REVISTA DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL (UFMS)

Volume 9, número 21 – Seção Temática – 2016

ISSN 2359-2842

Frações e Decimais: compreender para ensinar números racionais

Fractions and Decimals: understanding to teach rational numbers

Ana Maria Carneiro Abrahão[1]

Resumo

Esse artigo parte da análise de equívocos recorrentes cometidos por docentes dos anos iniciais e estudantes de Pedagogia no que se refere a representação e operação com números racionais. Com base em referenciais teóricos sobre a formação matemática para a docência nos anos iniciais, se objetiva trazer à reflexão o significado do número racional e o entendimento de suas diferentes formas de representação. Uma sequência de sete atividades que trabalham representações e a construção conceitual do número racional foi desenvolvida e analisada em aulas na licenciatura em Pedagogia e discutidas em minicursos ministrados em eventos científicos. As interpretações dadas nas resoluções dessas atividades são analisadas e as reflexões oriundas dessa análise apontam caminhos para a renovação da prática pedagógica dos professores que ensinam matemática no início da escolarização.

Palavras-chave: Número Racional, Estudantes de Pedagogia, Professores dos Anos Iniciais.

Abstract

This article takes into account the analysis of recurrent errors produced by elementary school teachers and students from Pedagogy course in relation to rational numbers representation and operations. Based on theoretical references about training elementary school math teaching, this article aims the reflection about the meaning of the rational number, as well the understanding of its different forms of representation. A sequence of seven activities that work the conceptual construction of the rational number and its possible representations was developed, and analyzed in class with students from Pedagogy course, and discussed in short courses in scientific events. The interpretation given in the resolution of these activities it´s been analyzed and the reflections from this analysis indicate pathways to renewal the pedagogical practice of teachers who teach mathematics at the beginning of schooling.

Keywords: Rational Number, Students from Pedagogy Course, Elementary School Teachers.

Introdução

A observação de um problema recorrente presente na minha vivência profissional como professora que ensinou matemática nos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental, no Ensino

---

[1] Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro – UNIRIO, CCH, DID, Pedagogia. anaabrahao@edmat.com.br

Médio, no antigo Curso Normal e que, atualmente, desenvolve seu trabalho como pesquisadora e professora de Matemática no curso de Pedagogia motivou a escrita desse artigo. O problema recorrente é que entra ano, sai ano e a dificuldade que alunos e professores sentem para entender e ensinar os números racionais persiste. Como Behr et all (1992) citam, há um consenso de que a aprendizagem do conceito de número racional tem sido um sério obstáculo no desenvolvimento matemático das crianças. Um grande número de artigos sobre esse tema tem sido desenvolvido por diversos autores e aqui citaremos alguns deles, mas não há argumentos muito claros sobre quais são os melhores caminhos a tomar. Como citam Behr et all (1983), várias questões sobre como facilitar a construção do número racional por crianças permanecem sem respostas e, por isso mesmo, "nós precisamos encontrar que tipos de experiências as crianças precisam para desenvolver seu conhecimento de número racional" (p. 91). Esse problema tem sido um dos focos de meus estudos e pesquisas e tem recebido meu incentivo para que docentes e discentes pesquisem sobre esse assunto junto ao EDMAT – Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática. Para que as crianças encontrem seus caminhos, é fundamental que seus professores também os encontrem. Por esse motivo, o público alvo desse estudo são os professores dos anos iniciais e a sua formação matemática inicial e continuada. Shulman (1986, 2005) tem sido referência sobre o conhecimento que o professor precisa ter para exercer sua profissão docente e destaca como primordial que ele tenha um profundo conhecimento daquilo que vai ensinar, o que envolve conhecimentos sobre conteúdo, currículo e didática, dentre várias outras categorias. Entre elas, "o conhecimento didático do conteúdo adquire particular interesse porque identifica os corpos de conhecimentos distintos para o ensino" (SHULMAN, 2005, p. 11). O autor defende que o professor procure compreender como determinados temas se organizam, se representam e podem ser adaptados para serem ensinados às diversas capacidades e interesses dos alunos. Ao pensarmos sobre a formação docente para ensinar racionais, destacamos o trabalho de Ball (1988) que vem investigando desde a sua pós-graduação sobre a formação matemática inicial de professores nas licenciaturas e as suas dificuldades para representar conceitos matemáticos, particularmente a divisão, de forma apropriada.

Ao tratar desse tema, busca-se trazer à reflexão o significado do número racional e suas diferentes formas de representação, para assim se repensar novas opções para aprimorar a prática pedagógica. Duval (2004) nos ajuda a refletir sobre a distinção entre o objeto matemático tratado e a sua representação, seja ela símbolo, código, algoritmo ou outro registro significativo e que permite a comunicação entre o sujeito e a atividade cognitiva de pensamento.

Números racionais: um tema de difícil construção

Muitos pesquisadores têm dado ênfase à seguinte pergunta: “O que os professores precisam saber e precisam fazer para ensinar efetivamente? Ou, o que um ensino efetivo requer em termos de conhecimento a ser aprendido” (BALL, THAMES E PHELPS, 2008, p. 394)? Para esses autores essas questões reforçam a necessidade de pesquisas no uso do conhecimento no e para o ensino mais do que nos próprios professores. Apontam caminhos que ajudam nessas investigações como, por exemplo, examinar os currículos e parâmetros de ensino, analisar testes que preparam os alunos para passar de ano, questionar especialistas sobre ideias matemáticas e habilidades que os professores deveriam ter, entre outras. Optaram, entretanto, por investigar como os professores precisam aprender determinado conteúdo, focar no trabalho de ensinar e no que fazer ao ensinar matemática. “Que atividades são fundamentais para desenvolver na sala de aula a matemática com integridade, onde as ideias dos estudantes são tratadas com seriedade e o trabalho matemático é individual, mas também coletivo” (BALL, THAMES E PHELPS, 2008, p. 394-395)? (Tradução da autora).

A partir dessa sugestão, esse estudo foi realizado a fim de pesquisar possibilidades para aprender e ensinar números racionais. Não é intenção apresentar fórmulas mágicas e tampouco se pretende esgotar o assunto aqui tratado, mas é fundamental destacar que muitas das dificuldades de compreensão do número racional e de suas operações que têm sido observadas durante minha experiência profissional docente e acadêmica têm sido também discutidas por teóricos da didática e da educação matemática. Não estamos falando aqui da aplicação de técnicas e regras para operações, mas no entendimento do que é um número racional. Para Campos e Rodrigues (2007, p. 69), “os números racionais constituem-se em um dos temas de construção mais difícil, pois sua compreensão envolve uma variedade de aspectos que se configuram como obstáculos ao seu pleno domínio”. Behr et all (1983) também defendem que “os conceitos associados aos números racionais estão entre as ideias mais complexas e importantes que as crianças encontram ao longo de seus oito primeiros anos de escolarização” (p. 92). Muitos docentes dos anos iniciais não compreendem o significado de número racional, o que é um sério problema de formação, pois “o professor precisa conhecer profundamente aquilo que vai ensinar" (SHULMAN, 1991, p. 394), "afinal, lacunas nessa área podem interferir e comprometer tanto o preparo e o encaminhamento das aulas, como a escolha e o uso dos materiais didáticos" (FARIAS, 2009, p. 117). Para Shulman (1986, 1991), faz parte da formação do professor estudar o conteúdo conceitual, didático-metodológico e curricular da matemática que vai ensinar. Além da significação do número racional em forma de número decimal, mais presente no dia a dia e mais intuitiva, há de se considerar o conceito de racional em forma de fração. Afinal, como sugere Duval (2004), a construção do conceito envolve uma coordenação de representações que pode ser explorada em diversas atividades, onde a cada atividade o conceito pode ganhar novos elementos e se tornar mais sofisticado, caminhando em direção ao conhecimento científico formalizado. A integração entre aspectos procedimentais e conceituais pode permitir a construção de auxiliares simbólicos e operatórios na constituição do conhecimento matemático. Assim, não vejo como defendem alguns educadores, priorizar a forma decimal em detrimento da forma fracionária. Entendo que o conceito de número racional só pode ser compreendido na articulação cognitiva das suas diferentes representações, sejam decimais ou fracionárias e as diferentes ideias que as acompanham. Saber aplicar as regras e as técnicas de resolução permite agilizar os cálculos, mas não garante a conceituação. Em fato, as representações podem ajudar na compreensão do conceito de fração, mas é a articulação entre essas representações que podem, segundo Duval (2004), favorecer uma melhor aprendizagem do objeto estudado.

Como o ensino de frações nas escolas enfatiza o constructo parte-inteiro, reforçando a percepção de 3/5 como 3 de 5 partes, mas não a interação de 3 unidades abstratas de tamanho um quinto, isto é 3 (1/5), Behr et all (1992, p. 319) defendem que "essa instrução é inadequada para desenvolver um entendimento completo dos números racionais e dever-se-ia estender outros constructos no contexto da matemática de quantidades". Nunes e Bryant (2009) abordam o conceito de racional por meio de cinco aspectos que podem ajudar na significação do racional em forma de fração: número, relação parte-todo, medida, quociente e operador. Indicam ainda a necessidade da compreensão dos diferentes aspectos que as frações podem assumir para uma melhor compreensão desses números. Os currículos oficiais brasileiros, por sua vez, trazem o seguinte:

> A prática mais comum para explorar o conceito de fração é a que recorre a situações em que está implícita a relação parte-todo; é o caso das tradicionais divisões de um chocolate, ou de uma pizza, em partes iguais. [...] Outro significado das frações é o de quociente; baseia-se na divisão de um natural por outro (a:b=a/b; b≠0). [...] Uma terceira situação, diferente das anteriores, é aquela em que a fração é usada como uma

> espécie de índice comparativo entre duas quantidades de uma grandeza, ou seja, quando é interpretada como razão. [...] A essas três interpretações, bastante interessantes de serem exploradas neste ciclo, acrescenta-se mais uma, que será trabalhada nos ciclos posteriores. Trata-se do significado da fração como operador. (BRASIL, 1997, p.68).

Tanto na formação inicial e continuada de professores, é preciso desenvolver nas atividades que aqui serão apresentadas um trabalho que possa ajudar a evitar que o professor e a criança confundam o objeto matemático com a sua representação e entendam, por exemplo, que a fração da região circular não é o pedaço da figura em si, mas uma representação auxiliar para a quantidade numérica do todo. Procura-se trabalhar o que Duval (2004) chama de "conversão das representações e variação dos registros de representação".

> A conversão é a transformação da representação de um objeto, uma situação ou de uma informação dada em um registro, em uma representação deste mesmo objeto, desta mesma situação ou da mesma informação em outro registro. As operações habitualmente designadas com os termos "tradução", "ilustração", "transposição", "interpretação", "codificação", etc., são operações que fazem corresponder uma representação dada em um registro com outra representação em outro registro. A conversão é, portanto, uma transformação externa relativa ao registro da representação de partida. (DUVAL, 2004, p. 46)

Apesar de representar um mesmo número, cada um dos significantes, seja em forma de fração ou de número decimal, por exemplo, tem uma significação operatória diferente. Como sugere Duval (2004), é tomando simultaneamente dois ou diferentes registros de representação que se pode constatar a importância das representações semióticas nas atividades cognitivas matemáticas. É sob essa concepção, sob a busca de articulação entre diferentes representações dos racionais, que a sequência de atividades está desenvolvida.

Uma sequência de atividades investigativas

A sequência de atividades aqui apresentadas está numerada de 1 a 7. Se o leitor optar por aplicar essas atividades com seus alunos, lembre-se que a resolução de cada uma delas depende do ritmo e da participação da turma, isto é, depende da necessidade de se demorar mais ou menos em cada atividade, de ampliá-las ou até de suprimi-las e isso somente o professor da turma é quem pode avaliar. Os exemplos aqui apresentados foram selecionados a partir de registros feitos entre 2013 e 2016 durante a prática em sala de aula do curso de licenciatura em Pedagogia em instituição do Rio de Janeiro abrangendo cerca de 180 estudantes, dos quais 10% são professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Não foram feitas entrevistas formais pois não era objetivo desse estudo colher informações adicionais sobre cada um dos envolvidos. Os resultados dessa pesquisa foram posteriormente apresentados em minicursos ministrados em eventos científicos como o ENEM 2016 e a Semana da Educação da Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, dos quais participaram estudantes de licenciatura em Matemática e em Pedagogia, bem como docentes do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, o que mostrou ser tema de interesse dos professores que ensinam Matemática no Ensino Básico.

Atividade 1: Discussão de erros apresentados por estudantes de licenciatura em Pedagogia e docentes dos anos iniciais na operação ou representação de racionais.

Como se pode observar nos exemplos da Figura1A, docentes formados ou em formação cometem erros envolvendo adição de racionais em forma de fração. Sem entendimento do conceito de fração, ou mesmo de equivalência de frações, eles somam numeradores e denominadores. Há ainda quem entenda que 2/5 é o mesmo que 2,5 e que ½ é o mesmo 1,2, o que justificaria, ao adicionar os números decimais, transpor 3,7 como 3/7, como fica evidente na última foto à direita da Figura 1A.

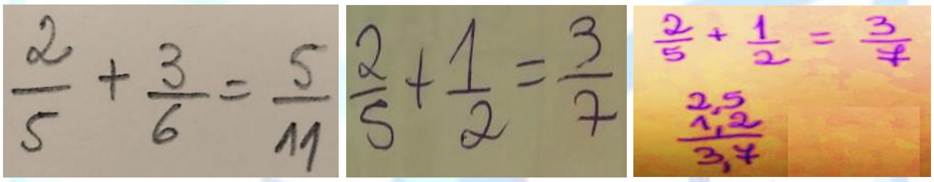


Figura 1A: Erros nas operações de adição com números racionais
Fonte: Acervo EDMAT

Tomemos agora as frações do sistema monetário representadas no exemplo da Figura1B. Sem observar que 5/4 representa 4/4 + ¼, e que o cálculo sugerido seria R$70,00 + ¼ de R$70,00, a pessoa parece não pensar em um cálculo aproximado e não perceber que fazer R$70,00 x4 = R$280,00, além de evidenciar um cálculo que traz como resultado um valor absurdo, está distante do valor real que seria R$70,00 + R$17,50 = R$87,50. Destaca-se que os participantes do estudo tinham a liberdade de usar a calculadora, desde que indicassem o raciocínio realizado.

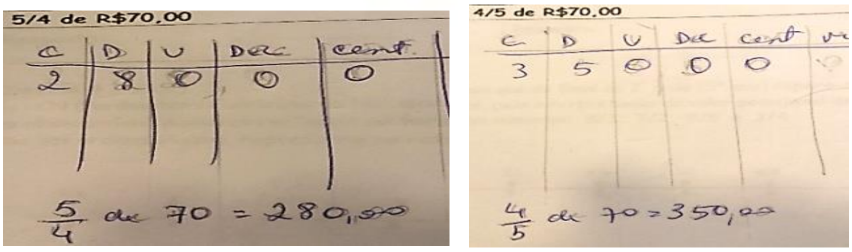


Figura 1B: Erros nas representações de frações do todo

Fonte: Acervo EDMAT

O mesmo procedimento foi utilizado para o cálculo de 4/5 de R$70,00. Como o estudante não demonstra compreender que 4/5 é uma fração menor do que o inteiro, ele também não percebe que o resultado de R$350,00 está longe de ser compatível com um valor menor do que R$70,00.

No exemplo da Figura 1C, ao representar 5/8 de barra de chocolate, o licenciando procura transformar a fração em número decimal, já que aprendeu que o traço / da fração significa divisão. Acontece que ao invés de 5÷8 ele faz 8÷5 e encontra 1,6. Parte então, para a representação gráfica, conforme solicitação da atividade, e desenha 16 pedacinhos de chocolate, 10/10 + 6/10. Não percebe que a fração própria 5/8 é menor do que o inteiro, ou seja, o resultado deveria ser parte de uma única barra de chocolate.

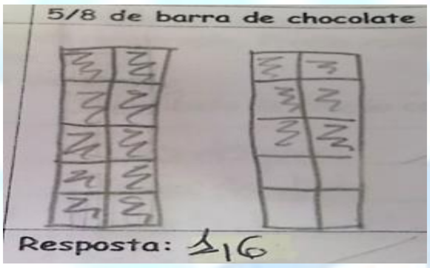
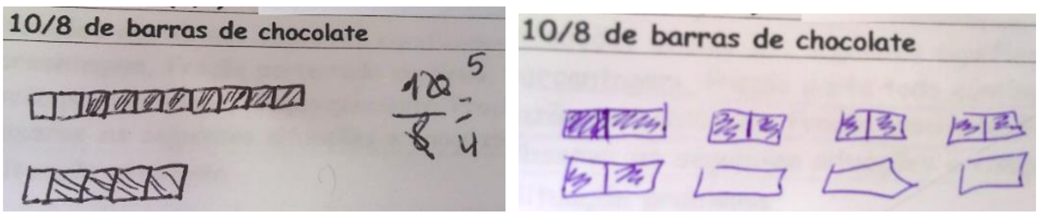


Figura 1C: Representação de fração do todo contínuo feitas por docentes em formação
Fonte: Acervo EDMAT

Agora observemos os exemplos da Figura 1D. No exemplo esquerdo superior da Figura 1D o licenciando precisa representar 10/8 de barras de chocolate. Ao invés de considerar o inteiro como 8/8 e dividir duas barras, cada uma em 8 partes e tomar 10 partes, ele faz duas representações equivocadas. Na primeira ele toma uma barra, divide em 10 e toma 8, representando assim, 8/10 e não 10/8. Ele lembra que aprendeu a simplificar frações, então ao evidenciar esse saber, ele simplifica a fração (10/8 = 5/4) e mostra outro jeito de representar a fração 10/8 como 5/4, mas em vez de representar 5/4 que seria 4/4 + ¼ ele representa a fração 4/5, evidenciando que aplicar técnicas de cálculo de frações não significa que o aluno compreende o significado da operação que realiza e por isso, muitas vezes, calcula, calcula, calcula, sem saber para que está calculando e sem saber avaliar o resultado dos seus cálculos.



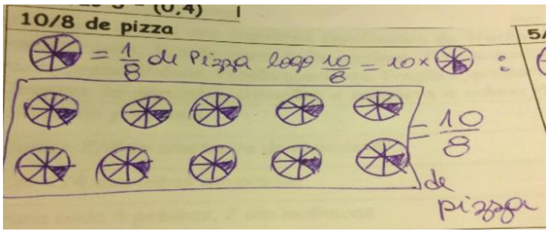


Figura 1D: Representações de frações feitas por docentes em formação
Fonte: Acervo EDMAT

No exemplo da Figura 1D superior à direita o estudante representa 8 barras ou 8 pedaços supostamente de mesmo tamanho de chocolate, mas divide cada barra ao meio até obter 10 metades evidenciando não entender o significado da fração 10/8. No exemplo inferior centralizado é solicitado representar 10/8 de pizza. Apesar da representação ser compatível à atividade, fica a dúvida se o estudante entende que 10/8 de pizza seria 1 pizza inteira mais 2 pedaços de uma outra pizza dividida em 8 partes iguais. Muitas outras conjecturas poderiam ser aqui levantadas, mas vamos nos ater a apenas essas interpretações deixando ao leitor a opção de dar asas à sua própria leitura.

Agora analisemos os exemplos da Figura 1E. Para representar números racionais na reta numérica o estudante pode fazer divisões na reta, mas também pode utilizar a calculadora e fazer a conversão do número fracionário em número decimal de forma a facilitar a localização desse em um ponto aproximado da reta numerada. Foi pedido aos estudantes que marcassem algumas frações na reta.

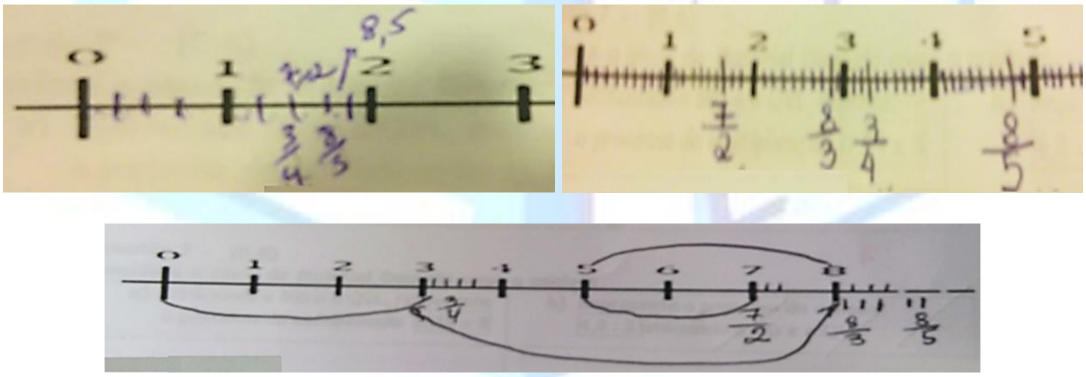


Figura 1E: Erros nas representações de racionais na reta numérica
Fonte: Acervo EDMAT

Foi pedido ao aluno para representar 7/2 na reta numérica. Temos que 7/2=6/2+1/2 =3+1/2 ou 7÷2=3,5. Pois bem, na 1ª. foto, à esquerda superior, o aluno marca a partir do zero, 7 "risquinhos", incluindo o "risquinho" do zero e marca 7/2 entre 1 e 2. Na 2ª. foto, à direita superior, o aluno também marca 7/2 entre 1 e 2. E na 3ª foto inferior centralizada o aluno marca 7/2 sobre o 7.

Para representar ¾, uma fração própria, cujo numerador é menor do que o denominador e que se localiza entre 0 e 1 o aluno poderia verificar na calculadora que ¾=0,75 ou dividir o inteiro 1 em quatro partes e marcar ¾ na 3ª. parte. Na 1ª foto ¾ está entre 1 e 2, na 2ª e na 3ª, entre 3 e 4. A representação de 8/5, seria 5/5 + 3/5, ou seja, estaria entre 1 e 2. Se utilizassem a calculadora encontrariam 8÷5=1,6. Na 1ª. foto, em vez de aparecer 8/5 entre 1 e 2, aparece 8,5. Na 2ª 8/5 está localizado entre 4 e 5, em um oitavo "risquinho" à direita do 4 e na 3ª foto em um quinto "risquinho" à direita do 8. Observa-se a necessidade de um trabalho intenso, retornando as resoluções equivocadas aos seus autores, discutindo as mesmas em sala de aula, de forma a analisar e investigar os erros e as causas desses erros.

No exemplo à esquerda, na Figura 1F, o estudante parece considerar que o algarismo do denominador de cada fração representa o ponto de partida para ele contar, a partir dele, a quantidade de partes (algarismo do numerador) que deve ser dividido o segmento à sua direita. Assim, para marcar 5/2, ele deve marcar o 5º pedacinho depois do 2 e antes do 3; para marcar 7/3 ele deve marcar o 7º pedacinho à direita do 3; para marcar 6/5 ele deve marcar o 6º pedacinho à direita do 5 e assim por diante.

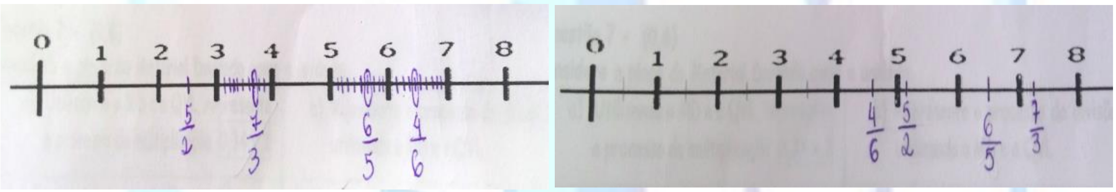


Figura 1F: Erros nas representações de racionais na reta numérica
Fonte: Acervo EDMAT

Já na imagem da direita da Figura 1F, o estudante parece partir do algarismo do numerador, para marcar tantos "risquinhos" quantos forem indicados pelo algarismo do denominador. Com essa leitura equivocada ele marca a fração 4/6 na 6ª. divisão à direita do 4 e à esquerda do 5; a fração 5/2 na 2ª divisão à direita do 5; 6/5 na 5ª. divisão à direita do 6 e assim por diante. Observa-se que provavelmente o aluno ouviu em algum momento que cada segmento da reta pode ser subdividido em n partes, mas o significado dessa divisão e o significado de número fracionário ainda não está compreendido. "A representação dos números em uma reta é um recurso valioso em Matemática. [...]. Observe que a reta numérica ajuda a visualizar a ordenação dos números naturais" (BRASIL, 2007, p.17). Já para os números racionais, afirma Figueiredo (1975, p.4),

> o leitor deve familiarizar-se com a interpretação geométrica dos racionais, utilizando uma reta R, onde se escolhem dois pontos, o 0 e o 1. Os inteiros são marcados, facilmente, se usarmos o segmento de extremidades 0 e 1 como unidade. Os racionais são obtidos por subdivisões adequadas do segmento unidade.

A análise dos erros anteriormente destacados evidencia, porém, que a compreensão dos números racionais não é simples e envolve, como afirma Duval (2004, p. 75) articulação entre diferentes registros de representação pois "somente uma compreensão integrativa, isto é, uma compreensão fundada na coordenação dos registros, permite possibilidades de transferências". As atividades que darão sequência a esse texto propõem um trabalho sobre um novo domínio ou sobre uma nova rede conceitual e se constitui um caminho para induzir os participantes à reflexão e à significação dos racionais por meio de diferentes formas de pensar e representar frações.

Atividade 2: Representação variada do número 2/3.

Em geral os estudantes e mesmo os professores sentem mais facilidade para representar frações próprias, como é o caso de 2/3. Isso porque podem ter a concepção de que a fração é sempre menor do que o inteiro. A seguir, algumas formas de representação apresentadas pelos participantes desse estudo.

Figura 2A: Diferentes representações de 2/3 utilizando materiais diversos
Fonte: Acervo EDMAT

Na Figura 2A, os estudantes representaram 2 partes de uma região circular dividida igualmente em 3 partes; 2 de 3 cubinhos do Material Cuisenaire; a barrinha vermelha (que vale 2 unidades naturais) da barrinha verde (que vale 3 unidades naturais); 2 barrinhas verdes da barrinha azul que corresponde a 3 barrinhas verdes (2/3=6/9) e 2 barrinhas vermelhas de uma barra verde escura que corresponde a 3 barrinhas vermelhas (2/3=4/6). Ao solicitar que os estudantes façam uma apresentação oral e algum registro de representação no quadro, é possível analisar as diferentes resoluções dadas por eles. Discussão dessas e de outras formas de representar o objeto matemático 2/3 podem ser vistas também na Figura 2B.

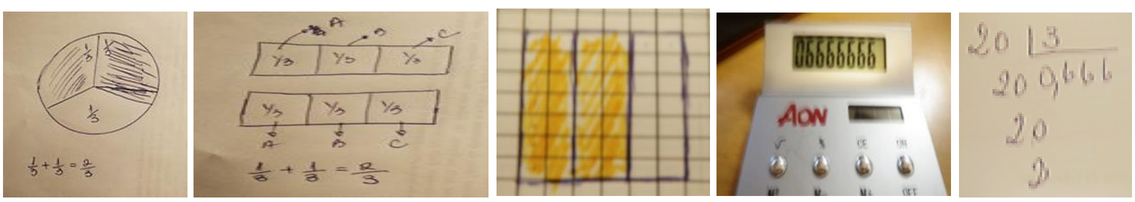


Figura 2B: Diferentes representações de 2/3 utilizando materiais diversos
Fonte: Acervo EDMAT

Na 1ª e na 3ª foto da Figura 2B, da esquerda para a direita, a fração 2/3 é vista como relação parte-todo, isto é, a ideia de repartição de um todo em partes de mesmo tamanho ou de mesma quantidade enumerável. Na 2ª foto, fração partilha, 2 inteiros foram divididos entre 3 pessoas, A, B e C, cabendo a cada pessoa 2/3 do todo. Na 4ª e 5ª foto estão representadas 2/3 como 2÷3 utilizando a calculadora ou o algoritmo expresso como “conta armada”.

Atividade 3: Represente agora 3/2.

Em geral, os professores têm apresentado mais dificuldade em representar frações impróprias e em entender que fração nem sempre é uma parte menor do que um inteiro. Como pode uma fração ser maior do que o todo? A dificuldade fica evidente na Figura 3A e noutras apresentações posteriores. As representações errôneas mostram as seguintes configurações: com os discos, o estudante seleciona 2/2 e aí tenta selecionar uma parte de outro disco dividido em 3 partes iguais, mas percebe que há algo errado e não sabe como sair dali. Na figura desenhada e entendida como circular um aluno pensa ter representado 3/2, mas na verdade ele representa ½ mais ¼, ou seja, ¾ e não 3/2. No problema criado por um aluno, o estudante tenta explicar o que entende por 3/2, “uma metade dividida em 3 pedaços”.

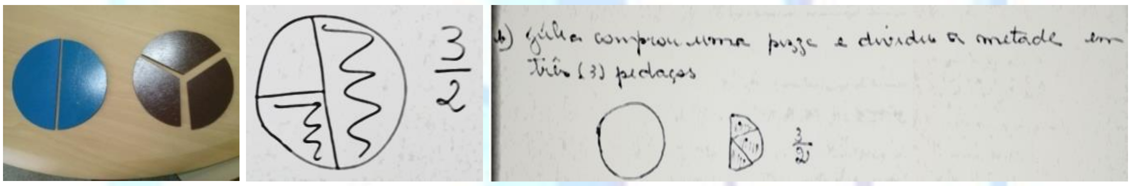


Figura 3A: Representações equivocadas de 3/2
Fonte: Acervo EDMAT

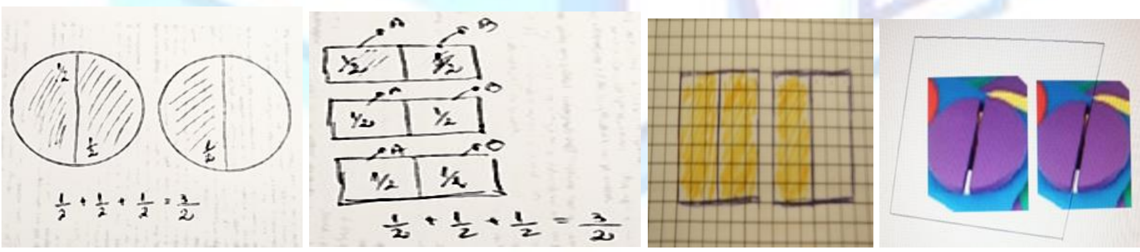


Figura 3B: Diferentes representações de 3/2 utilizando materiais diversos
Fonte: Acervo EDMAT

Na Figura 3B estão algumas representações coerentes feitas pelos alunos para representar 3/2. Na 2ª foto o aluno representa 3 chocolates divididos igualmente entre 2 crianças. Solicitar aos estudantes que façam uma apresentação oral e registrem no quadro as diferentes representações apresentadas pelos participantes podem ser caminhos de discutir essas e outras formas de representar o objeto matemático 3/2.

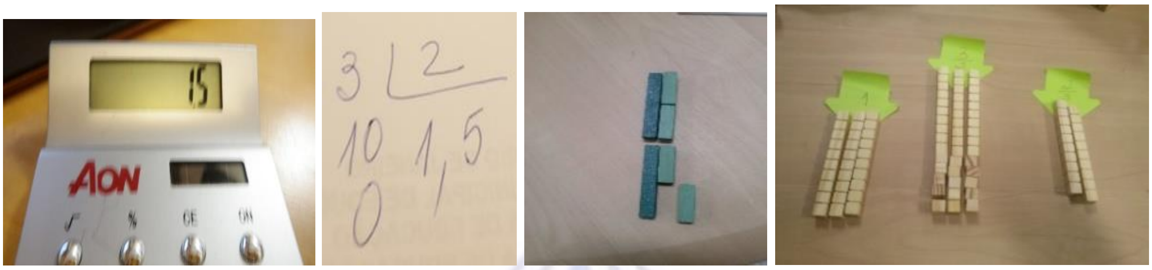


Figura 3C: Diferentes representações de 3/2 utilizando materiais diversos
Fonte: Acervo EDMAT

Uma das representações bastante criativa foi a 4ª foto da Figura 3C. Pela primeira vez presenciei uma estudante da Pedagogia criar, durante a aula e apresentar aos colegas uma concepção de número racional de forma tão original. Solicitei que indicasse com uma etiqueta os números representados e ela assim o fez com a flecha verde em destaque.

Comparando representações equivocadas de 2/3 e 3/2 produzidas pelos participantes do estudo (Figura 3D) percebe-se alguns erros que podem ser corrigidos ao se desenvolver um trabalho comparativo de representações variadas.

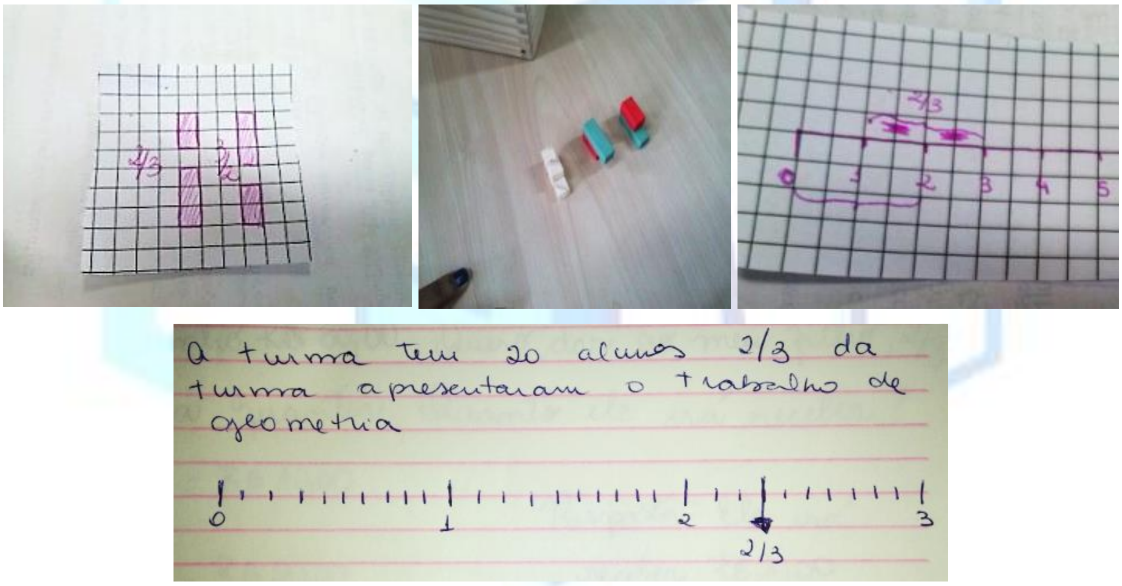


Figura 3D: Representações equivocadas para 2/3 e 3/2.
Fonte: Acervo EDMAT

Na Figura 3D, um estudante representou 2/3 como um desenho com 2 unidades acima e 3 unidades abaixo e para representar 3/2 colocou 3 unidades acima e duas abaixo (papel quadriculado). Com o Material Cuisenaire, outro estudante, concebendo que a peça vermelha vale 2 e a verde vale 3 (valores concebidos utilizando o conjunto N dos números naturais), faz o arranjo acima e explica que se o verde (que corresponde a 3 unidades naturais) estiver em cima do vermelho (que corresponde a 2 unidades) ele tem 3/2 e se o vermelho estiver em cima do verde ele tem 2/3. Na reta numérica, uma estudante marca 2, marca 3, conta dois para trás e marca 2/3. Ela conta 2 partes de 3, só que o 3 representa na reta 3 inteiros e não uma unidade da reta numerada. Em outra reta numerada, para ilustrar o problema um estudante representa sua concepção de 2/3: um número que está entre 2 e 3, ou ainda, 3 subdivisões (risquinhos) à direita de 2. Tantas representações equivocadas alertam para que o professor pesquisador reveja como objetivo "a compreensão das relações intrínsecas entre as tarefas externas e a dinâmica do desenvolvimento, e deva considerar a formação de conceitos como uma função de crescimento social e cultural global da pessoa, que afeta não apenas o conteúdo, mas também o seu método de raciocínio" (VIGOTSKI, 2003, p.73).

Atividade 4: Estudando o número racional com material base 10. Parte-se da unidade natural para tentar ampliar o olhar para o número racional.

Na Atividade 4A, utilizando o Material Dourado, o aluno deveria representar 34 unidades e 3,4 unidades. É natural que os pedagogos em formação não encontrem dificuldade para representar 34 unidades. Em geral selecionam 3 barrinhas e 4 cubinhos. Mas a dificuldade aparece ao tentar representar 3,4 e então vale discutir como ficará a representação de 3,4 se considerarmos a placa como a unidade racional (Figura 4A).

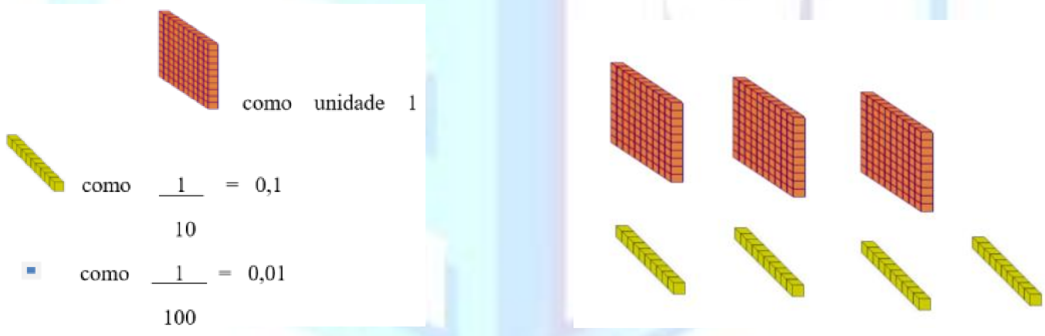


Figura 4A: Material Dourado para o ensino de Racionais e a representação de 3,4
Fonte: Acervo EDMAT

Vale continuar a discussão questionando: E se a barrinha for a unidade racional? E se o cubo grande for a unidade racional? Conforme a dificuldade da turma, poder-se-á discutir a representação de outros números racionais utilizando o Material Dourado.

Atividade 4B: Considere agora a moeda de 1 real como a unidade racional do Sistema Monetário Brasileiro. Represente numericamente utilizando a linguagem matemática e o cifrão

R$ o total que representam: 3 moedas de 50 centavos; 1 moeda de 10 centavos; 5 moedas de 1 centavo; 100 reais e 3 centavos; 15 moedas de 10 centavos; 10 moedas de 10 centavos e 2 moedas de 1 centavo. A representação no quadro valor de lugar (QVL) permitirá uma discussão coletiva sobre as possíveis dificuldades e as semelhanças na utilização do Material Dourado e do Sistema Monetário. Conforme Vigotski (1995), os materiais concretos têm que servir aos objetivos do professor e do objeto matemático a ser estudado, devem estar a serviço da aprendizagem e não o contrário.

Atividade 5: Estudando a unidade racional discreta e contínua.

Utilizando o Material Cuisenaire, realizar as seguintes atividades: Atividade 5A: Representar alguns números naturais, como 6, 9, 12, 15, etc. Atividade 5B: Representar 2/3 e 5/3 onde o inteiro é a barrinha verde clara. Observar se fica evidente que 5/3=3/3 + 2/3 utilizando as diferentes barrinhas. Pode-se evidenciar que 2/3=5/3 – 3/3 e que 3/3=5/3-2/3. Atividade 5C: Representar 3/5 e 8/5 onde o inteiro é a barra amarela. Atividade 5D: Utilizando a barra lilás mostrar que 8/4 – 5/4 = ¾. Atividade 5E: Considerando a barra laranja como o inteiro, representar: 1/10; ½; 0,7; 9/10; 0,9.

Será determinante observar se os estudantes apresentam dificuldades para identificar frações de inteiros representados pelas réguas de Cuisenaire. O fato de alguns estudantes demorarem para enxergar qualquer régua como um inteiro indica a dificuldade enraizada na concepção do número racional. Ao manipularem as réguas coloridas, a maior dificuldade tem sido deixarem de relacioná-las aos seus valores assumidos no conjunto dos Números Naturais e fazerem uma releitura das mesmas como unidades dos Números Racionais.

Nas atividades seguintes, sugere-se considerar a unidade racional como uma região circular. Atividade 5F: Represente 3 inteiros. Atividade 5G: Represente 1/3. Atividade 5H: Represente 7/4. Em geral, feitas no improviso da sala de aula, quando não há materiais concretos disponíveis e apropriados para o tema. Normalmente o professor faz um desenho rudimentar, mas que atende ao objetivo proposto. Entretanto, nas representações circulares é comum os alunos terem dificuldades para dividir a região circular em partes iguais diferentes de 2, 3 e 4. Assim, pode-se ver que na foto à esquerda da Figura 5A, a estudante não teve dificuldade para rascunhar uma representação de 7/4. Entretanto, em ambas fotos da direita os alunos não diferenciam 7/4 de 4/7, o que gera a necessidade de dividir um círculo em 7 partes iguais. As produções revelam uma tentativa de representar 4/7 em vez de 7/4.

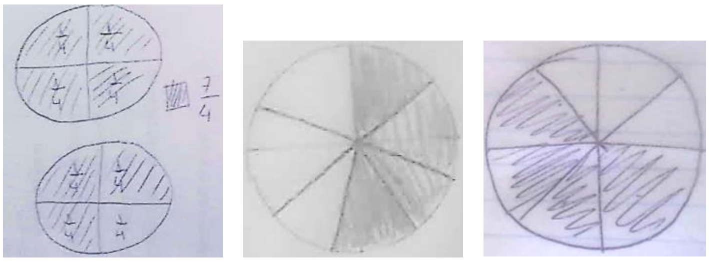


Figura 5A: Produções em sala de aula – “Represente 7/4 de uma região circular”
Fonte: Acervo EDMAT

Agora consideremos a unidade racional como uma região quadrada e solicitemos que os alunos façam a Atividade 5I: Represente 10/5 e a Atividade 5J: Represente 5/6. Em geral, não há dificuldade na representação de 5/6 (fotos à esquerda da Figura 5B), já que 5/6 é uma fração própria, como já vimos nos exemplos da Figura 2B. É raro um aluno representar a região quadrada como não quadrada, mas acontece, como na foto à direita, na Figura 5B.

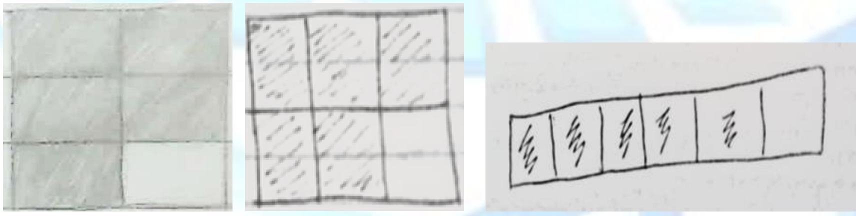


Figura 5B: Produções em sala de aula – “Represente 5/6 de uma região quadrada”
Fonte: Acervo EDMAT

Entretanto, a dificuldade se confirma com a representação de frações impróprias. Assim, mesmo ao utilizar um recurso tão natural como a representação gráfica manual, é importante ficar atento. Apesar de encontramos alunos que produzem representações coerentes para a fração 10/5 como a da esquerda na Figura 5C, é possível encontrar tentativas de representações que não avançam, como as localizadas à direita, no 2º e no 3º exemplo da Figura 5C. Os estudantes percebem que não está certo o que fazem, mas também não sabem como fazer. O que é um ponto positivo, já que não consideram uma resolução errada como correta. Esse é o ponto perfeito para a mediação, é a hora de trabalhar na Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) citada em Vigostki (2002). É a hora de o professor fazer a(s) pergunta(s) certa(s) para o aluno pensar nas possibilidades de sair desse entrave. A ZDP define aquelas funções que ainda não amadureceram e que estão prestes a maturar,

> é o que nós chamamos a zona de desenvolvimento proximal. Ela é a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes (VIGOTSKI, 2002, p. 112).

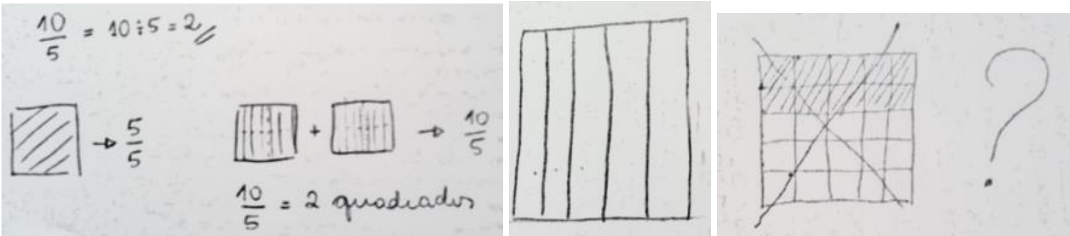


Figura 5C: Produções em sala de aula – "Represente 10/5 de uma região quadrada"
Fonte: Acervo EDMAT

Agora consideremos a unidade racional como um saco com 30 bolinhas. Solicitemos aos alunos a Atividade 5K: Represente 2/5 de 30 bolinhas e a Atividade 5L: Represente 4/3 de 30 bolinhas. Para encontrar 2/5 de 30 bolinhas a aluna encontrou 1/5 e multiplicou o resultado de 6 bolinhas por 2 encontrando 12 bolinhas. Sua representação gráfica está à esquerda superior da Figura 5D, onde ela representa 30 bolinhas divididas em grupos de 6 e escurece 2 grupos. À direita dessa temos duas representações coerentes de 4/3 de 30 bolinhas, uma envolvendo desenhos e indicações numéricas e outra utilizando cálculos. Há ainda uma terceira abaixo onde, sem saber como operar com frações a estudante multiplica 30x3 e divide 90÷4 encontrando 22,5 e representando por meio de desenhos 22 bolinhas e meia bolinha.

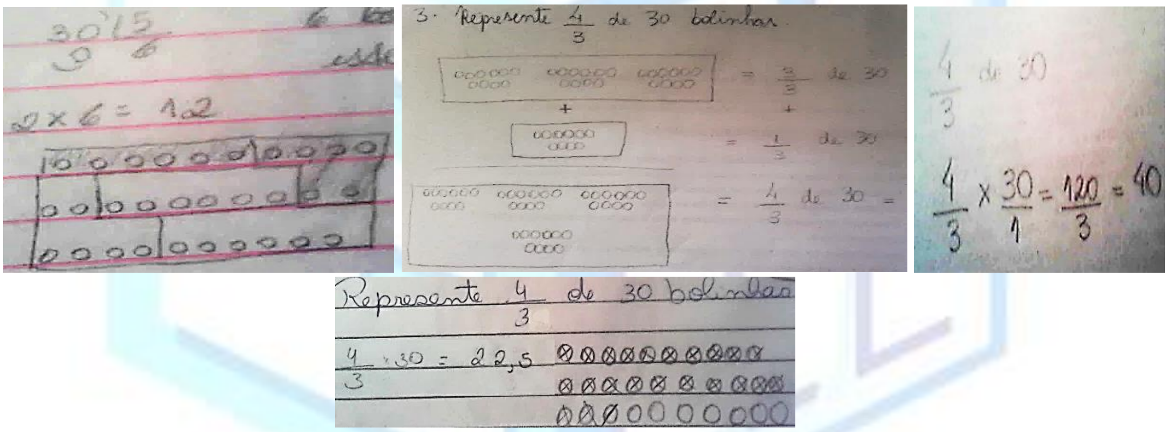


Figura 5D: Produções em sala de aula – "Represente 2/5 de 30 bolinhas" e "Represente 4/3 de 30 bolinhas".
Fonte: Acervo EDMAT

Na Atividade 5 se exploram materiais estruturados, regiões geométricas e quantidades discretas. Ao associar diferentes abordagens com os racionais e suas diferentes representações fazemos conversão de representações e trocas de registros, seguindo Duval (2004) e sua defesa dos registros das representações semióticas nas atividades cognitivas matemáticas.

> a conversão é a transformação da representação de um objeto, de uma situação ou de uma informação dada em um registro, em uma representação deste mesmo objeto, esta mesma situação ou da mesma informação em outro registro. As operações habitualmente designadas pelos termos "tradução", "ilustração", "transposição",

> “interpretação”, “codificação”, etc., são operações que fazem corresponder uma representação dada em um registro com outra representação em outro registro. A conversão é, portanto, uma transformação externa relativa ao registro da representação de partida [...] Assim, a significação operatória não é a mesma para 0,25, para ¼ e para $25x10^{-2}$ [...] visto que cada um destes três significantes tem uma significação operatória diferente, e sem dúvida representa o mesmo número (DUVAL, 2004, p.46).

Para as Atividades 6A, 6B e 6C, solicitamos que os alunos representassem graficamente e por meio da linguagem matemática, 2/3 e 3/2 respectivamente de um saco com 90 laranjas (6A), de uma quantia de 100 reais (6B) e de um salário mínimo (6C). Para as Atividades 6D, 6E e 6F, solicitamos que encontrassem 2/3 + 3/2 de um saco com 90 laranjas (6D), de uma quantia de 100 reais (6E) e de um salário mínimo (6F). Foi notório observar que os estudantes tiveram mais facilidade para resolver a questão que envolvia dinheiro do que a que envolvia as 90 laranjas. Apresentamos aqui 3 caminhos encontrados por eles para resolver a questão 6E “Encontrar 2/3 + 3/2 de uma quantia de 100 reais” e os erros cometidos.

Na primeira resolução apresentada na Figura 6, o aluno calculou 1/3 de 100 reais e multiplicou o resultado por 2, depois calculou ½ de 100 reais e multiplicou o resultado por 3, por fim juntou as duas quantias e encontrou a resposta R$99,66. Isso porque cometeu alguns erros. Primeiramente 100÷3=33,33 é um resultado aproximado e não deveria ser utilizado o sinal de igual, assim como não deveria ser utilizado o sinal de igual para 100x3=33,33x2=66,66, visto que 100x3≠66,66. Esse tipo de notação é frequentemente utilizado por professores em formação, precisa ser observado e as regras básicas precisam ser ensinadas. Em seguida errou a multiplicação: 50x3=15. Se estivesse atento ao resultado da operação teria percebido que o produto não poderia ser menor do que o fator 50. Assim como, poderia ter observado que se temos 3/2 de 100 reais, já temos mais de 100 reais, que somado a 2/3 de 100 daria mais do que 100, nunca poderia ser 99,66 que é menor do que 100.

Na segunda resolução apresentada na Figura 6, o aluno optou por fazer 2/3 de 100, 3/2 de 100 e juntar os dois resultados. O caminho escolhido não foi calcular 1/3 de 100 e ½ de 100, mas (2x100)/3 e (3x100)/2. Encontrou assim, 66,66 e 150,00 cuja adição resultou 216,66. Apesar de não ter mencionado serem cálculos aproximados, por se tratar de dinheiro, o resultado final é o valor real. Essa opção didática pode não favorecer explicar a uma criança que para calcular 3/2 de 100 reais eu faço 3x100 e divido o resultado por 2. Pode ser mais significativo achar ½ de 100 para então visualizar 3/2, ou seja, encontrar 3 unidades abstratas de tamanho um meio, isto é 3 (1/2 de 100), como sugerem Behr et all (1992). Mas essa é uma observação para ser pensada pelo leitor.

Na terceira resolução o aluno opta por fazer o mínimo múltiplo comum entre os denominadores e encontra MMC(3,2)=6, adiciona as duas frações e multiplica o resultado dessa adição por 100. Acontece que ele erra na técnica da adição das frações. Talvez se ele optasse por operar com frações equivalentes, 2/3=4/6 e 3/2=9/6, seus cálculos teriam mais significado. Ele não percebe que 12/6 dá 3 e não é equivalente a 2/3, assim como 18/6≠3/2. Dessa forma, ele encontra como resultado errado o valor de 500 reais.

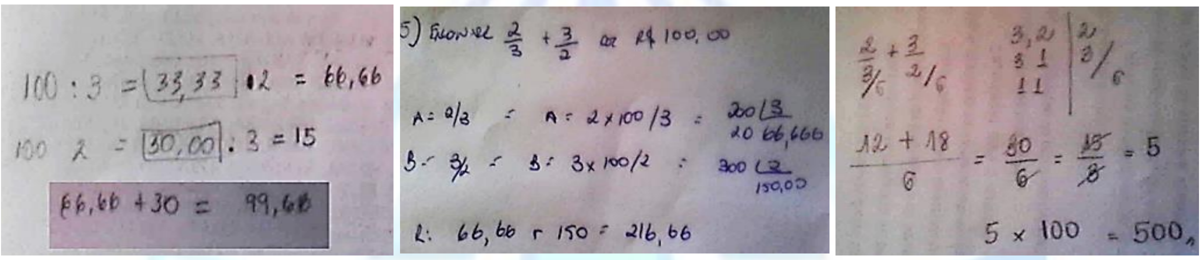


Figura 6: Produções em sala de aula – "Encontre 2/3 + 3/2 de uma quantia de 100 reais".
Fonte: Acervo EDMAT

A utilização de materiais manipulativos em alguns exemplos aqui apresentados é recomendada para explorar a matemática de forma empírica. Segundo estudos de Kamii e Warrington (1999) muitas vezes a abordagem empírica, típica do conhecimento físico destacado pelo construtivismo de Piaget, como a divisão de tortas, pizzas e chocolates, ou mesmo a partir de dobraduras, não é suficiente para a aprendizagem de determinados conceitos, como a equivalência de frações, que pode ser resolvida por algoritmos ou outros recursos operacionais, fruto do conhecimento social, resultante de séculos de construção feita por matemáticos adultos e transmitida às crianças por meio da educação escolar. Entretanto, a equivalência requer reversibilidade de pensamento e só pode ser construída pela própria pessoa, por seu próprio raciocínio. A utilização das técnicas, entretanto, não significa ser o melhor caminho para o desenvolvimento numérico das crianças. Muitas vezes o estudante acredita mais no algoritmo do que no seu próprio poder de reflexão e de solução racional, o que pode explicar os caminhos escolhidos nas resoluções apresentadas na Figura 6. Kamii e Warrington (1999) sugerem que se desenvolva o conhecimento lógico-matemático com questões que encorajem as crianças a desenvolverem seu próprio processo de pensar. As questões aqui apresentadas, entretanto, dependem muito da mediação no processo de construção do conhecimento, como já citado no exemplo da Figura 5C.

> A presença de um problema que exige a formação de conceitos não pode, por si só, ser considerada a causa do processo, muito embora as tarefas com que o jovem se depara ao ingressar no mundo cultural, profissional e cívico dos adultos sejam, sem dúvida, um fator importante para o surgimento do pensamento conceitual. Se o meio ambiente não apresenta nenhuma dessas tarefas [...] o seu raciocínio não conseguirá atingir os estágios mais elevados, ou só os alcançará com grande atraso. No entanto, a tarefa cultural, por si só, não explica o mecanismo de desenvolvimento em si, que resulta na formação de conceitos. (VIGOTSKI, 2003, p. 73)

Analisar as diferentes formas encontradas pelos participantes para resolver a Atividade 6 permite discutir as vantagens e desvantagens de cada uma delas. Uns calculam 2/3 e 3/2 da quantia solicitada separadamente e depois juntam os valores para dar a resposta, outros podem fazer 2/3 + 3/2 =4/6+9/6=13/6 para então calcular 13/6 da quantia e encontrar a resposta. E haveriam outras formas? Ao ouvirmos e vermos os diferentes caminhos traçados pelos estudantes entendemos seus pensamentos, suas estratégias e suas possíveis concepções.

Atividade 7: Criação e resolução de problemas.

Na Atividade 7A solicitamos que cada um criasse uma situação problema envolvendo a fração 2/3, na Atividade 7B pedimos a criação de uma situação problema envolvendo a fração 3/2 e na Atividade 7C a criação de uma situação problema envolvendo a fração 4/5 e outra situação envolvendo a fração 7/5. Após a criação dos problemas foi bastante produtivo trocar os problemas para que fossem resolvidos entre os participantes. Comentar os resultados, a redação dos mesmos, as perguntas e os sentidos envolvidos são algumas alternativas de trabalho reflexivo que podem ajudar na possibilidade ou não de resolução de cada um deles. Vale aqui destacar um exemplo de resolução apresentada por uma pedagoga em formação inicial. Ao criar um problema utilizando a fração 3/2 (Figura 7B), o objetivo da aluna, conforme ela mesmo expôs na sala de aula, era achar um valor menor do que 1,75m porque Liliane era mais baixa do que Andressa. Entretanto, ao resolver o problema, o valor encontrado para a altura de Liliane foi de 2,62m aproximadamente, ou seja, Liliane de baixinha virou gigante. E mesmo que o cálculo fosse com 2/3, Liliane teria menos de 1,20m, o que também não corresponderia à realidade. Essas situações são marcantes na sala de aula e determinantes para uma prática pedagógica investigativa, crítica e reflexiva. O trabalho atento com racionais "aumenta enormemente a capacidade da criança de compreender e manejar uma série de problemas dentro e fora da escola" (BEHR et al, 1983, p. 91).

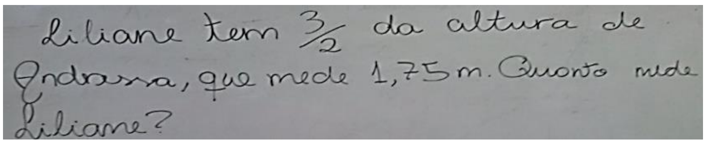

Liliane tem 3/2 da altura de Andressa, que mede 1,75m. Quanto mede Liliane?

Figura 7B: Analisando a criação e a resolução de problemas

Fonte: Acervo EDMAT

Retomando Shulman (1986, 1991, 2005), destacam-se as palavras de Ball, Thames e Phelps (2008, p. 404):

> professores que não conhecem bem a sua disciplina, a sua matéria, não estão aptos a ter o conhecimento necessário para ajudar os estudantes a aprender determinado conteúdo. Ao mesmo tempo, entretanto, somente saber bem a matéria pode não ser o suficiente para ensinar. [...] E mais, professores precisam saber para que serve a matemática e, entre outras coisas, escolher caminhos poderosos de representação dos conteúdos matemáticos para que esses tenham sentido para os estudantes e sejam entendíveis pelos estudantes. [...] O que parece mais importante é saber e estar apto para usar a matemática necessária inserida no trabalho pedagógico da docência.

Considerações finais

A realização de atividades investigativas como as aqui apresentadas tem revelado potencial teórico e didático para levar professores em formação inicial ou já licenciados a refletirem sobre questões conceituais e da prática pedagógica, revigorando o processo de aprender e de ensinar Matemática. Ao perceberem que os números naturais são insuficientes para determinados cálculos presentes no cotidiano e na vida escolar dos estudantes dos anos iniciais, os professores começam a observar, confirmando as palavras de Behr et all (1983, p.92), que "o entendimento dos números racionais provê os fundamentos sobre os quais as operações algébricas elementares podem ser desenvolvidas". Aproveitando as discussões decorrentes das atividades realizadas, refletem sobre a importância da aprendizagem dos racionais utilizando diferentes registros de representação (DUVAL, 2004) e avançam na ampliação do seu campo conceitual. Mais ainda, percebem que o desenvolvimento dos conceitos "pressupõe o desenvolvimento de muitas funções intelectuais: atenção deliberada, memória lógica, abstração, capacidade para comparar e diferenciar. Esses processos psicológicos complexos não podem ser dominados apenas através da aprendizagem inicial" (VIGOTSKI, 2003, p. 104) e não podem ser transmitidos por ninguém, nem mesmo pelo professor, mas podem ser mediados por uma educação que articule conceitos cotidianos e científicos e acelere a constituição do conhecimento. A familiarização com o manuseio de materiais concretos e recursos diversos possibilita mais segurança para transformar falsos conceitos, que dependem de situações concretas, para conceitos abstratos (VIGOTSKI, 1995, p. 282) "e se transformam, devido a essa abstração, em conceitos gerais aplicáveis a todos os casos, a todas as tarefas". Ao dar a voz aos participantes para expor suas dúvidas, questionar e argumentar a escolha de seus caminhos abre-se possibilidades para que eles também desenvolvam o hábito de escutar seus alunos e analisar suas argumentações. Ao perceberem a importância de se estudar os objetos matemáticos nos seus aspectos conceitual, didático-metodológico e curricular propostos por Shulman (1986), os envolvidos no estudo têm a oportunidade de rever sua prática pedagógica e aperfeiçoar o seu fazer profissional.

Referências

BALL, Deborah L., THAMES, H.M.; PHELPS, G. Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? **Journal of Teacher Education.** NY: n. 59(5), November/December, p. 389-407, 2008.

BALL, Deborah L. **Knowledge and reasoning in Mathematical Pedagogy: examining what prospective teachers bring to teacher education.** Michigan: Dissertação submetida ao Departamento de Educação da Michigan State University, 1988.

BEHR, Merlyn; LESH, R.; POST, T; SILVER, E. Rational-Number Concepts. In LESH, R.; LANDAU, M. (Ed.) **Acquisition of Mathematical Concepts and Processes.** Florida: Academic Press, p. 91-126, 1983.

BEHR, Merlyn, HAREL, G., POST, T.; LESH, R. Rational number, ratio and proportion. **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. New York: Macmillan Publishing, p. 296-333, 1992.BRASIL. MEC/ Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática** / Ensino de primeira à quarta séries. Brasília, DF, 1997. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf Acesso em 2015.

BRASIL. MEC/ Secretaria de Educação Fundamental. **Pró-letramento**. Programa de Formação Continuada de Professores dos anos/series iniciais do Ensino Fundamental, Brasília, DF, 2007. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/arquivos/pdf/fasciculo_mat.pdf Acesso em 2015.

CAMPOS, Tania M. M.; RODRIGUES, Wilson. R. A Ideia de unidade na construção do conceito do número racional. REVEMAT - **Revista Eletrônica de Educação Matemática**. São Carlos: UFSC, V2.4, p. 68-93, 2007.

DUVAL, Raymond. **Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y Aprendizajes Intelectuales**. Santiago de Cali. Colombia: Universidadd del Valle, 2004.

FARIAS, Mônica V. de O. **Formação docente e entrada na carreira: uma análise dos saberes mobilizados pelos professores que ensinam matemática nos anos iniciais**. Campo Grande: Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, 2009. 206 p.

FIGUEIREDO, Djairo G. de. **Análise I.** Elementos de Matemática. Rio de Janeiro: Livros técnicos e científicos Editora S.A. IMPA, 1975.

KAMIIE, Constance e WARRINGTON, Ann M. Teaching Fractions: Fostering Children´s Own Reasoning. In **Developing Mathematical Reasoning in Grades k-12**. Reston,VA: NCTM Yearbook, p. 82-92, 1999.

NUNES, Terezinha and BRYANT, Peter. **Understanding rational numbers and intensive quantities**. University of Oxford: Published by the Nuffield Foundation, 2009. Disponível em: www.nuffieldfoundation.org. Acesso em 29 jan, 2015.

SHULMAN, Lee S. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, Washington, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

SHULMAN, Lee S. Ways of seeing, ways of knowing, ways of teaching, ways of learning about teaching. **Journal of Curriculum Studies**, London, v. 23, i.5, p. 393-396, 1991.

SHULMAN, Lee S. Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. **Profesorado: revista de currículum y formación del profesorado,** Granada-Espanha, n. 9(2), p. 1-30, 2005.

VIGOTSKI, Lev S. **Obras Escogidas**. Tomo III. Madrid: Editorial Pedagógica, 1995.

VIGOTSKI, Lev S. **A Formação Social da Mente.** São Paulo: Martins Fontes, 2002.

VIGOTSKI, Lev S. **Pensamento e Linguagem.** São Paulo: Martins Fontes, 2003.

Submetido em setembro de 2016

Aprovado em novembro de 2016