REVISTA DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL (UFMS)

ISSN 2359-2842 Volume 18, número 51 – 2025 DOI: 10.46312/pem.v18i51.22531

Simbologia para o Cálculo Diferencial e Integral numa perspectiva histórica

Symbology for differential and Integral Calculus in a historical perspective

Circe Mary Silva da Silva[1]

RESUMO

O objetivo é identificar as notações para conceitos basilares do Cálculo Diferencial e Integral (CDI) a partir da análise de livros e artigos científicos de matemáticos e autores de livros de matemática do século XVII ao século XX. A questão investigativa é a seguinte: como os símbolos do CDI foram construídos, se transformaram e se consolidaram no período compreendido entre o século XVII e o século XX? O método foi o bibliográfico analítico e as fontes, os textos originais de matemáticos. A apresentação das notações está dividida em três períodos: 1) notações dos séculos XVII e XVIII; 2) notações do século XIX e 3) notações do século XX. Conclui-se que os matemáticos demonstraram dúvidas acerca de qual notação seria a mais adequada. No século XIX, muitas contribuições ocorreram para a simbologia matemática, notações inadequadas foram esquecidas e, no século XX, pouco foi acrescentado às notações, que começaram a se consolidar e ainda na atualidade são utilizadas.

PALAVRAS-CHAVE: Matemáticos. Notações. História da Matemática.

ABSTRACT

The objective is to identify the proposed notations for basic concepts of Calculus from the analysis of books and scientific articles by mathematicians and authors of mathematics books from the seventeenth to the twentieth century. The investigation answers the question: How were the symbols of CDI built, transformed and consolidated throughout of the seventeenth century and to the twentieth century? The method was the analytical bibliographic and the sources the original texts of mathematicians. The presentation of the notations, distribute them in three periods: 1) CDI in the seventeenth and eighteenth centuries; 2) CDI in the nineteenth century and 3) CDI of the twentieth century. I conclude that mathematicians demonstrated that they had doubts about which notation would be the most appropriate. In the 19th century, many contributions occurred to mathematical symbology, inadequate notations were forgotten, and in the 20th century, little was added to the notations that began to consolidate and are still used today

KEYWORDS: Mathematicians. Notations. History of Mathematics.

[1] Instituição: Universidade de São Paulo. Email: cmdynnikov@gmail.com Orcid: https://orcid.org/0000-0002-4828-8029

Introdução

> O problema básico de escrever matemática é o mesmo que escrever biologia, escrever um romance ou escrever instruções para montagem de um cravo: o problema é comunicar uma ideia (Halmos, 1973, p. 2).

O problema da escrita não se restringe, conforme Halmos afirma na epígrafe acima, a uma única área do conhecimento; em todas as áreas, o objetivo da escrita é comunicar ideias. E, no que diz respeito a uma boa notação, ele é bem mais específico: “A boa notação tem uma espécie de harmonia alfabética e evita a dissonância” (Halmos, 1973, p. 6). Embora a dissonância seja, mais frequentemente, aplicada à música, sabemos o quanto soa bem aos ouvidos uma frase bem elaborada.

A história do desenvolvimento dos símbolos matemáticos envolve diferentes culturas, com contribuições de diversos povos, em épocas variadas. É um saber que se encontra esparso e que não pode ser dissociado do meio que o produziu. O aluno que abre, pela primeira vez, um livro de Cálculo Diferencial e Integral (CDI), depara-se com uma simbologia desconhecida: trata-se de um admirável mundo novo, repleto de símbolos, cuja origem e funcionalidade lhe são desconhecidos. Entretanto, ele já está consciente de que precisará aprender a manuseá-los.

Alfred Whitehead (1861-1947) discutiu a relação existente entre a dificuldade para aprender matemática e símbolos empregados na matemática. Segundo ele, muitas pessoas consideram a matemática difícil e misteriosa por causa de seus numerosos símbolos. Quando se desconhece o significado dos símbolos, a matemática fica incompreensível e, se não estivermos habituados a ela, teremos muita dificuldade em segui-la. Entretanto, este mesmo simbolismo possui suas vantagens, pois, de acordo com esse autor, ele representa uma enorme simplificação. Para Whitehead, assim como para a maioria das pessoas, “no seu início, o estudo da matemática presta-se a provocar uma decepção” (Whitehead, 1948, p. 5).

Dominar a simbologia matemática é fundamental para conhecer a estrutura dessa área do conhecimento, isto é, para entender as definições e os teoremas. Não se aprende matemática por osmose, ao contrário do que o escritor Jonathan Swift (1667-1745) criativamente imaginou ao escrever o livro *Viagens de Gulliver*. Em uma de suas viagens, na Academia da cidade de Lagado, ele imaginava um novo método para aprender matemática.

> Os teoremas matemáticos e suas demonstrações são escritos sobre uma pasta fina, com tintura cefálica. O estudante deve engoli-la em jejum e nos três dias seguintes só comer pão e água. Quando a pasta

> é digerida, a tintura sobe ao cérebro, levando teoremas (Swift, 2006, p. 127).

A beleza literária não pode ser desprezada, ela fascina, mas essa fantasia não se aplica ao estudo real da matemática. A aprendizagem da matemática requer esforço e dedicação. Visando, principalmente, a fornecer elementos, de cunho histórico, capazes de contribuir para o aperfeiçoamento do processo de formação de professores de matemática, o presente estudo mostra alguns aspectos da construção da simbologia do CDI. A trajetória nessa construção revelará que o mundo dos símbolos na área do CDI resultou da colaboração de numerosos matemáticos que refletiram a respeito e, às vezes, dialogaram com seus pares, no intuito de propor símbolos convenientes para os objetos matemáticos, facilitando assim a sua compreensão. A pergunta investigativa que orientou este trabalho é a seguinte: Como os símbolos do CDI foram construídos, se transformaram, foram abandonados ou se consolidaram ao longo do período que inicia com sua criação no final do século XVII e vai até o século XX?

A simbologia matemática é relevante, entre outras razões, porque não se aprende CDI sem seu uso e, como uma ferramenta, a ela está visceralmente associada, assim como as notas musicais na criação de novas composições.

As bases do CDI, assim como as notações, foram criadas ao longo do tempo. Sobre os fundamentos dessa nova área do conhecimento matemático, Berkeley, no texto *O Analista*, de 1734, mostrou-se um crítico feroz. Ele reconhecia sua importância nesse texto: “O Método das Fluxões é a chave geral, por meio da qual os matemáticos modernos desvendam os segredos da geometria e, consequentemente, da natureza”. Entretanto, para ele, a aplicação do método se tornou seu único objetivo. Ele ressaltava “[...] Mas se este método é claro ou obscuro, consistente ou repugnante, demonstrativo ou precário, indagarei com a máxima imparcialidade” (Berkeley, 2002, p.1-2). No século XVIII, mesmo considerando-se a grande repercussão que o CDI alcançava, as impiedosas críticas de Berkeley estenderam-se inclusive para as notações, por isso, dedico a elas um espaço neste estudo.

O caminho investigativo

O objetivo deste trabalho é identificar as notações propostas para conceitos basilares do CDI – como derivada, limite, integral – a partir da análise de livros e artigos científicos de matemáticos e autores de livros de matemática do século XVII ao século XX. O método seguido foi o histórico, descritivo e analítico. Conforme Bloch

(2001, p. 82) “[...] reunir os documentos que estima necessários é uma das tarefas mais difíceis do historiador”. Com apoio no clássico livro de Cajori – *A history of mathematical notations* – primeira edição em 1929, iniciei a busca pelos principais autores que propuseram novas simbologias para o CDI. Considerei como principais aqueles autores que apresentaram discussões sobre a notação escolhida e, também, aqueles que propuseram notações que ficaram no esquecimento. No passo seguinte, procurei textos originais e ampliei a lista de autores, para introduzir matemáticos de outras nacionalidades, como aqueles trazidos pelo português José Anastácio da Cunha (1744 - 1787). Dei destaque no estudo aos críticos das notações. A última etapa foi a análise comparativa das notações. A fim de facilitar a apresentação das notações, as distribui em três períodos: 1) notações do CDI nos séculos XVII e XVIII; 2) notações do CDI no século XIX e 3) notações do CDI do século XX. O primeiro é o período do surgimento do CDI, quando os matemáticos foram naturalmente levados a introduzir simbolizações para os conceitos. O segundo período corresponde àquele em que ocorreram contribuições de muitos matemáticos propondo uma variedade de símbolos, e em que o CDI foi divulgado nos livros didáticos. O terceiro período foi o da estabilização, quando as notações se aprimoraram e não sofreram mais alterações significativas. Os símbolos dos conceitos basilares do CDI serão apresentados dentro do contexto da época. Começarei com o símbolo de integral.

Procurei seguir Foucault (2000), quando este diz que a história modificou sua visão a respeito do documento. Ele não é algo estático, inerte; é preciso criticá-lo e trabalhar em seu interior: organizando, recortando e identificando elementos que descrevam relações.

Deparei-me na leitura dos trabalhos originais dos matemáticos com o desafio da tradução, aqueles do século XVII e alguns do século XVIII foram escritos em latim, outros em inglês, francês e alemão. A principal fonte foi a Biblioteca Nacional da França – Gallica, seguida de meu acervo pessoal. Algumas notações usadas nos séculos XVIII e XIX não podem ser reproduzidas por um editor de texto; em vista disso, elas foram copiadas e incluídas como figuras.

No texto, usei as palavras, sinais e símbolos com o mesmo significado, embora tenha clareza acerca do fato que alguns autores, na atualidade, estabelecem diferenças entre eles. A partir dos estudos de semiótica, começaram a ser debatidas questões de diferenciações sutis existentes entre os termos signo e símbolo. “O mais corrente é utilizar o termo símbolo como um tipo particular de signo“ (Mora, 1978, p. 264). O uso das palavras sinal e símbolo depende do contexto e momento histórico.

Ao analisar as obras dos matemáticos citados, procurei traduzir o mais próximo possível do significado empregado pelo autor, à época. Em Lacroix (1820), aparece a palavra *signe*, que foi traduzida por sinal em vez de símbolo. Ele usou, também, a palavra característica para se referir ao sinal. Entretanto, em outros textos já traduzidos para o português, não alterei a expressão que o tradutor usou, como é o caso de João Bosco Pitombeira na tradução para o português do livro *Experiência Matemática*, que preferiu a palavra símbolo. Alguns autores citados, utilizaram a palavra notações, como Cajori (1993), que inclusive a usou no título do seu livro. Mário Silva (1948) traduziu do inglês para o português o livro *Introdução à matemática*; ele usou as palavras símbolo e simbolismo para expressar a mesma ideia que Cajori. Assim optamos, também, por utilizar as palavras notações e simbolizações como sinônimas.

Os séculos XVII e XVIII

> Sem uma notação bem desenvolvida, o cálculo diferencial e integral não poderia desempenhar sua grande função na matemática moderna. A história do desenvolvimento das notações do cálculo não é apenas interessante, mas pode servir de guia para a invenção de novas notações no futuro (Cajori, 1993, v.2, p. 196).

A importância da notação foi discutida desde o início, por seus criadores e, após, pelos seguidores destes, durante três séculos. Isaac Newton (1643 - 1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) defrontaram-se com a necessidade de simbolização. Cajori (1993) não exagerou quando afirmou que talvez nenhum matemático, além de Leibniz, tenha visto com tanta clareza a importância de uma boa notação em matemática. Ele escreveu que: “Parte do segredo da análise consiste na característica, ou seja, na arte de empregar os sinais disponíveis. E você vê, nesta pequena amostra que nos deu Viète e Cardano, que ainda não conhecemos todos os seus mistérios” (Leibniz, 1830, v. 2, p. 240). Os mistérios a que se refere Leibniz estão relacionados às dificuldades que surgem na introdução de novos símbolos. Ele não usava o termo “símbolo”; preferia a palavra “notação ou marcação”[2]. Usei, preferencialmente, a palavra símbolo que, conforme Almeida (2024, p. 36), é algo que, por uma convenção arbitrária, representa uma realidade complexa”. A leitura das cartas trocadas entre matemáticos, algo comum naquela época, é fonte fértil para entendermos as discussões que eles travaram e as justificativas dadas para as

[2] Na versão em francês do texto de Leibniz está: “Une partie du secret de l’analyse consiste dans la caracteristique, c’est à dire dans l’ art de bien employer les notes in se seri [...]

escolhas que fizeram. Exemplifico com a troca de cartas entre Leibniz e Johann Bernoulli (22/2/1696).

Bernoulli manifestou-se favorável a essas sugestões, embora, por força do hábito, ele continuasse com as suas antigas notações, que estavam em desacordo com o que Leibniz propunha. "É difícil adaptar-se", comentava Bernoulli (Leibniz, apud Cajori, v. 2, p. 183). As novidades simbólicas de Leibniz (1899) encontravam opositores na própria Alemanha. Por exemplo, Ehrenfried Walter von Tschirnhaus (1651-1708), em carta para Leibniz (sem data), manifestava-se pouco favorável às simbolizações de Leibniz, afirmando que essas formas incomuns de as expressar não tinham benefícios, atacando-as como “monstros de personagens” e tecendo elogios à Viète que preferiu usar as letras do alfabeto (Leibniz, s/d, p. 388). Leibniz, reconhecendo a importância dos símbolos que ele próprio introduzia, parece que tinha consciência de que eles precisavam ser funcionais e dizia: “Eu realizo o cálculo por meio de certos sinais novos de maravilhosa conveniência” (Leibniz, apud Cajori, 1993, v.2., p. 184). Este matemático alemão tinha a convicção do que propunha quanto aos símbolos. Pode-se falar, sem exageros, na arte simbólica de Leibniz.

Extrato da carta em Latim	Tradução livre da autora
In relatione ipsa notatum video non immerito, interesse Reipublicae Literariae discentiumque inprimis, ut consentiant Viri Docti in easdem notas. Quare velim audire sententiam tuam, an probes mecum adhiberi notam $\int$ pro summis, ut adhibetur nota d pro differentiis; item an approbes meam rationem exhibendi subinde divisionem per duo puncta, verbi gratia, ut a : b idem sit quod $\frac{a}{b}$, id enim praesertim in typis commodum est, ne linearum spatium amittatur. Et constat proportiones a nonnullis solere tali ratione exhiberi a : b :: c : d, cum revera res redeat ad quotientium aequalitatem, sufficit scribi meo more a : b = c : d seu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Sunt et alia in notis fortasse utiliter observanda, de quibus alia occasione.	No que diz respeito às notações (marcas), vejo claramente que é do interesse da “República das letras” e, em especial, dos estudantes, que os eruditos cheguem a um acordo sobre as notações (marcações). Por conseguinte, gostaria de obter a sua opinião, se aprova a marcação $\int$ de soma, tal como a notação **d** é apresentada para as diferenças; também se aprova a minha designação de razão como se fosse uma divisão, por dois pontos, por exemplo, que a: b seja o mesmo que $\frac{a}{b}$; isto é muito fácil de digitar, o espaçamento das linhas não é perturbado. Talvez seja bom examinar outras notações, em outra ocasião.

Fonte: Leibniz, G. Leibnizens gesammelte Werke, 1860.

Para Whitehead (1948, p. 56), “Uma propriedade importante de qualquer simbolismo é a sua concisão: deve ser rapidamente apreendido pela vista e ser escrito com rapidez”. Um exemplo disso foi a adesão, quase sem controvérsias, do símbolo de integral – $\int$ – que é um símbolo rápido para expressar a integral ou uma soma. Embora o francês Charles Reyneau (1708) tenha proposto um símbolo semelhante ao de Leibniz, ele não era alongado e tinha como acréscimo um ponto; o S. era mais uma abreviação da palavra soma.

Figura 1 – Símbolo de integral por Reyneau

$$u = S.\ \frac{r\,dx}{\sqrt{2rx - xx}}\ ;\ \text{ce qui donnera}\ du = \frac{r\,dx}{\sqrt{2rx - xx}}$$

Fonte: Reyneau, 1708, v. 2, p. 309

Segundo Cajori, apenas um matemático no continente europeu deliberadamente rejeitou o símbolo proposto por Leibniz para a integral. Este foi o matemático alemão, August L. Crelle (1780-1855). Ele começa afirmando que o cálculo integral nada mais é que o inverso do cálculo diferencial; entretanto, quando se trata de simbolizar, ele despreza o símbolo proposto por Leibniz e cria um outro.

> [...] afinal, eles geralmente tratam de indicar as chamadas integrais, pelo sinal S, enquanto ainda, mesmo os termos usuais de cálculo com quantidades variáveis não entendem que a integração não é nada diferente da operação inversa, a diferenciação. Este caso é o primeiro e ao mesmo tempo, um dos mais requintados, onde a regra acima e onde a escolha de um novo um sinal, devido a sua dependência de um objeto para o qual o sinal que foi definido, não é mais permitido. (Crelle, 1813, p. 88-89).

Ele sugere que se use o sinal da divisão, denotando a integral como o inverso da notação para a derivação, ou seja, $\frac{1}{d}$ para o inverso da derivada primeira e $\frac{1}{d^2}$, para a inversa da derivada segunda. No original em alemão, Figura 2, aparece a palavra *Zeichen*, que foi traduzida (tradução livre feita pela autora) por sinal ou marca.

Figura 2 – Fragmento da inserção da notação proposta por Crelle

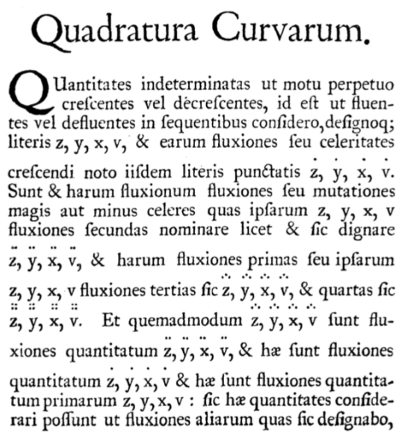
XVII. Die Anwendung des Zeichens $\frac{1}{d}$ für die Zurückleitung auf alle weiter vorkommende Fälle hat keine Schwierigkeit, denn alle diese Fälle sind immer nur die umgekehrten der Ableitung.

Fonte: Crelle (1813, p. 88)

Enquanto Leibniz e seus discípulos propagavam a nova notação do CDI, na Inglaterra, Newton criava a sua própria simbolização. Para Cajori (1993), em 1665, Newton já usava os pontos para indicar velocidades ou fluxões: $\dot{x}$, $\ddot{x}$, ... Em 1704, no texto *Quadratura Curvarum*, ele deixou bem claras as suas notações. Na Figura 3, apresento um fragmento do texto, publicado na Ótica.

Conforme Davis e Hersh (1985, p. 154-155), entre as principais funções de um símbolo matemático está a de "designar com precisão e clareza e de abreviar". Mas nem sempre a precisão e clareza puderam ser vistas nos símbolos que alguns matemáticos criaram, por exemplo, Newton.

Figura 3 – Notações de Newton


Quadratura Curvarum.

Quantitates indeterminatas ut motu perpetuo creſcentes vel decreſcentes, id eſt ut fluentes vel defluentes in ſequentibus conſidero, deſignoq; literis z, y, x, v, & earum fluxiones ſeu celeritates creſcendi noto iiſdem literis punctatis $\dot{z}$, $\dot{y}$, $\dot{x}$, $\dot{v}$. Sunt & harum fluxionum fluxiones ſeu mutationes magis aut minus celeres quas ipſarum z, y, x, v fluxiones ſecundas nominare licet & ſic dignare $\ddot{z}$, $\ddot{y}$, $\ddot{x}$, $\ddot{v}$, & harum fluxiones primas ſeu ipſarum z, y, x, v fluxiones tertias ſic $\dddot{z}$, $\dddot{y}$, $\dddot{x}$, $\dddot{v}$, & quartas ſic $\ddddot{z}$, $\ddddot{y}$, $\ddddot{x}$, $\ddddot{v}$. Et quemadmodum $\dddot{z}$, $\dddot{y}$, $\dddot{x}$, $\dddot{v}$ ſunt fluxiones quantitatum $\ddot{z}$, $\ddot{y}$, $\ddot{x}$, $\ddot{v}$, & hæ ſunt fluxiones quantitatum $\dot{z}$, $\dot{y}$, $\dot{x}$, $\dot{v}$ & hæ ſunt fluxiones quantitatum primarum z, y, x, v : ſic hæ quantitates conſiderari poſſunt ut fluxiones aliarum quas ſic deſignabo,

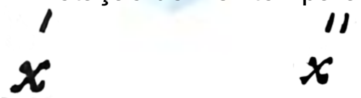
"Quadratura das curvas.
Quantidades indeterminadas que aumentam ou diminuem em movimento, perpetuamente, como fluxos e fluentes, eu descrevo assim: as letras z, y, x, v, para seus fluxos e as letras com pontos $\dot{z}$, $\dot{y}$, $\dot{x}$, $\dot{v}$, para velocidades. Existem também os fluxos desses fluxos, que podemos chamar de fluxos segundos, que designarei por $\ddot{z}$, $\ddot{y}$, $\ddot{x}$, $\ddot{v}$, e os terceiros fluxos de z, y, x e v que são $\ddot{z}$, $\ddot{y}$, $\ddot{x}$, $\ddot{v}$, e as fluxos quartos:... "(Tradução livre da autora)

Fonte: Newton, Ótica, 1704, p. 170

Newton considerava esses objetos matemáticos não como seres ideais, mas como pertencentes ao mundo real, assim, as quantidades matemáticas não eram compostas de partes extremamente pequenas, mas surgiam pelo movimento; as linhas eram geradas não pela posição de suas partes, mas pelo movimento contínuo de seus pontos, assim como as superfícies eram descritas pelo movimento de linhas, e os sólidos, pelo movimento de superfícies, os ângulos, pela rotação dos lados e assim por diante. Esta gênese, para ele, era fundada na natureza e podiam ser vistos, todos os dias, no movimento dos corpos (Newton, 1704/1706).

Algumas dificuldades tipográficas surgiram quando ele precisou usar frações, como "$\dot{z}:\dot{x}$, que modernamente seria simbolizado por $\frac{dz}{dt}:\frac{dt}{dx}$. Para a integral de x, na mesma obra, usou a notação à esquerda e, para a integral da integral, a notação à direita da figura 4.

Figura 4 – Notação de Newton para integral



Fonte: Tractatus de quadratura curvarum, 1704/1706, p. 7

No texto *De analysi per equationes numero terminorum infinitas*, Newton experimentou outra notação para a integral – um retângulo envolvendo a expressão a integrar, como na figura 5.

Figura 5 – Outra notação de integral segundo Newton

$$\text{aream } \frac{x^2}{2} - \frac{ax}{4} + \boxed{\frac{aa}{64x}} - \frac{131a^3}{512x} - \frac{509a^4}{32768x^2}$$

Fonte: https://www.newtonproject.ox.ac.uk/view/texts/normalized/NATP00204

O símbolo retangular, na figura 5, que embora sugira que se trata de uma área, não é conciso, é difícil de desenhar, confunde a leitura. Podemos dizer que as notações de Newton tiveram pouca chance, se comparadas com o símbolo proposto por Leibniz, que foi adotado sem reservas.

Figura 6 – Notação de Euler para os limites da integral

$$\int \frac{x^{p-1}\,\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x^n = \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \text{P et}$$

$$\int \frac{x^{p-1}\,\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} \begin{bmatrix} \text{ab } x^n = \frac{1}{2} \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \text{Q},$$

Fonte: Euler (1794, p. 323)

Os limites da integral, inicialmente, foram indicados com palavras. Euler foi o primeiro a usar uma simbologia para representá-los. Na Figura 6, os limites estão inseridos no símbolo da integral (**ab** significa começo ou de; **ad** significa para).

Cajori (1993) propôs critérios a serem observados na criação de boas notações em matemática. Segundo ele, estas deveriam ser: 1) concisas; 2) extensíveis a novas ideias; 3) tipograficamente fáceis de reproduzir. Se aplicados os critérios de Cajori, algumas das notações acima não seriam aprovadas.

Críticas de Berkeley

Para Berkeley, os criadores do CDI poderiam estar enganados, por palavras, termos ou mesmo sinais (símbolos). Ele prossegue nas suas críticas.

> Nada é mais fácil do que conceber expressões ou notações para fluxões e infinitesimais de primeira ordem, segunda, terceira, quarta e subsequentes ordens, procedendo de uma mesma forma regular sem fim ou limite $\dot{x}$, $\ddot{x}$. $\dddot{x}$. ... &c. ou dx. ddx. dddx. ddddx. &c" (Berkeley, 2002, p. 4).

Segundo ele, só aparentemente estas expressões estavam claras na mente.

> Se retirarmos o véu e olharmos por baixo, se deixarmos de lado as expressões, nos pusermos atentamente a considerar as coisas em si mesmas, que devem ser expressas ou assinaladas, descobriremos muito vazio, escuridão e confusão; se não me engano, impossibilidades e contradições diretas (Berkeley, 2002, p. 4).

Já no início do século XVIII, encontrar uma voz como a de Berkeley, que não apenas questionou as bases do CDI, mas também de suas notações, parece-me de extrema relevância para entendermos como a simbologia foi se transformando e aperfeiçoando.

> Admito que os sinais podem ser feitos para denotar qualquer coisa ou nada; e, consequentemente, que, na notação original x + σ, o σ pode ter significado de um incremento ou nada. [...] você deve argumentar consistentemente com um significado único e não aceitar um duplo significado: o que se torna um sofisma manifesto. Quer se argumente em símbolos ou em palavras, as regras da correta razão continuam a ser as mesmas (Berkeley, 2002, p. 7).

Não se pode abordar o século XVIII sem se referir à Leonard Euler. Em *Introdução à Análise Infinitesimal*, de 1748, ele começou o CDI pelo conceito de função, no qual apresentou a seguinte definição: “Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de qualquer maneira que seja, de mesma quantidade, e de números e quantidades constantes” (Euler, 1796, p. 2). Na publicação *Institutiones calculi differrentialis*, em 1755, Euler criticou a notação de Newton, dizendo que dever-se-ia arrebatar a palma dos ingleses no que se refere à simbologia, pois as simbologias são inaptas: “[...] o símbolo não pode ser refutado se o número de pontos fosse suficiente de modo a ser facilmente contado, mas se escrevemos muitos pontos, se produzirá a maior confusão e muitos inconvenientes”. Euler está se referindo aos pontos que indicam a derivada primeira e as derivadas sucessivas. Ele prossegue nas críticas dizendo: “[...] o uso dos pontos para a diferencial décima (figura 7) é extremamente inconveniente” (Euler, 1755, p. 100). Ele propõe substituir essa diferencial pela notação $d^{10}y$.

Figura 7 – Notação de derivada décima

Fonte: Euler (1755, p. 101)

Outro expoente do século XVIII foi Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) Ele introduziu uma nova notação para as derivadas no livro *Théorie des fonctions analytiques* (1797) e deu destaque ao conceito de função ao usá-lo no título da obra. Lagrange definiu derivada sem uso de infinitamente pequenos ou limites. Ele preferiu usar as derivadas de uma função, usando o desenvolvimento da função em série de Taylor, para chegar numa expressão do tipo: $f(x+i) = fx + pi + qi^2 + ri^3 + \&c,$ e achar as funções derivadas p, q, r, &c que dependem da função primitiva fx (p. 13). Prosseguindo nas explicações, ele considera como f’x, é a primeira função derivada de fx e é igual a p.

> Então, por simplicidade e uniformidade, denotamos por $f'x$ a primeira função derivada de fx, por $f''x$ a primeira derivada de $f'x$, por $f'''x$ a primeira derivada de $f''x$, e assim por diante. Vamos colocar p= $f'x$; e $p' = f''x$, então $q = \frac{p'}{2}$=$\frac{f''x}{2}$ então $q' = \frac{f'''x}{2}$; e $r = \frac{q'}{3}$=$\frac{f'''x}{2.3}$ então $r' = \frac{f^{iv}x}{2.3}$ e daí $s = \frac{r'}{4} = \frac{f^{iv}x}{2.3.4}$, e assim sucessivamente (Lagrange, 1797, p. 14).

O matemático suíço Simon-Antoine Jean L'Huilier (1750-1840) despontou ao introduzir, na Europa, pela primeira vez um símbolo para o conceito de limite (O'Connor; Robertson, 2000). Na página 24, ele usa a notação abreviada para limite – Lim. Constata-se que ele usou as três primeiras letras da palavra latina para limite, sendo a primeira maiúscula, e após a última letra usou um ponto. Nesse ensaio, L'Huilier explicou porque fez uso dessa notação: "Para facilitar o cálculo por uma notação mais cômoda, é conveniente designar por $lim.\frac{\Delta P}{\Delta x}$ o limite da relação das mudanças simultâneas de P e x, por $\frac{dP}{dx}$ de maneira que $lim.\frac{\Delta P}{\Delta x}$ ou $\frac{dP}{dx}$ designe a mesma coisa" (L'Huillier, 1786, p. 31).

Francisco Borja Stockler (1759-1829) disse, no seu *Compendio da teórica dos limites* (1794), que os matemáticos criadores do CDI estavam muito mais preocupados em aplicar esse conhecimento nas ciências exatas do que em aperfeiçoar as suas bases. Especificamente sobre a notação para limites, ele seguiu L'Huillier (1786), usando a mesma simbologia.

Não apenas Berkeley foi crítico em relação às bases do cálculo e suas simbolizações; também Stockler (1794) afirmava que o conceito de limite repousava em terreno arenoso.

> Quando no cálculo quisermos exprimir o limite de qualquer variável e não tivermos para isso determinada letra do alfabeto, escreveremos Lim – abreviatura da palavra limite – antes do caractere, ou da expressão, que representar a variável. Assim, para exprimir limite de x, escreveremos Lim. x, para exprimir limite de xy, escreveremos Lim. (xy), para exprimir limite de y^x, escreveremos Lim. (y^x) e assim semelhantemente (Stockler, 1794, p. 29).

Na França, em 1797, Lazare Carnot (1753-1823) considerava os conceitos basilares do CDI como "seres singulares" que por vezes desempenhavam o papel de quantidades reais e, outras vezes, desafiavam a imaginação. Ele usou duas notações diferentes para limite em seu livro Metafísica do Cálculo (Carnot, 1797). A primeira é uma abreviação da primeira letra da palavra limite – L., que aparece, na página 43, a outra é o símbolo – lim. – o qual efetivamente começou a usar na página 72.

Os matemáticos e autores de livros de matemática que abordaram o CDI dividiram suas preferências entre Newton, Leibniz e Lagrange; alguns utilizaram uma mistura dessas notações. Em Portugal, em 1790, a simbologia de derivada e integral usada por José Anastácio da Cunha começa com uma função Γx, “[...] chamar-se fluxão de Γx, que será denotada d Γx" (Cunha, 1790, p. 194). Destacou as notações usadas para as derivadas sucessivas: “Os matemáticos escrevem ddz ou $d^2 z$ em lugar de d(dz); $d^3 z,$ em lugar de d(d(dz)) e assim por diante, também escrevem $d^n z$ em lugar de $(dz)^n$"(idem). No capítulo xviii, ele introduziu novos símbolos para a derivada, que ele chamou de fluxão “d^x" e para o fluente ou integral usou "$\int^x$" (Cunha, 1790, p. 263).

Segundo Cajori, até o final do século XVIII, surgiram oito símbolos diferentes só para derivada, os quais são apresentados no quadro 1. Desses, pelo menos três símbolos continuam a ser utilizados nos livros de Cálculo Diferencial e Integral: os símbolos de Leibniz, Lagrange e Arbogast.

Quadro 1 - Resumo de símbolos para derivada

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) Alemanha	$\frac{dy}{dx}$
Isaac Newton (1643-1727) Inglaterra	$\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$
John Landen (1719-1790)	$x \perp y$
Joseph-Louis Lagrange (1716-1813) Itália	f’(x), y’
Johann Pasquich (1753- 1829) Hungria	εy
Johann Phillip Grüson (1768-1857) Alemanha	$\frac{\mathfrak{z}y}{x}$
Louis François Antoine Arbogast (1759-1803) França	Dy

Fonte: Cajori (1993, v. 1, p. 214)

A potência do simbolismo foi metaforicamente comentada por Gabriel Cramer (1750, p. viii): “ [...] a álgebra é a única que fornece os meios de distribuir as curvas em ordens, tipos, gêneros e espécies, que como em um arsenal, as armas estão arrumadas de tal modo que permitem ser escolhidas, sem hesitar, aquelas que podem servir na resolução de um problema”.

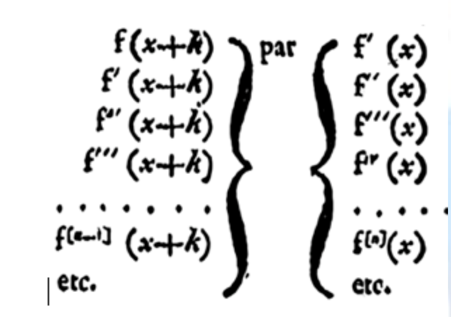
O século XVIII se encerra com uma variedade de símbolos para o CDI, criados, copiados ou adaptados por matemáticos de vários países: Inglaterra, Alemanha, França, Portugal, Suíça e outros que não foram aqui citados. Os seguidores, ainda titubeando, dividiram-se em suas escolhas, mas não faltaram críticos às notações principalmente no século XVIII, quando as bases do CDI ainda eram frágeis.

Século XIX

> O simbolismo da matemática é, na verdade, a expressão feliz das noções gerais que dominam a ciência (Whitehead, 1948, p. 62).

Na transição do século XVIII para o século XIX, surge Sylvestre Lacroix (1765-1843), um escritor de importantes livros didáticos de matemática, entre eles o *Traité de Calcul differéntiel et du Calcul integral* (1797-1798), obra vasta, em dois volumes, em que reuniu o conhecimento do CDI desde Leibniz e Newton até Lagrange. Neste, usou para as derivadas a notação de Lagrange. Considerando uma função f(x), as derivadas são representadas por "$f'(x), f''(x), f'''(x)$, etc" (Lacroix, 1797, p. 90), conforme a figura 8.

Figura 8 – Extrato da notação de derivadas de Lacroix



Fonte: Lacroix (1797, p. 90)

Em 1802, publicou uma versão abreviada – *Traité élémentaire de calcul differéntiel et du calcul integral* – que foi traduzida para várias línguas e muito utilizada no ensino do CDI na França, Alemanha, Inglaterra e Brasil, entre outros países. Ele iniciou o livro com o conceito de função, chamando à atenção para os símbolos. "Uma letra é frequentemente usada como um sinal ou característica da palavra função; assim, os símbolos u = f(x), v =F(x), z =$\varphi(x)$ expressam que u, v e z são várias funções de x" (Lacroix, 1820, p. 2). Lacroix seguiu a notação de Leibniz, usando du para a diferencial e $\frac{du}{dx}$ para o coeficiente diferencial. Para as derivadas sucessivas, usou a simbologia:" $\frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \frac{d^3u}{dx^3}$, etc" (Lacroix, 1820, p. 22). Para a integral, Lacroix seguiu, também, Leibniz (figura 9) e justificou dizendo que essa foi a letra usada pelo matemático alemão como inicial da palavra soma: "[...] eles deram à função que chamamos primitiva o nome de integral, como sendo o resultado da integração de todos os diferenciais" (Lacroix, 1820, p. 227).

Figura 9 – Símbolo de integral por Lacroix

$$u+v-w=\int(du+dv-dw)$$

Fonte: Lacroix (1820, p. 227)

Retomando Crelle, sua notação para derivadas, em 1813, foi uma mistura daquelas já conhecidas. No caso de uma função “f x”, a derivada primeira seria “$d\ f\ x$”; Se a função z dependesse de duas variáveis, z (x,y), a expressão “ $\frac{d}{x}z$" é a primeira derivada em relação a x ou” $\frac{d}{x}f\ x\ y$ " e para a variável y, analogamente “$\frac{d}{y}z$ ou $\frac{d}{y}f\ x\ y$" (Crelle, 1813, p. 72).

Augustin-Louis Cauchy (1789-1843) usou uma notação mista no *Calcul Différentiel* (1829). Assim ele explicou a sua notação:

> Para uma função f(x), a função derivada, segundo ele, designa-se por y’ ou f’(x). Detalhando: [...] as diferenciais dx, dy da variável independente x e da função $y = f(x)$ serão tais quantidades escolhidas, que a sua razão $\frac{dy}{dx}$ coincide com a última razão das pequenas quantidades infinitesimais $\Delta x, \Delta y$, digamos, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, isto é, com o limite $y' = f'(x)$ ou $dy = y'dx$ que podemos apresentar de uma das formas $\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$ ou df(x)=f’(x)dx (Cauchy, 1829, p. 18).

Cauchy (1829) explora muito pouco o conceito de limite e usa eventualmente a notação de limite como no exemplo da figura 10.

Figura 10 – Notação de limite

$$\lim\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = e^x.$$

Fonte: Cauchy (1829, p. 11)

Contemporâneo de Cauchy, Martin Ohm (1792-1872) experimentou uma nova simbologia para a diferencial. Ele seguiu as ideias de Lagrange desenvolvendo a derivada em série de Taylor e, para isso, usou os símbolos da figura 11, para a derivada n-ésima da função y (x). Para a derivada primeira da função y, usou ∂y_x; para a derivada segunda, $\partial^2 y_x$; para a derivada terceira, $\partial^3 y_x$ e assim por diante.

Figura 11 – Notação de Ohm para derivada

$$\partial^n y_x \quad \text{oder} \quad \frac{d^n y}{dx^n} = \quad n!\,P_n$$

Fonte: Ohm (1830, p. 4)

Para uma função de duas variáveis $F_{x,y}$, Ohm usou os seguintes símbolos: ∂F_x e ∂F_y. Entretanto, em torno de 1770, Monge já havia proposto os símbolos $\frac{\partial V}{dx}$ e $\frac{\partial V}{dy}$, semelhantes aos que Ohm usou.

Embora as derivadas parciais apareçam desde Leibniz e Newton, elas não tinham notação específica. Segundo Cajori (1993), Leibniz usou o símbolo “∂m" em uma carta para L’Hospital, em 1694, mas não em seus escritos. Por sua vez, Euler usou letras maiúsculas como P, Q. R para designar as derivadas parciais de x, y, z. Assim “$(\frac{dP}{dy})$" como a derivada parcial de P em relação a y (Euler, 1755, p. 195).

Lacroix observou que os parênteses usados por Euler para as derivadas parciais – $\left(\frac{dz}{dx}\right) e \left(\frac{dz}{dy}\right)$ não eram necessários, pois as expressões $\frac{dz}{dx}$ e $\frac{dz}{dy}$ representavam com clareza a mesma ideia. Segundo Cajori (1993, v.2, p. 227), “[...] a atitude de Lacroix em relação às derivadas parciais teve um grande número de seguidores em todos os lugares, quase até o presente. Nenhuma notação especial foi empregada para a derivada parcial ordinária”.

Benjamin Pierce (1809-1880) inovou com sua simbologia nos EUA, quebrando a tradição Newtoniana. A figura 12 mostra a simbologia que usou para a derivada em 1841. O símbolo Δ inserido antes da função indicaria diferença.

Figura 12 – Símbolos de Pierce

The letters $\Delta.$, $\Delta.'$, $\Delta.''$, &c., $\Delta._0$, $\Delta._1$, &c., $\nu.$, $\nu.'$, &c. placed before a function, denote its differences, and corresponding differences are denoted by the same letters. Thus

$$\Delta . f . x, \ \Delta . f .' x, \ \&c.$$

are corresponding differences of $f.(x)$, $f.'(x)$, &c., and these differences correspond to the difference $\Delta . x$ of the variable, so that

$$\Delta . f . x = f . (x + \Delta . x) - f . x. \qquad (421)$$

$$\Delta . f.' x = f.' (x + \Delta . x) - f.' x. \ \&c.$$

Differentials are denoted by the letters δ, δ', &c., d, d', &c.

Fonte: Pierce (1852, p. 179)

Cabe uma referência às simbologias usadas pelo matemático húngaro Wolfgang Bolyai (1775-1856) por sua singularidade em relação às demais notações apresentadas. Para as diferenciais, os símbolos por ele introduzidos foram aqueles do Figura 13.

Figura 13 – Notações de Bolya

diferencial absoluta de uma função de variáveis x, y, ... a derivada n-ésima $d^n f(x, \ldots)$	
se n=1	
Integral dupla	denotat 3tiam functionis potentiam. Patet hinc $\int^2$ denotare $\int\int$
Integral	

Fonte: Bolya (1832, p. 182)

A simbologia pesada de Bolya não atraiu seguidores. Como diz Whitehead (1948), se for uma boa notação, ela aumentará a potência humana, o que não parece ser o caso daquela de Bolya. As notações para limites no século XIX receberam um forte impulso por Karl Weierstrass (1815-1897) e estão descritas em Silva (2024). Uma moderna simbologia para a integral definida só surgiu no século XIX. Como já visto, Euler não inseriu no símbolo $\int$ os índices superiores para indicar o limite inferior e superior da integral.

Segundo Cajori (1993) foi Joseph Fourier (1768-1830), em 1822, o primeiro a usar os limites inferior e superior no símbolo $\int$ para a integral definida (Figura 14). Assim foi descrito por Fourier (1822, p. 237): “Os índices 0 e π que se juntam ao sinal $\int$ são conhecidos como os limites da integral”. Ele explica ainda que, já em 1819, teria aparecido um artigo de Fourier com essa notação na Academia de Ciências da França.

Figura 14 – Notação de integral definida por Fourier

L'intégrale $\int_0^\pi x \sin. i x \, dx$

Fonte: Fourier (1822, p. 237)

Entretanto, Cauchy (1825), em sua *Mémoire* de 28 de outubro de 1822, apresentada a Academia de Ciências, afirma que ele teria usado a mesma notação, destinada a representar uma integral definida, entre os limites reais x_0 e X para uma função f(x), na Figura 15.

Figura 15 – Integral definida

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\, dx$$

Fonte: Cauchy (1829, p. 1)

Segundo Davis e Hersh (1985, p. 154), entre os símbolos "há sem dúvida uma lei de sobrevivência do mais apto". No caso do símbolo da integral indefinida proposta por Leibniz e da incorporação dos limites para a integral definida, pois foram símbolos que satisfizeram essa lei. Cajori (1993, v. 2, p. 250) afirmou que o símbolo de Fourier ganhou rapidamente adeptos, como Fresnel, Cauchy e Poisson, que declarou ser uma "notação muito cômoda". Independentemente, surgiram outras simbolizações para a integral definida, como a de Martin Ohm, apresentada na Figura 16. O símbolo que usou na integral significa que os limites são a e α (inferior e superior).

Figura 16 – Símbolos para a integral definida de Ohm

Autor	Ano	Símbolos
Martin Ohm	1830	$\int_{x \div a} \varphi \cdot dx = \int_{v \div \alpha} \left(\varphi \cdot \frac{dx}{dv}\right) \cdot dv$

Fonte: Ohm (1830, p. 151-152)

Uma mudança significativa na notação de limite ocorreu na década de 1840, quando Weierstrass acrescentou ao símbolo $\lim f(x)$, referência à aproximação dessa variável a um determinado valor. Nas obras completas de Weierstrass, foi possível identificar o primeiro uso do simbolismo para limite que o autor escolheu, em 1841 (Silva, 2024). Em 1842, o símbolo usado pelo autor aparece na figura 17.

Figura 17 – Símbolo de limite proposto por Weierstrass

$$\operatorname*{Lim}_{\nu=\infty} \frac{c_{\nu+1}}{c_\nu} = ng(m-1)(1+\alpha)^{m-1}$$

Fonte: Weierstrass (1894, p. 80)

O século XIX trouxe muitas contribuições para a simbolização dos conceitos do CDI, sendo que muitos dos símbolos que Cajori (1993) reuniu em sua obra de 1929 jazem no cemitério das notações: foram abandonados por falta de uso e adesão.

Entretanto, as suas mais significativas contribuições foram selecionadas e apresentadas nesse item.

Século XX

> Parece, no entanto, que por vezes os símbolos nos dão mais de volta do que pusemos neles, que são mais sábios do que seus criadores (Davis, Hersh; 1985, p. 156).

O decorrer do século XX parece concordar com os autores da epígrafe acima. O poder depositado nos símbolos do CDI, desde Leibniz, trouxe o retorno da facilidade em escrever a matemática com mais precisão, livre das ambiguidades da linguagem natural. Com relação ao símbolo de limites, John Gaston Leathem (1871- 1923), ao introduzir a seta no símbolo de limite, o transformou. Ele considerou o caso de uma função f que tende ao infinito num ponto P no volume T. O objetivo era “cercar” o ponto P por uma superfície fechada t, e tomar o volume integral através da totalidade do volume T, exceto na parte incluída por t. Ao excluir P do domínio de integração, chega-se a uma integral finita. Ele prossegue explicando que, se tornarmos a superfície t cada vez menor em torno de P, a integral de volume tenderá a um limite: “A definição pode ser expressa simbolicamente assim : $\int^{T} f d\tau = \operatorname*{Lim}_{t \to 0} \int_{t}^{T} f \, d\tau$, onde o símbolo → é usado para denotar frases como ' tendendo para ' ou 'tende para,' de modo que t → 0 lê-se' como t tende para zero” (Leathem, 1922, p. 13). Na visão de Cajori (1993), o uso generalizado da notação de seta, provavelmente, pode ser atribuído à sua aparição em dois livros em 1908: *Uma introdução à teoria das séries infinitas* (1ª ed.), por Thomas John I' Anson Bromwich (1875-1929) e um *Curso de Matemática Pura*, por Godfrey Harold Hardy (1877-1947).

Em 1910, na publicação *The fundamental theorems of the Differential Calculus*, Young, ao abordar a pluralidade dos limites, usou uma notação própria para denotar o conjunto de todos os limites de f(x) no ponto a, enquanto que se soubermos que o limite é único a notação é a da Figura 18 à direita.

Figura 18 – Notação de Young para limite

$$\operatorname*{Llt}_{x=a} f(x) \qquad\qquad y = \operatorname*{Lt}_{x=a} f(x)$$

Fonte: Young (1910, p. 3-4)

No século XX, alguns símbolos para funções especiais foram criados, mas não houve propostas de novos símbolos para as derivadas e nem para as integrais.

Reflexões finais

Os séculos XVII e XVIII foram aqueles em que os matemáticos tiveram dúvidas sobre a notação mais adequada e quando mais críticas ocorreram às formulações propostas. No século XIX, muitas contribuições ocorreram para a simbologia matemática e notações inadequadas foram esquecidas; no século XX, pouco foi acrescentado às notações, que começaram a se consolidar. Entre todas as notações do CDI parece que o símbolo $\int$, criado por Leibniz, não encontrou rivais à altura, sendo, ele próprio, adaptado para as integrais definidas. O mesmo não se pode dizer em relação ao conceito de derivada. Houve muita hesitação em aceitar, por exemplo, a derivada parcial. Para Cajori (1993), os símbolos foram introduzidos à medida que a necessidade exigia e permaneceram de forma conservadora. Segundo esse autor, Leibniz foi o matemático mais bem sucedido construtor da linguagem simbólica que a ciência já teve. As diferentes simbolizações para as derivadas continuam expostas nos livros de CDI, mas sua relevância é comentada por poucos, entre os quais está Swokowski (1982) que chama a atenção para as diferentes simbolizações de derivadas, dizendo que o leitor deve se familiarizar com elas. Sem a simbologia, que representa uma enorme simplificação, seria muito trabalhoso aprender o CDI. Davis e Hersh (1985), ao abordarem a simbologia em matemática, falaram metaforicamente sobre a existência de "símbolos felizes". Concordo com eles: nesta investigação vi surgirem símbolos que podem ser considerados muito apropriados, pois, passados mais de trezentos anos, continuam a ser utilizados e não chegaram rivais modernos para os destituir do status que alcançaram.

Referências

ALMEIDA, Manoel. **Arqueomatemática**: arqueologia da matemática. Curitiba: editora do autor, 2024.

BERKELEY, George. **The analyst**. Dublin: David R. Wilkins (Ed.), 2002.

BLOCH, Marc. **Apologia da História ou o ofício do historiador**. Rio de Janeiro: Zahar, 2001.

BOLYAI, W. **Tentamen juventutem stuiosam in elementa matheseo pirae, elemtaris ac sublimioris, method intuitive, evidentiae que huic propria, introduducendi.** Tomus primus, 1832

CAJORI, Florian. **A history of mathematical notations**. New York: Dover, 1993.

CAUCHY, Augustin- Louis. **Mémoire sul es intégrales définies**, prises entre des limites imaginaires. Paris: Libraires du Roi et de la Bibliotheque du Roi, 1825.

CAUCHY, Augustin- Louis. **Leçons sur le Calcul Différentiel**. Paris: Libraires du Roi et de la Bibliothéque du Roi, 1829.

CARNOT, Lazare. **Réflexions sur la métaphysique du Calcul Infinitésimal**. Paris: Chez Duprat, 1797.

CRAMER, Gabriel**. Introduction a L'Analyse des lignes courbes algébriques**. Geneve: Chez les Freres Cramer & Cl. Philibert, 1750. Disponível em: https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bd6t57376812?rk=42918;4#. Acesso em: 12 de agosto de 2024.

CRELLE, August Leopold**. Versuch einer rein algebraichen und gegenwärtigen Zustande der Mathematik angemessenen Darstellung der Rechnung mit veränderlichen Grösse**n. Göttingen: Wandenhoel und Ruprecht, 1813.

CUNHA, José Anastácio. **Principios Mathematicos**. Lisboa: Oficina Rodrigues, 1790.

DAVIS, Philip; HERSH, Reuben. **A experiência matemática.** Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1985.

EULER, Leonard. **Introduction à L'Analyse Infinitesimale**. V.1. Paris: Chez Barrois, 1796.

EULER, Leonard. **Institutiones Calculi Differentialis**. Academiae Imperialis Scientiarum: Petropolotanae, 1755.

EULER, Leonard. **Institutiones Calculi Integralis**. V. iv. Petropoli; Academiae Imperialis Scientiarum, 1794.

FOUCAULT, Michel. **A arqueologia do saber**. Tradução de Luiz Felipe Baeta Neves, 6ª ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2000.

FOURIER, Joseph. **Théorie de la Chaleur**. Paris: Chez Firmin Didot, père et fils, 1822.

HALMOS, Paul; Steenrod, Norman; Schifferm, Menahem; Dieudononné, Jean. **How to write Mathematics**. Providence: Americal Mathematics Society, 1973.

L'HUILLIER, Simon Antoine. **Exposition Elémentaire des príncipes des calculs supérieurs**. Berlin: George Jacques Decker Imprimeur du Roi, 1786.

LACROIX, Silvestre. **Traité élémentaire du calcul différentiel et du calcul integral**. Tome 1. Paris: Duprat, 1797.

LACROIX, Silvestre. **Traité du calcul différentiel et du calcul integral**. Tome 1. 7ª ed. Paris: Mallet-Bachelier, 1820.

LAGRANGE, Joseph Louis. **Leçons sur le Calcul des Fonctions**. Paris: Chez Courcier, 1797.

LEATHEM, John Gaston. **Volume and surface integrals used in physics**. Reimpressão. Cambridge: University Press, 1922.

LEIBNIZ, Gottfried. **Leibnizens mathematische Schriften**, v. 2., 1830.

LEIBNIZ, Gottfried. **Leibnizens gesammelte Werke**. Georg Pertz (Org.). Halle: H. W. Schmid, 1860.

LEIBNIZ, Gottfried. **Der Briefwecksel von Gottfried Wilhelm Leibniz mit Mathematikern**. Berlin: Mayer & Müller, 1899.

MORA, J. F. **Dicionário de Filosofia**. Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1978.

NEWTON, Isaac. **Optick or a treatise of the reflexions, refractions, inflexions and colours of ligh**t. London: Sam. Smith and Benj. Walford, 1704.

NEWTON, Isaac. **Tractatus de Quadratura Curvarum**. 1704/1706. Disponível em https://www.digitale-sammlungen.de/en/view/bsb10053711?page=8. Acesso em 12 de julho de 2024.

OHM, Martin. **Lehrbuch der höheren Analysis**. Parte 2. Berlin: T.H. Riemann, 1830.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E, F. **Simon Antoine Jean Huiller**. Mac Tutor 2000. Disponível em https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lhuilier/. Acesso em: 10 julho de 2024.

PIERCE, Benjamin. **An elementar treatise on curves, functions and forces**. V.1. Boston e Cambridge: James Munroe and Company, 1842.

REYNEAU, Charles. **Usage de L' Analyse**. Tome II. 2ª ed. Paris: Chez Quillau, 1708.

SILVA; Circe Mary Silva. Simbologia matemática para o conceito de limite dos séculos XVIII ao XX. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 38, 2024, p. 1- 19.

SWOKWSKI, Earl. Calculo con gemetría analítica. 2ª ed. Belmont: Wadsworth Internaciona Iberoamérica, 1982.

STOCKLER, Francisco Garção. **Compêndio da theorica dos limites ou introdução ao methodo das fluxões**. Lisboa: Oficina da Academia Real das Ciências, 1794.

SWIFT, Jonathan. **Viagens de Gulliver**. 3. ed. São Paulo: CERED, 2006.

WEIERSTRASS, Karl. **Mathematische Werke von Karl Weierstrass**. Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission. Berlin: Academia de Ciências, 1894. Disponível em: https://archive.org/details/mathematischewer01weieuoft/page/254/mode/2up. Acesso em 20 jan. 2024.

WHITEAHED, Alfred Norton. **Introdução à matemática**. Coimbra: Armênio Amado, 1948.

YOUNG, William. **The Fundamental Theorems of The Differentiel Calcul**. Cambridge: University Press, 1910.

Submetido em: 16/12/2024

Aceito em: 01/09/2025