trabalhos científicos da Educação Matemática?

Foram identificados que a compreensão de unidade de referência pelos professores parece influenciar as opções de algumas resoluções de tarefas matemáticas. Por exemplo, sua compreensão parcial pode levá-los a optar por estratégias equivocadas (COPUR-GENCTURCK; OLMEZ, 2020; SOUZA, 2021; POWELL *et al.*, 2022), como adotar a mesma unidade de referência para operações aritméticas com frações que têm unidades diferentes.

Com exceção do artigo A6, todos os trabalhos que se referiam à compreensão das frações unitárias comprovaram a hipótese de Ciosek e Samborska (2016, p. 22) de que “em um procedimento iterativo de dissecar algo em n partes iguais para constituir uma fração $1/n$ pode deixar a falsa crença de que se um inteiro está dividido em n partes desiguais, nenhuma delas pode ser $1/n$ do seu comprimento”. No caso do artigo A6, houve uma reflexão de que, apesar de os pedaços dos bolos terem formatos diferentes, é possível que um pedaço seja $1/3$ do bolo, pois o que é relevante é a área do pedaço do bolo em relação à área do bolo e não seu formato.

Essa falsa crença, ao lado da interpretação de que a única forma de obter $1/n$ de um todo dado é dividindo-o em n partes iguais (POWELL, 2022), molda a percepção equivocada de como muitos professores (e não apenas alunos, como na investigação de Ciosek e Samborska (2016)) percebem o todo e uma fração unitária associada, podendo influenciar negativamente na aprendizagem de alunos sobre frações e operações aritméticas com frações.

Os nove trabalhos da RSL, em geral, se concentraram em discussões sobre conhecimento de unidade de referência, frações unitárias e conceito de fração por meio de tarefas. A respeito da unidade de referência, os artigos demonstraram que houve pouca percepção ou atenção ao inteiro nas tarefas por parte dos professores, levando-os a cometerem equívocos, como os descritos no artigo A6.

Além disso, os artigos A5 e A7 também identificaram preferência dos professores pelos modelos discretos em detrimento de contínuos, apesar de essa discretização poder provocar a ideia de que a fração é, unicamente, a quantidade de partes da unidade de referência (SOUZA; POWELL, 2021). A esse respeito, e a pretexto de ampliação do escopo desta RSL, Abreu-Mendoza *et al.* (2020) desenvolveram uma pesquisa com 49 crianças do 2º ano de uma escola municipal de Newark, no estado de New Jersey, nos EUA com objetivo de examinar se o controle inibitório (habilidade para parar ou anular uma resposta mental ou motora dominante – ROSENBERG-LEE, 2021) contribui para diferenças individuais no raciocínio proporcional discreto, e se o raciocínio poderia ser aprimorado pela estimulação contínua. Os resultados da pesquisa de Abreu-Mendoza *et al.* (2020) mostraram que o raciocínio proporcional das crianças pode ser melhorado promovendo representações contínuas em detrimento de estímulos unicamente discretos e aprimorando as habilidades de controle inibitório. Representações contínuas, de acordo com Carraher (1996) e Siegler, Thompson e Schneider (2011), estão relacionadas com uma compreensão melhor do conceito de frações.

Por fim, o artigo B1 descreveu um trabalho formativo que promoveu alguma compreensão sobre a unidade de medida por professores de anos iniciais do ensino básico. Os resultados de B1 mostraram desconhecimento do reconhecimento de frações unitárias e da importância do apoio da unidade de referência para solução de tarefas envolvendo frações. Essa conclusão foi corroborada pelo artigo B2, embora não tenha sido um trabalho formativo, mostrou um retrato do *status quo* da incompreensão acerca da unidade de medida por atores que atuam no ensino básico.

Concordamos com esses resultados e esperamos que mais programas de formação inicial e continuada de professores se debrucem sobre a compreensão da unidade de referência e de fração unitária de maneira prioritariamente contínua.

Agradecimentos

O presente trabalho é parte de um projeto maior tendo sido desenvolvido com apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Espírito Santo – Fapes) à terceira autora, à qual agradece.

Referências

- ABREU-MENDOZA, Roberto. *et al.* Children's discrete proportional reasoning is related to inhibitory control and enhanced by priming continuous representations. **Journal of Experimental Child Psychology**, v. 199, p. 1-16, 2020. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0022096520300862>.
- ALQAHTANI, Muteb. *et al.* How a measuring perspective influences pre-service teachers' reasoning about fractions with discrete and continuous models. **International Electronic Journal of Elementary Education**, v. 14, n. 3, p. 441 – 458. doi: 10.26822/iejee.2022.255.
- AMADOR, Julie. Mathematics teacher educator noticing: examining interpretations and evidence of students' thinking. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 25, p. 163-189, 2022. Disponível em: https://scholar.google.com.br/scholar?q=Mathematics+teacher+educator+noticing:+examining+interpretations+and+evidence+of+students%E2%80%99+thinking&hl=pt-BR&as_sdt=0&as_vis=1&oi=scholar.
- BALL, Deborah. Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 21, n. 2, p. 132-144, 1990. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/749140>.
- BEHR, Merlin. *et al.* Rational number concepts. *In*: LESH, R.; LANDAU, M. (Eds.). **Acquisition of mathematics concepts and processes**. New York: Academic Press, 1983. p. 91-126. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/258510439_Rational_number_concepts.
- BOOTH, Julie L.; NEWTON, Kristie J. (2012). Fractions: Could they really be the gatekeeper's doorman? **Contemporary Educational Psychology**, v. 37, n. 4, p. 247-253, 2012. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0361476X12000392>.
- BOOTH, Julie L.; NEWTON, Kristie J.; TWISS-GARRITY, Laura K. The impact of fraction magnitude knowledge on algebra performance and learning. **Journal of Experimental Child Psychology**, v. 118, p. 110-118, 2014. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022096513001793>.
- BOOTH, Julie; NEWTON, Kristie. Fractions: Could they really be the gatekeeper's doorman? **Contemporary Educational Psychology**, v. 37, n. 4, p. 247-253, 2012. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0361476X12000392>.
- BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. **Investigação Qualitativa em Educação: Uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto: Porto Editora, 1994.

CARRAHER, David William. Learning about fractions. *In*: STEFFE, Leslie P. *et al.* (Org.). **Theories of mathematical learning**. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1996. p. 241-266.

CHRISTIANSEN, Bent; WALTHER, Gerd. Task and activity. *In*: CHRISTIANSEN, B.; HOWSON, A.; OTTE, M. (Eds.). **Perspectives on mathematics education**. Dordrecht: D. Reidel, 1986. p. 243-307.

CIOSEK, Marianna; SAMBORSKA, Maria. A false belief about fractions – What is its source? **The Journal of Mathematical Behavior**, v. 42, p. 20-32, 2016. Disponível em: <https://psycnet.apa.org/record/2016-22587-003>.

COLE, Yaa. Assessing elemental validity: the transfer and use of mathematical knowledge for teaching measures in Ghana. **ZDM**, v. 44, p. 415-426, 2012. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-012-0380-7>.

COPUR-GENCTURK, Yasemin. Teachers' conceptual understanding of fraction operations: results from a national sample of elementary school teachers. **Educational Studies in Mathematics**, v. 107, p. 525-545, 2021. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-021-10033-4>.

COPUR-GENCTURK, Yasemin; OLMEZ Ibrahim Burak. Teachers' attention to and flexibility with referent units. *In*: SACRISTÁN, Ana Isabel; CORTÉS-ZAVALA, José Carlos; RUIZ-ARIAS, Perla. (Eds.). **Mathematics Education Across Cultures: Proceedings of the 42nd Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. México: Springer, 2020. p 772-780.

DOYLE, Kathleen, *et. al.* The rational number subconstructs as a foundation for problem solving. **Adults Learning Mathematics: An International Journal**, v. 11, n. 1, p. 21-42, 2016. Disponível em: <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1091996.pdf>.

JACOBSON, Erik.; IZSÁK, Andrew. Knowledge and motivation as mediators in mathematics teaching practice: the case of drawn models for fraction arithmetic. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 18, p. 467-488, 2015. Disponível em: https://scholar.google.com.br/scholar?q=Knowledge+and+motivation+as+mediators+in+mathematics+teaching+practice:+the+case+of+drawn+models+for+fraction+arithmetic&hl=pt-BR&as_sdt=0&as_vis=1&oi=scholar.

KHAN, Khalid S.; KUNZ, Regina; KLEIJNEN, Jos, ANTES, Gerd. Five steps to conducting a systematic review. **Journal of the Royal Society of Medicine**, v. 96, n. 3, p. 118-121, 2003. Disponível em: <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC539417/pdf/0960118.pdf>.

KIEREN, Thomas. On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. *In*: LESH, R. (Org.). **Number and measurement: papers from a research workshop**. Ohio: Eric/Smeac, 1976. p. 101-144.

LEE, Mi Yeon; LEE, Ji-Eun. Spotlight on Area Models: Pre-service Teachers' Ability to Link Fractions and Geometric Measurement. **International Journal of Science and Mathematics Education**, v. 19, p. 1079-1102, 2021. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s10763-020-10098-2>.

LEE, Soo Jin; BROWN, Rachel Eriksen; ORRILL, Chandra Hawley. Mathematics teachers' reasoning about fractions and decimals using drawn representations. **Mathematical Thinking and Learning**, v. 13, n. 3, p. 198-220, 2011. Disponível em: <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/10986065.2011.564993>.

LEWIS, Catherine; PERRY, Rebecca. Lesson Study with Mathematical Resources: A Sustainable Model for Locally-led Teacher Professional Learning. **Mathematics Teacher Education and Development**, v. 16, n. 1, p. 22-42, 2014. Disponível em: <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1046670.pdf>.

LIN, Cheng-Yao, *et al.* Preservice teachers' conceptual and procedural knowledge of fraction operations: a comparative study of the United States and Taiwan. **School Science and Mathematics**, v. 113, n. 1, p. 41-51, 2013. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1949-8594.2012.00173.x>.

LOVIN, LouAnn, *et al.* Pre-K-8 prospective teachers' understanding of fractions: An extension of fractions schemes and operations research. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 21, p. 207-235, 2018. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s10857-016-9357-8>.

MA, Liping. **Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States.** Lawrence Erlbaum Associates, 1999.

NI, Yujing. Semantic domains of rational numbers and the acquisition of fraction equivalence. **Contemporary Educational Psychology**, v. 26, n. 3, p. 400-417, 2001. Disponível em: <https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/11414728/>.

OLIVE, John. From Fractions to Rational Numbers of Arithmetic: A Reorganization Hypothesis. **Mathematical Thinking and Learning**, v. 1, n. 4, p. 279-314, 1999. Disponível em: https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1207/s15327833mtl0104_2.

OLMEZ, Ibrahim Burak; IZSÁK, Andrew. Validating psychometric classification of teachers' fraction arithmetic reasoning. **Journal of Mathematics Teacher Education**, 2023. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s10857-022-09564-1>.

POWELL, Arthur B. How does a fraction get its name? **Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática**, v. 3, n. 3, p. 700-713, 2019. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/339996087_How_does_a_fraction_get_its_name.

POWELL, Arthur B.; ALI, Kendell V. Design research in mathematics education: Investigating a measuring approach to fraction sense. *In*: CUSTÓDIO, J. F.; DA COSTA, D. A., *et al.* (Ed.). **Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT): Contribuições para pesquisa e ensino.** São Paulo: Livraria da Física, 2018. p.221-242.

POWELL, Arthur B. *et al.*, "One of three parts, but they are unequal": elementary school teachers' understanding of Unit Fractions. **Boletim Gepem**, n. 80, p. 231-248, 2022.

POWELL, Arthur B. Enhancing students' fraction magnitude knowledge: A study with students in early elementary education. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 70,

p. 1-14, 2023. Disponível em:

https://scholar.google.com.br/scholar?q=Enhancing+students%27+fraction+magnitude+e+knowledge:+A+study+with+students+in+early+elementary+education&hl=pt-BR&as_sdt=0&as_vis=1&oi=scholart.

POWELL, Sara R.; GILBERT, Jennifer K.; FUCHS, Lynn S. Variables influencing algebra performance: Understanding rational numbers is essential. **Learning and Individual Differences**, v. 74, p. 101758, 2019. Disponível em:

<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1041608019300949>.

ROSENBERG-LEE, Miriam. Probing the neural basis rational numbers: the role of inhibitory control and magnitude representations. **PsyArXiv**, 2021. DOI: 10.31234/osf.io/p4nuq. Disponível em:

https://scholar.google.com.br/scholar?q=Probing+the+neural+basis+rational+numbers:+the+role+of+inhibitory+control+and+magnitude+representations&hl=pt-BR&as_sdt=0&as_vis=1&oi=scholart.

SIEGLER, Robert S.; DUNCAN, Greg J.; DAVIS-KEAN, Pamela E.; DUCKWORTH, Kathryn; CLAESSENS, Amy, ENGEL, Mimi, SUSPERREGUY, Maria Ines.; CHEN, Meichu. Early predictors of high school mathematics achievement. **Psychological Science**, v. 23, n. 7, p. 691-697, 2012. Disponível em:

<https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED552898.pdf>.

SIEGLER, Robert; THOMPSON, Clarissa; SCHNEIDER, Michael. An integrated theory of whole number as fractions development. **Cognitive Psychology**, v. 62, p. 273-296, 2011. Disponível em: <https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/21569877/>.

SOUZA, Maria Alice Veiga Ferreira de. Fração: conceito e aplicação da unidade de medida por professores e futuros professores. **Boletim Gepem**, n. 79, p. 86-100, 2021. Disponível em:

<file:///C:/Users/alice/Downloads/7.+Fra%C3%A7%C3%A3o+conceito+e+aplica%C3%A7%C3%A3o+da+unidade+de+medida+por+professores+e+futuros+professores+brasileiros-1.pdf>.

SOUZA, Maria Alice Veiga Ferreira de; POWELL, Arthur B. How do textbooks from Brazil, the United States, and Japan deal with fractions? **Acta Scientiae**, v. 23, n. 4, p. 77-111, 2021. Disponível em:

<http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/6413>.

SCHASTAI, Marta Burda; DA SILVA, Sani de Carvalho Rutz; SOISTAK, Maria Marilei. A abordagem do conteúdo de frações em um curso de formação de professores dos anos iniciais. **Espacios**, v. 35, n. 5, p. 15, 2014. Disponível em:

<https://ww.revistaespacios.com/a14v35n05/14350415.html>

STEFFE, Leslie; OLIVE, John. **Children's fractional knowledge**. New York: Springer, 2010.

STEVENS, Alexis *et al.* Promoting sophisticated fraction constructs through instructional changes in a mathematics course for PreK-8 prospective teachers.

Journal of Mathematics Teacher Education, v. 23, p. 153-181, 2020. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s10857-018-9415-5>.

VIZCARRA, R. E.; SALLÁN, J. M. G. Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria. **Revista Iberoamericana de Educación**

Matemática, v. 1, p. 17-35, 2005. Disponível em:
<http://funes.uniandes.edu.co/14550/>.

VON GLASERSFELD, Ernst. **Radical constructivism: A way of knowing and learning**. London: Routledge Falmer, 1995.

WILKIE, Karina; ROCHE, Anne. Primary teachers' preferred fraction models and manipulatives for solving fraction tasks and for teaching. **Journal of Mathematics Teacher Education**, 2022. Disponível em:
https://scholar.google.com.br/scholar?q=Primary+teachers%E2%80%99+preferred+fraction+models+and+manipulatives+for+solving+fraction+tasks+and+for+teaching&hl=pt-BR&as_sdt=0&as_vis=1&oi=scholart.

YOSHIDA, Hajime; SAWANO, Kooji. Overcoming cognitive obstacles in learning fractions: Equal-partitioning and equal-whole. **Japanese Psychological Research**, v. 44, n. 4, p. 183-195, 2002. Disponível em:
<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1111/1468-5884.00021>.

ZHANG, Dake; STECKER, Pamela; BEQIRI, Klesti. Strategies students with and without mathematics disabilities use when estimating fractions on number lines. **Learning Disability Quarterly**, v. 40, n. 4, p. 225-236, 2017. Disponível em:
<https://journals.sagepub.com/doi/abs/10.1177/0731948717704966>.

Submetido em abril de 2023.

Aceito em maio de 2023.