PERSPECTIVAS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

REVISTA DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL (UFMS)

ISSN 2359-2842 Volume 16, número 42 – 2023 DOI 10.46312/pem.v16i42.18569

Potencialidades e desafios de tarefas de aprendizagem de matemática no desenvolvimento de THA

Potentialities and challenges of mathematics learning tasks in the development of THA

Lucas Rosa Sá Oliveira[1]

Armando Traldi Jr[2]

RESUMO

Neste artigo apresenta-se a síntese do resultado de uma pesquisa qualitativa do tipo pesquisa-ação, sobre o ensino-aprendizagem dos números racionais em tarefas de matemática desenvolvidas por grupos de estudantes do Ensino Médio. Foi realizado um estudo bibliográfico no portal de dissertações e teses da Capes com o intuito de verificar os tipos de tarefas utilizadas em pesquisas recentes. Após essa análise, adotou-se como pressupostos teóricos: a Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA) para elaborar as tarefas de matemática e entender os caminhos percorridos pelos estudantes; as representações e os significados dos números racionais para construir as tarefas de matemática e a Teoria APOS para analisar os dados encontrados. Os resultados esperados foram ao encontro dos objetivos e das hipóteses da THA, além de possibilitar a identificação das potencialidades e desafios das tarefas de números racionais no Ensino Médio.

PALAVRAS-CHAVE: Números Racionais. Ensino Médio. Trajetória Hipotética de Aprendizagem. Teoria APOS.

ABSTRACT

This article presents a synthesis of the result of a qualitative research of the type research-action, on the teaching-learning of rational numbers in mathematics tasks developed by groups of high school students. A bibliographical study was carried out on the Capes dissertations and theses portal in order to verify the types of tasks used in recent research. After this analyze, the following theoretical assumptions were adopted: the Hypothetical Learning Trajectory (HLT) to prepare the math tasks and understand the paths taken by the students; the representations and meanings of rational numbers to build the math tasks and the APOS Theory to analyze the data found. The expected results were in the

[1]Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP), Professor de Matemática dos Anos Finais do Ensino Fundamental II em escola particular de São Paulo. E-mail: lucas_rosa16@hotmail.com. ORCID: https://orcid.org/0009-0003-9732-7316.

[2] Departamento de Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP). E-mail: traldijr@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8337-3977.

line with the objectives and hypotheses of HLT, in addition to enabling the identification of the potentialities and challenges of rational number tasks in the High School.
KEYWORDS: Rational Numbers. High School. Hypothetical Learning Trajectory. APOS Theory.

Introdução

As representações e significados dos números racionais estão presentes na vida do estudante, desde a Educação Básica até a sua trajetória como cidadão e podem influenciar sua formação. Por isso, é importante investigar os desafios enfrentados por ele ao lidar com esses números ao final do ciclo do Ensino Médio.

Pesquisas acadêmicas realizadas por Severo (2009), Krug (2015) e Oliveira (2017), mostraram resultados em que seu ensino tende a ser pautado em processos mecanizados, com exercícios genéricos e sem nenhuma contextualização com o cotidiano do estudante. Os autores também apresentaram resultados mostrando que os estudantes possuem dificuldades na compreensão das representações e significados dos números racionais; e que também, há vantagens em utilizar estratégias diversificadas na resolução de tarefas sobre os números racionais.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), principal documento normativo que fundamenta as propostas curriculares para a Educação Básica, destaca a importância do desenvolvimento das competências e habilidades dos números racionais nos anos finais do Ensino Fundamental II. Porém, embora não aborde especificamente esses números no Ensino Médio, ressalta que a área da Matemática e suas Tecnologias no Ensino Médio "propõe a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental". (BRASIL, 2018, p. 527).

Desse modo, o próprio sugere que os conhecimentos matemáticos estudados no ciclo anterior sejam explorados sob uma perspectiva integrada à realidade dos estudantes em diversos contextos no Ensino Médio. Ainda, neste documento destacam-se as seguintes competências específicas da Matemática e suas tecnologias para o Ensino Médio:

> 3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. 4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional, etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas. 5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos,

> como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, 2018, p. 530).

Assim, essas competências podem estar relacionadas as diferentes formas de organizar a aprendizagem, com base nos próprios processos de construção do conhecimento matemático em situações do cotidiano (BRASIL, 2018).

Outras avaliações da Educação Básica também verificam os conhecimentos dos estudantes sobre esses números. O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) avalia as competências e habilidades desenvolvidas pelos estudantes e em sua matriz de referência 2022 apresenta as seguintes competências relacionadas aos números racionais:

> Competência de área 1. – Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais. H1 – Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações – naturais, inteiros, racionais ou reais. H2 – Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem. H3 – Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos. H4 – Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas. H5 – Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos. (BRASIL, 2021, p. 5).

Diante disso, esta pesquisa se originou a partir desses desafios e da seguinte problemática: *quais potencialidades e desafios são revelados no processo de elaboração e desenvolvimento de uma THA sobre números racionais, desenvolvida com um grupo de estudantes do Ensino Médio?*

E teve como objetivo investigar potencialidades e desafios na elaboração e no desenvolvimento de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem na perspectiva do professor-pesquisador e dos estudantes sobre os números racionais, implementada com um grupo de estudantes do Ensino Médio.

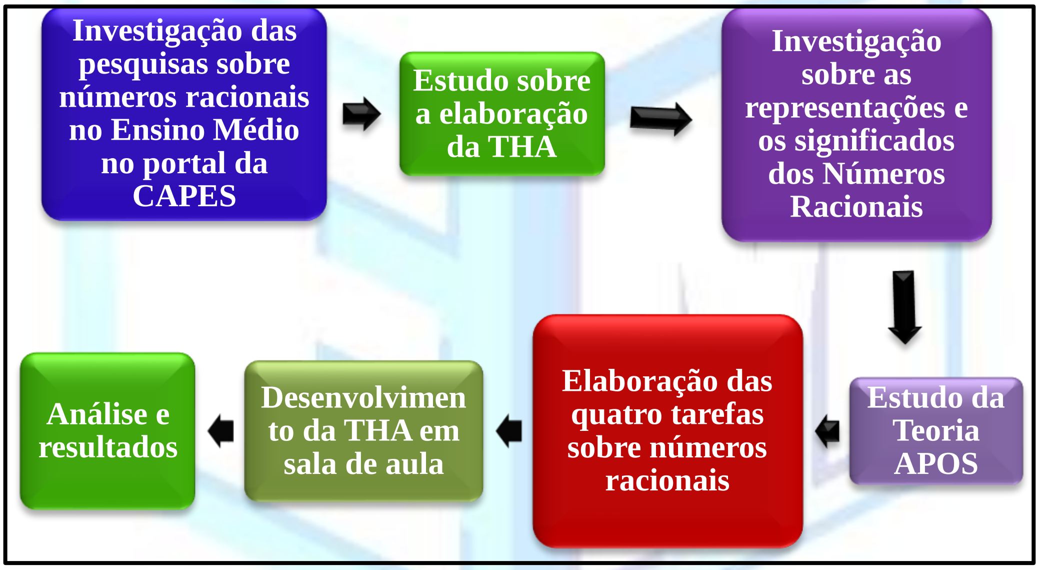
Procedimentos metodológicos

A pesquisa realizada é de natureza qualitativa, segundo as ideais de Bogdan e Biklen (1994, p. 47-51) e do tipo pesquisa-ação de Thiollent (1986), em que o professor-pesquisador se torna reflexivo sendo capaz de analisar e repensar suas próprias metodologias de ensino. Os instrumentos de coleta de dados foram protocolos de atividades, gravações de áudio e diário de bordo sobre as tarefas resolvidas pelos estudantes.

Este estudo foi desenvolvido em sala de aula da Escola Técnica do Estado de São Paulo, Etec São Mateus, localizada na zona leste de São Paulo capital. Ao todo foram 39 estudantes, na faixa etária de 17 a 18 anos, da 3ª série do curso de Técnico em Nutrição e Dietética Integrado ao Ensino Médio (ETIM). O professor-pesquisador é o próprio professor titular que lecionou para essa turma desde 2020 até 2022.

Para responder a problemática desta pesquisa, realizou-se estudos a partir: (i) de dissertações e teses no portal de periódicos da CAPES, com intuito de investigar quais são os tipos de tarefas matemáticas desenvolvidas em pesquisas na sala de aula, bem como seus principais resultados, adotadas no ensino dos números racionais no Ensino Médio; (ii) da proposta da Trajetória Hipotética de Aprendizagem descrita por Simon (1995) para elaborar as tarefas matemáticas sobre os números racionais; (iii) dos aspectos didáticos relacionados as representações e os significados dos números racionais, segundo as ideias de Kieren (1976), para elaborar as tarefas matemáticas propostas na THA; e por fim, (iv) da teoria APOS de Dubinsky (1991) para analisar os resultados encontrados referente a compreensão do estudante na resolução das tarefas sobre os números racionais.

Figura 01 - Fluxograma sobre o caminho da pesquisa



Fonte: elaborado pelo autor (2022).

Trajetórias hipotéticas de aprendizagem

Simon (1995) desenvolveu um modelo de ensino que possibilita identificar os principais aspectos importantes para o planejamento e desenvolvimento de aulas de matemática, a Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA). Segundo o autor:

> é composta por três componentes: o objetivo de aprendizagem que define a direção, as tarefas de aprendizagem, e o processo hipotético de aprendizagem - uma previsão de como o pensamento e a compreensão do aluno evoluirão no contexto das tarefas de aprendizagem. (SIMON, 1995, p. 136, tradução nossa).

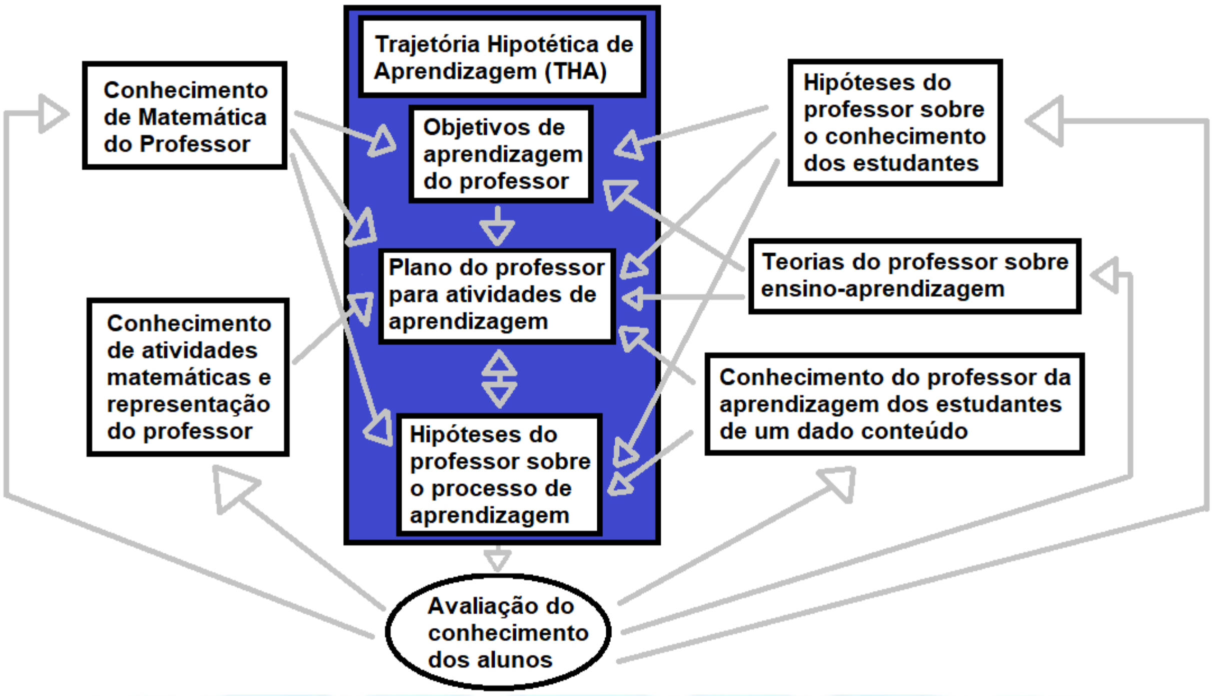
Nesse sentido, a THA pode contribuir para o planejamento e desenvolvimento de aulas e tarefas matemáticas que sejam relevantes para o estudante. O autor descreve que para elaborar a THA deve-se considerar alguns aspectos importantes: (a) a identificação clara do objetivo de aprendizagem do professor; (b) o levantamento do conhecimento matemático atual dos estudantes; (c) o planejamento de tarefas matemáticas para alcançar o objetivo; e (d) as tarefas matemáticas como ferramentas para aprendizagem de conceitos matemáticos.

Após definir o objetivo de aprendizagem, é necessário pensar sobre o processo hipotético de aprendizagem – considerando o conhecimento matemático atual dos estudantes e os desafios que surgirão no percurso do desenvolvimento da THA – que contemplem um conjunto de tarefas matemáticas adequadas ao objetivo. Dessa maneira, essas etapas podem viabilizar a elaboração de tarefas matemáticas eficazes para o ensino-aprendizagem de matemática.

Ainda, o autor destaca três tipos de tarefas importantes nesse caminho: tarefas iniciais, realizadas com os conhecimentos prévios dos estudantes; tarefas reflexivas, levam os estudantes a refletirem e geram abstração de regularidades na relação atividade-efeito; e tarefas de antecipação, que exigem abstração e análise de regularidades nessa relação. (SIMON; TZUR, 2004).

De acordo com Simon (1995), os elementos de construção da THA denominado “Ciclo de Ensino de Matemática” representam as inter-relações cíclicas que ocorrem entre o conhecimento do professor, a avaliação do conhecimento dos estudantes, a realização das tarefas e a THA, como mostra a figura 02.

Figura 02 - Domínios do conhecimento do professor, THA e interações com os alunos



Fonte: Simon (1995, p. 137, tradução nossa).

As tarefas matemáticas elaboradas são baseadas: (i) nos objetivos de aprendizagem do professor; (ii) nas hipóteses do professor sobre o conhecimento dos estudantes; (iii) nas hipóteses do professor sobre o processo de aprendizagem; (iv) no conhecimento de Matemática do professor; (v) no conhecimento de tarefas matemáticas do professor; (vi) nas Teorias de Ensino-Aprendizagem do professor; (vii) no conhecimento do professor sobre a aprendizagem dos estudantes sobre um conteúdo; e (viii) na avaliação do conhecimento dos estudantes. Diante disso, a THA pode ser modificada do início ao fim de seu desenvolvimento, cabendo ao professor ajustá-la conforme a necessidade dos estudantes para alcançar seu objetivo.

Dessa forma, a THA pode possibilitar caminhos para a reflexão sobre a construção de conhecimentos matemáticos e também pode contribuir para o processo de ensino-aprendizagem, sob uma perspectiva inovadora, na implementação dessa teoria no currículo de Matemática nas escolas da Educação Básica.

Representações e significados dos números racionais

Os números racionais muitas vezes representam desafios para os estudantes desde os anos finais do Ensino Fundamental II e Ensino Médio. Além disso, também são objetos de estudo e pesquisa no campo da Educação Matemática pelos desafios de compreensão de suas representações e significados pelos estudantes.

As principais ideias desenvolvidas sobre esse conjunto numérico no currículo escolar tendem a ser abordadas por uma forma específica de interpretação e mecanizada. Assim, os professores deixam de lado outras representações e significados que poderiam ser mais bem explorados, o que mostra reflexos na compreensão desse conjunto pelos estudantes. (KIEREN, 1976).

Segundo Guidorizzi (2013, p. 19), os números racionais são representados por "$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \middle| a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$, no qual $\mathbb{Z}$ indica o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$". Os números racionais também podem ser representados nas seguintes formas: numérica (fracionária $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}$, decimal $\mathbf{0,4}$, percentual $\mathbf{40}\%$) e geométrica (figuras divididas em partes iguais). Na forma fracionária, se dividir o numerador 2 pelo denominador 5, obtém-se a forma decimal 0,4. Esse tipo de divisão pode resultar em um decimal finito ($\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} = \mathbf{0,5}$) ou decimal infinito conhecido como dízima periódica ($\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} = \mathbf{0,333}$ ...). Na forma percentual, a noção de Porcentagem está na fração cujo denominador é 100, representada por $\boldsymbol{n}\%$ ou $\frac{\boldsymbol{n}}{\mathbf{100}}$, assim $\mathbf{0,4}$ pode ser escrita como $\frac{\mathbf{40}}{\mathbf{100}}$ ou $\mathbf{40}\%$.

Outra ideia matemática importante na representação fracionária é a Equivalência. A fração equivalente é uma fração que representa o mesmo número ou quantidade e para encontrá-la basta multiplicar o numerador e o denominador pelo mesmo número. Por exemplo, a fração $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}$ multiplicada por 20, $\frac{\mathbf{2 \cdot 20}}{\mathbf{5 \cdot 20}}$ resulta na fração equivalente $\frac{\mathbf{40}}{\mathbf{100}}$, o que representa o mesmo valor de 0,4.

O pesquisador Kieren (1976) apresentou quatro significados (subconstrutos) básicos e fundamentais no processo de compreensão e construção de número racional: quociente, medida, razão e operador. O autor não considera o significado parte-todo como outros pesquisadores, pois para ele essa ideia já está presente no quociente, medida e operador. Porém, é importante para o estudante conhecer esse significado antes de usar os outros.

A relação *parte-todo* significa a divisão do número fracionário $\frac{a}{b}$, em que o todo foi dividido em "b" partes e foram consideradas "a" partes. Nesse sentido, temos como exemplo a fração $\frac{1}{4}$ que indica que o todo está divido em quatro partes e que uma delas foram tomadas.

O *quociente* representa o resultado da divisão de dois números inteiros, podendo ser associado a definição formal de números racionais, em que $\frac{a}{b}$, com a e b

sendo inteiros e b diferente de zero. Assim, pode-se afirmar que a fração $\frac{2}{5}$ significa duas unidades de chocolate divididas em cinco parte iguais, por exemplo.

A *medida* significa o próprio quociente da ideia de “quanto cabe” e duas grandezas da mesma natureza. Por exemplo, escolhendo a unidade de medida de capacidade, pode-se identificar quantos copos de suco de $200\,ml$ cabem em $1\,litro$ de suco, ou seja, $\frac{200}{1.000}$ ou $\frac{1}{5}$.

A ideia de *razão* está na comparação de partes com partes e não partes com o todo. Logo, sua representação fracionária pode ser utilizada com índice de comparação entre duas grandezas. Por exemplo, numa caixa com dez bolas, pode-se representar a razão entre bolas pretas e vermelhas por $\frac{4}{6}$ ou $\frac{2}{3}$, assim a cada dez bolas, quatro são pretas e seis são vermelhas.

O *operador* representa as transformações em que um número racional pode sofrer por meio das operações matemáticas básicas. Nesse sentido, pode-se transformar a fração $\frac{1}{2}$ na fração equivalente $\frac{2}{4}$ multiplicando o numerador e denominador por dois, por exemplo.

Também, considerando o conjunto $\mathbb{Q}$, pode-se propor as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de números racionais, em especial nas frações.

Assim, a partir de $\mathbb{Q}$, na adição e subtração tem-se:

$\boldsymbol{\frac{a}{b}} + \boldsymbol{\frac{c}{d}} = \boldsymbol{\frac{a \times d}{b \times d}} + \boldsymbol{\frac{b \times c}{b \times d}}$ e $\boldsymbol{\frac{a}{b}} - \boldsymbol{\frac{c}{d}} = \boldsymbol{\frac{a \times d}{b \times d}} - \boldsymbol{\frac{b \times c}{b \times d}}$, utilizando a noção de equivalência efetuar essas operações, transformando os denominadores em valores comuns.

Na multiplicação tem-se:

$\boldsymbol{\frac{a}{b}} \times \boldsymbol{\frac{c}{d}} = \boldsymbol{\frac{a \times c}{b \times d}}$, onde numerador é multiplicado por numerador e o mesmo ocorre com denominador.

E na divisão tem-se:

$\boldsymbol{\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}} = \boldsymbol{\frac{\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}}{\frac{c}{d} \cdot \frac{d}{c}}}$, pois multiplica a primeira fração pelo inverso da segunda fração, o que significa dividir a fração por 1.

Dessa maneira, se os números racionais fossem considerados apenas uma extensão dos números inteiros ou algoritmo, permaneceriam apenas no campo dos números. Porém, quando se usa a visão dos significados e representações, os números racionais se tornam significativos para a aprendizagem dos estudantes possibilitando contato com outros domínios da matemática desde os anos iniciais da Educação Básica. (KIEREN, 1976).

Teoria APOS

Dubinsky (1991) propôs um método que possibilita a compreensão do mecanismo de abstração reflexiva (proposto por Piaget em 1980), a teoria APOS (action, process, object, scheme). Esse mecanismo pode auxiliar na compreensão de como o estudante constrói seu conhecimento matemático. A respeito desse mecanismo, o autor destaca que:

> O conceito de abstração reflexiva pode ser uma ferramenta poderosa no estudo do pensamento matemático avançado, que pode fornecer uma base teórica que apoia e contribui para a nossa compreensão do que é e como podemos ajudar os estudantes a desenvolver a capacidade de se envolver nele. (DUBINSKY, 1991, p. 95).

Para o autor, a abstração reflexiva possibilita criar um quadro geral para descrever qualquer conceito matemático e como adquiri-lo. Em seu estudo apontou alguns exemplos de abstração reflexiva considerando os quatro métodos analisados por Piaget, importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático avançado, e acrescentou um quinto método que Piaget não considera como abstração reflexiva. Assim, destacam-se os seguintes métodos de construção da abstração reflexiva:

i. *Interiorização* é o processo que utiliza "[...] símbolos, linguagens, imagens e imagens mentais [...] para representar (...) ou seja, para construir processos internos como forma de dar sentido à fenômenos observados". (DUBINSKY, 1991, p. 100). O estudante constrói um conjunto de ações que podem ser executadas mentalmente, sem necessariamente indicar as descrições durante a ação, ou seja, como algum cálculo numa prova sem o passo a passo. Um exemplo considerando os números racionais é quando o estudante representa uma metade na forma fracionária, na forma decimal e na forma geométrica, interiorizando que as diferentes ações resultam no mesmo objeto matemático.

ii. *Coordenação* é quando "[...] envolvem a composição ou coordenação de dois ou mais processos para construir um novo". (DUBINSKY, 1991, p. 100). Assim, é por meio da coordenação que se pode fazer a composição entre objetos, ações ou processos para construir novos elementos. Um exemplo de coordenação envolvendo os números racionais é quando o conceito de equivalência é utilizado para transformar denominadores diferentes em iguais, o estudante usa a multiplicação para igualar os denominadores (coordena processos) e efetua a operação de soma com as novas frações equivalentes as iniciais.

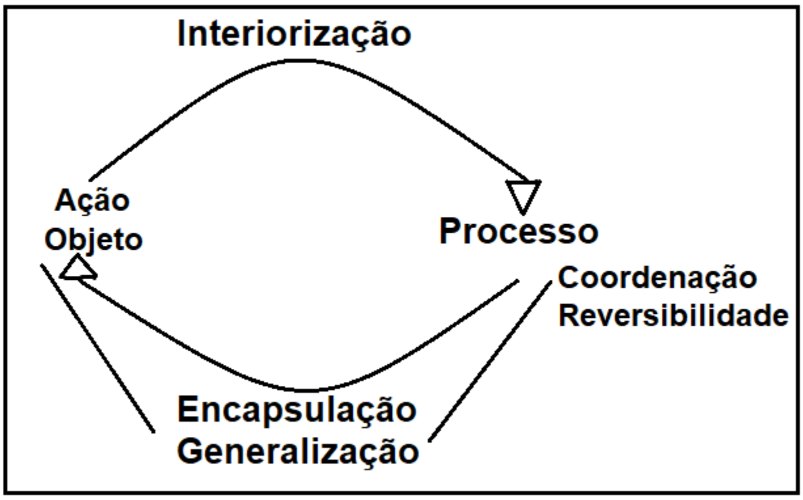
iii. *Encapsulação* é a “[...] conversão de um processo (dinâmico) em um objeto (estático)”. (DUBINSKY, 1991, p. 100). Segundo o autor, essa pode ser considerada a construção mais importante (na Matemática) e a mais difícil (para os estudantes), por isso eles devem estar cientes desse processo. Um exemplo envolvendo os números racionais é a proporção, onde o estudante relaciona grandezas (dinâmico) e testa afirmações em cima dos resultados obtidos pela fração (estático).

iv. *Generalização* é quando o estudante “aprende a aplicar um esquema existente a uma coleção mais ampla de fenômenos, dizemos que o esquema foi generalizado”. (DUBINSKY, 1991, p. 101). Logo, pode acontecer quando se compreende a aplicabilidade mais ampla do esquema e, também, quando um processo é encapsulado em um objeto. O autor cita outro exemplo sobre os números racionais, em que quando existe a razão entre duas quantidades de maneira que um esquema existente como igualdade ou adição, pode ser aplicado a ele para obter uma proporção ou multiplicação. O esquema permanece inalterado, mas a aplicabilidade se torna mais ampla, pois o objeto muda para o estudante na medida que ele compreende como o esquema pode ser assimilado.

v. *Reversibilidade* é acrescentada pelo autor que a apresenta como “[...] um novo processo que consiste em inverter o processo original”. (DUBINSKY, 1991, p. 101). Deste modo, caracteriza-se na possibilidade de pensar de forma ao contrário, sem desfazer o sentido inicial, mas em construir um novo processo revertendo o original. Um exemplo envolvendo os números racionais é quando o estudante converte uma fração/decimal para a representação de porcentagem e vice-versa.

Os tipos de abstração reflexiva podem ser trabalhados individualmente ou combinados entre si. Nesse sentido, a teoria APOS possibilita a análise da construção de conceitos matemáticos a partir das etapas de ação, processo, objeto e esquema trabalhados em qualquer ordem, tendo os cinco tipos de construção organizados como mostra a figura 03.

Figura 03 - Esquemas e sua construção



Fonte: Dubinsky (1991, p. 106, tradução nossa).

O *objeto* pode ser considerado todos os objetos matemáticos como números, variáveis, conjuntos, funções, dentre outros e devem ser construídos pelo estudante durante o desenvolvimento de seu conhecimento matemático. Uma *ação* é toda transformação em que os passos realizados sobre um objeto matemático são compreendidos. Um *processo* é uma construção interna em que o estudante realiza uma ação e passa a ter controle sobre a transformação do objeto matemático, possibilitando descrever os passos e invertê-los quando for conveniente. E finalmente, quando uma coleção de objetos e processos são organizados de maneira estruturadas, então formam um *esquema*. (PRADO, 2010).

Apresentação, análise e discussão das tarefas de números racionais

A questão apresentada a seguir é da tarefa I e parte de uma tarefa inicial sobre o significado de parte-todo e sua representação numérica e geométrica. A partir desta tarefa percebeu-se que os estudantes possuem seus próprios conhecimentos sobre um objeto matemático, por isso é importante valorizar o conhecimento matemático atual do estudante na realização das tarefas. Além disso, determinados procedimentos realizados pelos estudantes ajudaram a compreender melhor como a situação-problema foi resolvida.

1) Desenhe um retângulo, divida-o em três partes congruentes e pinte uma.

Responda:

a) Qual é o numerador? Qual é o denominador? Qual é a fração representada?

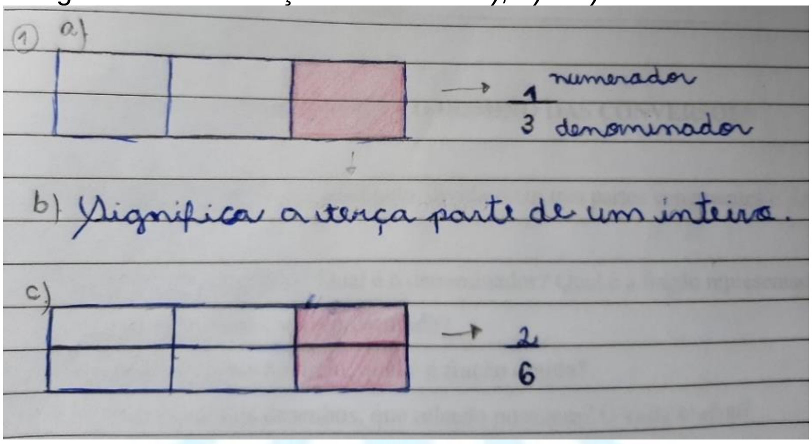
b) Que significado está representado?

c) Divida as partes ao meio, qual é a fração obtida?

d) Observe os dois desenhos, que relação possuem? O valor mudou?

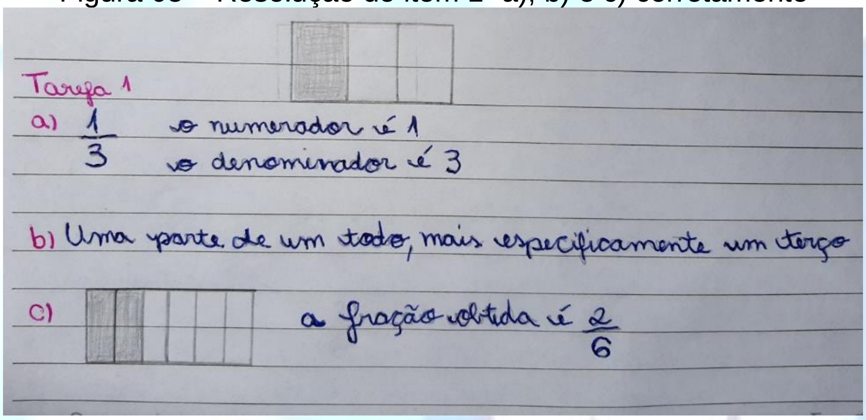
Ao analisar os dados, verificou-se que os estudantes conseguiram resolver corretamente os itens 1- a), b), c), como mostram as figuras 04 e 05.

Figura 04 – Resolução do item 1- a), b) e c) corretamente



Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

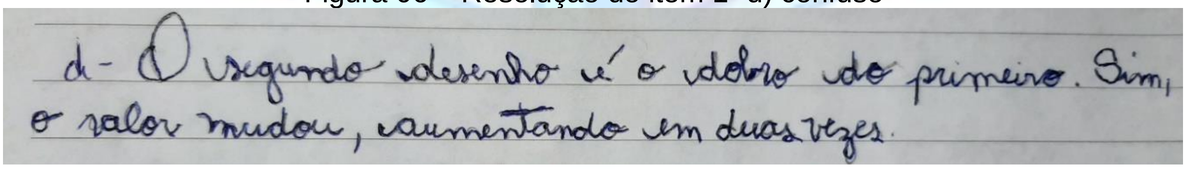
Figura 05 – Resolução do item 1- a), b) e c) corretamente



Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

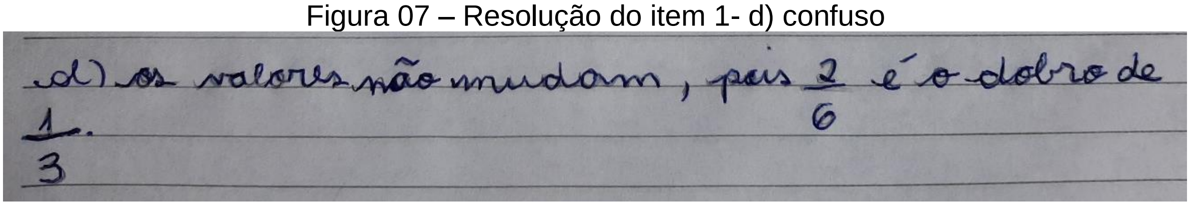
Porém alguns estudantes ao resolverem o item 1- d) apresentaram confusão na compreensão da conversão entre a representação numérica, geométrica e o significado de parte-todo, como mostram as figuras 06 e 07.

Figura 06 – Resolução do item 1- d) confuso



Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Figura 07 – Resolução do item 1- d) confuso



Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Grupo 2

(Professor): A partir do significado de parte-todo e equivalência, o que você associou?

(Estudante): Os dois representam a mesma coisa, só que um é o dobro do outro. É só isso.

Ao analisar a resolução do item 1) a partir de Dubinsky (1991), foi possível observar que os estudantes compreenderam a representação numérica e geométrica dos números racionais ao executar as ações coordenando os processos e interiorizando as representações e o significado de parte-todo. É interessante destacar para o professor que deve relembrar o estudante quando abordar esse significado numa situação-problema.

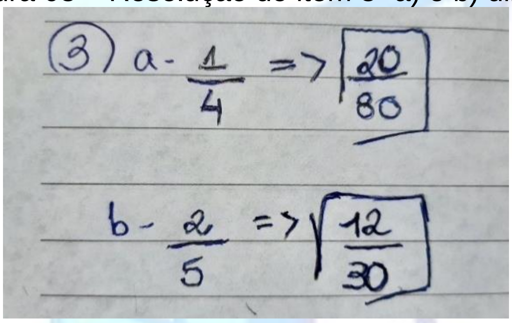
Durante a resolução do item 3) da mesma tarefa, os estudantes realizaram processos e conversões mentalmente.

3) A partir do significado de parte-todo e equivalência, escreva:

a) Uma fração equivalente a $\frac{1}{4}$ *cujo numerador seja 20.*

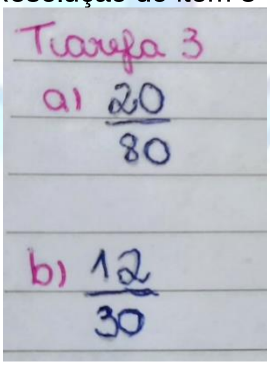
b) Uma fração equivalente a $\frac{2}{5}$ *cujo denominador* 30.

Figura 08 – Resolução do item 3- a) e b) direto



Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Figura 09 – Resolução do item 3- a) e b) direto



Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Uma vantagem desse tipo de tarefa é que com questões abertas foi possível identificar a utilização do símbolo "implica" como igualdade, um pequeno equívoco no uso dos símbolos em processos matemáticos, como mostra a figura 08.

Analisando o item 3) segundo as ideias de Dubinsky (1991), os estudantes compreenderam parte-todo e fração equivalente ao anteciparem o resultado das conversões, interiorizando e realizando ações mentais na transformação das frações em frações equivalentes (novos objetos matemáticos).

A próxima questão é da tarefa II e é uma tarefa inicial e reflexiva sobre os significados de quociente e operador - adição e subtração - com frações.

Dois grupos de estudantes apresentaram pequenas confusões no processo de resolução do item 1) e 2), realizando o processo correto, porém apresentado o resultado incorreto, como mostram as figuras 10 e 11.

1) Ana comprou um automóvel que custava $R\$\ 30.000{,}00$ *em 60 prestações iguais. Responda:*

a) Qual é a fração que representa essa situação? Qual é o valor de cada prestação?

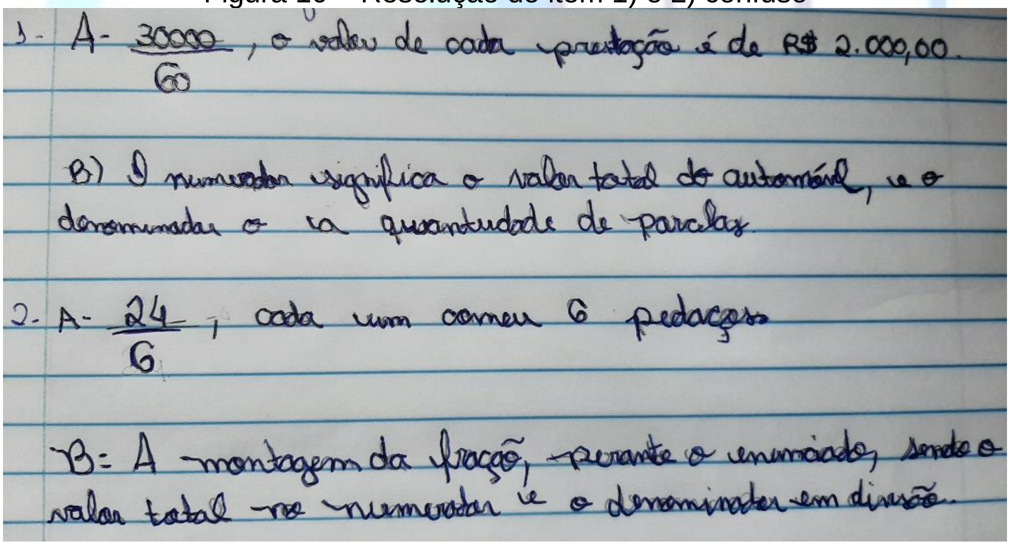
b) O que significa o valor do numerador? E do denominador?

2) Um grupo de quatro amigos se reuniu no fim de semana para comer pizza. Sabendo que eles compraram 3 pizzas grandes e comeram a mesma quantia, responda:

a) Qual é a fração que representa essa situação? Quantos pedaços cada um comeu?

b) Qual é a relação entre o item 1 e 2?

Figura 10 – Resolução do item 1) e 2) confuso



1- A- $\frac{30000}{60}$, o valor de cada prestação é de R$ 2.000,00.

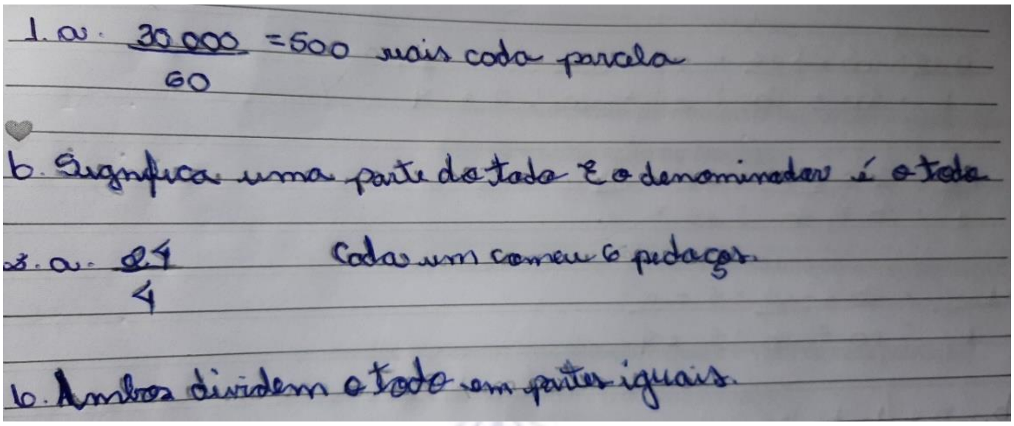
B) O numerador significa o valor total do automóvel, e o denominador o é a quantidade de parcelas.

2- A- $\frac{24}{6}$, cada um comeu 6 pedaços

B: A montagem da fração, perante o enunciado, sendo o valor total no numerador e o denominador em divisão.

Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Figura 11 – Resolução do item 1) e 2) confuso



1. a. $\frac{30.000}{60} = 500$ reais cada parcela

b. Significa uma parte do todo e o denominador é o todo

2. a. $\frac{24}{4}$ Cada um comeu 6 pedaços.

b. Ambos dividem o todo em partes iguais.

Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Simon (2004) afirma que os desafios propostos em tarefas contextualizadas envolvendo conceitos matemáticos possibilitam ao estudante desenvolver habilidades cognitivas, que são mais significativas do que a metodologia baseada em processos mecânicos, decorados e sem a compreensão real desses conceitos.

Entende-se que as questões e os questionamentos sobre a relação entre duas tarefas, qual o significado do processo; os desafios encontrados possibilitaram reflexões e discussões relevantes que vão além da resolução de processos necessários.

Ao analisar a resolução da tarefa a partir das ideias de Dubinsky (1991) observou-se que os estudantes realizaram as ações e coordenaram processos para resolver os itens 1) e 2), montando as frações e efetuando a divisão, compreendendo que em ambos o resultado é o quociente.

O item 3) propôs uma soma e subtração de frações a partir de situações contextualizadas, em que os estudantes utilizaram seus conhecimentos atuais e de tarefas anteriores para resolverem corretamente.

3) Considerando seus conhecimentos, responda:

a) Considere que você ganhou um sanduíche e mais um terço de outro sanduíche do subway. Qual é a fração que representa o total de sanduíche?

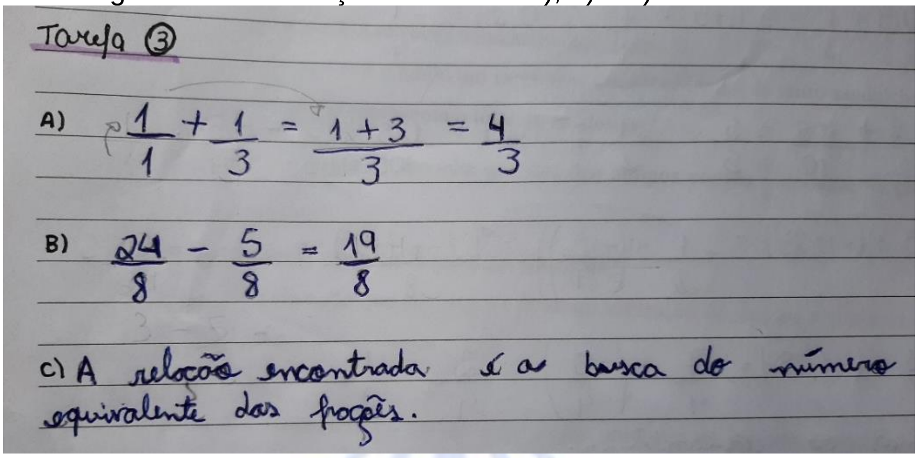
b) A partir da tarefa 2, suponha que um dos amigos comeu $\frac{5}{8}$ pedaços de pizza. Quantos pedaços restaram?

c) Que relação consegue ver nas duas situações?

d) Crie uma situação que envolva a adição ou subtração de frações e explique passo a passo seu raciocínio.

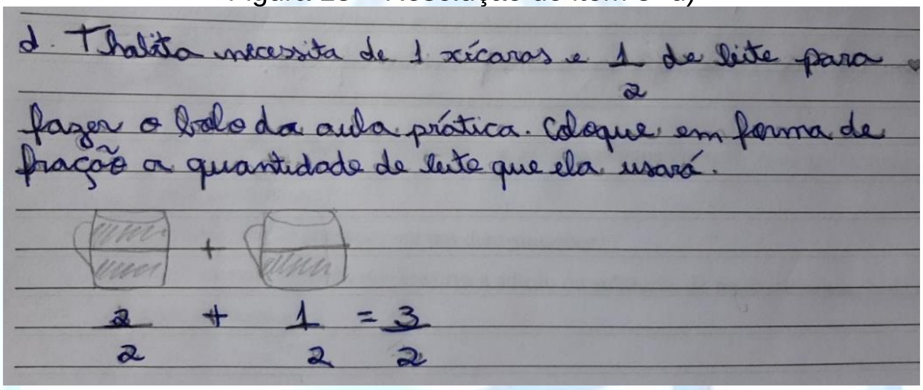
Esse tipo de tarefa aberta possibilita ao professor a vantagem de colocar os estudantes no centro de sua aprendizagem ao criarem e resolverem um problema segundo o que aprenderam com as tarefas, como mostram as figuras 12 e 13.

Figura 12 – Resolução do item 3- a), b) e c) corretamente



Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Figura 13 – Resolução do item 3- d)



Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Analisando a resolução do item 3) pelos estudantes segundo as ideias de Dubinsky (1991), eles interiorizaram, coordenaram e capsularam as frações aplicando o conceito de fração equivalente para operar com adição e subtração de frações, além de criarem e resolverem situações-problema a partir das tarefas anteriores.

Por fim, a última é a tarefa III, sendo uma tarefa inicial, reflexiva e de antecipação sobre os significados de porcentagem, medida e razão a partir da multiplicação e divisão de número racionais.

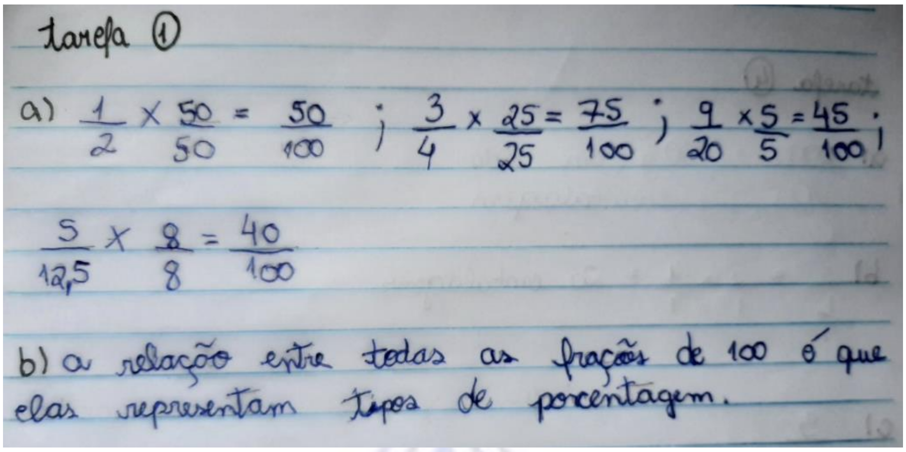
A resolução do item 1) pelos estudantes possibilitou identificar que eles conseguem utilizar conhecimentos aprendidos em tarefas anteriores para operar e transformar frações em porcentagem, como mostram as figuras 14 e 15.

1) Transforme as frações em denominador 100 a partir da multiplicação de frações equivalentes:

a) um meio, três quartos, nove vinte avos e cinco doze e meio avos.

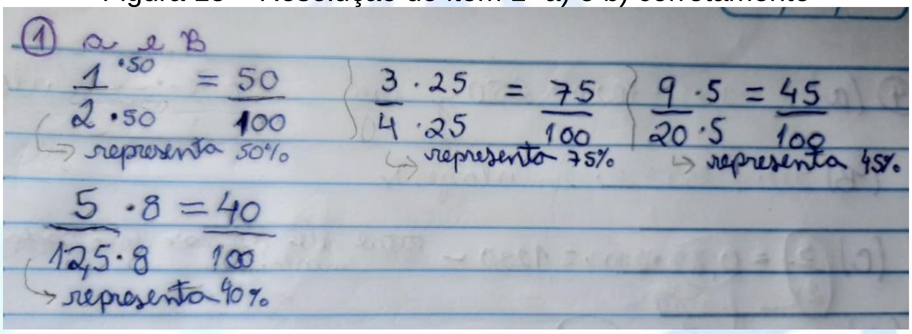
b) Escreva o que representa cada fração.

Figura 14 – Resolução do item 1- a) e b) corretamente



Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Figura 15 – Resolução do item 1- a) e b) corretamente



Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Ao analisar o item 1) a partir das ideias de Dubinsky (1991), os estudantes realizaram ações e processos interiorizando o significado de porcentagem ao utilizar um conceito conhecido para formar outro, antecipando e assimilando o objeto matemático.

Por último, na resolução do item 4) não houve desafios, apenas algumas dúvidas sobre as operações de multiplicação e divisão de frações.

4) Karina comprou 5 kg de chocolate para serem vendidos em embalagens de 1/4 de kg. Responda:

a) Quantos gramas terá cada embalagem?

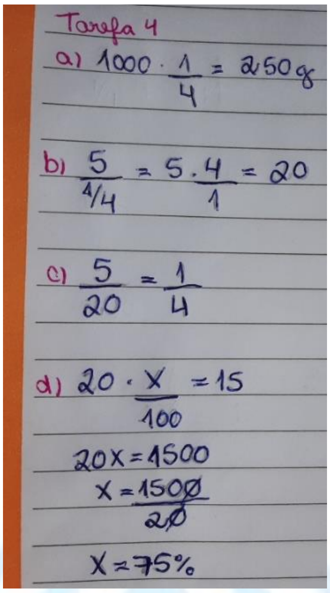
b) Qual é o total de embalagens que ela terá para vender?

c) Qual é a fração que representa a razão entre 5 embalagens e o total?

d) Qual é o percentual de 15 embalagens e o total?

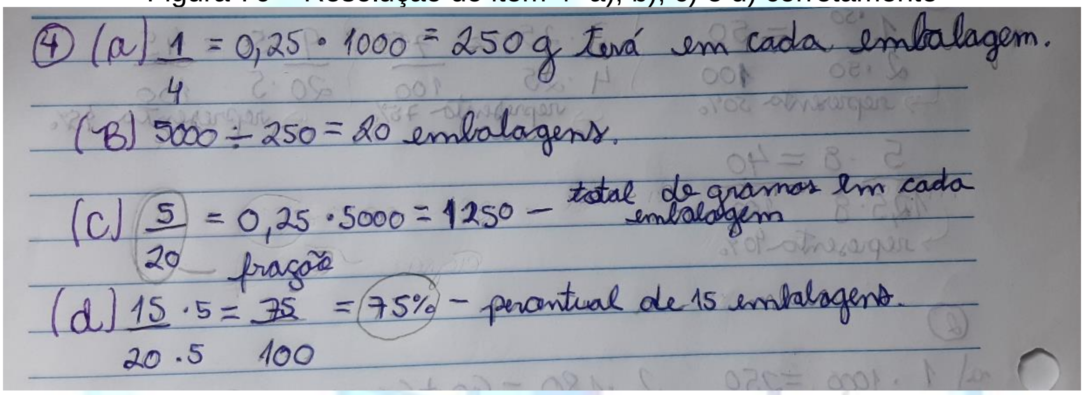
O professor não precisou intervir, pois em todos os grupos os estudantes utilizaram seus conhecimentos prévios nas conversões para resolver a tarefa corretamente, como mostram as figuras 16, 17 e 18.

Figura 75 – Resolução do item 4- a), b), c) e d) corretamente



Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Figura 76 – Resolução do item 4- a), b), c) e d) corretamente



Fonte: Protocolo produzido pela pesquisa (2022).

Analisando o item 4) a partir das ideias de Dubinsky (1991), os estudantes coordenaram ações, processos e generalização para transformar as frações em novos objetos matemáticos, realizando corretamente a aplicação dos significados de medida, razão e operador com multiplicação e divisão de frações.

Considerações

As tarefas da THA foram elaboradas com o intuito de que cada ação realizada, física ou mental, fosse atrelada a tarefa anterior, de modo que o estudante refletisse e construísse conhecimentos matemáticos a partir do seu conhecimento atual, com a mediação do professor e pela resolução correta das tarefas em grupo. Nesse sentido, o professor-pesquisador teve desafios para elaborar essas tarefas, pois teve que pensá-las a partir do conhecimento prévio e da necessidade dos estudantes. Também teve que comparar com os tipos de tarefas utilizadas nas pesquisas realizadas para saber o que seria aproveitado para elaborar as tarefas da THA. Outro desafio foi estruturar as teorias estudadas para elaborar e desenvolver a THA. Ao analisar os dados coletados, a partir da teoria APOS foi possível observar e destacar situações relevantes para o ensino-aprendizagem de matemática durante a resolução das tarefas pelos estudantes.

Durante a resolução das tarefas, os estudantes apresentaram dúvidas sobre termos matemáticos que não se lembravam por não usarem há muito tempo. Ainda, pelo fato de algumas questões serem "simples" ou óbvias, os estudantes ficaram com medo de errar por conseguirem resolver facilmente, uma consequência da tarefa aberta, o que é diferente dos livros didáticos e por isso pode ser considerado uma das possibilidades da THA. Em algumas tarefas, os estudantes compreenderam os significados dos números racionais, porém apresentaram confusão na forma de se expressar na parte escrita.

O fato de as tarefas serem mais abertas proporcionaram que os estudantes representassem os números racionais de diferentes maneiras. Assim, perguntas que questionavam os estudantes sobre as relações entre itens e significados das tarefas geraram desafios em sua compreensão, embora não sejam perguntas necessárias para o entendimento do estudante, incentivaram os estudantes a refletirem e discutirem entre si sobre os significados e representações dos números racionais, destacando mais uma potencialidade das tarefas da THA.. Uma das tarefas solicitava que os estudantes criassem um problema ao refletirem e praticarem um conhecimento matemático, o que mostrou resultados relevantes para o estudante sobre a fixação de sua aprendizagem. As diferentes tarefas possibilitaram identificar: como os estudantes utilizam a simbologia matemática no processo de resolução das tarefas, a escrita das representações e dos processos desenvolvidos de diferentes maneiras dos números racionais, os conhecimentos prévios e a participação ativa dos estudantes na construção de seus conhecimentos matemáticos em grupo.

Essas considerações só foram possíveis de se observar por causa dos tipos de questões reflexivas elaboradas de maneiras diferentes dos exercícios dos livros didáticos. Assim, a THA e a teoria APOS foram ferramentas essenciais no desenvolvimento e na análise da aprendizagem de matemática dos grupos de estudantes. Também, a mediação do professor foi imprescindível para que os estudantes alcançassem os objetivos propostos na THA e nas tarefas. Outra vantagem da THA foi a possibilidade do professor-pesquisador observar como os estudantes utilizaram seus conhecimentos matemáticos de maneira individual e como interagiram em grupo realizando a troca de seus conhecimentos matemáticos no desenvolvimento das tarefas.

Em síntese, a THA deu mais liberdade para os estudantes refletirem e se expressarem sobre seus conhecimentos matemáticos no individual e coletivo, o que foi possível identificar acertos e erros no processo de desenvolvimento das tarefas. Além de ser um instrumento de ensino rico em possibilidades onde foi possível pesquisar sobre o professor-pesquisador, a tarefa e como os estudantes reagem aos tipos de tarefas. Nesse sentido, é interessante incentivar que educadores e pesquisadores se aprofundem em algum tema da área da Educação Matemática a partir desses aspectos, trazendo resultados relevantes para esse campo de estudo.

Referências

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. **Investigação Qualitativa em Educação**. Porto: Porto editora, 1994.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BRASIL. **Matriz de referência ENEM 2022**. Disponível em: https://download.inep.gov.br/download/enem/matriz_referencia.pdf. Acesso em: 30 ago. 2022.

DUBINSKY, Ed. Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. O. Tall (Ed.), **Advanced mathematical thinking**, Dorfrecht: Kluwer, p. 95-123, 1991. Disponível em: https://people.math.wisc.edu/~wilson/Courses/Math903/ReflectiveAbstraction.pdf. Acesso em: 20 fev. 2021.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**. 5ª edição. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

KIEREN, Thomas Ervin. Number adn Measurement: Papers from a Research Workshop. On the Mathematical, Cognitive and Instructional Foundations of Rational Numbers. In R. Lesh (ed.) **ERIC/SMEARC**: Columbus, Ohio, p. 101-144, 1976. Disponível em: https://eric.ed.gov/?id=ED120027 . Acesso em: 20 abr. 2022.

KRUG, Carbone Bruno Schmidt**. Ensino dos números racionais comparando medidas de unidade**. 2015. 86 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco, 2015.

OLIVEIRA, Luís Carlos Góis de. **Análise de erros cometidos pelos discentes do sétimo ano do Ensino Fundamental e primeiro ano do Ensino Médio no estudo dos números racionais na sua forma fracionaria**. 2017. 97 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, Itabaiana, 2017.

PRADO, Eneias de Almeida**. Alunos que completaram um curso de extensão em álgebra linear e suas concepções sobre base de um espaço vetorial**. 2010. 186 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

SEVERO, Daniela Fouchard. **Números racionais e ensino médio: uma busca de significados**. 2009. 67 f. Dissertação (Mestrado em Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009.

SIMON, Martin. Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. **Journal for Reaserch in Mathematics Education**, vol. 26, n. 2, pp 114-145, 1995. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/749205. Acesso em: 15 mar. 2020.

SIMON, Martin; TZUR, Ron. Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: an elaboration of the hypothetical learning trajectory. **Mathematical Thinking and Learning**, Abingdon, v. 6, n. 2, p. 91-104, 2004. Disponível em: http://dx.doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_2 . Acesso em: 6 jun. 2020.

THIOLLENT, Michel. **Metodologia da pesquisa-ação**. São Paulo: Cortez, 1986 2ª edição.

Submetido em abril de 2023

Aceito em maio de 2023