REVISTA DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL (UFMS)

ISSN 2359-2842 Volume 17, número 48 – 2024 DOI: 10.46312/pem. v17i48.22177

Uma Reescrita Da Demonstração Do Teorema De Pitágoras Dada Por André Pinto Rebouças

A Rewrite Of The Proof Of The Pythagorean Theorem Given By André Pinto Rebouças

Enoque da Silva Reis[1]

Quezia Alves Andrade[2]

RESUMO

O objetivo deste artigo é trazer uma reescrita da demonstração do Teorema de Pitágoras dada pelo brasileiro André Pinto Rebouças com o intuito de proporcionar uma forma mais atrativa de entender este movimento de demonstração em diversos níveis de estudo. Como referencial teórico, utiliza-se elementos oriundos da Geometria Plana, partindo dos conceitos primitivos (reta, ponto e plano), perpassando por segmentos de retas, ponto médio, ângulos, retas paralelas, retas perpendiculares, quadriláteros, equivalência e área. Como movimento metodológico, realiza-se uma busca detalhada na Hemeroteca Digital para encontrar o artigo no qual havia a publicação da demonstração dada pelo personagem e diante dela, buscar livros e elementos matemáticos que pudessem auxiliar na reescrita da demonstração de forma mais detalhada e didática. Como resultado foi possível observar que a demonstração dada pelo brasileiro baseia-se em elementos exclusivos da geometria plana, e ainda está reescrita, nos auxilia a entender em detalhes e de forma didática o passo a passo da demonstração original.

PALAVRAS-CHAVE: Teorema de Pitágoras. André Rebouças. Demonstração

ABSTRACT

The objective of this article is to present a rewrite of the demonstration of the Pythagorean Theorem given by the Brazilian André Pinto Rebouças with the intention of providing a more attractive way to understand this demonstration movement at different levels of study. As a theoretical reference, elements from Plane Geometry are used, starting from the primitive concepts (line, point and plane), going through line segments, midpoint, angles, parallel lines, perpendicular lines, quadrilaterals,

[1] Universidade Federal de Rondônia Campus Ji-Paraná. E-Mail: espoquer1@hotmail.com . Orcid: https://orcid.org/0000-0001-6631-9688

[2] Universidade Federal de Rondônia Campus de Ji-Paraná - bolsista pela CAPES/DS. E-mail: queziaalvesandradee@gmail.com . Orcid: https://orcid.org/0000-0001-6918-5259

equivalence and area. As a methodological move, a detailed search was carried out in the Digital Newspaper Library to find the article in which the demonstration given by the character was published and, in view of it, to look for books and mathematical elements that could help in the rewriting of the demonstration in a more detailed and didactic way. As a result, it was possible to observe that the demonstration given by the Brazilian is based on exclusive elements of plane geometry, and is still rewritten, helping us to understand in detail and in a didactic way the step by step of the original demonstration.

KEYWORDS: Pythagorean Theorem. André Rebouças. Demonstration.

Introdução

Ao começar a envolver letras, chamadas incógnitas dentre os algarismos na aprendizagem no contexto da matemática escolar, é abordado o famoso Teorema de Pitágoras. Popularmente atribuído a Pitágoras como sua principal demonstração, porém muitos outros matemáticos e amantes da Matemática, como o curioso Rebouças, se aventuraram em realizar sua demonstração; trazendo assim fascinantes formas de tal demonstração, evidenciando suas diferentes óticas diante do triângulo retângulo.

Foi popularmente atribuída a Pitágoras como a principal demonstração do referido teorema, pois este renomado matemático fundou a Escola Pitagórica no séc. V a.C., uma sociedade secreta que estudava principalmente matemática e filosofia. Nesta sociedade, tudo que era discutido e produzido em suas sessões era atribuído a todos, ou seja, as descobertas eram comuns e o conhecimento, atribuído popularmente ao mestre; por isso o teorema ao qual esse trabalho se debruça leva o nome de Teorema de Pitágoras.

De acordo com Bastian (2000), é provado que desde a época dos babilônios antigos, cerca de 1.700 a. C. já se usava o Teorema de Pitágoras. Como prova disso, existe na Universidade da Colômbia, um fragmento, uma tabela de argila, chamada Plimpton 332, que contém uma tabela com 15 linhas e 3 colunas de ternos pitagóricos, o que veremos adiante. Ainda, guardado no museu britânico, existe outro tablet que os babilônicos conheciam, tendo uma descrição bem peculiar:

4 é o comprimento

5 é a diagonal

Qual é a altura?

4 vezes 4 dá 16

5 vezes 5 dá 25

Tirando 16 de 25 o resto é 9

Quantas vezes quanto devo tomar para ter 9?

3 vezes 3 dá 9

3 é a altura (Bastian, 2000)

Vários outros fragmentos e tabelas de argila foram encontrados, alguns deles com Figuras geométricas que mostram que o Teorema de Pitágoras já era conhecido bem antes de Pitágoras existir, bem como de fundar a escola pitagórica. Porém, sabendo que a própria Matemática foi considerada ciência muito posteriormente a época de Tales e Pitágoras e o fato de os babilônicos já terem conhecimento do Teorema de Pitágoras, não minimiza o que foi desenvolvido na escola Pitagórica, tendo, pelo contrário, muita relevância.

Até aqui entendemos que existe um teorema, o qual foi batizado com o nome de Pitágoras e que se refere a medidas de lados. Porém, cabe aqui um momento de exploração, a fim de entender de que forma geométrica estamos falando quando nos referimos a essas medidas. Falamos do triângulo retângulo. Os triângulos são classificados em três tipos, tanto no que se refere às medidas de seus lados, como no que se refere aos seus ângulos internos. No que diz respeito ao ângulo, podem ser: obtusângulo, acutângulo e retângulo. O leitor irá compreender melhor ao ler a fundamentação teórica matemática no tópico adiante.

O foco aqui é o triângulo retângulo, que possui um ângulo de exatos 90º graus. Assim, o lado que possui sua maior medida é chamado de hipotenusa e os seus outros dois lados de menores medidas são chamados de catetos. Sabendo brevemente o contexto em que se insere o Teorema de Pitágoras, a Figura geométrica relacionada a este teorema, descreveremos aqui o que ele afirma propriamente: "Em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos" (Bastian, 2000, p. 04). Sendo a a medida da hipotenusa, b e c medidas dos catetos, formando a identidade matemática $a^2 = b^2 + c^2$.

Como citado anteriormente, este teorema teve diversas demonstrações por diferentes amantes da Matemática, curiosos e matemáticos extraordinários. No trabalho de autoria de Loomis, publicado após sua morte, fica evidente como esse teorema é explorado, pois ele traz 370 demonstrações distintas (Teixeira; Reis; Souza; Souza, 2021), explicando-as detalhadamente com imagens e ainda, este trabalho traz classificações das demonstrações deste teorema tão investigado (Loomis, 1940).

Colocamos em destaque que existiam neste período brasileiros que tinham demonstrado esse teorema de forma original "Em particular, no Brasil havia sido demonstrado por Stockler, o primeiro diretor da Escola Militar Brasileira e por Benjamin Constant Botelho Magalhães além de Raymundo Teixeira Mendes."

(Teixeira; Reis; Souza; Souza, 2021, p. 47561). Veremos agora mais a fundo sobre a trajetória de Rebouças.

Vida de André Rebouças

Amigo do imperador Dom Pedro II, assim descrito pelo próprio Rebouças, curioso engenheiro civil, o qual viveu a maioria de seus dias no Brasil (Soares, 2017), tem uma história de vida envolta a lutas políticas e sociais, sempre em busca de melhorias e avanço intelectual em diversos contextos. Na Figura 01[3], vemos Rebouças sendo retratado:

Figura 01 - Imagem de Rebouças

Fonte: Wikipédia

Rebouças, neto de Rita Brasília dos Santos, uma mulher negra que havia sido escravizada, posteriormente liberta (Fonseca; Barros, 2016) e Gaspar Pereira Rebouças, um alfaiate português; filho de Antônio Pereira Rebouças, o qual era o caçula entre quatro filhos homens (haviam mais 5 mulheres) de Rita e Gaspar. Todos eles se casaram com cônjuges brancos, atingindo um alto grau de sucesso profissional, tendo acesso à educação formal e à vida em alta sociedade (Soares, 2017).

Antônio Rebouças, pai de André Rebouças, nasceu na Bahia, foi autodidata no que se refere ao estudo das leis, se tornando advogado provisionado especialista em direito civil na monarquia. De 1830 a 1840 foi deputado, conselheiro da coroa e atuou como advogado do Conselho de Estado (Fonseca; Barros, 2016); Antônio "conseguiu que alguns advogados de destaque ficassem impressionados com os seus conhecimentos jurídicos e fizessem uma petição às autoridades do Rio de Janeiro

[3] Acesse em: <https://acesse.dev/9oEDQ>.

para que lhe fosse concedida permissão para exercer a advocacia" (Soares, 2017, p. 245).

Rebouças, nascido em 19 de janeiro de 1838 em Cachoeiras, província da Bahia, ainda criança, migrou da Bahia para o Rio de Janeiro em 1846, em função da eleição do seu pai para ocupar um cargo político no parlamento (Fonseca; Barros, 2016). Sua mãe, Carolina Pinto Rebouças, deu à luz ao seu irmão e companheiro fiel, com o nome do pai, Antônio Rebouças um ano após o seu nascimento, também nascido na Bahia, no entanto, os dois com criação no Rio de Janeiro (Soares, 2017). Rebouças e seu irmão aprenderam a ler, instruídos na corte pelo seu próprio pai, entre 1847 e 1848 (Fonseca; Barros, 2016). Ao assumir o papel de educador de seus próprios filhos, Antônio chegou a utilizar livros preparados por ele mesmo (Soares, 2017). Nota-se a preocupação com a educação de seus filhos logo cedo.

> Aos 8 anos de idade, juntamente com o irmão Antônio, ingressou no colégio de Camilo Tertuliano Valderato, situado no campo da Santana, próximo à sua residência, no qual teve aulas de aritmética, português e caligrafia. Entre 1849 e 1852, André Rebouças foi matriculado interno no colégio de Henrique Kôpke. [...] Ainda em 1852 preparou-se com professores particulares e em aulas preparatórias para prestar os exames da Escola Militar (depois, Escola Central e Escola Politécnica) (Soares, 2017).

Foi recruta em 1856 ao se alistar e ser aprovado para Escola Militar e de Aplicação no Exército (embrião da Escola politécnica, criada em 1874). Três anos depois matriculou-se em tal escola. Já em 1860 recebeu o grau de Engenheiro Militar (Soares, 2017).

Rebouças teve vínculo profundo com a Escola Politécnica, lecionando na mesma; e ainda ajudou a fundar o Clube de Engenharia (Fonseca; Barros, 2016).

Nesse meio tempo Rebouças estava inserido na burocracia militar e chegou a ser Engenheiro Militar, recebendo o título em 1860 (Fonseca; Barros, 2016) de primeiro Tenente (Trindade, 2004), como descrito em seus diários. No ano seguinte, partiram Rebouças e seu irmão Antônio para Europa em uma viagem de estudos financiada pelo pai (Soares, 2017), já que ao solicitarem a bolsa de estudos para a Escola Militar não obtiveram resposta favorável; foram sem financiamento da mesma em viagem de dois anos para estudar teoria e prática da Engenharia Civil na Europa (Fonseca; Barros, 2016). Mais uma vez, fica bem evidente a participação ativa de Antônio Rebouças, pai dos irmãos Rebouças, na educação dos seus filhos.

Rebouças se especializou em obras hidráulicas, posteriormente ao vir ao Brasil colocou em prática tais conhecimentos em construção de docas, até então inexistentes no país, tornando uma de suas principais especialidades (Trindade, 2004). Nesse contexto de aplicação do que aprendeu na Europa, Fonseca e Barros (2016, p. 198) afirmam que:

> No retorno ao Brasil, já em 1863, envolveu-se em vários projetos em diferentes regiões e províncias brasileiras, dentre os quais se destacam a reforma dos portos, fortalezas, construção de ferrovias, melhoria no sistema de abastecimento de água e nos serviços de esgoto.

No final de 1864 voluntariou-se para a Guerra da Tríplice Aliança contra o Paraguai como Tenente de Engenharia, porém o seu tempo de participação na guerra foi curto devido a uma pneumonia e uma recidiva de varíola (Trindade, 2004).

Por essa questão de saúde durante a guerra do Paraguai, Rebouças foi liberado da função de Engenheiro Militar. Em uma das cartas que escreveu – durante o exílio – se identificou como um dos melhores amigos da família imperial, sendo que essa amizade com o imperador se deu no período dessa guerra (Soares, 2017). Rebouças retornou ao Brasil em 1866 e após recuperar-se da sua enfermidade, abandonou a vida militar para enfim assumir o posto de gerente das obras realizadas pela monarquia no Rio de Janeiro. Nesse período publicou seu trabalho intitulado “Sete Demonstrações do Quadrado da Hypothenusa” na Revista do Instituto Polytechnico Brasileiro mais precisamente em 1867, em plenos 29 anos, trouxe demonstrações de diversas autorias do teorema popularmente chamado “Teorema de Pitágoras”, sendo uma delas considerada a princípio de autoria própria.

Da Silva (2018) discorre que em 1870 Rebouças teve um ano muito intenso de grandes possibilidades no que diz respeito ao seu trabalho com as docas, já que se iniciara uma revolução nos portos brasileiros. Nesse contexto, Rebouças recebeu o direito de concessão de seu próprio projeto de docas no bairro da Saúde e da Gamboa do Rio de Janeiro, às docas Dom Pedro II. Em agosto de 1872 diante da proposta de uma fusão envolvendo sua companhia, Rebouças partiu em viagem para a Europa e Estados Unidos como uma forma de fuga a essa fusão, a qual se mostrava contra. Retornou em 1873 com a fusão não resolvida, que acabou não acontecendo por influência dele mesmo.

Amigo de Pedro II, acompanhou-o no exílio na Europa. Após a morte do Imperador, Rebouças morou na África e, depois, em Funchal, na Ilha da Madeira, onde morreu, em 1898 (Mattos, 2013).

Destacamos, ainda, a importância da vida de André Rebouças com uma homenagem a este, sendo o primeiro engenheiro negro, abolicionista e amigo da família imperial, com a nomeação de uma avenida em Uberlândia, Minas Gerais, batizada em seu nome, Av. André Rebouças. Apesar de uma vida bem influente e ativa na sociedade, Rebouças era um homem solitário, nunca se casou ou aparentemente se envolveu oficialmente com alguém. Rebouças foi uma pessoa muito introvertida com forte tendência à melancolia, mesmo tendo uma formação cristã e residia em Funchal, na Ilha da Madeira, onde morreu em 1898 (Soares, 2017).

Diante disso, é notável que Rebouças faz parte da história do Brasil, se destacando por seus inúmeros feitos na engenharia e na matemática, sendo lembrado até a atualidade.

O artigo no qual consta a demonstração de Rebouças pode ser encontrado na Hemeroteca digital, plataforma onde “a pesquisa pode ser realizada por título, período, edição, local de publicação e palavra (s)” Reis e Pais (2020), sendo explicada seu funcionamento de uma forma muito didática nesse artigo.

Devido à dificuldade de navegar dentro da plataforma, pelo menos no primeiro momento, segue-se o passo a passo para se encontrar o arquivo. Inicialmente usamos o mecanismo de busca do Google digitando “Hemeroteca digital”, assim que entrar na biblioteca Nacional digital do Brasil, na parte da Hemeroteca digital selecione o primeiro item que se encontra um pouco abaixo, centralizado na página chamado "periódico", selecione "Revista do Instituto Polytechnico Brasileiro (RJ)" e pesquise por “André Rebouças”. Assim que abrir uma nova aba, clique no menu do lado esquerdo com um ícone de pasta, selecionando a primeira pasta no ano de 1867, em seguida a segunda pasta dentro dela indicada por "Edição 00002". Já vai aparecer o artigo onde Rebouças apresenta as sete demonstrações. Nesse mesmo trabalho para ter acesso a Figuras que ele se refere, selecione o número 44 nas páginas 44/204 localizado em cima, mudando para a página 186/204.

Veremos agora os conceitos necessários para se entender com clareza a demonstração do Teorema de Pitágoras que Rebouças desenvolveu.

Referencial Teórico Matemático

Entendemos na escrita deste artigo que, seu referencial teórico é constituído genuinamente de elementos matemáticos, uma vez que, nos baseamos neles para entendermos a demonstração analisada e em seguida reescreve-la conforme nosso objetivo propõe. Para tal nos baseamos em Osvaldo Dolce e José Nicolau Pompeo que escreveram o volume 9 da coleção Fundamentos de Matemática Elementar, publicado em 2013. Este livro tem foco na Geometria Plana e foi a partir do mesmo que nos baseamos para trazer o referencial teórico matemático que segue. Nesta obra é afirmado que as proposições geométricas são aceitas mediante e demonstrações já as proposições primitivas, postulados ou axiomas são aceitos sem demonstração. O ponto a reta e o plano são alguns objetos da Geometria que apenas tendo sua descrição ou sua menção já é suficiente.

Os símbolos matemáticos também têm um papel crucial ao lidarmos com a linguagem matemática. Alguns deles iremos lançar mão para descrever melhor o que pretendemos a seguir, são eles:

Tabela 01 - Símbolos Matemáticos

Símbolo	Significado
$\in$	Pertence
$\notin$	Não pertence
$=$	Igual
$\neq$	Diferente
$\leq$	Menor ou igual
$AB^{\leftrightarrow}$	Reta que passa pelos pontos A e B
$\underline{AB}$	Segmento de reta delimitado pelos pontos A e B
$\equiv$	Congruente
$\approx$	Equivalente
$\cup$	União
$\cap$	Interseção
$\parallel$	Paralelo
$\perp$	Perpendicular
$\subset$	Está contido

Fonte: Autoria própria

Frente a um trabalho que traz um conteúdo matemático, segue abaixo o que é necessário para o leitor entender a demonstração de Rebouças, ou seja, o referencial teórico matemático do trabalho em questão:

Ponto: por mais que as noções geométricas sejam definidas por meio de definição, as noções primitivas são adotadas sem definição, ponto é uma delas. É representado por uma letra maiúscula latina: A, B, C… O postulado da existência afirma que numa reta bem como fora dela há infinitos pontos e que num plano há infinitos pontos;

Reta: a reta também é uma noção primitiva, sendo representada por uma letra minúscula latina: a, b, c... Pode ser descrita como a união dos infinitos pontos que passa por dois determinados pontos, para os dois sentidos. Além disso, é usual representarmos por $AB^{\leftrightarrow}$, a partir de dois pontos qualquer. Pelo postulado da determinação da reta: dois distintos pontos determinam uma única reta que passa por eles. As retas podem ser concorrentes ou paralelas. As retas concorrentes são definidas apenas se elas têm um único ponto em comum. As retas são paralelas quando "são coincidentes (iguais) ou são coplanares e não tem nenhum ponto em comum" (Dolce e Pompeu, 2013, p. 61). Quando denotamos a existência de um ponto que pertence a uma determinada reta, por exemplo, seja o ponto A e seja a reta s, descrevemos matematicamente que A $\in$ s. Pois aqui se dá uma relação entre um elemento e um conjunto, pois a reta é um conjunto de vários pontos sendo estes os elementos do conjunto. E quando o ponto A não pertence a s denotamos por: A $\notin$ s;

Segmento de reta: simplesmente é o pedaço de uma reta. O mesmo é representado pelos pontos de sua extremidade, se eles forem por exemplo, os pontos A e B, o segmento de reta seria $\underline{AB}$. Os segmentos podem ser colineares, quando estão numa mesma reta; adjacentes, quando são consecutivos e colineares e congruentes, quando satisfaz três postulados: reflexivo, pois todo elemento é congruente a si mesmo $\underline{AB} \equiv \underline{AB}$; simétrico, se $\underline{AB} \equiv \underline{CD}$ então $\underline{CD} \equiv \underline{AB}$ e transitivo, se $\underline{AB} \equiv \underline{CD}$ e $\underline{CD} \equiv \underline{EF}$ então $\underline{AB} \equiv \underline{EF}$;

Ponto médio: é o ponto que se encontra exatamente no meio de um segmento de reta entre um ponto e outro. O ponto médio de $\underline{AB}$, existe se $\underline{AM} \equiv \underline{BM}$, sendo o ponto M;

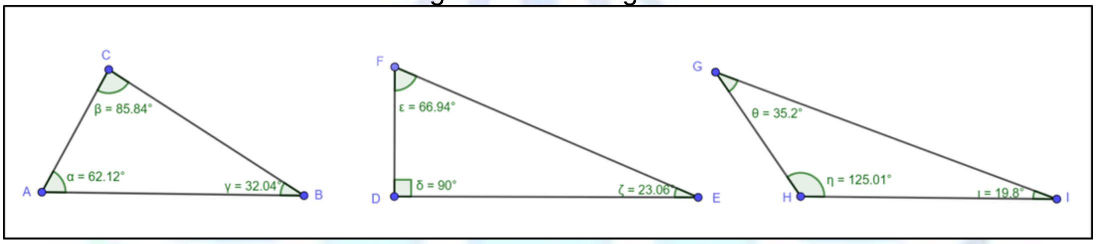
Ângulos: a reunião de duas semirretas de mesma origem não contidas numa mesma reta (não colineares) chama-se ângulo por definição. O ângulo pode ser reto, quando é igual a 90º graus, ou seja, é todo ângulo congruente a seu suplementar (qualquer ângulo somado ao seu suplementar resulta em 180º graus) adjacente (dois ângulos consecutivos que não tem pontos internos comuns); agudo, quando é menor que um ângulo reto ou obtuso, quando é maior que um ângulo reto;

Retas paralelas: duas retas são paralelas quando são coincidentes ou são coplanares e não tem nenhum ponto em comum. Denota-se que s é paralela a r da seguinte forma: $s \parallel r$;

Retas perpendiculares: duas retas são perpendiculares quando são concorrentes e formam ângulos adjacentes suplementares congruentes, ou seja, ângulos de 90º graus. Denota-se que t é perpendicular a q da seguinte forma: $t \perp q$;

Triângulos: por definição dados três pontos A, B e C não colineares, ou seja, não pertencentes a mesma reta, a reunião dos segmentos $\underline{AB}$, $\underline{BC}$ e $\underline{CA}$, chama-se triângulo ABC. Os mesmos podem ser classificados, levando em consideração a medida dos lados em equilátero, quando tem os três lados congruentes; isósceles, quando tem dois lados congruentes; e escaleno, quando dois lados não são congruentes. Já na classificação por ângulos, os triângulos podem ser retângulo, quando tem um ângulo reto; acutângulo, quando tem os três ângulos agudos; e obtusângulo, quando tem um ângulo obtuso. Observe a diferença dos ângulos citados:

Figura 02 - Triângulos



Fonte: autoria própria

O triângulo ABC é acutângulo, pois possui todos os ângulos internos menores que 90º graus, o triângulo DEF é retângulo, pois possui o ângulo δ =90º graus e o triângulo GHI é obtusângulo, pois possui o ângulo η >90º graus.

Para que dois triângulos sejam congruentes é necessário que seus lados sejam ordenadamente congruentes aos lados do outro e seus ângulos sejam ordenadamente congruentes aos ângulos do outro. Para que dois triângulos sejam semelhantes eles devem possuir os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais. O lado maior do triângulo retângulo, sempre oposto ao ângulo reto é chamado de hipotenusa; os outros dois são os catetos que são adjacentes ao ângulo reto;

Quadriláteros (retângulo, quadrado, paralelogramo, etc.): dados os pontos A, B, C e D de um mesmo plano, todos distintos e três não colineares. Se os segmentos $\underline{AB}$, $\underline{BC}$ e $\underline{CD}$ e $\underline{DA}$ interceptam-se apenas nas suas extremidades, a reunião desses quatro segmentos é um quadrilátero. Ou seja, é uma Figura plana com quatro lados, independentemente dos ângulos internos. O paralelogramo é um quadrilátero que possui os lados opostos paralelos. O retângulo é um quadrilátero que possui os quatro ângulos congruentes. O quadrado além de ser um quadrilátero que possui os quatro ângulos congruentes, ainda possui os quatro lados congruentes;

Equivalência: dois polígonos são chamados equivalentes quando possuem somas de igual número de polígonos dois a dois, congruentes entre si. As propriedades: reflexiva, simétrica e transitiva segue o que foi supracitado. Ou seja, $A \approx A$; $A \approx B$ se, e somente se $B \approx A$ e se $A \approx B$ e $B \approx C$, então $A \approx C$. Há um teorema diz que “dois paralelogramos de bases e alturas respectivamente congruentes são equivalentes” (Dolce e Pompeu, 2013, p. 303). O símbolo que está sendo usado para equivalência é ≈ (Dolce e Pompeu, 2013, p. 302), assim se A é equivalente a B, escrevemos: $A \approx B$;

Área: “área de uma superfície limitada é um número real positivo associado à superfície de forma tal que: as superfícies equivalentes estão associadas áreas iguais (números iguais) e reciprocamente: $A \approx A \Leftrightarrow (área\ de\ A = Área\ de\ B)$; a soma de superfícies está associada uma área (número) que é a soma das áreas das superfícies parcelas: (C = A + B)⇒(Área de C = Área de A+ Área de B); se uma superfície está contida em outra, então sua área é menor (ou igual) que a área da outra: $B \subset A \Rightarrow$ Área de B ≤ Área de A” (Dolce e Pompeu, 2013, p. 312).

Assim, entendendo os conceitos matemáticos apresentados acima de forma detalhada, ao ler a demonstração ficará mais tangível ao leitor. Agora, segue brevemente aspectos marcantes da história de vida de Rebouças e como ele impactou a sociedade em que viveu, seja na política, na bandeira abolicionista e também, na área da matemática, como este trabalho evidencia.

Análise e reescrita da demonstração

Antes de darmos início a este tópico do artigo, cabe ressaltar que nossa proposta inicial foi de entender, a partir do nosso referencial teórico matemático a demonstração, e em seguida reescreve-la de forma detalhada e de certa forma didática, se aproximando do que Segundo Chevallard (1991), chama de Transposição Didática que pode ser entendida como um processo no qual um conteúdo do saber que foi designado como saber a ensinar sofre, a partir daí, um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto para ocupar um lugar entre os objetos de ensino, neste caso podemos indagar que a partir desse movimento por nós realizado nesta escrita, pode-se ter um material para o ensino de uma de tantas demonstrações do Teorema de Pitágoras.

O Engenheiro André Pinto Rebouças, afirma em seu trabalho “Sete Demonstrações do Quadrado da Hypothenusa” que realizou a sua demonstração do Teorema de Pitágoras a partir da observação e análise da demonstração de M. L. Sardou, dizendo:

> Foi lendo a 6 de Março de 1866 no acampamento de Talacorá essa demonstração que tive a idéa de aperfeiçoal-a supprimindo o traçado

> do rectangulo auxiliar, compreendido entre os quadrados, construídos sobre os cathetos, e reduzindo as linhas de construcção a paralelas á hypotenusa e aos cathetos do triangulo dado. (Rebouças, 1867, p. 16)

Essa descrição transcrita se faz importante para meios de busca e para facilitar a cópia propriamente do texto. Porém, sendo um trabalho com fontes históricas, acredito ser importante trazer aqui, além da descrição acima, a imagem que mostra como foi escrito:

Figura 03 - Escritos de Rebouças diante da demonstração de M. L. Sardou

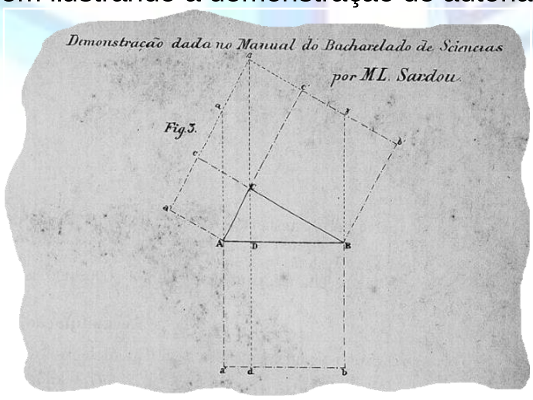
Foi lendo a 6 de Março de 1866 no acampamento de Talacorá essa demonstração que tive a idéa de aperfeiçoal-a supprimindo o traçado do rectangulo auxiliar, comprehendido entre os quadrados, construidos sobre os cathetos, e reduzindo as linhas de construcção a parallelas á hypothenusa e aos cathetos do triangulo dado.

Fonte: Rebouças (1867)

Esse print foi tirado da tela do computador da autora, no site da Hemeroteca digital, como foi explicado detalhadamente em outro momento deste trabalho. Com isso, fica claro qual foi a inspiração inicial de Rebouças para realizar a sua própria demonstração. Observa-se com essa citação que a grafia das palavras se alterou um pouco. É legível, porém não muito compreensível.

Entende-se que compreender o referencial teórico matemático nesse momento, é estritamente necessário para se entender o que se segue, pois já no primeiro momento observamos palavras como perpendicular, paralela, catetos, dentre outras. Antes de esmiuçarmos o que foi escrito sobre a demonstração, observemos a seguir a Figura 04, a qual foi citada no artigo de Rebouças (1867) como Fig. 03, se referindo a demonstração da autoria de M. L. Sardou, como diz a citação acima. Veja abaixo a imagem da qual Rebouças partiu para construir sua própria demonstração:

Figura 04 - Imagem ilustrando a demonstração de autoria de M. L. Sardou

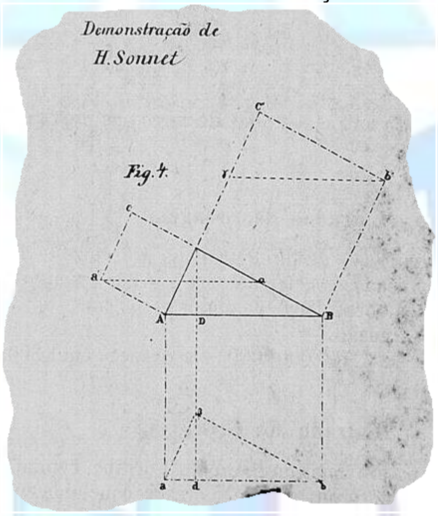


Fonte: Rebouças (1867)

Observa-se na imagem acima, desenvolvida por M. L. Sardou, que ele projeta os quadrados dos catetos e da hipotenusa e traça um retângulo, com os segmentos de reta cβ e βc' fazendo fronteira aos quadrados projetados a partir dos catetos. Ele estende o segmento de reta do lado esquerdo do quadrado projetado a partir da hipotenusa até o ponto a, no lado do retângulo, ou seja, traça o segmento aa.

O mesmo ocorre no lado direito do referido quadrado, pois o segmento de reta se estende até o ponto γ, no lado do quadrado projetado a partir do cateto maior, traçando o segmento bγ. O outro segmento de reta que se encontra perpendicular à hipotenusa do referido triângulo retângulo, passa pelo ponto D, na hipotenusa, pelo vértice C, do triângulo e tem sua extremidade no ponto β, um dos vértices do retângulo e no ponto d contido no segmento de reta que é um dos lados do quadrado projetado a partir da hipotenusa, ou seja, o segmento βd. Observemos agora, Figura 05 da demonstração de Sonnet que é similar a que Rebouças desenvolveu sem saber da existência desta:

Figura 05 - Imagem ilustrando a demonstração de autoria de H. Sonnet



Fonte: Rebouças (1867)

A Figura 04 do presente trabalho é a representação da demonstração de M. L. Sardou que Rebouças estava observando ao desenvolver a sua, própria, que era similar a desenvolvida por H. Sonnet, Figura 05 acima. Vejamos abaixo, na Figura 06 como é descrita a demonstração de Rebouças:

Figura 06 - Demonstração do Teorema de Pitágoras dada por Rebouças

A simples inspecção da respectiva figura demonstra que as linhas de construcção se reduzem a perpendicular Cd á hypothenusa, ás parallelas á essa linha á a'_{α} e b'_{γ}, e ás parallelas aos cathêtos $a\beta$ e $b\,\beta$. Fig. 4.

Cada um dos quadrados, construidos sobre os cathetos, é equivalente aos parallelogramos $Aa_{\alpha}B$ e ABb'_{γ}, que são iguaes aos parallelogramos $AC_{\alpha}B$ e $CBb\beta$, tambem equivalentes aos dous rectangulos, em que a perpendicular Cd dividio o quadrado, construido sobre a hypothenusa.

Fonte: Rebouças (1867)

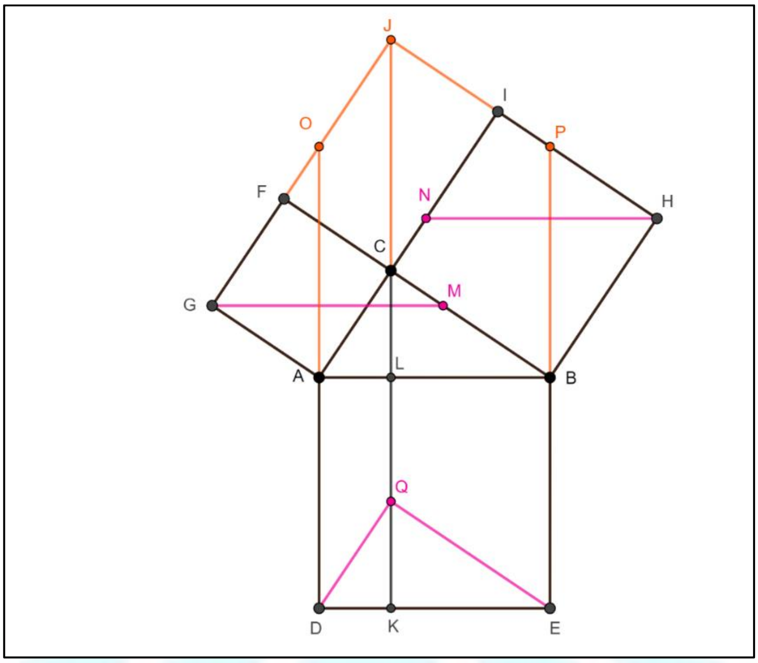
Na descrição que Rebouças faz, presente na Figura 06 acima é apresentada logo abaixo para fins de busca no sentido de facilitar demais pesquisadores:

> A simples inspecção da respectiva Figura demonstra que as linhas de construcção se reduzem a perpendicular Cd á hypotenusa, ás parallelas á essa linha á a'∝ e b'ɣ, e ás paralelas aos cathêtos $a\beta$ e $b\beta$. Fig. 4. Cada um dos quadrados, construidos sobre os cathetos, é equivalente aos parallelogramos Aa'∝B e ABb'ɣ, que são iguaes aos parallelogramos AC∝B e CBbβ, também equivalentes aos dous rectangulos, em que a perpendicular Cd dividio o quadrado, construido sobre a hypotenusa. (Rebouças, 1867, pág. 16).

Observa-se que na Fig. 4 da Fig. 3 de seu artigo, que estão referidas neste texto pelas Figura 05 e Figura 04 respectivamente, além do triângulo retângulo, das projeções dos catetos e da hipotenusa, permaneceram o segmento de reta Cd, que se encontra perpendicular ao segmento de reta AB, que é a hipotenusa, passando por D, onde C é um dos vértices do triângulo retângulo que não aparece na Fig. 4, porém é mencionado. Foi suprimido o retângulo c'βcC, em que os seus lados faziam fronteira com a projeção do quadrado da hipotenusa do triângulo retângulo e o quadrado de seu menor cateto, bem como o segmento de reta Aa, Cβ e Bγ. Ainda, foi construído o segmento de reta a'α, paralelo ao segmento AB, ambos de mesma medida; o segmento de reta b'γ, paralelo ao segmento AB, de mesma medida; o segmento de reta aβ, paralelo a AC, que é o cateto menor, de mesma medida; bem como o segmento de reta bβ, paralelo ao segmento CB, que é o cateto maior, de mesma medida.

Abaixo, o leitor pode observar na Figura 07, o que permaneceu em preto, o que foi suprimido em laranja e o que foi construído em rosa, com os nomes dos pontos alterados para melhor análise que se segue:

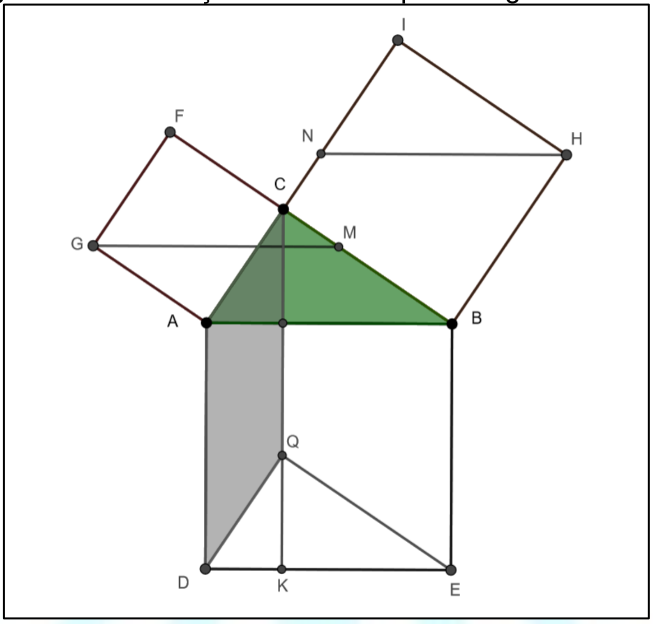
Figura 07 - Reprodução de que foi suprimido e acrescentado da demonstração de M. L. Sardou



Fonte: Autoria própria

O quadrado construído na Fig. 3 que permanece na Fig. 4, ACca^' a partir da projeção do cateto menor, é equivalente aos paralelogramos Aa’∝B e ACβa. Uma ressalva muito importante nesse momento que destaco é que ao observarmos o paralelogramo que Rebouças afirma ser igual a Aa’∝B, é incorretamente descrito como AC∝B em vez de ACβa. Os pontos A, B e C da Figura original, seguiram na adaptação deste trabalho, iguais. Já os pontos α, foi adaptado a M; β foi adaptado a Q e a foi adaptado a D. Assim, ACαB equivale a ACMB, o que deveria formar um paralelogramo pelas palavras de Rebouças. Quando na verdade, a equivalência que Rebouças está mostrando, de um paralelogramo com o outro, é que o paralelogramo ACβa, que na adaptação é ACQD é equivalente ao paralelogramo Aa’∝B, que adaptado é AGMB, que também equivale ao retângulo ALDK, fazendo sentido a afirmação “parallelogramos Aa’∝B e ABb’ɣ, que são iguaes aos parallelogramos AC∝B e CBbβ, também equivalentes aos dous rectangulos” (Rebouças, 1867) já citada acima. Na Figura 08 abaixo, podemos observar as descrições geométricas supracitadas, sendo ACMB de verde, o que foi descrito de forma incorreta formando o próprio triângulo retângulo e ACQD na cor cinza, sendo o paralelogramo esperado:

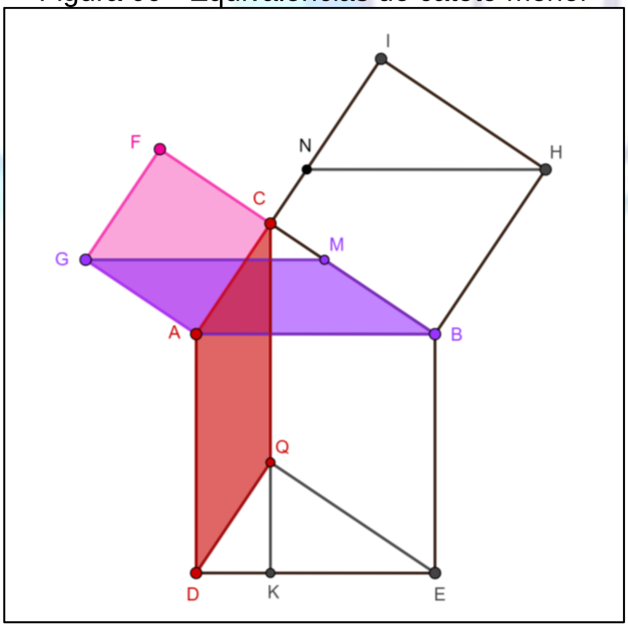
Figura 08 - Descrição incorreta e paralelogramo correto



Fonte: Autoria própria

Essa ressalva não altera sua demonstração bem como a importância da mesma, porém ao tentarmos identificar a Figura que se forma a partir do que foi descrito verificamos que não é um paralelogramo, portanto ao comparar a afirmação que Rebouças faz, juntamente a essa afirmando a equivalência de dois paralelogramos iguais ao quadrado projetado a partir do cateto maior, chegamos à conclusão de que, de fato o paralelogramo que ele se refere no momento é ACβa realmente. Como mostra a Figura 09 que se segue:

Figura 09 - Equivalências do cateto menor

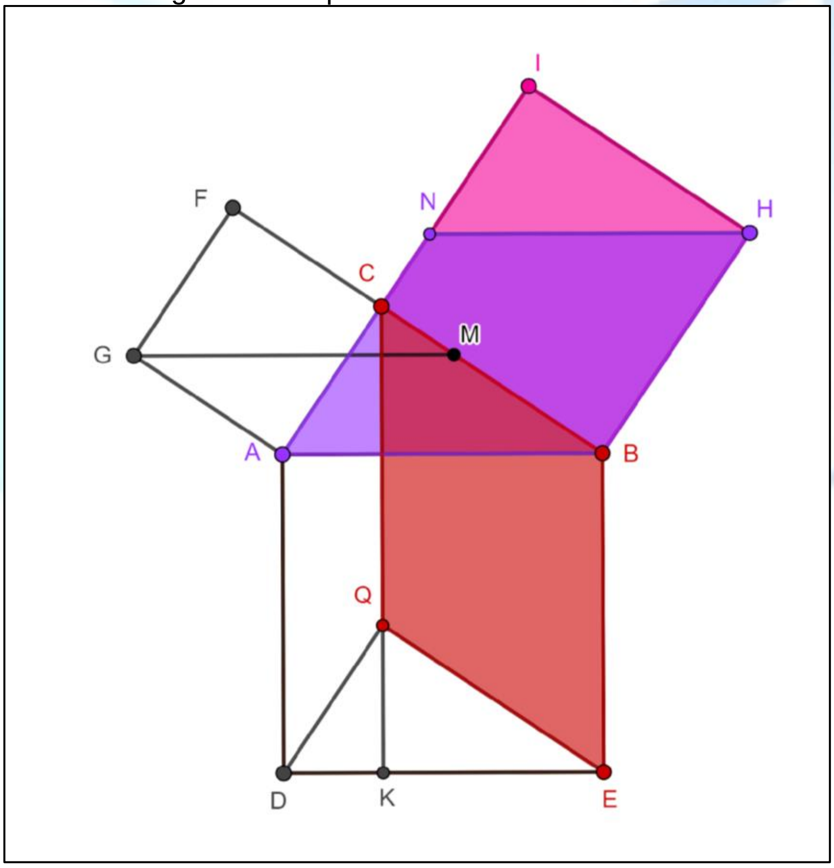


Fonte: Autoria própria

A partir da adaptação do nome dos pontos que adotamos desde a Figura 07, podemos afirmar que Rebouças queria dizer que o quadrado ACFG a partir da projeção do cateto menor equivalente ao paralelogramo ABMG, que por sua vez é de igual medida ao paralelogramo ACQD. Note que o segmento AC é de igual medida a qualquer um dos lados do quadrado projetado a partir do cateto menor, assim AC ≡ AG, que por sua vez é paralelo a MB que se encontra colinear a FC. Ainda, GM ≡ AB e AG ≡ BM, formando o paralelogramo de fato. Observa-se ainda que o segmento de reta DQ é paralelo ao segmento AC, levando em consideração que o ponto Q está localizado numa perpendicular a hipotenusa AB, segue que AC ≡ DQ. Como o segmento AD ≡ AB, já que são lados do mesmo quadrado e que GM foi construído paralelo a hipotenusa, assim como CQ foi construído perpendicular a mesma, localizada a uma distância do segmento DE a partir do traçado DQ, conclui-se que GM ≡ AB ≡ AD ≡ CQ, bem como AG ≡ BM ≡ DQ ≡ AC. Assim os paralelogramos são de mesma área, pois a congruência em seus lados nos garante isso.

De forma análoga, confira na Figura 10, onde temos paralelogramos de lados congruentes:

Figura 10 - Equivalências do cateto maior



Fonte: Autoria própria

A referência aos nomes dos pontos na Figura original, é que o quadrado $CBb'c'$ do cateto maior, é equivalente aos paralelogramos $ABb'\gamma$ e $CBb\beta$.

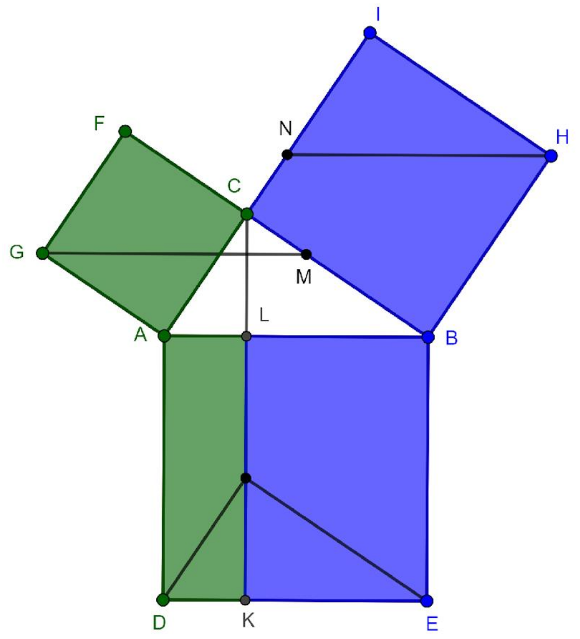
A equivalência dos paralelogramos como vimos anteriormente é garantida ao analisarmos a superfície do polígono e identificarmos congruência entre vários polígonos dois a dois, nada mais é do que comparar a área de uma figura com a área da outra, ou seja, sendo as duas áreas de igual valor as figuras são equivalentes entre si. Assim como chegamos as conclusões de congruências na Figura 09, na Figura 10 também temos que NH≡AB≡BE≡CQ e CB≡QE≡BH≡NA, sendo assim os dois paralelogramos lilás e vermelho de igual área. Quanto a equivalência dos quadrados rosa, tanto na Figura 09, quanto na Figura 10 aos paralelogramos, comparemos suas áreas pelas fórmulas.

A partir daí, observando a Figura 09, para assegurarmos que o quadrado projetado a partir do cateto menor, identificado pela cor rosa é equivalente aos paralelogramos vermelho e lilás, basta compararmos as suas áreas e verificarmos a igualdade. O que já é a afirmação do Teorema de Pitágoras em si, sendo a conclusão da demonstração aqui referida. De forma análoga na Figura 10, vamos comparar a área do quadrado a partir da projeção do cateto maior, ilustrado na cor rosa ao se comparar com os paralelogramos vermelho e lilás da referida Figura.

No que se refere ao quadrado rosa da Figura 09 (ACFG), projetado a partir do cateto menor, adotaremos como medida de lado b. A área de um quadrado (A_q) é lado vezes lado, ou seja $A_q = l^2$, assim, $A_q = b^2$, sendo o lado b. Já no cálculo da área dos paralelogramos (A_p), temos a fórmula que multiplica base e altura, assim, $A_p = b \cdot h$. A base do paralelogramo lilás (AGMB) é AG, que é igual ao lado b do quadrado menor. A base, e o lado oposto a ela, estão sobre as retas paralelas AG e CF, ou seja, a altura do paralelogramo lilás é igual a altura do quadrado rosa que é b, logo, $A_q = b^2 = A_p$. Na Figura 10 acontece da mesma forma, considerando BH como a base do paralelogramo lilás e CB como sua altura, ambos têm mesma medida, já que são lados do quadrado rosa (CBHI), o que faz as suas áreas serem iguais e ambos equivalentes entre si.

Observa-se ainda que $ACca'$, o cateto menor, é equivalente ao retângulo $ACda$ e que $CBb'c'$ o cateto maior, é equivalente ao retângulo DBb. Ao levarmos em consideração os novos nomes aos pontos, temos ACFG equivalente a ADKL, bem como BCIH equivale a BEKL, como bem representa a Figura 11:

Figura 11 - Equivalências dos catetos em relação aos retângulos



Fonte: Autoria própria

A equivalência se dá a partir da área do retângulo verde ser calculada a partir do produto entre a base e a altura. Como a base do retângulo verde é n e a altura é congruente a hipotenusa, a, temos que $A_R = n \cdot a \Rightarrow A_R = b^2$, o retângulo ADKL é equivalente ao quadrado ACFG, que também tem área b². O retângulo roxo tem base m e a altura a ou seja, $A_r = m \cdot a \rightarrow A_r = c^2$, sendo de igual medida a área do quadrado projetado a partir do cateto maior, já que o mesmo tem como medida de lado, c e a área do quadrado é o produto dos lados, resultando em $A_q = c^2$.

Dados as equivalências apresentadas, de fato o quadrado projetado a partir da hipotenusa, sendo o resultado da soma dos dois retângulos, verde e roxo, onde cada um tem sua área igual a b² e c², respectivamente, a soma dessa superfície resulta em $a^2 = b^2 + c^2$, o conhecido Teorema de Pitágoras.

Conclusão

Rebouças é uma das peças importantes nas discussões tangentes ao Teorema de Pitágoras, descrevendo sete demonstrações em seu trabalho, uma delas, a de M.L. Sardou, que serviu de inspiração para sua própria demonstração.

Nota-se a evolução da matemática ao ser modificada uma demonstração aos olhos de um brilhante amante da matemática, reinventando-a; de certa forma simplificando uma demonstração que serviu de base e inspiração para outra que se segue.

As explicações extensas que se tem a partir de pequenas frases de uma linguagem matemática escrita a tantos anos atrás, mostra como é rico o acervo que temos e que precisa ser explorado de modo a gerar mais conhecimentos a geração atual e futuras.

Resgatar trabalhos históricos como esse nos fazem valorizar mais a matemática em seus diferentes contextos e aplicações, até o Teorema de Pitágoras, sempre tão discutido, até mesmo na atualidade. A própria análise já colabora para o ensino/aprendizagem da matemática, contribuindo no campo da EM. Bem como nos motivam a continuar avançando, visando a evolução dos estudos na Educação Matemática.

Referências

BASTIAN, I. V. ***O Teorema de Pitágoras****.* 2000. 229 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000.

CHEVALLARD, Yves. ***La Transposition Didactique****:* Du Savoir Savant au Savoir Ensigné. Grenoble, La pensée Sauvage, 1991.

DA SILVA, A. C. H. ***Por uma socionomia oitocentista: pensamento, vida e ação de André Rebouças, século XIX****.* Revista da ABPN• v, v. 10, n. 25, p. 08-25, 2018

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. ***Fundamentos de matemática elementar, 9: geometria plana****.* 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

FONSECA, M. V.; BARROS, S. A. P. ***A história da educação dos negros no Brasil****.* Niterói: EdUFF, 2016.

LOOMIS, E.S. ***The pythagorean Proposition****.* Washington D.C.: National council of teachers of mathematics, 1940.

MATTOS, Hebe. ***André Rebouças e o Pós-abolição:*** entre a África e o Brasil (1888-1898). XXVII Simpósio Nacional de História, ANPUH, Natal, 2013.

REBOUÇAS, A.P. ***Sete Demonstrações do Quadrado da Hypothenusa****.* Revista do Instituto Polytechnico Brasileiro. Rio de Janeiro; ed. 2, 1867. p. 15-17.

DA SILVA REIS, Enoque; PAIS, Luiz Carlos. ***Fontes de pesquisa****:* um estudo sobre a Biblioteca Nacional Digital–BNDIGITAL. Perspectivas em Diálogo: Revista de Educação e Sociedade, v. 7, n. 15, p. 30-39, 2020.

SOARES, A. M. P. ***“O Negro André”: a questão racial na vida e no pensamento do abolicionista André Rebouças****.* Plural-Revista de Ciências Sociais/USP, v. 24, n. 1, 2017.

TEIXEIRA, M. A. G.; REIS, E. S.; SOUZA, M. S.; SOUZA, Q. R.; TRAVASSOS, M. F. G. ***Uma Releitura Da Demonstração Do Quadrado Da Hypothenusa Dada Pelo Dr. Augusto Telles****.* International Journal Of Development Research, v. 11, p. 47559- 47563, 2021.

TRINDADE, A. D. ***André Rebouças: da engenharia civil à engenharia social.*** 2004.

Submetido em: 03/11/2024

Aceito em: 19/12/2024