REVISTA DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL (UFMS)

ISSN 2359-2842 Volume 17, número 48 – 2024 DOI: 10.46312/pem.v17i48.22179

Processos de validação de um teorema geométrico presente em livros do Ensino Médio e seus equivalentes

Validation Processes of a Geometric Theorem in High School Textbooks and Their Equivalents

Marizete Nink de Carvalho [1]

Thiago Pedro Pinto[2]

RESUMO

Este estudo analisa os processos de validação de um teorema geométrico em livros didáticos de geometria voltados ao Ensino Médio e seus equivalentes ao longo de diferentes períodos históricos. A pesquisa, fundamentada na hermenêutica de profundidade e nos jogos de linguagem de Wittgenstein, examina como o modelo axiomático-dedutivo é apresentado e justificado em cinco livros de distintos contextos educacionais, abrangendo desde a Reforma Capanema até o impacto do Movimento da Matemática Moderna. Através de uma análise sócio-histórica e formal, o estudo identifica as transformações nos métodos de validação propostos, considerando os diferentes objetivos pedagógicos e ideologias educacionais de cada época. A pesquisa contribui para a compreensão de como o ensino de geometria tem sido moldado por diretrizes curriculares e perspectivas filosóficas, influenciando a construção do conhecimento matemático na educação básica.

PALAVRAS-CHAVE: Geometria. Jogos de Linguagem. Modelo Axiomático-Dedutivo.

ABSTRACT

This study examines the validation processes of a geometric theorem in high school geometry textbooks and their equivalents across different historical periods. Grounded in depth hermeneutics and Wittgenstein's language games, the research explores how the axiomatic-deductive model is presented and justified in five textbooks from diverse educational contexts, spanning from the Capanema Reform to the impact of the Modern Mathematics Movement. Through a socio-historical and formal analysis, the study identifies transformations in the proposed validation methods,

---

[1]Universidade Federal de Rondônia. E-mail: marizete@unir.br. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5324-0137 .

[2] Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. E-mail: thiago.pinto@ufms.br. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6414-7306 .

considering the varied pedagogical objectives and educational ideologies of each era. The research contributes to an understanding of how geometry instruction has been shaped by curricular guidelines and philosophical perspectives, influencing the construction of mathematical knowledge in basic education.
KEYWORDS: Geometry. Language Games. Axiomatic-Deductive Model.

Introdução

Este estudo é uma confluência de uma tese de doutorado (Carvalho, 2022) e um projeto interinstitucional de pesquisa em andamento aprovado no Edital Universal/CNPq de 2023. Na tese de doutoramento, praticamos uma terapia relacionada às transformações da educação matemática no Brasil, focando especialmente o ensino de geometria, na etapa que hoje corresponde ao Ensino Médio, e suas abordagens ao longo das reformas educacionais de 1931 a 2010 a partir de livros didáticos de cada época. Já o projeto procura examinar os processos de validação em geometria em diferentes contextos escolares e na formação de professores de Matemática (FPM) durante a segunda metade do século XX e o início do século XXI.

Segundo Greenberg (1994, p. 6-8), os conhecimentos geométricos ocidentais nem sempre seguiram o modelo axiomático-dedutivo. Na Antiguidade, o que se conhecia por geometria consistia em procedimentos práticos baseados na observação, na adivinhação, na intuição e na experimentação, como a geometria egípcia, que usava regras sem justificação. Na Grécia antiga, matemáticos como Thales de Mileto, Pitágoras e Euclides sistematizaram o conhecimento geométrico disponível à época, propondo que as proposições geométricas fossem entendidas pelo raciocínio dedutivo, em vez de tentativas e erros.

Esse modo de conhecimento baseado na “prova rigorosa” se assenta em duas teses distintas, a externalista e a internalista: de um lado, diretamente relacionada ao modo de conhecimento grego, baseada no debate argumentativo que regiam as pólis; de outro, os próprios problemas matemáticos podem ter gerado a necessidade da construção de demonstrações (Garnica, 2000, p. 57). Independentemente da tese adotada, no entanto, as influências desse modelo argumentativo são indeléveis tanto para a ciência ocidental, de modo mais geral, quanto, de modo mais específico, para o ensino de matemática (Imenes, 1989).

As discussões sobre como abordar esses tópicos e método na geometria podem ser encontradas em muitos momentos da história do ensino de matemática, seja no Brasil ou no mundo ocidental. A função desse modelo na educação básica ou no ensino superior também tem sido alvo de diversas investigações (Imenes, 1989; Pavanello, 1989; Usiskin, 1994; Duarte e Silva, 2006; Moreira, 2018).

Entre a tese de doutorado e o projeto em andamento, um interesse em comum: evidenciar diferentes modos que este modelo axiomático tomou espaço em livros didáticos de geometria ao longo do tempo no Brasil nas etapas finais da educação básica. Assim, abordaremos neste artigo um exercício analítico, a partir dos jogos de linguagem de Wittgenstein (1999), de um “mesmo” teorema de geometria espacial apresentado em 05 diferentes obras: Roxo et al. (1945), Quintella (1960), Rocha, Barbosa e Pierro Neto (1967), Iezzi et al. (1976b) e Dante (2005). Também nos inspiramos na Hermenêutica de profundidade de Thompson (1995) para olharmos para o contexto sócio-histórico de produção e circulação destas obras, assim como fizeram Oliveira (2008), Andrade (2012), Oliveira (2023) entre outros.

Dos Cursos Complementares ao Ensino Médio

O Ensino Secundário no Brasil sofreu várias mudanças ao longo do século XX. Um marco importante é a Reforma Francisco Campos, em 1931, que organizou o ensino em duas etapas: curso fundamental (5 anos) e curso complementar (2 anos), oferecido em três modalidades: Pré-Jurídico, Pré-Médico e Pré-Técnico. Embora o objetivo do Ensino Secundário fosse formar cidadãos ativos, o foco principal dos Cursos Complementares era preparar o aluno academicamente para o Ensino Superior.

Em 1942, a Reforma Capanema reorganizou o Ensino Secundário em dois ciclos: Ginasial (4 anos) e Clássico/Científico (3 anos). Em 1951, o ministro da Educação e Saúde Ernesto Simões Filho revisou os programas das disciplinas através das Portarias n. 966 e n. 1.045, criando a reforma “Programa Mínimo”. Essa revisão não alterou a estrutura, mas tornou os currículos mais exequíveis.

Até a primeira Lei de Diretrizes e Bases da Educação, em 1961, que manteve a divisão do Ensino Secundário em dois ciclos (ginasial e colegial), os programas escolares no Brasil eram unificados e centralizados pelo governo federal, garantindo um padrão nacional sem variações regionais. Com a LDBEN/61, essa estrutura se flexibilizou, permitindo a inclusão de conteúdos diversificados conforme as especificidades regionais.

Nos cursos complementares, a geometria era abordada apenas no curso Pré-Técnico, com foco em relações métricas, quadratura, cubatura e transformações geométricas, devido ao estudo extenso da geometria na fase anterior (curso

Fundamental). A partir de 1942, a geometria espacial foi incluída no 2º ciclo, nos cursos Clássico e Científico. Nesse período, as transformações geométricas eram abordadas de forma inconstante.

Quadro 1: Geometria nos programas do 2º ciclo (alunos de 15 a 17 anos)

Reformas	Organização da Geometria	Instruções / Orientações
Campos (de 1931)	Geometria plana e espacial (1ª série do curso Pré-Técnico) Transformações geométricas (1ª série do curso Pré-Técnico)	- Não constam orientações didático-metodológicas expressas na Portaria que expede os programas dos cursos Complementares do Ensino Secundário.
Capanema (de 1942)	Geometria espacial (1ª e 2ª séries dos cursos Clássico e Científico) Transformações geométricas (3ª série curso Científico)	- Não constam orientações didático-metodológicas na Portaria que expede os programas de matemática dos cursos Clássico e Científico no Ensino Secundário.
Simões Filho (de 1951)	Geometria espacial (1ª série dos cursos Clássico e Científico)	- Uso do método dedutivo, porém sem excessos quanto ao rigor e ao formalismo.

Fonte: (Leme da Silva; Jahn; Carvalho, 2024, no prelo)

Conforme o Quadro 1, apesar de nas duas primeiras reformas não haver indicações claras sobre como deveria ser conduzido o ensino da geometria, ao analisarmos as orientações para o 1º Ciclo do Ensino Secundário, é possível identificar indícios que sugerem a presença da geometria dedutiva no 2º Ciclo. Esses indícios apontam para uma continuidade e aprofundamento dos estudos geométricos.

> Assim, no 1º Ciclo estaria claramente posta a passagem da geometria intuitiva para a geometria dedutiva, e o 2º Ciclo se dedicaria a um estudo mais aprofundado dessa geometria dedutiva a partir dos conteúdos geométricos espaciais. No entanto, há a ressalva quanto aos excessos de rigor e de formalismo, procurando evitar as memorizações (Leme da Silva; Jahn; Carvalho, 2024, no prelo).

A descentralização promovida pela LDBEN/61, conforme Búrigo (2014, p. 27), facilitou a disseminação dos ideais do Movimento Matemática Moderna (MMM)[3]. Embora esses ideais não tivessem respaldo legal, começaram a ganhar força e aceitação significativa entre os professores. Essa aceitação é evidenciada pelos debates nos Congressos Nacionais de Educação e pela formação de grupos de professores em diversos estados brasileiros, destacando-se o GEEM - Grupo de

[3] O Movimento Matemática Moderna (MMM) foi um movimento educacional internacional que surgiu na segunda metade do século XX, com o objetivo de reformar o ensino da matemática. Ele enfatizou o uso de uma linguagem mais formal e abstrata, a adoção da teoria dos conjuntos e a estruturação dos conteúdos de forma lógica e dedutiva.

Estudo do Ensino de Matemática, fundado em 1961 em São Paulo, com um de seus principais líderes sendo o professor Osvaldo Sangiorgi.

No IV Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática, realizado de 22 a 28 de julho de 1962 em Belém/PA, o GEEM apresentou os conteúdos mínimos para um programa moderno de matemática para o Ginásio e o Colégio, além de orientações e sugestões para seu desenvolvimento. Ainda em 1962, essas propostas foram publicadas no livro *Matemática Moderna para o Ensino Secundário*.

O programa incluía conteúdos de geometria espacial e, nas sugestões para a exposição desses conteúdos, havia orientações para “desenvolver o assunto em encadeamento lógico, ressaltando as propriedades fundamentais e as demonstráveis, procurando destacar os diversos métodos de demonstração” (GEEM, 1965, p. 97). Além disso, reforçava-se a importância do uso da linguagem de conjuntos e o ensino de conteúdos de “transformações pontuais” (incluindo translação, rotação, simetria e homotetia), privilegiando, assim, o estudo da geometria dedutiva.

A LDBEN/71 trouxe mudanças significativas ao ambiente escolar, transformando o Ensino Primário e Secundário (cursos Ginasial e Colegial) em Ensino de 1º Grau (Primário e Ginasial) e 2º Grau (Colegial). Houve também uma preocupação com a apropriação de conhecimentos e habilidades para formar alunos que não seguiriam para a universidade, fornecendo-lhes um conjunto de conhecimentos que os tornariam aptos para funções e trabalhos específicos, facilitando sua inserção no mercado de trabalho.

A criação do Ensino Médio, como o conhecemos hoje, foi consolidada pela LDB/96, que trouxe mudanças profundas, definindo o Ensino Médio como uma etapa de formação geral, voltada não apenas para o mercado de trabalho, mas também preocupada com aspectos éticos, sociais e culturais.

As LDBs de 1971 e 1996 mantiveram a descentralização na organização dos currículos. Essa descentralização, aliada à falta de diretrizes nacionais uniformes, torna desafiadora a análise dos programas de Matemática no período pós Movimento da Matemática Moderna (MMM). Cada estado desenvolve seu currículo conforme suas necessidades e seus contextos específicos, o que dificulta a criação de uma base comum para avaliação e comparação.

Somente nos anos 2000, com a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) para o Ensino Médio, surgiu um documento nacional com orientações aos professores. No entanto, esses parâmetros não são obrigatórios e não têm a finalidade de padronizar o ensino em todo o país.

> Contudo, a Matemática no Ensino Médio não possui apenas o caráter formativo ou instrumental, mas também deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas. É importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas (Brasil, 2020, p. 40-41).

Isso nos indica a presença do modelo axiomático-dedutivo e dos processos de validações formais, no ensino da geometria no século XX e início do século XXI.

Livros analisados

Partindo do princípio de que as orientações normativas direcionam as produções didáticas[4], analisaremos um teorema em cinco livros didáticos do período de 1940 a 2010, todos destinados ao Ensino Médio ou a seus equivalentes anteriores. O objetivo norteador desse exercício será compreender que tipos de processos de validação são propostos nos distintos livros e quais movimentos na sala de aula esses processos podem mobilizar.

O primeiro livro (Livro 01) faz parte da coleção *Matemática 2º Ciclo* de Euclides Roxo, Roberto Peixoto, Haroldo Lisbôa da Cunha e Cesar Dacorso Netto. Composta por três volumes, cada um destinado a uma série dos Cursos Clássico e Científico, a coleção teve sua publicação a cargo da Editora Francisco Alves, do Rio de Janeiro, no início da década de 1940. Durante as duas décadas seguintes, a obra foi adaptada e reproduzida várias vezes, proporcionando longa vida à coleção. De certa forma, ela refletia o modelo e a didática dos materiais produzidos pelo Colégio Pedro II, servindo como referência no Ensino Secundário brasileiro.

Euclides Roxo era professor do Colégio Pedro II e participou ativamente da elaboração dos programas de reformas da educação de dois ministros: Campos (1931) e Capanema (1942). Roxo é considerado por muitos como o precursor dos educadores matemáticos brasileiros. Haroldo Lisbôa da Cunha, além de ser colega de Roxo no Colégio Pedro II, também foi catedrático da Universidade do Brasil (atual UFRJ), onde chegou à reitoria. Já Roberto Peixoto foi professor do Instituto de

[4] Podemos entender que as normativas modificam as regras dos jogos de linguagem escolares, introduzindo palavras, regras e excluindo outras. É notável como os PCN, por exemplo, introduzem palavras como "competências" e "habilidades" no espaço escolar, especialmente entre gestores e docentes.

Educação do Rio de Janeiro e autor de diversos livros para os Cursos Complementares. Cesar Dacorso Netto, além de lecionar no Instituto de Educação, também foi professor no Colégio São Bento (Valentim Júnior, 2013, p. 59).

Uma análise preliminar aponta que a geometria está contemplada nos três volumes da coleção, tendo em Euclides Roxo sua autoria. No primeiro volume, consta uma advertência quanto ao andamento da obra e às informações pertinentes aos alunos, da seguinte forma

> Com o presente volume, inicia-se a série MATEMÁTICA – 2º CICLO, destinada aos alunos dos Cursos científico e clássico. A matéria não ficou adstrita, entretanto, aos títulos e sub-títulos dos atuais programas. Procuraram os autores sugerir alguns complementos e aplicações, sem se afastar, contudo, dos assuntos dos programas e sem quebrar a harmonia do conjunto. (Roxo et al., 1945, p. 5)

O segundo livro (Livro 02) faz parte da coleção *Matemática para o Curso Colegial,* de Ary Quintella, também composta por três volumes, publicada pela Companhia Editora Nacional de São Paulo. Os conteúdos de geometria aparecem somente no primeiro volume e ocupam quase 2/3 do livro, sendo que o autor segue à risca as prescrições dos programas mínimos publicados em 1951.

O Professor Ary Norton de Murat Quintella, paulista, terminou o Ensino Secundário no Rio de Janeiro. Aluno do Colégio Pedro II e da Escola Militar, iniciou sua vida profissional no Colégio Militar do Rio de Janeiro. Mais tarde, lecionou no Instituto de Educação e foi colaborador na organização dos programas de Matemática para os cursos comercial básico e técnico, a convite do Ministro da Educação, além de ter atuado em numerosas comissões e bancas de concursos de professores de Matemática (Thiengo, 2001, p. 111-114 apud Valente, 2008, p. 154). Segundo Valente (2008, p. 154), tornou-se o autor de maior sucesso de vendas de livros didáticos para o Curso Colegial da Companhia Editora Nacional no período da Reforma Capanema.

O terceiro livro (Livro 03) faz parte da coleção *Matemática Curso Colegial Moderno*, publicada em 1967-1970 pelo IBEP – Instituto Brasileiro de Edições Pedagógicas. Os autores da coleção possuíam vasta experiência no ensino da matemática. Scipione Di Pierro Neto era professor titular de Matemática do Colégio de Aplicação da FFCL – Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da USP – Universidade de São Paulo, além de instrutor de Prática de Ensino da FFCL da USP e da FFCL de S. Bento da PUC – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo e professor do Colégio Rio Branco.

Luiz Mauro Rocha era professor de Cálculo Infinitesimal na FEI – Faculdade de Engenharia Industrial - e na FFCL da Fundação Santo André, além de instrutor de Cálculo Infinitesimal da Escola Politécnica da USP – Universidade de São Paulo e professor do Colégio Estadual de São Paulo.

Ruy Madsen Barbosa era doutor em Matemática pela Universidade Católica de Campinas e Livre-Docente de Matemática da FFCL de Araraquara, além de professor do ensino secundário oficial do Estado de São Paulo.

Na apresentação do primeiro volume, são expressas informações sobre a idealização da coleção

> Estabelecer um programa global para o colégio, visando a introdução paulatina dos conceitos modernos de funções, relações, matrizes, estruturas algébricas, etc., através de exemplos simples e de numerosos exercícios. Só no terceiro ano, reunindo a experiência adquirida, o aluno terá a formulação exata dos conceitos de grupo, anel, corpo, espaço vetorial, etc., cuja utilidade irá sentir logo no início do curso superior. (Rocha; Barbosa; Pierro Neto, 1967, p. 7-8)

O quarto livro (Livro 04) faz parte da coleção *Matemática - 2º Grau*, publicada pela Editora Atual, e conta com sete autores. Gelson Iezzi, valendo-se de sua experiência como professor de cursos pré-vestibulares, aventurou-se no ramo editorial no final da década de 1960. A *Matemática – 2º Grau* foi reeditada várias vezes e utilizada até a década de 1990 (Valentin Júnior, 2013, p. 97).

Gelson Iezzi, engenheiro metalúrgico pela Escola Politécnica da USP e licenciado em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatística da USP, é autor de diversos livros didáticos. Osvaldo Dolce, engenheiro civil pela Escola Politécnica da USP e licenciado em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatística da USP, também contribuiu com vários livros didáticos. Nilson José Machado, licenciado em Matemática e doutor em Filosofia da Educação pela USP, professor da USP e autor de outros livros, também integraram a equipe. Márcio Cintra Goulart, Luiz Roberto da Silveira Castro, José Carlos Teixeira e Antônio dos Santos Machado completam o grupo de autores renomados (Queiroz; Zuin, 2018, p. 59).

No prefácio do primeiro volume, os autores tecem algumas considerações sobre a coleção

> optamos por um tratamento onde a formalização, necessária, foi reduzida ao mínimo. No desenvolvimento de cada assunto, procuramos chegar aos conceitos fundamentais através dos exemplos, muitas vezes não matemáticos, tentando tornar as definições as mais naturais possíveis. Tivemos também a preocupação de apresentar sempre que possível, os vínculos da Matemática com outras ciências, notadamente a Física. A teoria apresenta-se em doses nunca muito grandes, seguidas de exercícios

> que devem ser considerados parte integrante do texto. Procuramos apresentar exercícios resolvidos e propostos compatíveis com a teoria dada e o objetivo visado. (Iezzi et al., 1976a)

O quinto livro (Livro 05) é o *Matemática,* de Luiz Roberto Dante, publicado em 2005 pela Editora Ática, consiste em um único volume. No início do século XXI, foi a obra mais adotada pelas escolas no PNLEM 2009.

Consta no catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio da disciplina Matemática que

> A obra, apresentada em volume único, destaca-se pela abordagem inovadora dada aos conteúdos normalmente estudados no ensino médio. Há constante preocupação de dispô-los segundo um encadeamento lógico que privilegia a integração harmônica entre seus tópicos, não os esgotando em único capítulo, mas retomando-os sob distintas perspectivas em outros capítulos. A obra, contudo, não trata de limites nem derivadas. Os conteúdos apresentados em cada capítulo são invariavelmente iniciados com uma situação-problema contextualizada por fatos cotidianos ou interdisciplinares. Em seguida, desenvolve-se sistematicamente a teoria necessária à análise daquela situação-problema, que é então aplicada para efetivamente fornecer a correspondente solução. [...] A articulação entre os conteúdos é levada a cabo de forma variada e permeia toda a obra. Nesse sentido, sobressaem-se a conexão entre os grandes campos temáticos, a comparação entre o conhecimento novo e o já abordado, a retomada de conceitos e procedimentos seguidos de aprofundamento e a valorização da interdisciplinaridade. (BRASIL, 2008, p. 56-57).

Inspirações Metodológicas

Como ler ou comparar textos matemáticos, ou textos didático-matemáticos? As pesquisas em Educação Matemática têm se apoiado em uma diversidade de referenciais teóricos: análise de conteúdo, análise do discurso, fenomenologia, hermenêutica de profundidade, entre outros. Nossa opção metodológica se dá na direção da filosofia madura de Ludwig Wittgenstein (1999) com seus jogos de linguagem e formas de vida. Tal abordagem não é recente na Educação Matemática, figurando em pesquisas desde meados dos anos 2000 (Julio, 2007; Vilela, 2007; Gottschalk, 2008; Pinto, 2009). Cada metodologia arrolada em uma pesquisa científica traz consigo uma diversidade de pressupostos teóricos e éticos (Pinto, 2023) que, muitas vezes, não só não estão declarados como também podem ser ocultos aos pesquisadores que adotam tais metodologias.

Nossas confluências com o pensamento do filósofo austríaco se dão também em função de alguns pressupostos, mais do que seu modo de operar filosoficamente. Seu pensamento de segunda fase aposta frontalmente em um modo de conceber a linguagem a partir dos jogos de linguagem, ancorados em formas de vida. Cada uma delas não serve de lastro ou fundamentação para a outra, mesmo que possua íntimas relações e semelhanças, como as de família. Em outras palavras, aquilo que conhecemos por matemática, ou mais especificamente por geometria, pode ser tomado como uma coleção de jogos de linguagem diversos, cada qual com suas regras e que possuem certa autonomia em comparação aos outros. Trazendo para um exemplo prático, as regras que regem o jogo de linguagem da Análise, quando se fala de "reta", são diferentes das regras que regem o jogo de linguagem da Geometria Euclidiana Plana ao falar de "reta". Tal enunciação movimenta corpos em falas e escritas diferentes. Tal posicionamento nos afasta, por exemplo, de uma visão platônica da matemática na qual haveria, em um mundo ideal e para além de nossa percepção, uma entidade chamada por nós de "reta" que pode ser parcialmente acessada ou comunicada de diversas formas diferentes, numa linguagem que é, sempre, imperfeita - pois não dá conta desta idealidade imaterial.

Assim, inspiramo-nos nos jogos de linguagem para olhar o referido teorema e as suas justificações não pelo prisma de um conhecimento matemático platônico, em que um "mesmo" conhecimento pode se dar de formas e comunicações diferentes, mas, de uma perspectiva em que cada detalhe da fala, em nosso caso da escrita, pode movimentar diferentemente os corpos que participam daquele jogo de linguagem, convidando-os a performances específicas.

Ao abordarmos textos, em vez de práticas dinâmicas e repletas de pessoas, como pudemos fazer em Pinto (2009), enfrentamos alguns entraves e desafios que nos levaram à seguinte perspectiva, em que, a partir da leitura do texto, somos convidados a um exercício imaginativo sobre como esse texto movimenta uma sala de aula. Não se trata, contudo, de analisar os movimentos que esse livro produziu em uma sala de aula, não temos acesso a isso, mas sim, de analisar, nesse livro, seus textos, suas cores e suas formas, indícios desses movimentos ali propostos. Toda análise se trata de uma leitura, uma leitura plausível, compartilhada e legitimada pelos pares e apoiada em uma (ou mais) metodologia(s). Nesse sentido, não estamos propondo aqui um desvelar do passado, mas uma leitura positiva (Lins, 1999) desses textos que compõe, garantidamente, uma história do ensino de matemática, por uma ótica bastante específica, a dos jogos de linguagem de Wittgenstein.

Além dessa abordagem, também nos inspiramos nos escritos de Thompson (1995) em *Ideologia e Cultura moderna: Teoria social crítica na era dos meios de* *comunicação de massa* ao nos apresentar uma sistematização de modos de analisar/interpretar uma forma simbólica. A Hermenêutica de Profundidade (HP), assim nomeada por ele, se coloca como um referencial metodológico que pode e deve ser complementado por outros métodos de análise. O que nos é caro de seus apontamentos é a necessidade de um olhar “para dentro” e “para fora” da forma simbólica, ou seja, uma análise sócio-histórica e uma análise formal ou discursiva, nos coibindo de uma análise que não leve em conta o contexto de produção e circulação da obra. Assim, para interpretarmos os livros em voga, precisamos, também, traçar compreensões sobre as etapas e legislações que regiam sua produção, como fizemos mais exaustivamente em Carvalho (2022). Salientamos que esse uso da HP na Educação Matemática tem origem em trabalhos como Oliveira (2008) e Andrade (2012).

O teorema sobre Planos Paralelos

A seguir, comparamos os processos de apresentação e de validação do teorema sobre Planos Paralelos nos cinco livros descritos na seção 3, a fim de identificar as semelhanças e diferenças nos jogos de linguagens praticados pelos autores, bem como os movimentos que estes poderiam mobilizar na sala de aula.

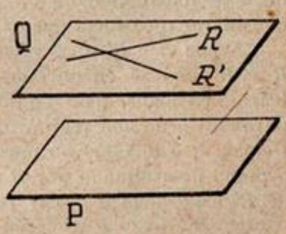
> [...] ao estabelecer essa analogia entre diversas características no interior de um jogo de linguagem ou entre vários jogos, o autor [LW] [...] não está propriamente buscando a identidade, a igualdade de um jogo para outro, mas a diferença que, apesar de existir, ainda permite compreender aquela atividade como um jogo de linguagem no interior do qual os usos das palavras estabelecem as significações”. Em outros termos, ainda que uma semelhança de família possibilite analogias, ela também permite perceber as diferenças. E é dentro desse jogo de semelhanças e diferenças que nos situamos, estabelecendo nossa racionalidade.” (Miguel; Vianna; Corrêa, 2020, p. 67)

Figura 1: Planos paralelos Livro 01

19 — Planos paralelos. *Para que dois planos sejam paralelos, é necessário e suficiente que um deles contenha duas retas concorrentes paralelas ao outro.*

1º A condição é suficiente. *Duas retas concorrentes R e R', paralelas a um plano P, determinam um segundo plano paralelo a P.*

Com efeito, se os dois planos se encontrassem, a intersecção deles cortaria ao menos uma das retas *R* e *R'*, a qual encontraria o plano *P* contrariamente à hipótese.



2º A condição é necessária. *Se dois planos P e R são paralelos, toda reta R do segundo é paralela ao primeiro.* Com efeito, o plano *P* não poderia encontrar a reta *R* sem encontrar o plano *Q*, contrariamente à hipótese.

Fonte: (Roxo et al., 1945, p. 273-274)

Figura 2: Planos paralelos Livro 02

9. Planos paralelos.

PRIMEIRO TEOREMA. A condição necessária e suficiente de paralelismo de dois planos é que um dêles contenha duas retas concorrentes, paralelas ao outro.

Demonstração: $H: MA$ e $MB \parallel P$. Tese: $Q \parallel P$.

a) *A condição é suficiente.* Com efeito, se o plano Q (fig. 13) cortasse P, a intersecção cortaria uma das retas MA e MB, em virtude do postulado de Euclides, o que contraria a hipótese das duas retas serem paralelas a P.

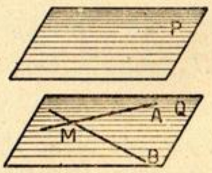


FIG. 13

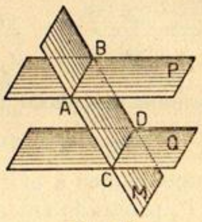


FIG. 14

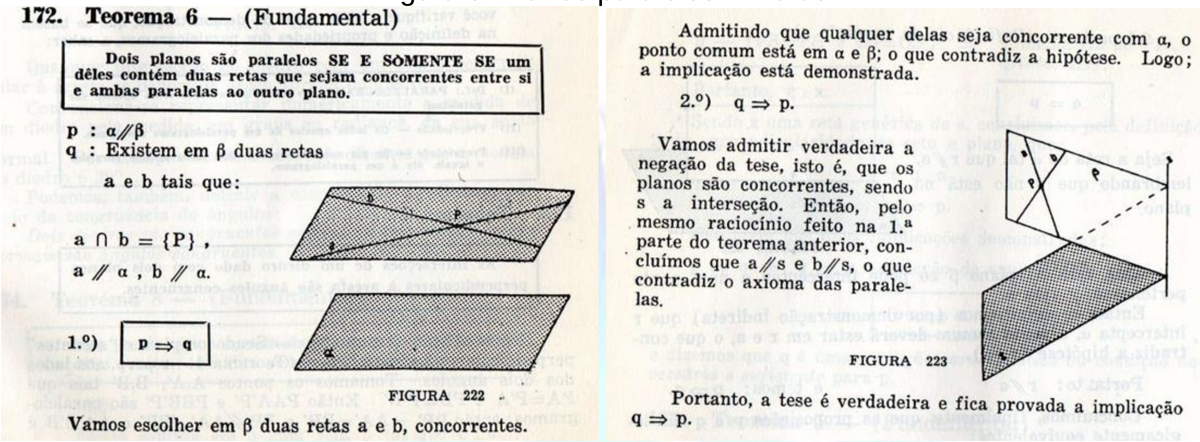
b) *A condição é necessária.* Realmente, se P e Q são planos paralelos (fig. 13), qualquer reta contida num dêles é paralela ao outro, pois, se P tivesse um ponto comum com MA ou MB teria também com o plano Q, o que seria contra a hipótese. Assim, os dois planos não podem ser paralelos sem que um seja paralelo às retas do outro, e a *condição é necessária.*

Fonte: (Quintella, 1960, p. 109)

Nos livros 01 e 02, os autores dividem a demonstração do teorema em duas partes: condição suficiente e condição necessária. No geral, as duas demonstrações possuem muitas semelhanças, no entanto, diferentemente do Livro 01, os autores do Livro 02 mencionam o postulado de Euclides como um dos argumentos para provar a veracidade da condição suficiente.

Nota-se que os autores desses dois livros, nos jogos de linguagem ali praticados, não trazem nenhuma indicação de diálogo com o aluno ou professor. Assume um tom bastante impessoal, aproximando-nos de uma geometria "dada" *a* *priori*, a qual, pelo livro, se acessa[5]. O que essa abordagem poderia indicar como ação para um aluno? Seria ele convidado a participar do exercício argumentativo, a duvidar da afirmativa para depois da prova creditá-la? Seria convidado a reproduzi-la ou apenas a memorizá-la?

Figura 3: Planos paralelos Livro 03



172. Teorema 6 — (Fundamental)

Dois planos são paralelos SE E SÒMENTE SE um dêles contém duas retas que sejam concorrentes entre si e ambas paralelas ao outro plano.

p : $\alpha /\!/ \beta$

q : Existem em β duas retas a e b tais que:

$a \cap b = \{P\}$, $a /\!/ \alpha$, $b /\!/ \alpha$.

1.º) $\boxed{p \Rightarrow q}$

FIGURA 222

Vamos escolher em β duas retas a e b, concorrentes.

Admitindo que qualquer delas seja concorrente com α, o ponto comum está em α e β; o que contradiz a hipótese. Logo; a implicação está demonstrada.

2.º) $q \Rightarrow p$.

Vamos admitir verdadeira a negação da tese, isto é, que os planos são concorrentes, sendo s a interseção. Então, pelo mesmo raciocínio feito na 1.ª parte do teorema anterior, concluímos que $a /\!/ s$ e $b /\!/ s$, o que contradiz o axioma das paralelas.

FIGURA 223

Portanto, a tese é verdadeira e fica provada a implicação $q \Rightarrow p$.

Fonte: (Rocha; Barbosa; Pierro Neto, 1967, p. 241-242)

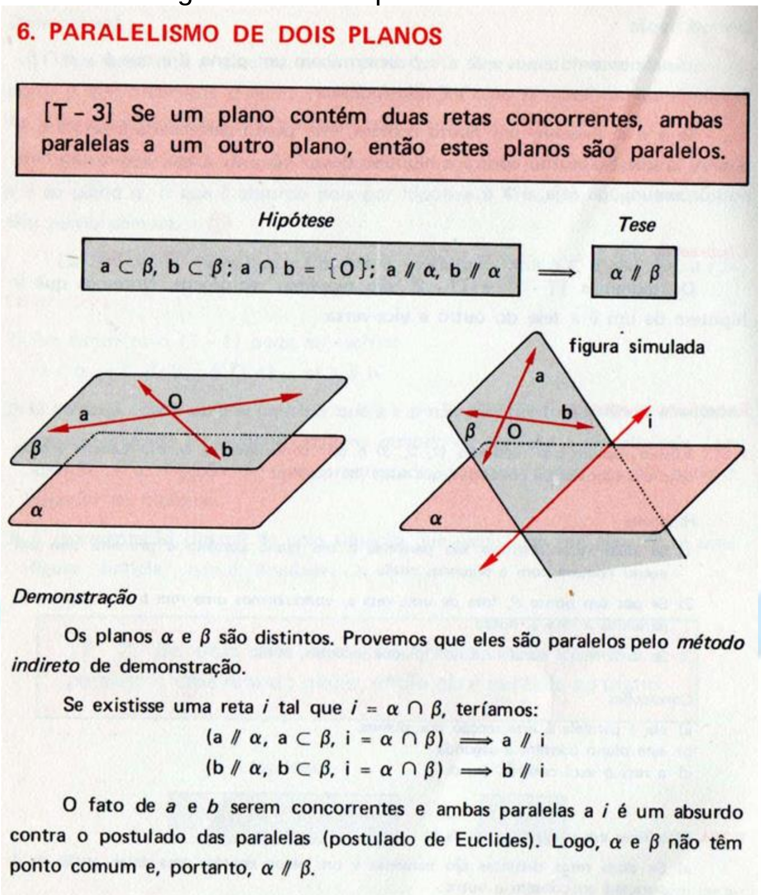
No Livro 03, notam-se diferenças significativas em relação aos dois primeiros livros. O autor enuncia o teorema usando a expressão "se, e somente se", indicando que a afirmação é verdadeira quando as condições (necessária e suficiente) são satisfeitas. A demonstração destaca-se pelo uso marcante de linguagem simbólica, além de relacionar retas a conjuntos, e pontos a elementos desses conjuntos. Essas mudanças refletem os ideais do Movimento Matemática Moderna (MMM). Também destacamos que aqui aparece a expressão "vamos admitir verdadeira a negação da tese" mostrando ao seu leitor um pouco da "estratégia" de demonstração empregada, nos anteriores, no entanto, se utilizava a mesma "estratégia" sem explicitar o seu uso.

No Livro 04, também são notadas diferenças significativas em relação aos anteriores. O autor enuncia o teorema usando a estrutura "se... então", ou seja, na forma de implicação. Nesse formato, uma condição leva necessariamente a um resultado, e, portanto, a demonstração não é dividida em duas partes como nas anteriores. Por que a outra parte do teorema não foi apresentada? Seria ela desnecessária? Essa implicação é equivalente às demais formas de apresentar o

[5] Pesquisas como de Oliveira (2022) nos mostram como essa perspectiva se fazia presente em livros didáticos antigos, especialmente do século XIX. No caso, Oliveira analisa um livro de geometria utilizado no Seminário Episcopal de São Paulo, sua estrutura textual, no entanto, se apresenta como um compêndio de informações, demonstrações, provas e algumas figuras sem que haja maiores discussões ou indicações sobre os fazeres.

teorema? Além disso, percebe-se ainda a influência do MMM na simbologia e na linguagem de conjuntos.

Figura 4: Planos paralelos Livro 04



6. PARALELISMO DE DOIS PLANOS

[T - 3] Se um plano contém duas retas concorrentes, ambas paralelas a um outro plano, então estes planos são paralelos.

Hipótese: $a \subset \beta,\ b \subset \beta;\ a \cap b = \{O\};\ a \,/\!/\, \alpha,\ b \,/\!/\, \alpha$ $\Longrightarrow$ *Tese*: $\alpha \,/\!/\, \beta$

Demonstração

Os planos α e β são distintos. Provemos que eles são paralelos pelo *método indireto* de demonstração.

Se existisse uma reta i tal que $i = \alpha \cap \beta$, teríamos:

$$(a \,/\!/\, \alpha,\ a \subset \beta,\ i = \alpha \cap \beta) \Longrightarrow a \,/\!/\, i$$
$$(b \,/\!/\, \alpha,\ b \subset \beta,\ i = \alpha \cap \beta) \Longrightarrow b \,/\!/\, i$$

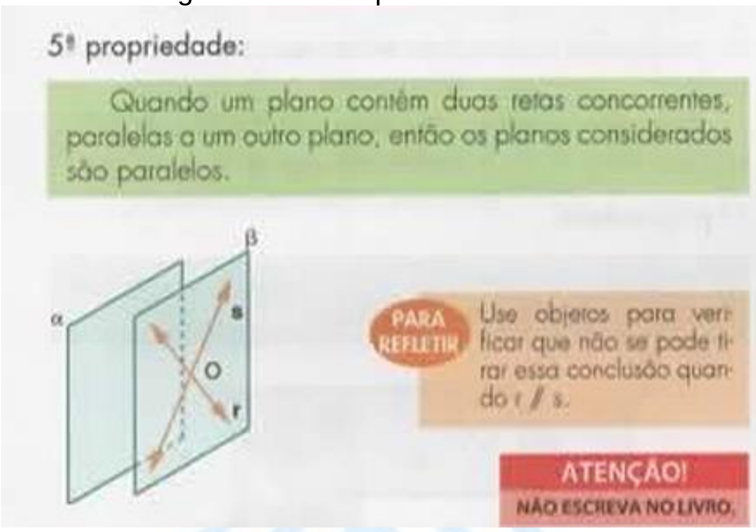
O fato de a e b serem concorrentes e ambas paralelas a i é um absurdo contra o postulado das paralelas (postulado de Euclides). Logo, α e β não têm ponto comum e, portanto, $\alpha \,/\!/\, \beta$.

Fonte: (Iezzi et al., 1976b, p. 230)

Os autores dos livros 03 e 04, ao conjugar os verbos nas argumentações, fazem-no em concordância com a primeira pessoa do plural "nós". "Provemos" seria um convite para o aluno acompanhar a argumentação ou participar dela? Ou seria reproduzi-la? Novamente aqui se enuncia o postulado das paralelas (postulado de Euclides) sem maiores explicações.

No Livro 05, semelhantemente à maioria dos teoremas apresentados pelo autor, não há uma demonstração formal ou qualquer processo de validação textual. Em vez disso, uma imagem é apresentada para ilustrar o teorema.

Figura 5: Planos paralelos Livro 05



Fonte: (DANTE, 2005, p. 350)

O fato de usar apenas uma ilustração seria um convite para o aluno usar a imaginação? Constatar visualmente a propriedade ali proposta? Instigá-lo a buscar argumentos que justifiquem aquele resultado? Usar objetos físicos para levá-lo a intuir a propriedade? Nota-se que, neste e em vários outros teoremas apresentados pelo autor, há um convite para o aluno usar objetos para verificar a veracidade da proposição.

Entre paralelas e pontos de interseção

Nosso movimento terapêutico nos colocou frente a cinco diferentes livros de cinco diferentes épocas da educação nacional, com diferenças substanciais no que se refere aos últimos anos da escolarização básica. Com uma breve inspiração na hermenêutica de profundidade (Thompson, 1995), realizamos um movimento de análise sócio-histórico que evidencia não uma ruptura total entre os períodos estabelecidos pelas reformas educacionais que impactaram o Ensino Médio e seus antecessores, mas sim, transformações e permanências.

Já com um pequeno recorte de uma análise formal ou interna, fixados em um "mesmo" teorema da geometria espacial, apoiados nos *jogos de linguagem* de Wittgenstein, foi possível mostrar como a linguagem vai se modificando nos livros, como há, junto ao Movimento Matemática Moderna, a introdução (e permanência) da linguagem da Teoria de Conjuntos e, ao mesmo tempo, alguns pequenos movimentos que dão dinamicidade ao conhecimento matemático, seja na conjugação dos verbos, seja na explicitação da "técnica" de demonstração utilizada. Por outro lado, no livro mais atual, a dinâmica e a apresentação textual da questão mudam radicalmente.

É importante salientar que cada um dos livros não representa uma época, como se algum material tivesse tal possiblidade em alguma circunstância, no entanto, cada um deles é, também, produto de uma época e de um determinado autor. Uma época que permitiu que determinado livro fosse assim produzido, publicado por uma editora e ganhasse circulação nacional. O autor, por sua vez, mesmo tendo que se adequar à legislação vigente e aos movimentos pedagógicos em voga, também manifesta suas preferências e seu modo de pensar a matemática e, sobretudo, a sala de aula de matemática. Além desses aspectos, também manifesta o papel que seu livro deveria desempenhar em uma aula de Matemática. Se temos, de um lado, livros didáticos semelhantes às enciclopédias, que apresentam um conhecimento independente de sua produção ou contexto, temos, de outro, materiais que pretendem nortear as ações de alunos e de professores em sala de aula, servindo como um guia ou até mesmo um gestor da sala de aula. Os diferentes contextos sócio-históricos nos alertam para um não julgamento destas ações, direcionando-nos para um movimento de compreensão (leitura positiva) dessas mudanças: são diferentes finalidades, diferentes escolas, diferentes professores e diferentes alunos.

Além desses pontos, não podemos deixar de evidenciar uma grande diferença quanto aos processos de validação apresentados por essas obras: de formais e rigorosas (e prescritivas) para uma abordagem menos formal, adotando definições mais naturais (e convidativas). Por fim, chegamos a validações que são intuitivas e experimentais.

Aparentemente, os processos de validação por provas formais têm se tornado cada vez menos frequentes nos livros didáticos ao longo dos anos. Tal movimento nos leva a questionar qual o papel atual desse tipo de validação na educação básica (e poderíamos estender a questão para o ensino superior e para a formação de professores de Matemática) e por quais outros meios, ou por quais outros conhecimentos, habilidades ou competências, esse tipo de validação vem sendo substituído. Esse movimento seria um reflexo das demandas sociais e econômicas da nossa sociedade? Seriam reflexos das orientações metodológicas presentes nos documentos oficiais atuais? Será que o ensino da matemática está passando por um movimento contrário àquele proposto pelos antigos gregos (Thales, Pitágoras, Euclides...) de formal e rigoroso para prático e intuitivo? Se sim, poderíamos conjecturar as razões para essa mudança? Talvez em duas teses: a internalista e a externalista, como ressaltou Garnica (2000)? Poderíamos considerar que as grandes dificuldades enfrentadas pelo ensino da matemática no país, conforme aponta Imenes (1989, p. 298), são decorrentes do modelo formal euclidiano de apresentação da matemática? Ou será que a sociedade moderna tende a valorizar mais o conhecimento matemático prático, aquele que pode ser aplicado diretamente para resolver problemas do dia a dia e em contextos profissionais? Refletir sobre essas mudanças nos permite entender como o ensino da geometria tem sido moldado e como ele influencia a construção do conhecimento matemático. Sobretudo, manifesta-nos como são diferentes os jogos de linguagem propostos para a sala de aula, como podemos ver nesses cinco casos. De modo terapêutico, como aponta Wittgenstein (1999), os equívocos se dão quando não tentamos compreender a multiplicidade de jogos de linguagem, mas, sim, quando tentamos fundamentar um uso por outro jogo, distante daquele. Encontramo-nos frente a cinco diferentes jogos, cada um com semelhanças de família com o outro, suas mudanças manifestam também mudanças nas formas de vida. Essa análise produzida aqui nos ajuda a ver, então, modificações ocorridas nesse processo e pode subsidiar novas compreensões sobre a matemática escolar sem um julgamento de um jogo sobre o outro, sem uma hierarquização de processos, sem um sentimento nostálgico muito perigoso na pesquisa historiográfica e muito presente nas discussões educacionais.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio do CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – Brasil. Processo: 405027/2023-0.

Referências

ANDRADE, Mirian Maria. ***Ensaios sobre o ensino em geral e o de matemática em particular, de Lacroix: análise de uma forma simbólica à luz do referencial metodológico da hermenêutica de profundidade***. 2012. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2012.

BÚRIGO, Elisabete Zardo. A Matemática Escolar nos Tempos da Ditadura Militar: modernização imposta ou consentida? *In:* ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2., 2014. ***Anais*** [..]. Bauru: Faculdade de Ciências, 2014. p. 172-184.

BRASIL. ***Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio***. Brasília: MEC, 2000.

BRASIL. ***Matemática: catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio***: PNLEM/2009. Brasília: MEC, 2008.

CARVALHO, Marizete Nink de. ***Geometria dos cursos complementares ao ensino médio:*** entre livros, programas, reformas e monstros – uma terapia. 2022.

Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, Brasil, 2022. Disponível em: https://repositorio.ufms.br/handle/123456789/4959 . Acesso em: 19 dez. 2024.

DANTE, Luiz Roberto***. Matemática***. 1ª. ed. São Paulo: Ática, v. Único, 2005.

DUARTE, Aparecida Rodrigues Silva; SILVA, Maria Célia Leme da. Abaixo Euclides e Acima Quem? Uma análise do ensino de Geometria nas teses e dissertações sobre o Movimento Matemática Moderna**. *Práxis Educativa***, Ponta Grossa, v. 1, n. 1, p. 87-93, jan-jun 2006.

GARNICA, Antonio Vicente Marafioti. É necessário ser preciso? É preciso ser exato? In: CURY, Helena N. (org.) ***Formação de professores de matemática***: uma. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2000. p. 49-87.

GEEM***. Matemática Moderna para o Ensino Secundário***. 2ª. ed. São Paulo: LPM, v. Série Professor n. 1, 1965.

GOTTSCHALK, Cristiane Maria Cornelia. A Construção e Transmissão do Conhecimento Matemático sob uma Perspectiva Wittgensteiniana. ***Cadernos Cedes***, Campinas, vol. 28, n. 74, p. 75-96, jan./abr. 2008.

GREENBERG, Marvin Jay. ***Euclidean and non-Euclidean geometries***: development and history. 3ª. ed. New York: W. H. Freeman and Company, 1994.

IEZZI, Gelson et al. ***Matemática: 1ª Série, 2º Grau***. 4ª rev. ed. São Paulo: Atual, v. 1, 1976a.

IEZZI, Gelson et al. ***Matemática: 2ª Série, 2º Grau***. 4ª rev. ed. São Paulo: Atual, v. 2, 1976b.

IMENES, Luiz Márcio Pereira***. Um Estudo sobre o Fracasso do Ensino e da Aprendizagem da Matemática***. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista. São Paulo. 1989.

JULIO, Rejane Siqueira. ***Uma leitura da produção de significados matemáticos e não matemáticos para "dimensão"***. Dissertação de mestrado. Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, São Paulo, 2007.

LEME DA SILVA, Maria Célia; JAHN, Ana Paula; CARVALHO, Marizete Nink de. ***Processos de Validação em contextos de geometria: Histórias e articulações com a formação de professores***, 2024, no prelo.

LINS, Romulo Campos. Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a Educação Matemática. In: Bicudo, M. A. V. (org). ***Pesquisa em Educação Matemática:*** concepções e perspectivas. São Paulo: Editora da UNESP, 1999. p. 37-60.

MIGUEL, Antonio; VIANNA, Carlos Roberto; CORRÊA, Júlio Faria. Uma apresentação panorâmica da fisiognomia de uma historiografia terapêutica. In: MIGUEL, Antonio; VIANNA, Carlos Roberto; CORRÊA, Júlio Faria. ***Uma historiografia terapêutica de acasos***. Uberlândia: Navegando Publicações, 2020. p. 15-106.

MOREIRA, Person G. S. ***Jogos de Linguagem e Geometria Euclidiana Plana:*** Um Olhar Terapêutico Wittgensteiniano para dois Manuais Didáticos usados em Cursos de Licenciatura em Matemática. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Campo Grande. 2018.

OLIVEIRA, Ewerton Echeverria de. ***Praticando um exercício de hermenêutica de profundidade no livro elementos de geometria plana "compilados" do Padre Alberto José Gonçalves (1885).*** 2023. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Campo Grande, 2023. Disponível em: https://repositorio.ufms.br/handle/123456789/5818. Acesso em: 30/10/2024.

OLIVEIRA, Fábio Donizeti de. ***Análise de textos didáticos***: três estudos. 2008. 222 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2008. Disponível em: http://hdl.handle.net/11449/91113. Acesso em: 30/10/2024.

PAVANELLO, Regina Maria. ***O abandono do ensino de geometria no Brasil***: uma visão histórica. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas. Campinas. 1989.

PINTO, Thiago Pedro. ***Linguagem e Educação Matemática: UM mapeamento de usos na sala de aula***. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista. Rio Claro. 2009. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/bitstream/11449/91078/1/pinto_tp_me_rcla.pdf. Acesso em: 19 dez. 2024.

PINTO, Thiago Pedro. Pressupostos Éticos de Pesquisas em Educação Matemática: um ensaio. ***REMat – Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática***, São Paulo, v. 20, Edição Especial, p. 1-19, 2023. Disponível em: http://www.revistasbemsp.com.br/index.php/REMat-SP/article/download/13/13. Acesso em: 19 dez. 2024.

QUEIROZ, Rogéria Teixeira Urzêdo; ZUIN, Elenice de Souza Lodron. ***Equação/Função Exponencial em Livros Didáticos de 1930 a 1980: apontamentos para formação inicial e continuada de professores de Matemática e áreas afins***. Belo Horizonte: PUC-MINAS, 2018.

QUINTELLA, Ary. ***Matemática para o primeiro ano colegial***. 10ª. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, v. 1, 1960.

ROCHA, Luiz Mauro; BARBOSA, Ruy Madsen; PIERRO NETO, Scipione Di. ***Matemática Curso Colegial Moderno***. São Paulo: IBEP, v. 1, 1967.

ROXO, Euclides et al***. Matemática 2º Ciclo - 1ª Série***. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, v. 1, 1945.

THOMPSON, Jhon. B***. Ideologia e cultura moderna:*** teoria social crítica na era dos meios de comunicação de massa. Petrópolis: Vozes, 1995.

USISKIN, Zalman. Resolvendo os Dilemas Permanentes da Geometria Escolar. In: LINDQUIST, Mary Montgomery; SHULTE, Albert P. (orgs.) ***Aprendendo e Ensinando Geometria***. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994. cap. 2, p. 21-39.

VALENTE, Wagner Rodrigues. Livro Didático e Educação Matemática: uma História Inseparável. ***Zetetiké***, São Paulo, v. 16, n. 30, p. 149-171, jul-dez 2008.

VALENTIM JÚNIOR, Josélio Lopes***. A Geometria Analítica como Conteúdo do Ensino Secundário:*** análise de livros didáticos entre a Reforma Capanema e o MMM. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Universidade Federal de Juiz de Fora. Juiz de Fora. 2013.

VILELA, Denise Silva***. Matemáticas nos usos e jogos de linguagem:*** ampliando concepções na Educação Matemática. 2007. Tese Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, 2007.

WITTGENSTEIN, Ludwig. ***Investigações Filosóficas***. Tradução de José Carlos Bruni. São Paulo: Nova Cultural, 1999.

Submetido em: novembro de 2024.

Aceito em: dezembro de 2024.