PERSPECTIVAS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

REVISTA DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL (UFMS)

ISSN 2359-2842 Volume 19, número 52 – 2026 DOI: https://doi.org/10.46312/h0e0nb71

Conhecimento Interpretativo de professores de matemática ao atribuir significado a produções de alunos no âmbito da translação

Mathematics teacher's Interpretative Knowledge when giving meaning to student's productions in the scope of translation

Caroline Almeida Souza Silva[1]

Miguel Ribeiro[2]

RESUMO

Conhecimento Interpretativo corresponde ao Conhecimento Matemático Especializado que fundamenta a prática interpretativa do professor e a proposição de *feedback* aos alunos. Focando no tópico da translação, visa-se compreender o conteúdo do Conhecimento Interpretativo e que *feedback* fornecem professores de matemática dos Anos Finais e do Ensino Médio quando atribuem significado a produções de alunos no escopo da translação. Implementou-se uma Tarefa Interpretativa de translação para 14 professores, cujas produções são analisadas considerando uma abordagem qualitativa, relacionando o conhecimento revelado, a prática interpretativa e o *feedback*. Os professores revelam conhecimento de o que é a translação e das propriedades do vetor da translação, efetuando uma prática interpretativa avaliativa ou equivocada, priorizando a identificação dos erros dos alunos e propondo um *feedback* superficial ou sobre como resolver o problema. Evidenciam-se relações entre o conteúdo de conhecimento que um professor possui em cada tópico e o Conhecimento Interpretativo e *feedback* que fornece.

PALAVRAS-CHAVE: Conhecimento Interpretativo. Tarefa Interpretativa. Translação. *Feedback* Construtivo.

---

[1] Instituição: Universidade Estadual de Campinas. Contato: caroldesouza86@gmail.com. Orcid: https://orcid.org/0000-0002-7089-7090.

[2] Instituição: Universidade Estadual de Campinas. Contato: cmribas78@gmail.com. Orcid: https://orcid.org/0000-0003-3505-4431.

ABSTRACT

Interpretive Knowledge corresponds to the Specialised Mathematical Knowledge that underpins teachers' interpretive practice and the provision of feedback to students. Focusing on the topic of translation, the aim is to understand the content of Interpretive Knowledge and the feedback provided by mathematics teachers in the lower secondary and high school when assigning meaning to students' productions within the scope of translation. An Interpretive Task of Translation was implemented for 14 teachers, whose productions were analyzed using a qualitative approach, relating revealed knowledge, interpretive practice, and feedback. The teachers reveal an understanding of translation and the properties of the translation vector, carrying out an evaluative or erroneous interpretive practice, prioritizing the identification of students' errors and proposing superficial feedback or feedback on how to solve the problem. Relationships were highlighted between the content knowledge a teacher possesses in each topic and the Interpretive Knowledge and feedback they provide.

KEYWORDS: Interpretative Knowledge. Interpretative Task. Translation. Constructive Feedback.

Introdução

Possibilitar que os alunos (e professores) desenvolvam o seu entendimento e conhecimento matemático no âmbito da Geometria associa-se ao desenvolvimento do Pensamento geométrico (Jones, 2020). Para focar a atenção no que é mais necessário, é fundamental identificar quais temas e tópicos são matematicamente problemáticos para os alunos (e professores). Entre esses temas, temos as transformações geométricas (ver, por exemplo, Thaqi, Gimenez e Aljimi, 2015) e, em particular, o tópico transformação geométrica isométrica translação. Desenvolver o conhecimento no âmbito da translação possibilita entender, por exemplo, vetor, localização, paralelismo, perpendicularismo, congruência e simetria. Embora a translação seja considerada pelos professores como *algo* simples (Gomes, 2012), essa *simplicidade* não é identificada nas aprendizagens e resultados, pois tanto os alunos revelam um conhecimento incompleto ou inadequado – usualmente denominadas de dificuldades (ver, por exemplo, Flores e Yanik, 2016) quanto os professores (ver, por exemplo, Gomes, 2012).

Para desenvolver esse conhecimento (e ultrapassar as dificuldades) dos alunos é necessário que se altere o nível de conhecimento do professor, já que entre os fatores controláveis, esse conhecimento é o que mais impacta as aprendizagens e resultados dos alunos (ver, por exemplo, Grossman, 2010). Tal conhecimento se configura como especializado para a prática profissional de possibilitar que os alunos entendam, sendo assumido aqui, na perspectiva do Conhecimento Interpretativo – CI

(Jakobsen; Ribeiro; Mellone, 2014) e do *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge*[3] – MTSK (Carrillo *et al*., 2018).

O CI corresponde ao Conhecimento Matemático Especializado (que é parte do MTSK) e permite ao professor implementar uma prática interpretativa. Essa prática envolve assumir como premissa para as discussões matemáticas o que os alunos conhecem e como conhecem, logo, demanda entender e interpretar as formas de Pensar matematicamente expressas nas produções dos alunos para, posteriormente, fornecer um *feedback* que contribua para desenvolver o conhecimento e competências dos alunos, e que depende do nível de CI do professor.

Uma vez que o Conhecimento Especializado não se desenvolve na prática de sala de aula ao longo dos anos de experiência do professor (Ribeiro; Mellone; Jakobsen, 2013), é fundamental conceitualizar e implementar contextos formativos que objetivem o seu desenvolvimento, sustentados na implementação de Tarefas para a Formação – TpF (Ribeiro; Almeida; Mellone, 2021), que objetivam proporcionar uma prática matemática interpretativa inovadora, correspondendo às denominadas Tarefas Interpretativas – TI (Mellone *et al*., 2020).

Buscando contribuir para melhor entender o conteúdo do Conhecimento Interpretativo, perspectivando um refinamento para a melhoria da qualidade da formação de professores, focamos na seguinte pergunta de pesquisa[4]: *que Conhecimento Interpretativo e feedback fornecem professores de matemática dos Anos Finais e do Ensino Médio quando atribuem significado a produções de alunos no escopo da translação?*

Algumas discussões teóricas

Entre as isometrias (translação, reflexão e rotação) a translação é considerada pelos alunos como a mais fácil (Moyer, 1978) e, pelos professores, como a mais simples (Gomes, 2012). Algumas das dificuldades dos alunos (associadas a um conhecimento incompleto e/ou inadequado) relativamente à translação são: (i) entenderem que figura e imagem são congruentes (Kidder, 1976), já que se trata de uma isometria; (ii) compreenderem as principais propriedades da translação no que tange ao entendimento do vetor de translação e seus elementos (direção, sentido e

3 Utiliza-se a nomenclatura em inglês por esta já ser reconhecida internacionalmente e a tradução poder acarretar uma dessignificação, que se encontra associada a cada uma das dimensões da conceitualização.
4 Uma versão preliminar deste texto foi apresentada no IX Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM).

módulo), que devem ser considerados para efetuar essa transformação (Gomes, 2012); (iii) entenderem o vetor de translação – efetuam a translação associando o módulo do vetor à medida da distância (espaço) entre figura e imagem (Flores; Yanik, 2016); (iv) considerarem que a distância entre um ponto e sua imagem corresponde ao módulo do vetor de translação (Sünker; Zembat, 2012). Essas dificuldades estão relacionadas ao conhecimento geométrico dos professores (ver, por exemplo, Gomes, 2012 e Thaqi, Gimenez e Aljimi, 2015), o que ilustra o impacto do conhecimento do professor no conhecimento e resultados dos alunos (Grossman, 2010).

Tal conhecimento é entendido aqui, na perspectiva das conceitualizações do *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* – MTSK (Carrillo *et al*., 2018) e do Conhecimento Interpretativo (Jakobsen; Ribeiro; Mellone, 2014). O MTSK considera o conhecimento do professor como especializado, tanto no âmbito do Conhecimento Matemático – *Mathematical Knowledge* (MK) –, quanto do Conhecimento Pedagógico – *Pedagogical Content Knowledge* (PCK).

O MK corresponde ao Conhecimento Matemático Especializado do professor como um todo coerente, em termos de uma disciplina científica, no contexto educacional e consideram-se três subdomínios: *Knowledge of Topics* (KoT), *Knowledge of the Structure of Mathematics* (KSM) e *Knowledge of Practices in Mathematics* (KPM). Pelo foco de análise, discutiremos sinteticamente o subdomínio KoT, apresentando exemplos do seu conteúdo no âmbito da translação.

O *Knowledge of Topics* (KoT) refere-se ao conhecimento do professor dos procedimentos, das formas de definir, propriedades que as constituem e dentre essas as que são fundamentais, das múltiplas representações para cada ente matemático e as aplicações e fenomenologia de cada tópico. É composto pelas categorias: (i) procedimentos; (ii) definições, propriedades e fundamentos; (iii) registros de representação; (iv) fenomenologia e aplicações. Discutiremos as categorias (i), (ii) e (iv) que são foco de análise.

Em (i) procedimentos, inclui-se o conhecimento do professor relativo aos diferentes modos de fazer matemático para resolver um determinado problema ou exercício, que inclui conhecer como se faz, quando se pode fazer, por que se faz dessa maneira e as características do resultado. Envolve, na translação, por exemplo, conhecer que os procedimentos para efetuar uma translação em 2D, contemplam os passos: (1) escolher um ponto P pertencente à figura, posicionar a extremidade do vetor (paralelo ao vetor de translação) nesse ponto, de modo que na ponta do vetor estará localizado o ponto P', ou seja, a cada ponto da figura adiciona-se um vetor, levando o ponto *P* para o ponto *P'*; (2) repetir o passo 1 quantas vezes for necessário, a depender da figura a transladar, escolhendo o mínimo de pontos; (3) unir os pontos transformados para completar a imagem.

Relativamente a (ii), definições, propriedades e fundamentos, corresponde ao conhecimento do professor dos atributos matemáticos que se consideram fundamentais para cada tópico. Em definições, inclui conhecer que definição é um conjunto minimal de propriedades que permite identificar univocamente o ente matemático a ser definido. No âmbito da translação, engloba, por exemplo, conhecer que uma definição de translação pode ser: a transformação T: Π → Π determinada pelo vetor v, que leva cada ponto P do plano Π no ponto $Tv(P)$ = P + v (Lima, 1992). Propriedades refere-se ao conjunto de todos os atributos matemáticos que são comuns aos tópicos ou entes matemáticos. No tópico translação, envolve conhecer que uma propriedade da translação corresponde à existência de congruência entre figura e imagem. Os fundamentos referem-se aos atributos matemáticos fundamentais sem os quais o tópico *não existe,* são, portanto, propriedades fundamentais. O conhecimento do professor necessita incluir conhecer que os fundamentos da translação são figura, vetor e imagem.

A (iv), fenomenologia e aplicações, integra conhecer os diferentes fenômenos e significados de suas interpretações associados ao tópico que permitem entendê-lo, conforme os diferentes contextos que possibilitam suas aplicações. Inclui, por exemplo, conhecer que a translação é uma transformação geométrica rígida determinada por um vetor (e seus três elementos – direção, sentido e módulo), em que se efetua uma operação com uma figura e se obtém uma imagem congruente com a figura inicial.

O conteúdo do MK sustenta a prática interpretativa do professor e tal prática envolve assumir como ponto de partida o que e como os alunos revelam conhecer em suas produções (Ribeiro; Almeida; Mellone, 2021). Esse conhecimento fundamenta o que o professor diz e faz, e como isso ocorre, em sala de aula; logo, para essa prática interpretativa é necessário um Conhecimento Matemático Especializado, denominado de Conhecimento Interpretativo – CI (Jakobsen; Ribeiro; Mellone, 2014). Segundo a Enciclopédia Springer Nature, define-se o CI como:

> o conhecimento matemático amplo e profundo que permite aos professores apoiarem os alunos no desenvolvimento de seu próprio conhecimento matemático tendo como ponto de partida seus próprios raciocínios e produções, independentemente de serem não usuais ou incorretas. O CI complementa o conhecimento de erros típicos ou estratégias dos alunos, com o conhecimento de possíveis origens de

> erros típicos e atípicos e o conhecimento do uso dos erros como uma efetiva fonte de aprendizagem (Di Martino *et al*., 2020, p. 426).

O CI corresponde ao MK que sustenta uma prática interpretativa, que entra em *jogo*, essencialmente, de forma diferenciada, quando o professor se depara com produções dos alunos que são inadequadas ou não usuais (matematicamente adequadas, porém desconhecidas pelo professor), que requerem um Conhecimento Matemático Especializado de um nível mais elevado para entender a matemática que as sustenta. Consideram-se diferentes práticas interpretativas que se sustentam no CI e são relacionadas a diferentes níveis de conhecimento – e subníveis (Mellone *et al*., 2017; Ribeiro; Silva; Menezes, 2025): (i) interpretação insuficiente; (ii) interpretação equivocada; (iii) interpretação avaliativa; (iv) interpretação para a prática letiva; (v) interpretação como pesquisa.

A (i) interpretação insuficiente associa-se a um conhecimento matemático que não permite que o professor responda a uma questão para os alunos (nível 0.1 de CI). Nessa prática interpretativa, um exemplo no âmbito da translação corresponde a não interpretar como matematicamente inadequada uma produção em que a imagem não é congruente com a figura (veja-se a produção de Paula na Figura 01[5]).

A (ii) interpretação equivocada corresponde ao conhecimento que fundamenta interpretar uma produção de aluno como matematicamente adequada, quando não é, logo, um conhecimento matemático que não permite, sequer, validar (ou não) a matemática envolvida (nível 0.2 de CI). Para a produção de Paula (Figura 01), corresponde a interpretar como matematicamente adequada, por ter obtido a imagem conforme a direção e o sentido do vetor de translação (desconsiderando a isometria).

A (iii) interpretação avaliativa envolve estabelecer uma correspondência entre o modo de proceder do professor e o do aluno, assumindo inadequada à produção que difere da sua (nível 1 de CI). Quando interpreta a produção de Paula (Figura 01) que desconsidera a congruência entre figura e imagem, o professor instrui o aluno o que tem de efetuar, fornecendo a resposta final.

Na (iv) interpretação para a prática letiva, a produção do aluno permite rever o planejamento e repensar a prática futura do professor, delineando um novo percurso para alcançar os objetivos de aprendizagens matemáticas (nível 2 de CI). Ao se deparar com a produção de Paula (Figura 01) – que desconsidera a congruência entre figura e imagem –, considera-a como parcialmente adequada, (re)pensando as tarefas

---

5 Para ilustração das interpretações serão mencionadas situações que constam na figura apresentada na p. 10. Portanto, é importante que se recorra à figura e à situação.

que serão propostas futuramente aos alunos, para que desenvolvam o seu conhecimento da congruência como uma propriedade da translação.

Na (iii) interpretação como pesquisa, o professor busca entender o porquê dos erros ou abordagens não usuais, assumindo as produções dos alunos como uma fonte de pesquisa e de discussão matemática, revendo a sua própria formalização matemática (nível 3 de CI). Ao interpretar a produção de Paula (Figura 01), considera-a como parcialmente adequada assumindo-a como uma fonte de pesquisa, focando no que o aluno já conhece, ou seja, translação é efetuada seguindo uma mesma direção e sentido do vetor de translação. Busca, também, entender os motivos que sustentam a dificuldade de compreender que figura e imagem têm de ser congruentes e que a translação demanda considerar o módulo do vetor de translação para cada ponto.

Para uma interpretação que contribua para que os alunos entendam e desenvolvam o seu conhecimento matemático, é fundamental escutar o Pensar matematicamente dos alunos, o que demanda níveis mais elevados de CI. Esse conhecimento não se desenvolve na prática de sala de aula, ao longo dos anos de experiência (Ribeiro; Mellone; Jakobsen, 2013), sendo, portanto, necessários contextos formativos com essa intencionalidade.

Associado ao CI encontram-se dois conceitos fundamentais: (i) espaço solução; (ii) *feedback*.

O (i) espaço solução do professor, corresponde ao conjunto de elementos de conhecimento que cada indivíduo possui (e pode mobilizar) para resolver um determinado problema, o que se associa a seu conhecimento das formas de proceder e representar um tópico ou conceito matemático (Jakobsen; Ribeiro; Mellone, 2014).

Levando em consideração que o espaço solução é, tipicamente, composto por um único elemento – o professor conhece uma única forma para resolver um problema (Jakobsen; Ribeiro; Mellone, 2014), é fundamental que a formação amplie esse espaço solução. Um nível superior de CI permite que o professor incorpore no seu espaço solução formas de Pensar, proceder e registrar distintas das suas, atribuindo-lhe significado. Sem esse nível de conhecimento é difícil (torna-se impossível) interpretar as produções dos alunos além de um "*(in)adequado*", sendo usual considerar inadequadas produções e formas de Pensar corretas e adequadas, apenas por serem diferentes da sua própria forma de proceder (Mellone *et al*., 2017).

O (ii) *feedback* corresponde à forma de comunicação entre professor e aluno (Black; Wiliam, 1998), e que se espera conter orientações que modificam o pensamento ou comportamento do aluno, visando às aprendizagens matemáticas, desenvolvendo conhecimento, habilidades e compreensão (Shute, 2008). Consideram-se cinco categorias de *feedback* (Galleguillos; Ribeiro, 2019): (a) *feedback* sobre como resolver o problema; (b) *feedback* confuso; (c) contraexemplo como *feedback*; (d) *feedback* superficial; e (e) *feedback* construtivo.

O (a) *feedback* sobre como resolver o problema, contém instruções indicando os procedimentos a serem seguidos pelos alunos (ensina a regra) para resolverem o problema específico. No (b) *feedback* confuso, a orientação é matematicamente adequada, porém complexa, dificultando o entendimento. Em (c) contraexemplo como *feedback* apresenta-se um exemplo explicativo para que o aluno entenda que sua produção está matematicamente inadequada, não o ajudando a entender, estabelecer relações e generalizar. O (d) *feedback* superficial contém uma orientação insuficiente ou ampla, que dificulta o aluno a entender seus erros. O (e) *feedback* construtivo contém orientações detalhadas (recorrendo, por exemplo, a questionamentos) que estimulam o aluno a (re)analisar sua produção para (re)formular raciocínios e aprimorar as estratégias utilizadas. Esse *feedback* construtivo ultrapassa a mera avaliação de correto ou incorreto (Santos; Pinto, 2009), oportunizando o desenvolvimento do conhecimento matemático (Jakobsen; Ribeiro; Mellone, 2014).

Contexto e método

Este trabalho forma parte de uma investigação que busca compreender que Conhecimento Interpretativo revelam e desenvolvem professores no âmbito das transformações geométricas isométricas e simetria. Tem-se como ponto de partida o que e como os professores conhecem e, por meio de discussões especializadas, busca-se desenvolver o seu conhecimento (elevar o nível) e analisar o que leva e esse desenvolvimento. Para tal, em um contexto formativo (nove encontros – 40 horas), foram conceitualizadas e implementadas cinco Tarefas Interpretativas – TI (Mellone *et al*., 2020). As TI estruturam-se em três partes: Parte Preliminar, Parte I e Parte II, tendo como gênese uma Tarefa para o aluno (Ta) de introdução ao tópico.

Aqui, focamos a atenção no Encontro 2, em que foi implementada e discutida uma TI no âmbito da translação, contando com 14 professores de matemática dos Anos Finais e Ensino Médio, cuja experiência variava de um a 26 anos.

A TI foi conceitualizada no grupo CIEspMat[6] e validada em outros contextos formativos, previamente à sua implementação para esta pesquisa, e associa-se ao objetivo formativo de desenvolver o CI dos participantes. A Parte Preliminar foca o que é translação (fenomenologia). Na Parte I, incluem-se perguntas que buscam contribuir para desenvolver o Conhecimento Especializado do professor no âmbito do KoT de translação, bem como do papel da linguagem matemática e das dificuldades e facilidades na aprendizagem matemática no contexto da translação. Assume como ponto de partida uma Ta, em que uma das perguntas envolve efetuar a translação de uma *pipa*, em uma malha quadriculada, recorrendo a um vetor dado, e que se relaciona ao objetivo de aprendizagens matemáticas de desenvolver o entendimento matemático dos alunos em relação ao que é a translação e aos procedimentos para a obter. A Parte II foca o CI (atribuição de significado matemático às produções de alunos) e o *feedback* fornecido para essas produções. A seguir, apresenta-se parte da TI discutida na análise (Figura 01).

6 O CIEspMat é um grupo de Pesquisa e Formação que desenvolve trabalhos focados no desenvolvimento do Conhecimento Interpretativo e Especializado do professor e futuro professor de e que ensina matemática – desde a Educação Infantil ao Ensino Médio. www.ciespmat.com.br @ciespmat_formacao

Figura 01 - Parte da TI no âmbito da translação

Conhecimento do professor em translação

Parte Preliminar

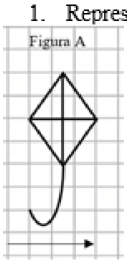
1. Imagine que você está na rua e alguém lhe pergunta: em um contexto matemático, o que é translação? O que responderia? (Não esquecer que estamos na rua e que, portanto, não pretendemos ensinar a essa pessoa).

Parte I

Tarefa: Mudando de lugar…

(Deve explicar sempre o seu raciocínio, descrevendo o processo que usar para responder à questão. Pode fazê-lo usando esquemas, palavras, cálculos, ...)

1. Represente a figura (imagem) em cada situação, conforme a seta:



a) Determine a direção, o sentido e a distância de todos os pontos correspondentes, em cada situação. (Considere que o lado do quadrado na malha quadriculada mede uma unidade de medida de distância.)

[...]

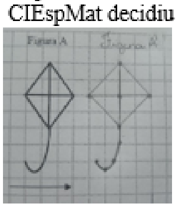
[...]

1. Considere a tarefa anterior:
   i) Resolva a tarefa por si mesmo (sem pensar em um contexto de ensino).

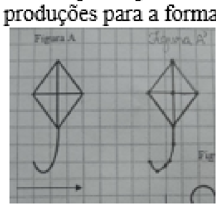
[...]

Parte II

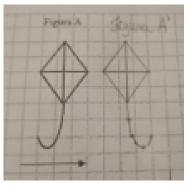
1. A professora Josi implementou na sua sala do 7.º ano C a tarefa anterior. Obteve algumas respostas distintas e como estava a participar de uma formação da responsabilidade do CIEspMat decidiu levar essas produções para a formação para discutir.



Produção de Paula



Produção de Laura



Produção de Maria

a) Para cada uma das produções, indique se as considera matematicamente corretas (adequadas) ou não, justificando o raciocínio matemático evidenciado.
b) Proponha um *feedback* construtivo às alunas (mais do que dizer se está correto ou incorreto ao professor cumpre atribuir significado às resoluções das alunas de modo a, posteriormente, auxiliar no desenvolvimento do seu conhecimento matemático).

Fonte: elaborado para a pesquisa

As produções dos alunos contidas na Parte II foram incluídas para discutir os erros dos alunos relativamente à necessidade de que figura e imagem sejam congruentes (Paula); que a medida de distância entre todos os pontos da figura e seus correspondentes da imagem seja o módulo do vetor de translação (Laura); distinguir reflexão de translação (Maria).

No contexto formativo, a Parte Preliminar foi implementada individualmente e as Parte I e II em pequenos grupos (três ou quatro elementos de diferentes etapas educativas e experiências profissionais). Somente após a discussão coletiva (em plenária) das Parte I e II, foi discutida a Parte Preliminar, de modo a possibilitar que os professores pudessem efetuar uma autoavaliação do conhecimento desenvolvido.

A coleta das informações incluiu as produções dos professores ao resolverem a TI, gravações de áudio e vídeo das discussões dos pequenos grupos e da plenária. Aqui, focamos as discussões nas produções escritas que foram transcritas *ipsis litteris* e, na análise, destacadas[7] as evidências de conhecimento e categorizadas de acordo com as categorias do MTSK e de CI. Cada produção foi identificada com um código incluindo: encontro (E1 a E9); parte da TI (Parte Preliminar – P; Parte I-II); questão da tarefa; conhecimento e que tipo, ou *feedback* (Conhecimento Especializado – CE, Conhecimento Interpretativo – CI ou *feedback* – F); grupo (G1 a G4). Para as evidências da Parte Preliminar, que foi respondida individualmente, incluiu-se o nome do professor. Assim, E2P1CE_Aline corresponde a uma produção do Encontro 2, Parte Preliminar, questão 1, Conhecimento Especializado, da professora Aline.

Da análise de Conhecimento Matemático Especializado emergiram descritores que são identificados por um acrônimo, entre parêntesis, constituído pelas iniciais do subdomínio; inicial(is) representativa(s) de cada elemento da categoria; um número sequencial com a ordem em que aparece. Nesta identificação, considera-se procedimentos (p); propriedades (pp); fundamentos (f); fenomenologia (fe). Para além disso, quando há alguma distorção no conteúdo do conhecimento revelado, incluem-se alguns símbolos que permitem identificar o seu tipo: * (inadequado); ** (incompleto). Por exemplo, (KoTfe1)** corresponde a um descritor no escopo da fenomenologia relacionado a um conhecimento matematicamente incompleto (conhecer que a translação se associa a uma mudança (de uma figura) de um lugar para outro).

A análise de CI está centrada na interpretação para a produção de Paula, identificando palavras-chave (colocadas em itálico) utilizadas para validar (ou não) o conhecimento matemático que identificam na produção: incorreta, errado, parcialmente correta e compreendeu parcialmente.

Com o foco de atenção no CI e MTSK, buscaram-se relações entre o conteúdo do MK e as práticas interpretativas (para mais informações, ver Ribeiro, 2024). Além disso, na análise do *feedback* identifica-se seu tipo e conteúdo, categorizando-o recorrendo às categorias de Galleguillos e Ribeiro (2019), em que se buscam, também, relações entre o conteúdo do MK, as práticas interpretativas e o *feedback* fornecido.

---

7 Como o template da revista não possibilita o destaque, retomamos a evidência durante a discussão em itálico.

Análise e discussão

Ao responderam à Parte Preliminar (o que é translação?), um dos professores referiu que translação seria um giro, não diferenciando translação de rotação. Os demais professores utilizaram termos que associam a translação a mudar de lugar, mover ou mudar de lugar mantendo uma distância. No Quadro 01, apresentamos três das produções que são representativas do conhecimento revelado.

Quadro 01: Produções dos professores associadas à questão "o que é uma translação?"

Produção	Transcrição
É a mudança de localização sem se virar.	E2P1CE_Aline: É a mudança de localização sem se virar.
translação: mudar um objeto de lugar com a mesma distância.	E2P1CE_Luana: Translação: mudar um objeto de lugar com a mesma distância.
translação é quando movemos um objeto para um outro ponto sem alterar as suas dimensões e formato.	E2P1CE_Celso: translação é quando movemos um objeto para um outro ponto sem alterar as suas dimensões e formato.

Fonte: elaborado para a pesquisa

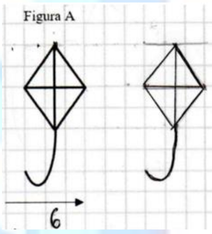
Aline associa translação a uma mudança de localização sem virar, diferenciando intuitivamente translação de reflexão, mas sem especificar o que define essa mudança (vetor de translação). Revela conhecer que a translação se associa a uma mudança (de uma figura) de um lugar para outro (KoTfe1)** que corresponde a um conhecimento que necessita ser desenvolvido, pois essa mudança de lugar pode ocorrer de muitas formas distintas e, no âmbito das transformações geométricas, associada a distintas transformações (Thaqi; Gimenez; Aljimi, 2015). É fundamental conhecer que a translação corresponde a uma mudança (de uma figura) de um lugar para outro, aplicando um vetor de translação (KoTfe1). Ao complementar o entendimento da translação como uma mudança da figura de lugar, incorporando a necessidade de manter-se sempre no mesmo plano (*Aline: [...] sem se virar.*), revela conhecer que a translação envolve um movimento planar (KoTpp2).

Luana associa translação a uma mudança de lugar de um objeto mantendo uma distância (*Luana: [...] com a mesma distância*), contudo não especifica a que corresponde essa medida, ou seja, o módulo do vetor de translação (Sünker; Zembat, 2012). Revela conhecer que, na translação, a distância entre cada ponto da figura e seu correspondente da imagem é sempre a mesma (KoTpp3)**, que necessita ser complementado de modo a explicitar que essa distância tem correspondência com o módulo do vetor de translação, englobando conhecer que, na translação, a distância entre cada ponto da figura e seu correspondente na imagem é determinada pelo módulo do vetor de translação (KoTpp3).

Para o professor Celso, a translação é um movimento no qual necessita-se manter as dimensões (*Celso: [...] sem alterar as suas dimensões e formato*), revelando conhecer que a translação envolve um movimento de lugar de um objeto, mantendo suas dimensões (KoTfe4)**. Porém, isso é comum a todas as isometrias, necessitando, assim, ser complementado com a especificação do vetor de translação (Gomes, 2012), que garante esse movimento rígido, associado a conhecer que a translação envolve um movimento rígido de um objeto, determinado pelo vetor de translação, mantendo todas as suas dimensões (KoTfe4).

Relativamente à Parte I (em grupo) – questão 1, que envolve responder à Tarefa para o aluno (Ta) –, três dos quatro grupos de professores efetuaram corretamente a translação, e um grupo (G4) efetuou a translação, cometendo o mesmo equívoco que é comum aos alunos – desconsiderar o módulo do vetor de translação (Flores; Yanik, 2016), obtendo uma imagem congruente à figura, mas localizada em um local diferente do que é determinado pelo vetor de translação dado (Figura 02).

Figura 02 - Produção dos professores do G4 ao efetuarem uma translação

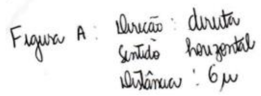


Fonte: arquivo da pesquisa

Essa produção dos professores do G4 associa-se a conhecer que a distância entre um ponto da figura e seu correspondente da imagem tem de ser sempre a mesma, desconsiderando que essa medida é determinada pelo módulo do vetor de translação (KoTf5)*. Embora a imagem obtida seja congruente com a figura, o que determina essa distância é o módulo do vetor de translação (Sünker; Zembat, 2012), sendo, assim, essencial conhecer que a distância entre um ponto da figura e seu correspondente da imagem é constante e determinada pelo módulo do vetor de translação (KoTf5).

Ao determinar a direção, sentido e distância entre os pontos originais e seus transformados (questão a) da Ta), esse mesmo grupo de professores (G4) apresenta a resposta *trocada* para a direção como a resposta para o sentido (Quadro 02).

Quadro 02: Produção dos professores do G4 associada a determinar a direção, sentido e distância na translação

Produção	Transcrição
	E2PI1aCE_G4: Figura A: Direção: direita Sentido horizontal Distância: 6 u

Fonte: elaborado para a pesquisa

Para os professores do G4 a direção é direita (*E2PI1aCE_G4: Direção: esquerda [...]*), o sentido é horizontal (*E2PI1aCE_G4: [...] Sentido horizontal [...]*), e a distância é de 6 *u* (*E2PI1aCE_G4: [...] Distância 6 u*), pois é a medida que eles empregam, revelando conhecer que direção é direita, sentido é horizontal e distância *6 u* (KoTf6)*, em que além de se equivocarem em direção e sentido, não estabelecem a correspondência entre a distância e o módulo do vetor de translação (Flores; Yanik, 2016), e que necessita ser corrigido, de modo a, neste caso, conhecer que direção é horizontal, sentido é da esquerda para a direita e distância 4 *u* (KoTf6).

Ao atribuírem significado às formas de Pensar matematicamente evidenciadas na produção de Paula (Parte II da TI), em que a imagem não é congruente à figura, pois ocorre uma ampliação de parte da imagem (Quadro 03), os professores do G1 e do G2 consideraram a produção inadequada, enquanto os professores do G3 e G4 assumiram que estava parcialmente adequada.

Quadro 03 - Conhecimento Matemático Especializado revelado e prática interpretativa para a produção de Paula

Transcrição	Conhecimento Matemático Especializado revelado	Prática interpretativa
E2PIIaCI_G1: *incorreta*, pois não manteve a proporcionalidade da figura e alterando o formato (ponto no meio do quadrado).	Conhecer que na translação mantém-se a proporcionalidade e formato da figura na imagem (KoTpp7)**.	Interpretação avaliativa: Interpretar como matematicamente inadequada uma produção de aluno que ao transladar não mantém as dimensões da figura na imagem, e, ainda, indica na produção onde está o erro – desconsiderar o módulo do vetor de translação. (CI nível 1)
E2PIIaCI_G2: Matematicamente está *errado* pois ela alterou as dimensões no sentido horizontal, não executou corretamente a curvatura da figura	Conhecer que na translação não se alteram dimensões no sentido horizontal e que a curvatura da figura tem que ser transladada corretamente (KoTpp8)**.	
E2PIIaCI_G4: *parcialmente correta*, pois a estudante realizou corretamente o sentido e direção da figura original. No entanto, a distância ponto a ponto da figura original para a imagem de Paula, diverge em alguns pontos.	Conhecer que na translação deve-se utilizar o sentido e a direção da figura original para obter a imagem, bem como a distância ponto a ponto da figura original para obter a imagem (KoTf9)*.	
E2PIIaCI_G3: a estudante *compreendeu* a proposta *parcialmente*, pois ajustou a distância para que os pontos se encaixem na malha	Conhecer que, na translação de uma figura, em malha quadriculada, os pontos transformados sempre coincidem com os vértices da quadrícula (KoTpp10)*.	Interpretação equivocada: Interpretar como parcialmente adequada uma produção de aluno que ajusta distâncias – amplia parte de uma imagem – ao efetuar sua translação, o que é matematicamente inadequado. (CI nível 0.2)

Fonte: elaborado para a pesquisa

Os professores dos grupos G1, G2 e G4 efetuam uma interpretação avaliativa (CI nível 1), pois focam em descrever o erro evidenciado (*E2PIIaCI_G4: [...] a distância ponto a ponto da figura original para a imagem de Paula, diverge em alguns pontos*), o que deveria ser realizado adequadamente (*E2PIIaCI_G2: [...] alterou as dimensões [...]*), e o que faltou (*E2PIIaCI_G1: [...] não manteve a proporcionalidade da figura e alterando o formato [...]*), uma vez que na translação figura e imagem têm de ser congruentes (Kidder, 1976).

Os professores do G1 revelam conhecer que na translação mantém-se a proporcionalidade e formato da figura na imagem (KoTpp7)**, porém a proporcionalidade que se considera é das medidas da figura, em que a constante de proporcionalidade é 1, sendo necessário conhecer que, na translação, mantém-se a proporcionalidade (com *k = 1*) dos valores das medidas da figura (KoTpp7).

Quando os professores do G2 revelam conhecer que, na translação, não se alteram dimensões no sentido horizontal e que a curvatura da figura tem que ser transladada corretamente (KoTpp8)**, de modo a ser necessário passar a conhecer que na translação não se alteram dimensões da imagem, mesmo quando estão envolvidas componentes curvas (KoTpp8).

Os integrantes do G4 revelam conhecer que, na translação, deve-se considerar o sentido e a direção da figura original para obter a imagem, bem como a distância ponto a ponto da figura original para obter a imagem (KoTf9)*, o que se refere a um conhecimento que necessita ser desenvolvido para sempre considerar o módulo do vetor (Flores; Yanik, 2016), e que sentido e direção são propriedades do vetor. Assim, para ser matematicamente adequado, envolve conhecer que na translação considera-se o vetor de translação que é aplicado a todos os pontos da figura original para obter os pontos correspondentes da imagem (KoTf9).

A interpretação avaliativa que esses professores (G1, G2 e G4) realizam sustenta-se em conhecimento inadequado ou incompleto do professor (que se associa a um espaço solução com apenas um elemento e que, nestes casos, não é matematicamente adequado).

Os professores do G3 revelam conhecer que, na translação de uma figura, em malha quadriculada, os pontos transformados sempre coincidem com os vértices da quadrícula (KoTpp10)*, o que se refere a um conhecimento matematicamente inadequado e, por isso, ao interpretarem a produção da aluna, assumem-na (de modo inadequado) como parcialmente adequada (*E2PIIaCI_G3: a estudante compreendeu a proposta parcialmente [...]*), efetuando uma prática interpretativa equivocada (nível 0.2 de CI). Para validar a matemática presente na produção da aluna, seria necessário ao professor conhecer que na translação de uma figura, em malha quadriculada, os pontos transformados não necessariamente coincidem com os vértices da quadrícula (KoTpp10).

Logo, existe uma relação em que um baixo nível de Conhecimento Matemático Especializado (no caso dos professores do G3 é matematicamente inadequado), sustenta práticas interpretativas que não contribuem para que os alunos entendam as propriedades da translação.

O nível de CI dos professores impactou o tipo e conteúdo de *feedback* proposto – questão b). Os membros do G1 indicam que forneceriam (*EP2II1bF_G1: b) Uma* *devolutiva da avaliação pautada no aluno reconhecer onde errou para, a partir daí, construir o conhecimento*) que é um tipo de *feedback* que seria válido para qualquer produção – inclusive para qualquer área de conhecimento. Os professores do G4 descrevem um percurso do que fariam para mostrar ao aluno o resultado final, que corresponde a um contraexemplo como *feedback*. Discutimos o *feedback* dos professores do G2 e do G3 por associarem-se a um conhecimento matemático revelado (Quadro 04).

Quadro 04 - Conhecimento Matemático Especializado revelado, prática interpretativa e *feedback* para a produção de Paula

Evidências	Conhecimento Matemático Especializado revelado	Prática interpretativa	*Feedback*
(Matematicamente está *errado)* E2PIIbF_G2: Perguntaria se a imagem manteve as dimensões da figura e por que?	Conhecer que na translação não se alteram dimensões da imagem, mesmo quando estão envolvidas componentes curvas (KoTpp8).	Interpretação avaliativa: Interpretar como matematicamente inadequada à produção da aluna que não mantém a dimensão da figura na imagem, e, ainda, indica na produção onde está o erro – desconsiderar o módulo do vetor de translação. (CI nível 1)	*Feedback* superficial: indagar de modo insuficiente para ajudar a aluna a entender seu erro (não manter as dimensões da figura na imagem).
(compreendeu a proposta *parcialmente)* E2PIIbF_G3: indagar o aluno se a contagem de cada ponto da figura possuí quatro unidades a direita. Podemos indagar se o ponto original está no cruzamento da malha.	Conhecer que para efetuar a translação, no recurso malha quadriculada, podem-se contar as unidades de distância conforme os lados dos quadrados da malha para se obter os pontos correspondentes da imagem (KoTp11)**.	Interpretação avaliativa: Interpretar como parcialmente adequada uma produção de aluno que ajusta distâncias – amplia parte de uma imagem – ao efetuar sua translação, o que é matematicamente inadequado. (CI nível 1)	*Feedback* sobre como resolver o problema: indicar na produção o que deveria ser feito para manter a congruência entre figura e imagem ao utilizar o módulo do vetor de translação, e complementam com uma especificidade em que a figura possui um ponto que coincide com o vértice de um quadrado da malha.

Fonte: elaborado para a pesquisa

Os membros do G2 focam apenas uma das propriedades da translação (*E2PIIbF_G2: [...] imagem manteve as dimensões da figura [...]*), fornecendo um *feedback* superficial que não contribui para que a aluna entenda que errou ao ampliar parte da figura e possa desenvolver o seu conhecimento matemático para o corrigir e compreender que na translação não se efetuam ampliações. Isso associa-se a uma prática interpretativa avaliativa (nível 1 de CI), sustentada em conhecer que, na translação, não se alteram dimensões da imagem, mesmo quando estão envolvidas componentes curvas (KoTpp8).

No grupo G3, embora os professores questionem a aluna sobre a distância entre um ponto da figura e o correspondente da imagem (*E2PIIbF_G3: [...] a contagem de cada ponto da figura possuí quatro unidades a direita [...]*), que poderia ser um bom ponto de partida para a discussão, não fornecem uma continuação. Esse questionamento, por si só, não permite gerar o entendimento do tópico, associando-se a uma prática interpretativa avaliativa (nível 1 de CI), fornecendo um *feedback* sobre como resolver o problema, sustentado em conhecer que para efetuar a translação, no recurso malha quadriculada, podem-se contar as unidades de distância conforme os lados dos quadrados da malha para se obter os pontos correspondentes da imagem (KoTp11)**. Esse conhecimento necessita ser desenvolvido passando a conhecer que para efetuar a translação, no recurso malha quadriculada, podem-se contar as unidades de distância conforme os lados dos quadrados da malha para se obter os pontos correspondentes da imagem, seguindo, também, a direção e o sentido do vetor de translação (KoTp11).

Um conhecimento que é matematicamente adequado ou incompleto, porém que não foca em generalizar o entendimento dos alunos no escopo das propriedades e procedimentos da translação, associa-se a um baixo nível de CI, com correspondência com práticas interpretativas avaliativas e a um *feedback* superficial ou sobre como resolver o problema.

Considerações finais

Quando observamos as produções dos professores com um olhar para o seu Conhecimento Especializado envolvido em explicitar o que é uma translação e ao resolverem uma Tarefa para os alunos, já constamos um conjunto de evidências de conhecimento que necessita ser desenvolvido pela formação – pois esse conhecimento não se desenvolve na prática (Ribeiro; Mellone; Jakobsen, 2013). Ao articular o conteúdo desse conhecimento com a interpretação que os professores efetuam de uma produção de uma aluna para a tarefa que eles mesmos já resolveram anteriormente, evidencia-se a existência de relações entre o conteúdo do seu Conhecimento Especializado, a interpretação que efetuam (nível de CI que revelam) e o tipo de *feedback* que fornecem.

Ao indicarem o que é uma translação e responderem à Tarefa para os alunos revelam um conhecimento com várias lacunas e incompletudes que necessita ser desenvolvido. Os professores revelaram um conhecimento que lhes permite (exceto um dos grupos) identificar o erro nas produções dos alunos – conhecimento matemático que se encontra, pelo menos, no nível do *saber fazer* dos alunos e que permite interpretações que ficam ao nível de uma prática avaliativa (ou equivocada em um dos grupos). Mas não assumem esse erro como uma fonte de aprendizagens (Di Martino *et al*., 2020) que possibilitaria desenvolver o conhecimento da aluna, limitando-se a ensinar o que necessita ser feito para fornecer a resposta correta no caso particular do problema. De forma complementar, embora tenham revelado um conhecimento matemático que lhes permite antecipar as principais dificuldades de aprendizagens matemáticas dos alunos – em uma tarefa não usual –, não fornecem um *feedback* que contribui para auxiliar a aluna no desenvolvimento de seu conhecimento matemático (*feedback* superficial e sobre como resolver o problema).

A formação de professores ao focar no desenvolvimento de conhecimento do professor para melhorias de práticas de sala de aula, contribui para que o professor passe a fornecer *feedback* construtivo, ao ter seu espaço solução ampliado, sendo o uso de Tarefas para a Formação (Ribeiro; Almeida; Mellone, 2021), associadas a discussões especializadas, um recurso com potencialidades para tal desenvolvimento.

Considerando a agenda de pesquisa de que este foco especializado faz parte, e buscando contribuir para repensar os focos de formação a partir de evidências de Conhecimento Especializado, Interpretativo, *feedback* e práticas associadas algumas perguntas em aberto que necessitam ser discutidas referem-se a:

(i) Como ocorre o desenvolvimento profissional de professores com foco no desenvolvimento do Conhecimento Matemático Especializado e do Conhecimento Interpretativo?

(ii) Que que impacto tem o desenvolvimento do Conhecimento Matemático Especializado e do Conhecimento Interpretativo no tipo e conteúdo de *feedback* que os professores fornecem?

Agradecimentos: O presente trabalho é parte do projeto de pesquisa financiado pela Capes (Código de Financiamento 001).

Referências

BLACK, Paul; WILIAM, Dylan. **Assessment and Classroom Learning**. Assessment in Education: Principles, Policy & Practice, v. 5, n. 1, p. 7–74, 1998.

CARRILLO, José *et al.* **The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model**. Research in Mathematics Education, v. 20, n. 3, p. 236–253, 2018.

DI MARTINO, Pietro; MELLONE, Maria; RIBEIRO, Miguel. **Interpretative Knowledge**. In: LERMAN, Steve (org.). **Encyclopedia of Mathematics Education**. Cham: Springer International Publishing, 2020. p. 424–428.

FLORES, Alfinio; YANIK, H. Bahadir. **Geometric Translations: An Interactive Approach Based on Students' Concept Images**. North American GeoGebra Journal, v. 5, n. 1, 2016. Disponível em: https://mathed.miamioh.edu/index.php/ggbj/article/view/67. Acesso em: 2 set. 2024.

GALLEGUILLOS, Jeannette; RIBEIRO, Miguel. **Prospective mathematics teachers' interpretative knowledge: focus on the provided feedback**. In: CERME 11, 2019, Utrecht. **Proceedings**. Utrecht: Freudenthal Group, 2019. Disponível em: https://hal.science/hal-02422519/. Acesso em: 30 abr. 2022.

GOMES, Alexandra. **Transformações geométricas: conhecimentos e dificuldades de futuros professores**. In: SIEM, 23., 2012, Lisboa. **Atas**. Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 2012. p. 233–243. Disponível em: https://repositorium.sdum.uminho.pt/handle/1822/20835?mode=full. Acesso em: 24 mar. 2022.

GROSSMAN, Pam. **Learning to practice: the design of clinical experience in teacher preparation**. Stanford: Stanford University, Center to Support Excellence in Teaching, 2010. 8 p. Disponível em: https://phennd.org/update/the-design-of-clinical-experience-in-teacher-preparation/. Acesso em: 23 jul. 2024.

JAKOBSEN, Arne; RIBEIRO, C. Miguel; MELLONE, Maria. **Norwegian prospective teachers' MKT when interpreting pupils' productions on a fraction task**. Nordic Studies in Mathematics Education, v. 19, n. 3–4, p. 135–150, 2014.

JONES, Keith. **Re-imagining geometry education in schools**. In: TAGUNG DER GESELLSCHAFT FÜR DIDAKTIK DER MATHEMATIK (GDM), 54., 2020, Würzburg. SILLER, Hans-Stefan; WEIGEL, Wolfgang; WÖRLER, Jan Franz (org.). **Beiträge zum Mathematikunterricht 2020**. Münster: WTM-Verlag, 2020. p. 31–38.

KIDDER, F. Richard. **Elementary and Middle School Children's Comprehension of Euclidean Transformations**. Journal for Research in Mathematics Education, v. 7, n. 1, p. 40–52, 1976.

LIMA, Elon Lages. **Coordenadas no plano: geometria analítica, vetores e transformações geométricas**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1992.

MELLONE, Maria *et al.* **Mathematics teachers' interpretative knowledge of students' errors and non-standard reasoning**. Research in Mathematics Education, v. 22, n. 2, p. 154–167, 2020.

MELLONE, Maria *et al.* **Prospective teachers interpret student responses: Between assessment, educational design and research**. In: CERME 10, 2017, Dublin. **Proceedings**. Dublin: DCU Institute of Education; ERME, 2017. p. 2948–

2955. Disponível em: http://erme.site/cerme-proceedings-series/. Acesso em: 15 mar. 2022.

MOYER, John C. **The Relationship between the Mathematical Structure of Euclidean Transformations and the Spontaneously Developed Cognitive Structures of Young Children**. Journal for Research in Mathematics Education, v. 9, n. 2, p. 83–93, 1978.

RIBEIRO, Miguel; ALMEIDA, Alessandra; MELLONE, Maria. **Conceitualizando tarefas formativas para desenvolver as especificidades do conhecimento interpretativo e especializado do professor**. Perspectivas da Educação Matemática, v. 14, n. 35, p. 1–32, 2021.

RIBEIRO, C. Miguel; MELLONE, Maria; JAKOBSEN, Arne. **Characterizing Prospective Teachers' Knowledge in/for Interpreting Students' Solutions**. In: PME 37, 2013, Kiel. **Proceedings**. Kiel: PME, 2013. p. 89–96. Disponível em: https://iris.unina.it/handle/11588/586250. Acesso em: 15 mar. 2022.

RIBEIRO, Miguel; SILVA, Caroline; MENEZES, Sandra. **Conhecimento Matemático Especializado do professor no âmbito da transformação geométrica isométrica reflexão e da simetria: elementos críticos para uma prática interpretativa**. Paradigma, Maracay, v. 46, n. 1, e2025021, 2025.

SANTOS, Leonor; PINTO, Leão. **Lights and shadows of feedback in mathematics learning**. In: PME 33, 2009, Thessaloniki. **Proceedings**. Thessaloniki: PME, 2009. p. 49–56. Disponível em: https://www.igpme.org/publications/current-proceedings/. Acesso em: 14 jul. 2022.

SHUTE, Valerie J. **Focus on Formative Feedback**. Review of Educational Research, v. 78, n. 1, p. 153–189, 2008.

SÜNKER, Seda; ZEMBAT, İsmail Ö. **Teaching of translations through use of vectors in Wingeom-tr environment**. Elementary Education Online, v. 11, n. 1, p. 173–194, 2012. Disponível em: https://dergipark.org.tr/tr/download/article-file/90607. Acesso em: 22 mar. 2023.

THAQI, Xhevdet; GIMENEZ, Joaquim; ALJIMI, Ekrem. **The meaning of isometries as function of a set of points and the process of understanding of geometric transformation**. In: CERME 9, 2015, Prague. **Proceedings**. Prague: Charles University in Prague, Faculty of Education; ERME, 2015. p. 591–597. Disponível em: https://hal.science/hal-01287028/document. Acesso em: 20 abr. 2023.

Submetido em: 24/07/2025

Aceito em: 07/10/2025