PERSPECTIVAS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

REVISTA DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL (UFMS)

ISSN 2359-2842 Volume 19, número 53 – 2026 DOI: https://doi.org/10.46312/wbnknn22

# Explorando o Raciocínio Criativo e suas implicações na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral

# Exploring Creative Reasoning and its implications for the subject of Differential and Integral Calculus

*Leandra Letícia de Lima* [1]

*André Luis Trevisan* [2]

*Rodolfo Eduardo Vertuan* [3]

## RESUMO

Este artigo investiga o raciocínio criativo (RC) em contextos educacionais, com foco na aplicação prática em Cálculo Diferencial e Integral (CDI) em ambientes acadêmicos universitários. Utilizando um referencial teórico que concebe o raciocínio criativo como distinto do raciocínio imitativo, analisamos como os estudantes aplicam e adaptam conhecimentos matemáticos para fomentar um ambiente de aprendizagem que estimula o pensamento inovador e flexível. A análise indicou indícios de manifestação dos critérios de raciocínio criativo: a flexibilidade apareceu nas diversas estratégias para resolver as tarefas, a plausibilidade na validação e aplicação das estratégias, e a novidade na especulação sobre integrais múltiplas antes de sua formalização. As Diretrizes Curriculares Nacionais para Engenharia destacam a importância de formar profissionais criativos e flexíveis, sugerindo que o ensino de CDI deve incluir estratégias que promovam essas competências. O estudo aponta que, ao estimular o RC, a formação acadêmica pode contribuir para uma formação matemática mais articulada às demandas formativas contemporâneas.

[1] Instituição: Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Contato: leandraleticiadelima@gmail.com. Orcid : https://orcid.org/0000-0001-6641-5581

[2] Instituição: Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Contato: andreluistrevisan@gmail.com . Orcid: https://orcid.org/0000-0001-8732-1912

[3] Instituição:. Contato: rodolfovertuan@yahoo.com.br . Orcid: https://orcid.org/0000-0002-0695-3086

**PALAVRAS-CHAVE:** Ensino de Matemática. Ensino de Cálculo Diferencial e Integral. Raciocínio Criativo. Tarefa Matemática.

## ABSTRACT

This article investigates creative reasoning (CR) in educational contexts, with a focus on practical application in Differential and Integral Calculus (DIC) in university academic environments. Using a theoretical framework that conceives creative reasoning as distinct from imitative reasoning, we analyze how students apply and adapt mathematical knowledge to foster a learning environment that stimulates innovative and flexible thinking. The analysis indicated evidence of the manifestation of creative reasoning criteria: flexibility appeared in the various strategies for solving tasks, plausibility in the validation and application of strategies, and novelty in speculation about multiple integrals before their formalization. The National Curriculum Guidelines for Engineering highlight the importance of training creative and flexible professionals, suggesting that the teaching of CDI should include strategies that promote these skills. The study points out that, by stimulating CR, academic education can contribute to a mathematical education that is more closely aligned with contemporary educational demands.

**KEYWORDS:** Teaching Mathematics. Teaching Differential and Integral Calculus. Creative Reasoning. Mathematical Task.

## 1. Introdução

O Cálculo Diferencial e Integral (CDI) está presente na matriz curricular de diferentes cursos superiores da área de ciências exatas, sendo fundamental seu papel no desenvolvimento científico e tecnológico. Entretanto, o desempenho insatisfatório dos estudantes nessa disciplina tem preocupado pesquisadores do mundo todo, diante dos elevados índices de reprovações e desistências em cursos de Licenciatura e Engenharia.

Há algumas décadas, pesquisas em Educação Matemática têm investigado as causas dessas dificuldades, sendo a abordagem tradicional presente nas salas de aula de CDI uma delas (Cabral; 2015; Trevisan; Mendes, 2018). Superar o ensino tradicional implica que o professor dessa disciplina reflita sobre os efeitos produzidos por sua prática de sala de aula e pelas orientações que definem o sistema de ensino superior no que tange às características dos profissionais que se pretende formar (Cabral, 2015). Assim, é fundamental repensar as estratégias de ensino, tornando o ensino e a aprendizagem mais alinhados ao desenvolvimento do perfil e das competências que se espera desse futuro profissional.

De acordo com as propostas do documento “Diretrizes Curriculares Nacionais para o Curso de graduação em Engenharia” (Brasil, 2019), publicadas na Resolução n°2 de 24 de abril de 2019 pela Câmara de Educação Superior (CES) do Conselho Nacional de Educação (CNE), o perfil do egresso desses cursos

> [...] deve compreender, entre outras, as seguintes características: I - ter visão holística e humanista, ser crítico, reflexivo, criativo, cooperativo e ético e com forte formação técnica; II - estar apto a pesquisar, desenvolver, adaptar e utilizar novas tecnologias, com atuação inovadora e empreendedora; III - ser capaz de reconhecer as necessidades dos usuários, formular, analisar e resolver, de forma criativa, os problemas de Engenharia; IV - adotar perspectivas multidisciplinares e transdisciplinares em sua prática; V - considerar os aspectos globais, políticos, econômicos, sociais, ambientais, culturais e de segurança e saúde no trabalho; VI - atuar com isenção e comprometimento com a responsabilidade social e com o desenvolvimento sustentável (Brasil, 2019, p.1).

Nesse contexto, Lithner (2008) apresenta um “framework” para analisar o raciocínio criativo (RC), destacando suas características como novidade, flexibilidade e plausibilidade, opondo-se ao raciocínio dito “imitativo”. O RC, conforme delineado por Lithner, é essencial para formar profissionais que atendam ao perfil descrito nas diretrizes curriculares, principalmente no que diz respeito à criatividade e à capacidade de resolver problemas de forma inovadora.

Este estudo deriva da dissertação da primeira autora, e seu objetivo é identificar manifestações do RC de estudantes ao lidar com tarefas matemáticas no contexto da disciplina de Cálculo de mais de uma variável real (CDI 2). A fundamentação teórica do estudo é baseada no conceito de RC conforme proposto por Lithner (2008), complementada por outros autores explorando suas características e sua importância no processo de aprendizagem.

## 2. Raciocínio criativo

Lithner (2008) contrasta o RC com o raciocínio imitativo. Segundo ele, o raciocínio imitativo envolve "copiar ou seguir um modelo ou exemplo, sem qualquer tentativa de originalidade" (Lithner, 2008, p.12), enquanto o RC vai além do domínio de algoritmos básicos e de rotina. Para o autor, o RC funciona como uma forma de justificação, "de caráter diferente em diferentes séries, e que o formato específico da justificação é menos importante do que uma comunicação clara de ideias matemáticas" (Lithner, 2008, p.6).

Lithner (2008) define o RC com base em quatro critérios: (i) novidade, sendo que uma nova sequência de raciocínio é criada ou uma sequência esquecida é recriada; (ii) flexibilidade, permitindo diferentes abordagens e adaptações à situação, sem "fixação" em um conteúdo específico ou busca por soluções memorizadas ou algorítmicas; (iii) plausibilidade, utilizando argumentos que sustentam a escolha e/ou execução da estratégia, possibilitando avaliar se as conclusões são verdadeiras ou plausíveis; e (iv) fundamentos matemáticos, com os argumentos baseados nas propriedades matemáticas intrínsecas dos componentes envolvidos no raciocínio.

De acordo com o autor, para que os estudantes manifestem o RC na resolução de tarefas matemáticas, é necessário que inicialmente tentem criar suas próprias soluções. Caso isso não seja bem-sucedido, é fundamental identificar as dificuldades específicas que eles enfrentam e oferecer um feedback que apoie sua capacidade de encontrar soluções.

Lithner (2017) destaca que, ao projetar uma tarefa com o intuito de promover o RC, é crucial garantir que os estudantes não conheçam previamente o método de solução. Entretanto, é importante criar essas tarefas de forma que não sejam excessivamente difíceis para os estudantes. O autor enfatiza que, ao elaborar uma tarefa que estimule o RC, a solução deve estar vinculada à construção de um conhecimento específico, o que representa um desafio adicional.

Conforme o autor, a tarefa deve permitir que os estudantes construam argumentos fundamentados em conceitos matemáticos, de modo que esses argumentos sustentem o raciocínio necessário para resolver a tarefa. Caso os estudantes não se lembrem ou não tenham acesso a um método de solução, restam duas possibilidades para resolver a tarefa: adivinhar, o que pode ser uma parte construtiva da solução de problemas, mas geralmente não é suficiente para resolver a tarefa; ou construir a solução, o que requer uma orientação ou algum tipo de argumento (explícito ou implícito) que apoie as escolhas e conclusões dos estudantes.

De modo similar, Silver (1997) discute como a resolução e a formulação de problemas podem fomentar o pensamento criativo em matemática, sugerindo estratégias específicas para professores, como a utilização de tarefas desafiadoras e abertas, que incentivam os estudantes a explorar diferentes abordagens e soluções. Haylock (1987) apresenta um modelo para avaliar a criatividade matemática em crianças, destacando componentes como fluência, flexibilidade, originalidade e elaboração do pensamento criativo. Embora focados em crianças, esses princípios podem ser adaptados para o ensino universitário, especialmente ao considerar critérios como a novidade e a flexibilidade do raciocínio criativo, conforme descritos por Lithner.

A pesquisa de Sriraman (2004) também é relevante, pois identifica características do pensamento criativo na matemática, como a originalidade, a utilidade e a elegância das soluções propostas, baseando-se em teorias psicológicas e exemplos práticos. Essas características ressoam com os critérios de Lithner, especialmente em termos de plausibilidade e fundamento matemático.

Essas discussões são complementadas por Leikin e Lev (2013), que exploram a convergência entre criatividade e expertise no ensino e aprendizado da matemática. Eles destacam a importância de criar um ambiente educacional que valorize tanto a criatividade quanto a competência técnica, incentivando os estudantes a explorar múltiplas abordagens para resolver problemas. Liljedahl (2008) também oferece insights sobre como o domínio afetivo (emoções, atitudes) influencia o processo de resolução de problemas, sublinhando a importância de motivação e crenças positivas para promover o RC.

Em resumo, a manifestação do RC em estudantes universitários, especialmente em aulas de CDI, requer um ambiente educacional que desafie os estudantes a pensar de forma inovadora e flexível, fornecendo feedback construtivo e criando tarefas que permitam a construção de conhecimentos específicos e fundamentados matematicamente.

## 3. Procedimentos Metodológicos

### 3.1 Caracterização e contexto da pesquisa

Participaram da pesquisa 28 estudantes (15 de Engenharia Mecânica e 13 de Engenharia de Materiais), da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, campus Londrina, que estavam matriculados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II (CDI 2), sob responsabilidade do primeiro autor, no 2º semestre de 2022.

Essa disciplina, com uma carga de 60 horas-aula, contemplou o estudo de funções, limites, derivadas e integrais de funções reais, de mais de uma variável real. Alguns momentos da disciplina foram dedicados ao trabalho com episódios de resolução de tarefas, com os estudantes organizados em grupos de dois ou três integrantes. Cada episódio é organizado em duas aulas de 50 minutos cada, sendo a primeira dedicada ao trabalho autônomo nos grupos, e na segunda uma discussão coletiva, mediada pelo professor e pela pesquisadora (primeira autora) a partir das resoluções dos estudantes, havendo a sistematização de conceitos.

### 3.2 A tarefa matemática

No contexto do Ensino Superior, a abordagem de conceitos matemáticos avançados frequentemente exige o desenvolvimento de tarefas que não apenas avaliem o conhecimento dos estudantes, mas também estimulem a aplicação de conceitos em situações variadas. A tarefa matemática a ser analisada neste artigo foi elaborada no âmbito do grupo de pesquisa do qual os autores fazem parte[4], para explorar a compreensão dos estudantes sobre o conceito de integral de uma variável e sua extensão para múltiplas variáveis, em um contexto de densidade e massa.

Essa tarefa foi objeto de análise tanto da dissertação de Araújo (2023) – que analisou movimentos de generalização que os estudantes realizam para definir uma integral, quanto de Lima (2024), com foco na manifestação do RC, e faz parte de um conjunto de tarefas que visam promover o RC e a capacidade investigativa dos estudantes no contexto do trabalho com tarefas exploratórias em aulas de CDI (Trevisan; Mendes, 2018; Trevisan; Araman; Serrazina, 2023).

A tarefa é dividida em três partes que abordam, de forma gradativa, diferentes dimensões de um mesmo problema matemático:

* Densidade e Massa de uma Haste Unidimensional: nesta parte, os estudantes de CDI2 são desafiados a calcular a massa de uma haste com densidade constante e variável, retomando o conceito de integral de uma variável e aplicando-o para lidar com um contexto envolvendo densidade não uniforme.

* Densidade e Massa de uma Lâmina Não Homogênea: A segunda parte requer que os estudantes lidem com uma lâmina bidimensional com densidade variável, utilizando aproximações por subdivisões e explorando, de forma intuitiva, elementos necessários à compreensão da integral dupla, como recurso para estimar a massa total da lâmina.

* Densidade e Massa de um Sólido Tridimensional: Por fim, os estudantes são convidados a estender os elementos presentes nas situações anteriores às três dimensões, tratando de um sólido com densidade variável e explorando intuitivamente elementos da integral tripla para calcular sua massa.

Cada uma dessas partes visa desenvolver a compreensão, a partir dos conceitos de densidade e massa, a extensão da integral de contextos unidimensionais para contextos bidimensionais e tridimensionais. A tarefa foi estruturada para incentivar a aplicação prática de conceitos matemáticos e estimular

---

[4] http://dgp.cnpq.br/dgp/espelhogrupo/781023

a manifestação do RC entre os estudantes, permitindo que eles experimentem e validem diferentes estratégias para resolver problemas complexos.

DENSIDADE E MASSA DE UMA HASTE UNIDIMENSIONAL (part. 1)

A densidade linear é a medida de uma quantidade de qualquer valor característico por unidade de comprimento. Considere uma haste longa e fina de massa $m$ e comprimento $\Delta x$, a densidade deste objeto unidimensional, é expressa por $\rho = \frac{m}{\Delta x}$. Logo a massa desse objeto é dada pela fórmula $m = \Delta x \,.\, \rho$.

Qual é a massa de uma haste homogênea com comprimento 1,5m e densidade igual 2,5kg/m?

ii. A equação anterior define a massa desde que a densidade seja constante. Mas o que acontece se a densidade for variável? Ou seja, $m = \Delta x \,.\, \rho(x)$. Suponha que este objeto unidimensional esteja posicionado, ao longo de um eixo coordenado, entre $x = a$ e $x = b$, com densidade variável ρ(x). Explique como encontrar a massa total do objeto, usando palavras, desenhos, escrevendo fórmulas ou qualquer outro tipo de registro.

DENSIDADE E MASSA DE UMA LÂMINA NÃO HOMOGÊNEA (part 2)

Consideremos um objeto achatado idealizado suficientemente fino para ser imaginado como sendo uma região plana bidimensional. Dizemos que tal objeto é uma lâmina. Uma lâmina é dita homogênea se sua composição for inteiramente uniforme, caso contrário é dita não-homogênea. A densidade ρ de uma lâmina homogênea de massa $m$ e área A é dada por $\rho = \frac{m}{A}$. Já em uma lâmina não-homogênea, a composição pode variar de ponto para ponto, uma definição apropriada de "densidade" deve refletir essa condição. Para estabelecer tal definição, suponha que a lâmina seja colocada em um plano $xy$ A densidade no ponto $(x, y)$ pode ser especificada por uma função $\rho(x, y)$, chamada de função densidade.

Considere uma lâmina de vértices (0, 0), (0, 4), (4, 4) e (4, 0), com densidade variável, ou seja, uma lâmina não-homogênea, com densidade $\rho(x, y, z) = x + y$ kg/m.

Considere essa lâmina subdividida em 4 retângulos, conforme figura abaixo. Admitindo que em cada retângulo a densidade é constante e igual ao valor no ponto representativo indicado, determine a massa total aproximada da lâmina.
Considere agora subdivisão dessa lâmina, em 8 retângulos, a sua escolha. Admitindo que em cada retângulo a densidade é constante e igual ao valor em um ponto representativo também da sua escolha, determine a massa total aproximada da lâmina.
Suponha agora um caso mais geral, em que a densidade da lâmina no ponto $(x, y)$ pode ser especificada por uma função densidade $\rho(x, y)$. Explique como encontrar a massa total dessa lâmina não-homogênea, usando palavras, desenhos, escrevendo fórmulas ou qualquer outro tipo de registro.

DENSIDADE E MASSA DE UM SÓLIDO (part. 3)

Considere um sólido tridimensional G. Se G for homogêneo de massa $m$ e volume $V$, então sua densidade é dada por. $\rho = \frac{m}{V}$. Se G for não homogêneo e estiver em um sistema de coordenadas $xyz$, então sua densidade no ponto genérico $(x,\ y,\ z)$ é especificada por uma função $\rho(x,\ y,\ z)$.

Explique como encontrar a massa total desse sólido não-homogênea, usando palavras, desenhos, escrevendo fórmulas ou qualquer outro tipo de registro.

## 3.3 Procedimentos para coleta e análise de dados

Os dados foram coletados durante as duas aulas dedicadas ao trabalho com a tarefa matemática detalhada anteriormente. Os dados coletados para análise foram compostos por (a) protocolos contendo registros escritos das discussões dos pequenos grupos de estudantes e (b) áudios das discussões nos pequenos grupos, cujas gravações foram transcritas na íntegra, em articulação com os protocolos produzidos, propiciando assim, a organização e a análise dos dados. A coleta de dados foi realizada conforme projeto aprovado pelo Comitê de Ética da UTFPR.

Na intenção de reconhecer uma maior variedade de manifestações do RC, foram considerados dados tomando por critério para escolha do grupo em análise um maior envolvimento dos estudantes na apresentação, justificação, argumentação e negociação de significados. As letras M, A e V correspondem aos pseudônimos atribuídos aos estudantes participantes.

## 4. Análise e discussão de dados

Nesta análise, os dados foram organizados a partir de cinco trechos extraídos das interações dos estudantes durante a realização da tarefa. Cada trecho será detalhado com base nos critérios identificados, como flexibilidade, plausibilidade, novidade e fundamentação matemática. A discussão abordará as diferentes estratégias utilizadas pelos estudantes e como elas se relacionam com o conceito de massa de uma haste unidimensional e com a densidade variável. Ao longo dos trechos, exploram-se as abordagens dos estudantes, desde a compreensão inicial do problema até a aplicação de integrais em diferentes dimensões, revelando o processo de construção do raciocínio matemático.

A análise que segue será orientada pelo referencial de Lithner (2008), considerando que a identificação dos critérios de raciocínio criativo se dá a partir de indícios situados nas interações verbais e nos registros produzidos pelos estudantes. Assim, não se trata de afirmar a presença plena e consolidada do raciocínio criativo, mas de interpretar, à luz do quadro teórico adotado, em que medida determinadas ações e justificativas aproximam-se dos critérios de novidade, flexibilidade, plausibilidade e fundamentação matemática.

No trecho 1 e 2, os estudantes discutem sobre a parte 1 da tarefa, no qual se explora o conceito de massa de um objeto unidimensional e é sugerido que calculem a massa de uma haste unidimensional e, posteriormente, que expliquem como encontrar a massa total da haste unidimensional não homogênea, ou seja, com densidade variável.

Trecho 1

M: A primeira quer saber quanto pesa 1,5, certo?

A: Então a gente pega 1,5, né? Então em um já tem 2, 5; 1,5 vezes 2,5. Aí o total dessa barra, né? Dessa haste é 3,75 kg.

A: Na 2, o que acontece se a densidade for variável? Ou seja, $massa\ é\ igual\ delta\ x\ vezes\ p\ de\ x$. Suponha que o objeto único dimensional esteja posicionado…

V: Ah é integral.

M: Vai ser dessa fórmula aqui.

A: Acho que não, acho que é assim.

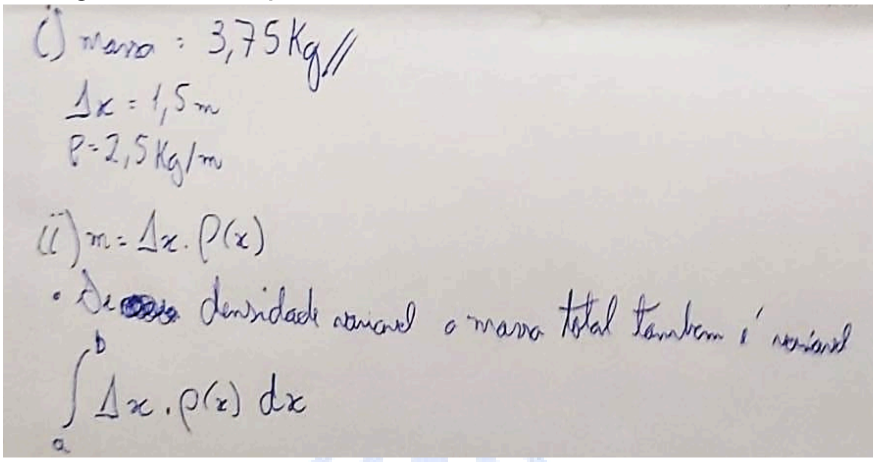
A: Aqui é massa, vai ser o resultado da integral.

M: Mas olha.

V: Eu também acho que é essa, vamos testar.

No trecho 1, o critério (ii) flexibilidade pôde ser identificado quando os estudantes discutiram duas abordagens diferentes para resolver a questão. Embora no áudio não fique claro quais são essas duas formas, reconhecemos que a tarefa possibilitou que eles pensassem pelo menos em duas estratégias distintas. Uma delas foi o uso de uma integral conforme o registro apresentado pelos estudantes na Figura 1.

Figura 1: Resolução dos estudantes na tarefa matemática 3




Fonte: Registros dos estudantes

Quadro 1: Transcrição da figura 2

| |
|---|
| Massa= 3,75 Kg<br>$1x = 1,5\,m\,\rho = 2,5\,Kg/m$ |
| $m = \Delta x.\,\rho(x)$<br><br>Se a densidade varia a massa total também é variável $\int_a^b \Delta x.\,\rho(x)dx$ |

Fonte: Registros dos estudantes

Outro critério identificado é o de (iii) plausibilidade, pois para decidirem qual estratégia adotar, optaram por "testar" a fórmula que supostamente seria a correta, para assim chegarem a um consenso.

Entretanto, é importante problematizar se a evocação da integral, nesse momento, configura necessariamente uma manifestação de raciocínio criativo ou se pode estar relacionada a um reconhecimento de estrutura previamente estudada. Conforme destaca Lithner (2008), a distinção entre raciocínio imitativo e criativo não reside apenas na utilização de um conceito matemático, mas na natureza justificativa que sustenta sua escolha. Nesse sentido, a análise demanda cautela ao interpretar a simples referência à integral como evidência inequívoca de novidade.

Trecho 2

V: Dá pra validar ela com a primeira opção pra gente conferir se tá certo, a gente tem a massa 3,75 na primeira, a variação ali seria a integral né…

A: A gente só vai validar se a primeira expressão tá correta.

V: Entendi.

M: A primeira não varia.

A: Claro que varia.

M: É 2,5 kg.

A: Por metro, certo? Então a gente vai ter um intervalo de x, que seria o da integral de 0 a 1,5.

A: É só pra ver se tá certo.

V: Dá certo, fica só o delta.

A: Como vai virar constante só tinha um delta em cima, vai sumir o x e vai ficar só o delta, que é a variação.

V: É dá certo.

A: Sim, fica só ele, como ele vira constante você pode tirar ele pra fora.

No trecho 2, o critério de plausibilidade é evidenciado quando os estudantes discutem os argumentos para validar a escolha da estratégia adotada pelo grupo. Nesse momento, os estudantes buscam formas de justificar sua decisão, levando em consideração a viabilidade e a coerência da estratégia selecionada. Ao compartilhar suas ideias e analisar criticamente as opções disponíveis, os estudantes demonstram uma busca conjunta pela melhor solução, o que fortalece o processo de decisão colaborativa e a construção de um consenso em torno da estratégia mais plausível. No trecho 3, um dos estudantes explica aos colegas seu raciocínio.

A validação realizada pelo grupo aproxima-se do critério de plausibilidade na medida em que os estudantes buscam verificar a coerência da estratégia escolhida com um caso já resolvido. Todavia, cabe distinguir entre testar um procedimento e fundamentá-lo conceitualmente. Enquanto o teste empírico confirma resultados, a plausibilidade, na perspectiva de Lithner (2008), exige que os argumentos estejam ancorados nas propriedades matemáticas envolvidas. Essa distinção é relevante para compreender a profundidade da justificativa produzida pelo grupo.

Trecho 3

V: A segunda situação, ele pede como que ficaria para calcular a massa, sendo que a densidade é variável, essa densidade está entre o x= a e o x= b. Pensando no conceito de integral, a gente pode falar que a gente vai dividir isso em pequenas partes, que ela vai ser todas iguais, então essas partes vão ser consenso, a gente vai somando todas elas e a gente vai chegar no resultado total. Como não tem um valor numérico, não tem como fazer isso, mas a gente pode ter por essa expressão que vai ser a integral definida de a à delta x vezes p de x dx.

Nessa fala, há elementos do critério (iv) fundamentos matemáticos, quando o estudante estabeleceu uma relação entre a situação e a ideia de integral, com base em propriedades matemáticas estudadas anteriormente.

Nesse episódio, observa-se um movimento de articulação entre a situação proposta e a ideia de acumulação expressa pela integral definida. A fundamentação matemática manifesta-se quando o estudante mobiliza a noção de subdivisão do intervalo e soma de partes para justificar a construção da expressão integral. Diferentemente de uma aplicação algorítmica direta, há aqui uma tentativa de reconstrução conceitual do significado da integral, o que se aproxima do critério de fundamentos matemáticos descrito por Lithner (2008).

Em geral, a parte 1 da tarefa foi resolvida sem dificuldade, os estudantes chegaram a discutir sobre duas formas de resolver a questão e, como forma de consenso, testaram qual seria mais plausível, reconhecendo o uso da integral.

No trecho 4, os estudantes resolvem a parte 2 da tarefa.

Trecho 4

V: Seria a integral de xa e xb da massa, depois fazer uma integral de ya e yb e soma elas?

Professor: Uma soma dentro de outra soma.

V: Rapaz, não é que tá certo.

V: Calma, então se a gente não pode somar todas as densidades e depois multiplicar elas pela área. Olha só, pensa comigo, a gente vai ter que multiplicar ela pela área uma de cada vez e somar no final.

A: Então a gente pega a área de cada um vezes a densidade daquela área e...

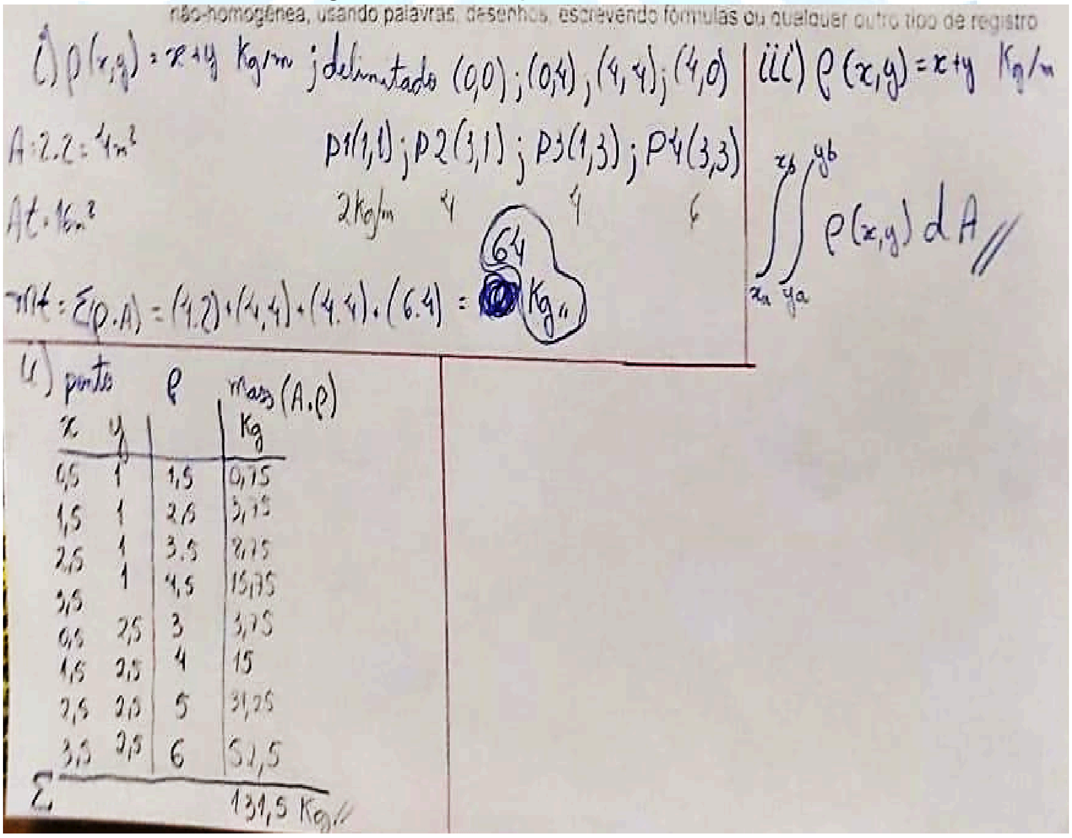
V: Eu não acredito, tô impressionado da nossa capacidade mental de descobrir uma integral dupla.

A intervenção do professor, ao sugerir “uma soma dentro de outra soma”, atua como elemento de mediação cognitiva, deslocando o grupo para uma estrutura acumulativa aninhada que se aproxima da ideia de integral dupla. Essa mediação suscita uma questão analítica relevante: até que ponto a construção realizada pelos estudantes pode ser compreendida como autônoma e em que medida foi favorecida pela intervenção docente? Tal aspecto reforça o caráter interacional do raciocínio desenvolvido.

A novidade, nesse caso, parece emergir inicialmente por analogia dimensional — ao associar duas variáveis à ideia de duas integrais. Contudo, essa analogia ainda não está acompanhada, nesse momento, de uma justificativa formal que explicite as propriedades matemáticas que sustentam a integral dupla. Assim, o episódio evidencia um movimento intuitivo relevante, ainda em processo de consolidação conceitual.

Na parte 2, foi apresentado um texto explicativo sobre o conceito de uma lâmina bidimensional não homogênea e foi solicitado que considerassem três itens. Ao ser questionado pelo professor, um dos estudantes sugeriu tratar-se de uma integral dupla, aparentemente elaborando uma hipótese sobre a integral com duas dimensões e considerando o conceito já estudado anteriormente (Figura 2). A manifestação da novidade, conforme definida por Lithner (2008) como a criação ou recriação de uma sequência de raciocínio, evidencia-se quando os estudantes conjecturam a existência de uma integral dupla antes da formalização do conceito. Diferentemente do raciocínio imitativo, não recorrem a algoritmo previamente apresentado.

Figura 2: Resolução dos estudantes




Fonte: Registros dos estudantes

Quadro 2: Transcrição da figura 3

| |
|---|
| $i)\ \rho(x, y) = x + y\frac{kg}{m}$ ; delimitado $(0, 0); (0, 4); (4, 4); (4, 0)$ |
| $\rho 1\ (1, 1);\ \rho 2\ (3, 1);\ \rho 3\ (1, 3);\ \rho 4\ (3, 3) A = 2.2 = 4m^2 At = 16m^2 mt = \{(\rho. A) = (4, 2) + (4,$ |

ii) Ponto p massa $(A.\rho)$

| X | Y | | Kg |
|---|---|---|---|
| 0,5 | 1 | 1,5 | 0,75 |
| 1,5 | 1 | 2,5 | 3,75 |
| 2,5 | 1 | 3,5 | 8,75 |
| 3,5 | 1 | 4,5 | 15,75 |
| 0,5 | 2,5 | 3 | 3,75 |
| 1,5 | 2,5 | 4 | 15 |
| 2,5 | 2,5 | 5 | 31,25 |
| 3,5 | 2,5 | 6 | 52,5 |
| ∑ | | | 131,5 Kg |

iii) $\rho(x, y) = x + y \; \frac{Kg}{m}$

$$\int_{xa}^{xb}\int_{ya}^{yb} \rho(x, y)\, dA$$

Fonte: Registros dos estudantes

No trecho 5, os estudantes discutem sobre a parte três da tarefa.

Trecho 5

A: Espera, isso aqui vai ser de três? Pode? Existe isso?

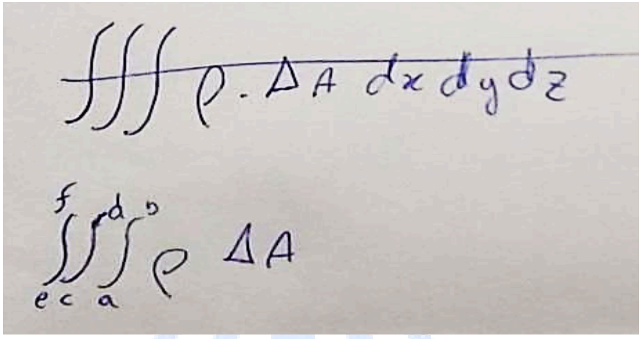
Pesquisadora: Por que você pensa que pode ser?

A: Por que é um sólido certo? Tridimensional, três dimensões x, y e z, teve uma, duas...

M: Nossa...

Após a leitura do enunciado e de observarem o fato de ser um sólido tridimensional, um dos estudantes questiona se poderia ser uma integral tripla. O professor ainda não tinha apresentado formalmente esse conteúdo à turma, já que a tarefa tinha justamente esse objetivo, de fazer com que os estudantes explorassem de forma intuitiva as ideias de integral dupla e tripla. Ao perceberem que sim, seria uma integral tripla, ficam surpresos e registraram na tarefa como podemos observar na Figura 3 e sua transcrição no Quadro 3. Portanto, nesse trecho, podemos identificar o critério de (i) novidade.

*Figura 3: Resolução dos estudantes*



*Fonte: Registros dos estudantes*

*Quadro 3: Transcrição da figura 4*

| |
|---|
| $\iiint \rho\,.\ \ \Delta A\, dx\, dy\, dz \int_e^f \int_c^d \int_a^b \rho\, \Delta A$ |

*Fonte: Registros dos estudantes*

Diferentemente do exemplo individual apresentado por Lithner (2008), o raciocínio aqui analisado desenvolve-se em contexto colaborativo. A hipótese da integral tripla emerge da interação entre os participantes, evidenciando que o raciocínio criativo pode assumir caráter distribuído, sendo construído por meio da negociação de significados e da validação coletiva das ideias propostas.

De modo geral, os episódios analisados revelam manifestações situadas dos critérios do raciocínio criativo, embora nem todos se apresentem com a mesma intensidade ou grau de fundamentação. Em alguns momentos, observa-se maior aproximação de processos intuitivos e analógicos, enquanto em outros a justificativa conceitual torna-se mais explícita. Essa variação reforça o caráter processual e gradual do desenvolvimento do raciocínio criativo em contextos de Ensino Superior.

Sintetizando a análise dessa tarefa destacamos alguns pontos dos aspectos do RC expresso pelos estudantes, associando-os às características da tarefa matemática (Quadro 4).

*Quadro 4: Quadro de identificação de critérios do RC*

| Aspecto | Indicativos | Características da tarefa |
|---|---|---|

| | | |
|---|---|---|
| Novidade | Recriação do conceito de integral simples (Trecho 2)<br><br>Conceito de integral dupla sendo construído (Trecho 4)<br><br>Conceito de integral tripla sendo "criada" (Trecho 5) | Contexto familiar que envolvia uma variável sendo dividida em pequenas partes.<br><br>Relação entre o cálculo da massa em uma e duas dimensões.<br><br>Relação do cálculo em três dimensões. |
| Flexibilidade | Duas abordagens diferentes para a resolução da questão (Trecho 1) | Tarefa exploratória. |
| Plausibilidade | Testes de abordagens diferentes (Trecho 2) | Questionamentos sobre densidade variável. |
| Fundamentação matemática | Uso de propriedades de integral (Trecho 3) | Contexto conhecido de integral. |

Fonte: Autoria própria.

A análise sugere que o desenho da tarefa — ao propor a ampliação progressiva da integral de uma para duas e três dimensões — criou condições favoráveis à emergência de estratégias não diretamente algoritmizadas. Contudo, isso não implica afirmar que o raciocínio imitativo tenha sido completamente superado, mas indica que o ambiente investigativo possibilitou deslocamentos conceituais relevantes. Tal aspecto dialoga com os princípios de elaboração de tarefas discutidos por Lithner (2017), segundo os quais a suspensão do método previamente formalizado pode favorecer construções mais autorais.

## 5. Discussão dos resultados

Este artigo teve como objetivo investigar e evidenciar o RC em contextos educacionais, com foco especial na aplicação prática em ambientes acadêmicos universitários. Com base nos conceitos teóricos de Lithner (2008), buscamos identificar como os estudantes aplicam e adaptam conhecimentos matemáticos em diferentes contextos para promover um ambiente de aprendizagem que estimule o pensamento inovador e flexível. Cabe destacar que a identificação do raciocínio criativo neste estudo não pretende afirmar sua ocorrência plena ou consolidada, mas interpretar indícios de aproximação aos critérios propostos por Lithner (2008), considerando a natureza situada e interacional das produções analisadas.

A análise desenvolvida indicou aproximações aos critérios do raciocínio criativo (novidade, flexibilidade, plausibilidade e fundamentos matemáticos), ainda que com diferentes níveis de explicitação e consolidação conceitual. A novidade foi particularmente evidente quando os estudantes exploraram conceitos de integrais múltiplas de forma intuitiva, mesmo antes de terem estudado formalmente o conteúdo. Por exemplo, ao calcular a massa de uma haste unidimensional com densidade variável, eles adaptaram o conceito de integral simples para lidar com a variação da densidade ao longo do comprimento. Um momento particularmente significativo ocorreu quando os estudantes conjecturaram sobre a aplicação de integrais duplas e triplas, demonstrando uma capacidade de expandir o conhecimento adquirido e gerar novas ideias em contextos mais complexos.

Contudo, observa-se que, em alguns episódios, a novidade emergiu inicialmente por analogia estrutural entre dimensões, antes que houvesse uma justificativa formal explicitada. Tal aspecto reforça o caráter processual do desenvolvimento do raciocínio criativo, que não se constitui como evento pontual, mas como construção gradual. Tal movimento aproxima-se da noção de originalidade discutida por Sriraman (2004), ao evidenciar a capacidade de extrapolar estruturas conhecidas para contextos ainda não formalizados.

A flexibilidade ficou evidente nas discussões em grupo, onde os estudantes consideraram diferentes abordagens para resolver o problema de calcular a massa. Em várias ocasiões, foram propostas múltiplas estratégias, como no caso da integral da haste, onde discutiram a possibilidade de subdividir a densidade variável em pequenos intervalos e realizar somas aproximadas antes de formalizar a solução através da integral. Essa capacidade de ajustar estratégias conforme a complexidade do problema foi uma demonstração clara de flexibilidade no raciocínio.

A flexibilidade observada esteve fortemente associada ao trabalho colaborativo, no qual diferentes hipóteses foram negociadas e testadas coletivamente. Esse caráter interacional amplia a compreensão do raciocínio criativo para além de uma dimensão estritamente individual, sugerindo que ambientes colaborativos podem favorecer deslocamentos conceituais relevantes. Esse movimento dialoga com Silver (1997), ao indicar que ambientes que favorecem a exploração de múltiplas estratégias ampliam as possibilidades de produção criativa em matemática, bem como com as discussões sobre as dificuldades históricas no ensino de CDI (Cabral, 2015; Trevisan; Mendes, 2018), ao sugerir que tarefas investigativas podem alterar a natureza das interações discursivas na disciplina.

A plausibilidade foi evidenciada nas justificativas dos estudantes para validar suas soluções. Durante as discussões sobre a massa da lâmina bidimensional, eles testaram as estratégias adotadas e compararam os resultados parciais com conceitos previamente conhecidos de integrais simples. A validação dos métodos através de cálculos intermediários mostrou a preocupação em garantir que as conclusões eram logicamente consistentes e alinhadas com os princípios matemáticos.

Ainda assim, a análise evidenciou que a validação realizada pelos estudantes nem sempre se fundamentou explicitamente em propriedades matemáticas formais, mas, em alguns momentos, assumiu caráter verificativo. Essa distinção é relevante para compreender os diferentes níveis de aprofundamento justificativo presentes nas interações.

O critério de fundamentação matemática foi evidente no uso preciso de propriedades das integrais para resolver os problemas propostos. Um exemplo disso foi o cálculo da massa de um sólido tridimensional na última etapa da tarefa, onde os estudantes utilizaram a integral tripla para integrar a densidade em todas as dimensões do sólido. Essa aplicação dos conceitos matemáticos sugere um nível relevante de compreensão conceitual e aproxima-se do critério de fundamentação matemática, essenciais para resolver problemas complexos.

Desse modo, a fundamentação matemática identificada deve ser compreendida como situada no contexto específico da tarefa e da mediação docente, não podendo ser generalizada automaticamente para outros contextos de ensino.

O perfil de desafio mais elevado da tarefa de integrais contribuiu significativamente para a manifestação do RC entre os estudantes. A natureza aberta da tarefa, que envolvia o cálculo da massa de uma haste unidimensional, uma lâmina bidimensional não homogênea e um sólido tridimensional, permitiu a exploração de diferentes caminhos para a resolução. A necessidade de lidar com densidades variáveis e subdividir áreas e volumes incentivou os estudantes a expandir o conhecimento de integrais simples para contextos mais complexos, estimulando a flexibilidade no raciocínio.

Essa tarefa exigiu que os estudantes considerassem desde a integração de funções com uma variável até a aplicação de integrais duplas e triplas, desafiando-os a desenvolver estratégias que ainda não haviam sido formalmente introduzidas na disciplina. A tarefa analisada, ao suspender momentaneamente a apresentação formal do algoritmo, aproxima-se dos princípios de design de tarefas propostos por Lithner (2017), que defendem a criação de situações nas quais o método não esteja previamente disponível.

A busca por diferentes estratégias, como a subdivisão das regiões em pequenos intervalos e o uso de somas aproximadas antes de formalizar a solução com integrais, estimulou a criatividade dos estudantes. O fato de não haver uma solução única previamente estabelecida permitiu que os grupos discutissem várias abordagens, destacando a importância da adaptação ao problema. Esse processo não apenas estimulou a criatividade, mas também proporcionou um ambiente propício para que os estudantes testassem hipóteses e validassem seus raciocínios, reforçando a importância da flexibilidade e da capacidade de resolver problemas complexos de forma inovadora. Esse caráter coletivo do raciocínio também encontra respaldo nas discussões de Leikin e Lev (2013), que destacam a interação entre criatividade e expertise em ambientes colaborativos.

## 5. Considerações Finais

O presente estudo não propõe um novo modelo teórico de raciocínio criativo, mas contribui ao evidenciar sua manifestação em contexto universitário de CDI, ampliando investigações que, em sua maioria, concentram-se na Educação Básica. Ao promover o raciocínio criativo no ensino de CDI, podemos contribuir para uma formação matemática que articule domínio conceitual, capacidade investigativa e argumentação fundamentada, preparando profissionais mais capacitados e inovadores para enfrentar os desafios contemporâneos.

As Diretrizes Curriculares Nacionais para os cursos de Engenharia enfatizam a formação de profissionais com capacidades criativas e flexíveis, aptos a resolver problemas complexos e a se adaptarem a novos desafios. Portanto, é essencial que o ensino de CDI inclua estratégias que promovam o desenvolvimento dessas competências. Tarefas desafiadoras que incentivem a aplicação de conceitos em novos contextos e ofereçam feedback construtivo são cruciais para essa formação.

Este estudo apresenta limitações importantes. A análise concentrou-se em episódios específicos de uma única turma e em um contexto institucional particular. Além disso, a presença do professor como mediador pode ter influenciado a natureza das manifestações interpretadas como RC. Tais elementos demandam cautela na generalização dos resultados e indicam a necessidade de investigações complementares em diferentes contextos formativos.

Investigações futuras podem explorar comparativamente diferentes níveis de mediação docente, bem como analisar longitudinalmente a consolidação do raciocínio criativo ao longo da disciplina, buscando compreender em que medida tais manifestações se estabilizam ou se transformam em novos esquemas de resolução.

## Referências


ARAUJO, T. T. **Integrais definidas de uma e mais variáveis: uma proposta de intervenção com tarefas exploratórias.** 2023. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2023.

BRASIL. **Parecer CNE/CES nº 1/2019. Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação em Engenharia.** Brasília, DF: MEC, 2019.

CABRAL, T. C. B. **Metodologias alternativas e suas vicissitudes: ensino de matemática para engenharias.** *Perspectivas da Educação Matemática*, v. 8, p. 208-245, 2015.

HAYLOCK, D. W. **A framework for assessing mathematical creativity in school children.** *Educational Studies in Mathematics*, v. 18, n. 1, p. 59-74, 1987.

LEIKIN, R.; LEV, M. **On the relationship between mathematical creativity and mathematical giftedness in high school students.** *Creativity Research Journal*, v. 25, n. 4, p. 413-425, 2013.

LILJEDAHL, P. **The affective domain and the M in STEM.** *The Montana Mathematics Enthusiast*, v. 5, n. 2/3, p. 109-122, 2008.

LIMA, Leandra Letícia de. **Raciocínio criativo em aulas de cálculo diferencial e integral: um estudo na disciplina de Cálculo 1.** 2024. 174 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina/Cornélio Procópio, 2024.

LITHNER, J. **A research framework for creative and imitative reasoning.** *Educational Studies in Mathematics*, v. 67, n. 3, p. 255-276, 2008.

LITHNER, J. **Principles for designing mathematical tasks that enhance imitative and creative reasoning.** *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, v. 49, p. 937-949, 2017.

SILVER, E. A. **Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing.** *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, v. 29, n. 3, p. 75-80, 1997.

SRIRAMAN, B. **The characteristics of mathematical creativity.** *The Mathematics Educator*, v. 14, n. 1, p. 19-34, 2004.

TREVISAN, A. L.; ARAMAN, E. M. O.; SERRAZINA, M. L. **The development of students' mathematical reasoning in calculus courses.** *Avances de Investigación en Educación Matemática*, v. 24, p. 39-56, 2023.

TREVISAN, A. L.; MENDES, M. T. **Ambientes de ensino e aprendizagem de cálculo diferencial e integral organizados a partir de episódios de resolução de tarefas: uma proposta.** *Revista Brasileira de Ensino e Tecnologia*, v. 11, n. 1, p. 209-227, 2018.

Submetido em: 26/11/2025

Aceito em:02/03/2026