

A função logarítmica: conceitos e construções

The Logarithmic Function: Concepts and Constructions

*Ieda Maria Giongo*¹

*Marli Teresinha Quartieri*²

*Mária Jussara Hepp Rehfeldt*³

RESUMO

Este artigo discute como a problematização investigativa e a materialização em 3D favorecem a transição das representações algébricas dos logaritmos para a construção de significados e objetos tridimensionais. A pesquisa, de abordagem qualitativa e caráter descritivo, foi desenvolvida com três turmas de estudantes ingressantes dos Cursos de Engenharia e dois bolsistas de Iniciação Científica. O corpus se constituiu de enunciações orais e produções escritas e gráficas elaboradas nas atividades propostas. A investigação evidenciou dois resultados centrais: (i) ampliação da compreensão das propriedades dos logaritmos, superando a aplicação mecânica de fórmulas, além de fomentar a articulação de significados matemáticos; (ii) potencial pedagógico do uso de tecnologias na modelagem e produção de objetos tridimensionais, promovendo investigação, visualização ampliada, interpretação gráfica e aplicação de conceitos. Argumenta-se que essa articulação contribuiu para a compreensão conceitual, gráfica e a autonomia intelectual dos estudantes.

PALAVRAS-CHAVE: Ensino de Logaritmos. Tarefas Exploratório-Investigativas.

Impressora 3D. Geogebra 3D..

ABSTRACT

The article problematizes how investigative problematization and 3D materialization support the transition from algebraic representations of logarithms to the construction of meanings and three-dimensional objects. The research, grounded in a qualitative and descriptive approach, was developed with three groups of first-year Engineering students and two undergraduate research fellows. The corpus consisted of oral statements and written and graphical productions developed during the proposed activities. The analysis revealed two central findings: (i) an expansion in the understanding of the properties of logarithms, moving beyond the mechanical application of formulas and fostering the articulation of mathematical meanings; and (ii) the pedagogical potential of using

¹ Universidade do Vale do Taquari - Univates. igiongo@univates.br.

<https://orcid.org/0000-0002-1696-0642>

² Universidade do Vale do Taquari - Univates. mtquartieri@univates.br.

<https://orcid.org/0000-0002-9621-3830>

³ Universidade do Vale do Taquari - Univates. mrehfeldt@univates.br.

<https://orcid.org/0000-0002-0007-8639>



technologies in the modeling and production of three-dimensional objects, promoting investigation, enhanced visualization, graphical interpretation, and the application of concepts. It is argued that this articulation fosters conceptual and graphical understanding as well as students' intellectual autonomy.

KEYWORDS: Teaching Logarithms. Exploratory-Investigative Tasks. 3D Printer. GeoGebra 3D.

Introdução

O ensino de logaritmos tem sido objeto de investigação recorrente em pesquisas desenvolvidas no âmbito da Pós-Graduação stricto sensu (Tavares, 2023; Meneguci, 2022; Andrade, 2023; Lucci Neto, 2022; Lousada, 2022; Pontes, 2023), evidenciando se tratar de um objeto de conhecimento que mobiliza problematizações persistentes no campo da Educação Matemática, em especial, com pesquisadores e professores que atuam nos Ensinos Médio e Superior. No conjunto dos tópicos tradicionalmente abordados nesta fase da escolarização, os logaritmos figuram entre os que apresentam índices mais elevados de dificuldades conceituais e operatórias.

As pesquisas citadas convergem ao indicarem que as dificuldades associadas ao ensino e à aprendizagem de logaritmos decorrem, em grande medida, de um tratamento didático marcado pela excessiva formalização abstrata e escassa articulação com contextos de significação (Lousada, 2022; Andrade, 2023). Nessa perspectiva, o conceito é frequentemente apresentado como um conjunto de propriedades operatórias a serem aplicadas de modo procedimental dissociado de sua gênese histórica, sua fundamentação conceitual e implicações funcionais. Tal abordagem tende a reduzir o logaritmo a um objeto técnico-instrumental, esvaziando sua dimensão relacional, e favorecer a construção de sentidos frágeis ou meramente algorítmicos, o que repercute negativamente no engajamento dos estudantes.

Pontes (2023) ainda destaca a complexidade envolvida na notação $y = \log_a b$, cuja estrutura sintática exige a coordenação simultânea de diferentes papéis desempenhados por base, argumento e resultado. A ausência de correspondências imediatas com registros de representação previamente consolidados contribui para que a escrita logarítmica seja percebida como pouco intuitiva, fato que demanda processos de conversão e tratamento nem sempre explicitados no ensino. Por sua vez, Lucci Neto (2022) e Tavares (2023) evidenciam que fragilidades conceituais anteriores — especialmente no que se refere à potenciação e à radiciação — comprometem a compreensão do logaritmo enquanto operação inversa da exponencial. Dificuldades na interpretação de expoentes fracionários, na

compreensão das propriedades das potências e na análise das relações entre base e expoente produzem descontinuidades cognitivas que inviabilizam a construção de um entendimento estrutural do conceito. Já Meneguci (2022) problematiza a centralidade atribuída à manipulação formal de expressões com vistas à resolução de exercícios padronizados, prática que tende a reforçar uma racionalidade instrumental em detrimento da exploração conceitual e investigativa.

Outro aspecto recorrente nas análises se refere à instabilidade dos estudantes diante de resultados não inteiros ou irracionais, particularmente nos casos que envolvem logaritmos decimais ou naturais. A presença de constantes e a obtenção de valores aproximados tensionam expectativas formadas em experiências escolares anteriores, fortemente ancoradas na ideia de resultados numéricos “exatos”, revelando limites na compreensão da densidade e da estrutura do conjunto dos números reais (Pontes, 2023).

No que concerne às possibilidades de enfrentamento dessas problemáticas, os estudos apontam a necessidade de diversificação das práticas pedagógicas. Nesse sentido, Andrade (2023) propõe a inserção do conceito em contextos que mobilizem escalas logarítmicas — como as de Richter, pH e decibéis — de modo a evidenciar sua funcionalidade em fenômenos empíricos e científicos. Por sua vez, Meneguci (2022) destaca o potencial de ambientes tecnológicos, como o GeoGebra, para favorecer a exploração dinâmica das relações funcionais e a visualização de comportamentos gráficos. Já Tavares (2023) enfatiza a relevância da elaboração de problemas pelos próprios estudantes, entendida como estratégia que possibilita explicitar a estrutura lógica subjacente ao conceito e promover formas mais autônomas de apropriação do conhecimento matemático.

Evidentemente, se tais fragilidades acerca de logaritmos emergem no Ensino Médio, tendem a perdurar quando os estudantes ingressam em cursos que tenham, em suas matrizes curriculares, disciplinas vinculadas à Matemática, como é o caso das Engenharias. Nessa seara, um grupo de pesquisadoras que ministram componentes curriculares vinculados ao ensino de Ciências Exatas, nos Cursos de Engenharia, em uma Instituição Comunitária localizada na Região Sul do Brasil, desenvolvem uma pesquisa que tem como um dos objetivos planejar, conjuntamente, tarefas, desenvolvê-las, avaliar os resultados obtidos e replanejar, promovendo um ciclo de aperfeiçoamento como forma de repensar os processos de ensinar e aprender, sobretudo mitigando as dificuldades dos discentes.

Nessa direção, o artigo propõe uma discussão teórico-metodológica sobre duas experiências envolvendo logaritmos. No contexto da sala de aula, buscou-se observar de que modo uma tarefa exploratório-investigativa favoreceu a problematização, a criação de conjecturas e a argumentação dos estudantes sobre o tema. Paralelamente, com os bolsistas de Iniciação Científica, analisou-se o desafio de abstrair a representação de uma função logarítmica visando à criação e impressão de objetos em 3D.

Em síntese, o problema de pesquisa é assim constituído: Como a problematização investigativa e a materialização em 3D favorecem a transição das representações algébricas dos logaritmos para a construção de significados e objetos tridimensionais?

Pressupostos teóricos

Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), um ambiente investigativo pode ser criado em sala de aula quando se oportuniza aos estudantes se engajarem ativamente na Matemática por meio da formulação de problemas. Ademais, é possível encorajá-los a discutir, conjecturar e fundamentar respostas às tarefas. Os referidos autores definem a Investigação Matemática como uma atividade que envolve quatro momentos como visualizado na Figura 1.

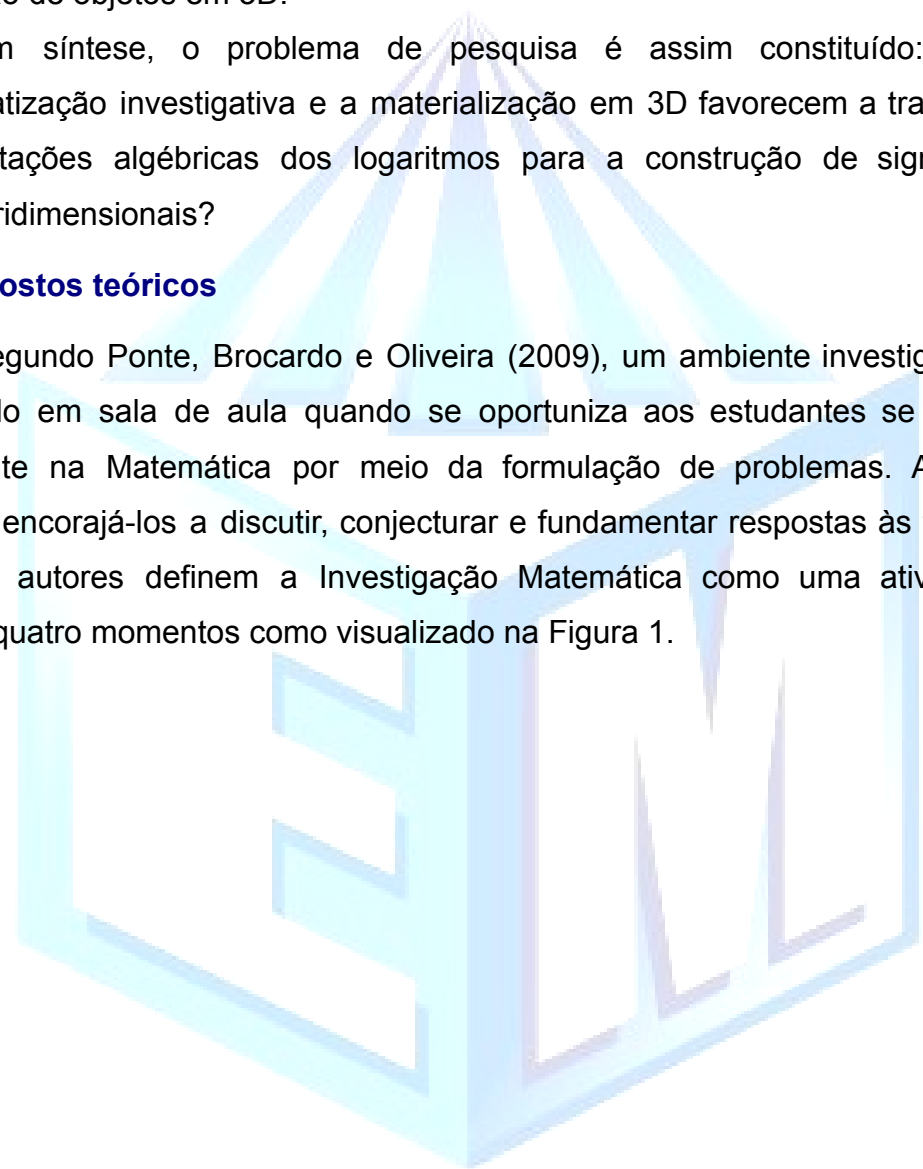
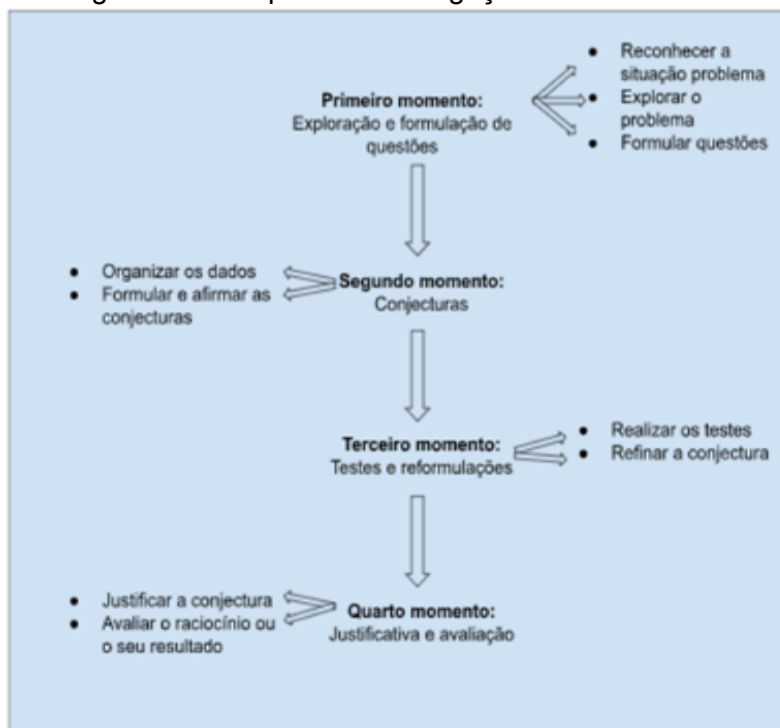


Figura 01 – Etapas da Investigação Matemática



Fonte: Adaptado de Ponte, Brocardo e Oliveira (2009)

O primeiro momento se refere ao conhecimento inicial, contemplando a verificação, análise e elaboração de questões. O segundo envolve a elaboração de ideias e constatações que se baseiam em suposições elaboradas a partir de uma situação — as hipóteses —, estas denominadas conjecturas. No terceiro, são realizados testes das conjecturas por meio dos quais será definida se a hipótese é ou não verdadeira. No quarto, ocorre a demonstração e avaliação da situação, que deve vir acompanhada de uma argumentação que justifique o raciocínio.

Para Concentino (2019), as tarefas exploratório-investigativas se classificam em estruturadas, menos estruturadas e abertas. As primeiras - estruturadas- podem apresentar questões para auxiliar o professor na orientação dos estudantes no decorrer da exploração das tarefas, “contendo a questão a investigar, tratada no roteiro ou definida previamente pelo professor” (Concentino, 2019, p. 31). Em relação às segundas – menos estruturadas -, o autor destaca que, a partir de uma questão inicial do docente, os estudantes geram novos questionamentos, explorando diferentes caminhos para resolver o problema proposto. Quanto às abertas, Concentino (2019) sublinha que os alunos são responsáveis por formular suas próprias questões e validar conjecturas por meio de explicações e discussões sobre a resolução do problema.

Por sua vez, Ferruzzi, Borssoi e Silva (2021) comentam a importância de se utilizarem, inicialmente, tarefas estruturadas; em seguida, as menos estruturadas. E,

somente após o estudante ter realizado diversas delas, e o professor perceber que está conseguindo realizá-las com êxito, apresentar as abertas. Somado a isso, cabe-lhe, no decorrer das tarefas investigativas, formular perguntas que mantenham os alunos interessados em encontrar respostas matematicamente validadas. Em adição, (Concentino, 2019) acentua que um ponto importante nesse processo é o respeito ao ritmo individual de aprendizagem; o tempo deve ser flexível o suficiente para a reflexão, mas controlado para não gerar desinteresse. Wichnoski e Klüber (2018) reforçam que o docente assume a função de orientador, mediando a tarefa para que os discentes se sintam motivados a elaborar diferentes conjecturas e testar distintas estratégias de resolução.

Aliado a isso, para incentivar o desenvolvimento de estratégias e conjecturas na construção de conhecimentos, Borba, Silva e Gadanidis (2020) sugerem o uso de softwares, como o Geogebra. Já Bispo (2024) aponta a relevância do uso desse software nos processos de ensino e de aprendizagem. Para os autores, o mencionado recurso tecnológico se configura como um artefato de elevado potencial didático para o ensino de funções à medida que integra, em um mesmo ambiente dinâmico, distintos campos da Matemática — particularmente geometria, álgebra e cálculo —, favorecendo a articulação entre eles. Tal integração possibilita a visualização simultânea e sincrônica de múltiplas representações diferentes, tais como gráficos, expressões algébricas e tabelas de valores, promovendo a coordenação entre diferentes registros de representação. A utilização de controles deslizantes amplia esse potencial ao viabilizar a manipulação interativa de coeficientes e parâmetros, o que permite aos estudantes observarem, em tempo real, as implicações das variações na expressão algébrica sobre a configuração, a curvatura e o comportamento do gráfico.

Com efeito, essa dinâmica contribui para uma compreensão relacional e estruturada das propriedades matemáticas envolvidas ao tornar explícitas as interdependências entre os distintos registros. Nessa perspectiva, o recurso tecnológico opera como mediador epistemológico, reconfigurando a dinâmica da sala de aula e instituindo-a como espaço de investigação, experimentação e exercício da autonomia intelectual. Nesse contexto, os estudantes são convidados a formular e testar hipóteses, elaborar conjecturas e avançar progressivamente em direção à formalização teórica dos conceitos mobilizados.

Outro recurso tecnológico que tem se destacado no campo do ensino de Matemática é a impressora 3D. Pesquisas desenvolvidas por Lopes (2019), Hedler

(2020) e Queiroz (2023) caracterizam essa tecnologia como inovadora e potencialmente disruptiva, sobretudo no que se refere ao desenvolvimento do pensamento geométrico espacial e à abordagem de conceitos relativos a superfícies, áreas e volumes. A dita ferramenta possibilita a materialização de objetos matemáticos complexos, convertendo representações digitais em artefatos físicos passíveis de manipulação concreta, o que amplia significativamente as possibilidades de construção conceitual.

No âmbito dos benefícios pedagógicos, os estudos enfatizam a dimensão do feedback e da reflexão, uma vez que a impressora 3D responde de modo objetivo às decisões tomadas pelos estudantes durante o processo de modelagem virtual. Quando o objeto impresso não corresponde às expectativas inicialmente projetadas, instaura-se um espaço fecundo para a análise crítica de possíveis equívocos relacionados a proporções, escalas e dimensões (Hedler, 2020). Ademais, destaca-se a articulação entre percepção tátil e visual, aspecto evidenciado por Lopes (2019) ao afirmar que a experiência concreta de manipulação permite aos alunos aprenderem características das superfícies dificilmente perceptíveis em ambientes digitais ou por meio de recursos audiovisuais. Ressalta-se, ainda, o estímulo à criatividade, ao protagonismo e à autonomia discente, haja vista que o processo de projetar, modelar e imprimir objetos demanda tomada de decisões, resolução de problemas e elaboração de estratégias próprias (Hedler, 2020; Queiroz, 2023).

Tais características convergem para os pressupostos das tarefas investigativas, que igualmente favorecem o desenvolvimento da criatividade e da autonomia intelectual. Os autores também apontam o aprimoramento de habilidades cognitivas relacionadas à compreensão de conceitos, como escala, volume, área, dimensões lineares e vocabulário matemático específico (Hedler, 2020). Por fim, observa-se um impacto expressivo na motivação discente, uma vez que a materialização de um objeto por ele concebido tende a produzir engajamento, interesse e envolvimento ampliado nas atividades escolares. Conforme assinala Hedler (2020, p. 164), o primeiro contato com a impressora 3D e a visualização do objeto projetado adquirindo materialidade foram marcados por significativo deslumbramento e intensa participação dos alunos.

Estudos recentes também evidenciam uma consistente articulação entre o GeoGebra e a impressora 3D em propostas pedagógicas integradas. Hedler (2020) sublinha a compatibilidade técnica entre as ferramentas, uma vez que determinadas

versões do mencionado software viabilizam a exportação de construções para o formato STL (stereolithography), amplamente empregado em softwares de impressão 3D. Ademais, Hedler (2020) e Queiroz (2023) descrevem um ciclo de aprendizagem no qual o estudante, inicialmente, constrói e explora o objeto em um ambiente de geometria dinâmica e, posteriormente, encaminha-o à materialização por meio da impressão tridimensional. Por sua vez, Lopes (2019) ressalta que, enquanto o GeoGebra potencializa a exploração dinâmica e a articulação algébrica, a impressão 3D supera as limitações da bidimensionalidade da tela ao oferecer um modelo físico que contribui para a consolidação da imagem mental do objeto matemático estudado, fortalecendo a compreensão espacial e conceitual.

Procedimentos metodológicos

As ideias até aqui descritas estão em consonância com as discussões promovidas na disciplina Modelagem de Situações Dinâmicas na qual foram desenvolvidas as atividades com os estudantes. As aulas não são apenas uma transmissão, mas uma criação em que o professor ensaia, produz, pesquisa e experiencia diferentes modos de se conectar à matéria de estudo. De acordo com os projetos pedagógicos dos cursos, nessa proposição de aula, há um pensar coletivo dos professores, um saber compartilhado e um espaço para a pesquisa.

Para atender à demanda, as pesquisadoras optaram por desenvolver uma tarefa exploratório-investigativa com três turmas, divididas em equipes de até cinco componentes, contemplando cerca de noventa estudantes. O trabalho em grupos tem sido amplamente defendido na literatura específica da área e, em particular com o uso do Geogebra, conforme expresso por Queiroz (2023). É importante sinalizar que os estudantes foram devidamente avisados de que se tratava de uma investigação e, cientes disso, assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido de acordo com os preceitos de ética em pesquisa. Os grupos foram identificados como G1 (grupo 1), G2 (grupo 2) e, assim, sucessivamente, respeitando-se o anonimato. A tarefa realizada foi assim constituída:

Figura 2 - Tarefa destinada aos estudantes dos Cursos de Engenharia

No quadro que segue existe um padrão entre os números. Descubra este padrão e completar os números que faltam.

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Y	0	0,5	0,79	1	1,16	1,29	1,4	1,5	1,58	1,66	1,72		1,85

14	15	16	17	18	24	36	0,2	0,5	0,8	5^6	8^6	$\sqrt[3]{64}$	$\sqrt[3]{80}$

Questionamentos:

- 1 - Observando os valores de x e y, qual será o valor de y quando x = 12? Como você pensou para encontrar resposta?
- 2 - Esse padrão que você descobriu vale também quando x = 10? Justifique sua resposta.
- 3 - E quando x = 15?
- 4 - Descreva o padrão que você utilizou para descobrir estes valores?
- 5 - E qual o valor de y quando x = 0,2? Como você pensou para encontrar resposta?
- 6 - E qual o valor de y quando x = 0,8? Como você pensou para encontrar resposta?
- 7 - Descreva o padrão que você utilizou para descobrir estes valores?
- 8 - Descubra os valores faltantes no quadro. Como você pensou para encontrar a resposta em cada espaço que estava em branco.
- 9 - E qual o valor de y quando x = 17? Como você pensou para encontrar resposta?
- 10 - Construa o gráfico de y em função de x. Escreva algumas características tais como domínio, imagem, intercepto de x e de y, crescimento da função.
- 11 - Qual a função (y em função de x) que representa a relação que existe no quadro?

Fonte: As autoras, 2026

Ao mesmo tempo, para dois estudantes de Iniciação Científica — um vinculado ao Ensino Superior e outro ao Ensino Médio - foi dada a tarefa de, com o uso do Geogebra e a impressora 3D, pensarem em um objeto que demandasse, para sua construção, uma função logarítmica. A análise dos dados foi realizada via abordagem qualitativa do tipo descritiva. Segundo Denzin e Lincoln (2006), é uma pesquisa que envolve uma análise interpretativa do mundo e isso significa que os pesquisadores conduzem seus estudos, por meio da observação e análise de fenômenos, eventos ou comportamentos em seus ambientes naturais, com o propósito de entender os acontecimentos em termos dos significados que as pessoas lhes conferem. Por serem descritivas, têm o objetivo de descrever criteriosamente os fatos e fenômenos de determinado contexto, de forma a obter informações a respeito daquilo que já se definiu como problema a ser investigado (Triviños, 2008).

Dessa forma, os estudantes, em seus grupos pré-estabelecidos, envolveram-se em discussões, buscando formular conjecturas e estratégias para encontrar a solução. Na sala de aula, cada um deles estabeleceu a estratégia mais adequada à atividade e, ao compartilhar com os colegas as respostas, um dos integrantes explicava sua conjectura à turma, bem como a estratégia utilizada na resolução da tarefa. Esta, no que se refere aos bolsistas de Iniciação Científica, foi realizada durante um semestre letivo sob a coordenação de uma das integrantes do

grupo de pesquisa. As reuniões de estudos ocorriam semanalmente, sendo necessárias discussões sobre o significado de uma escrita, como $y = \log_a b$, seu comportamento, representação e abstração de alguma curva semelhante em algum objeto físico. Identificada a possibilidade de observar uma função logarítmica na curvatura de um cálice de vinho, os bolsistas foram desafiados a representarem a função no Software Geogebra, realizar a sua rotação em torno do eixo x visando gerar o volume e, posteriormente, realizar sua impressão em uma impressora 3D.

Alguns resultados

Inicialmente, cabe destacar que o cerne da tarefa investigativa proporcionada aos estudantes consistia em encontrar o modelo matemático que representasse a relação estabelecida no início da atividade. E esta — $y = \log_4 x$ — é a única resposta da situação-problema. Em consonância com as classificações de Ponte (2005), essa atividade pode ser considerada fechada; no entanto, tem potencial para permitir a emergência de distintas estratégias para encontrá-la. Assim, o que se desejava é que os discentes descobrissem uma relação entre os valores de x e y . Na primeira indagação “Observando os valores de x e y , qual será o valor de y quando $x = 12$? ? Como você pensou para encontrar resposta?”, todos os grupos encontraram a correta e mencionaram 1,79. Em especial, um deles mencionou que 12 é o resultado de $2 \cdot 6$; então, o valor do y , quando x é igual a 12, é a soma dos valores de $0,5 + 1,29 = 1,79$. Outro esclareceu que “quando o valor de cima dobra, o de baixo aumenta em 0,5”.

Nesse caso, o número 12 foi obtido pela conjectura do dobro. E, para encontrar a resposta do valor correspondente a $x = 12$, o grupo optou por somar 0,5 ao valor correspondente do 6, encontrando $1,29 + 0,5 = 1,79$. A aula transcorreu com muitos diálogos conforme o exposto:

Professora: Olhem para os números 2, 3 e 6 na linha do x e as respectivas respostas y . É possível observar algo? Podem também olhar para os valores de 2, 4 e 8 novamente na linha do x e os valores de y que estão relacionados a eles. Será que existe uma mesma lógica nestes dois exemplos?

Nesta ótica, cumpre salientar as ideias de Ponte (2003) quando expressa que investigar não significa necessariamente lidar com problemas, mas trabalhar a partir de questões que interessam e inicialmente confusas e, assim, clarificar e estudar de modo organizado. Neste sentido, encontrar o valor 1,29, inicialmente, pareceu ser difícil, mas, com base nas discussões, foram sendo organizadas ideias que

auxiliaram, como bem apontam Carvalho e Baqueiro (2020), os estudantes a terem oportunidade de participar da construção de seu conhecimento, formarem suas opiniões e conseguirem tomar decisões. Na mesma seara, para Scheffer et al. (2024), o ato de ensinar por meio da elaboração de conceitos e conjecturas modifica a percepção da Matemática como uma disciplina definitiva, criada apenas por gênios, visando ao conhecimento em transformação, possível de ser realizada por não matemáticos que se dedicam a refletir sobre as propriedades das coisas e fatos.

É oportuno ressaltar que nenhum grupo considerou 12 como sendo a multiplicação dos números 3 e 4. A resposta também seria a mesma, ou seja, quando $x = 3$, y vale 0,79; e se $x = 4$, y vale 1. Logo, a soma resultaria $1 + 0,17 = 1,17$. Essa possibilidade foi vista no momento da socialização em grande grupo com base nas indagações da professora.

A tarefa também solicitava se o mesmo padrão encontrado anteriormente poderia ser validado para $x = 10$. As respostas afirmativas seguiram um padrão: a partir da multiplicação dos valores de x e a soma dos de y . Assim, para encontrar o valor de 10, efetuou-se 2.5 com base no que foi somado o valor de y respectivo ao do 2 e ao de 5, os quais valem 0,5 e 1,16. A mesma ideia pode ser constatada quando os estudantes foram inquiridos sobre $x = 15$. Para encontrar o valor deste, usaram a operação 3.5; com base nisso, somaram o valor de y respectivo ao do 3 e ao do 5, os quais valem 0,79 e 1,16.

Na questão quatro, havia a necessidade de descrever o padrão utilizado para responder às perguntas anteriores. Para tal, alguns grupos partiram da multiplicação dos valores de x e a soma dos de y ; dois deles utilizaram a fórmula $y = \log_4 x$; um fez uso de $y = \log \log 4x$; outros dois não resolveram a questão e um deles expressou que pensou “a cada 2 vezes que aumenta x , somamos 0,5 no y .”

A questão cinco questionava o valor de y quando $x = 0,2$ com a devida justificativa. Todos os grupos encontraram a resposta correta dividindo o valor de x e a subtração do respectivo de y . Para encontrar este, quando o de x é 0,2, os estudantes usaram a divisão de 2 por 10. Logo, utilizaram os valores de y correspondentes aos de x para fazer a subtração, os quais valem 0,5 e 1,66, respectivamente.

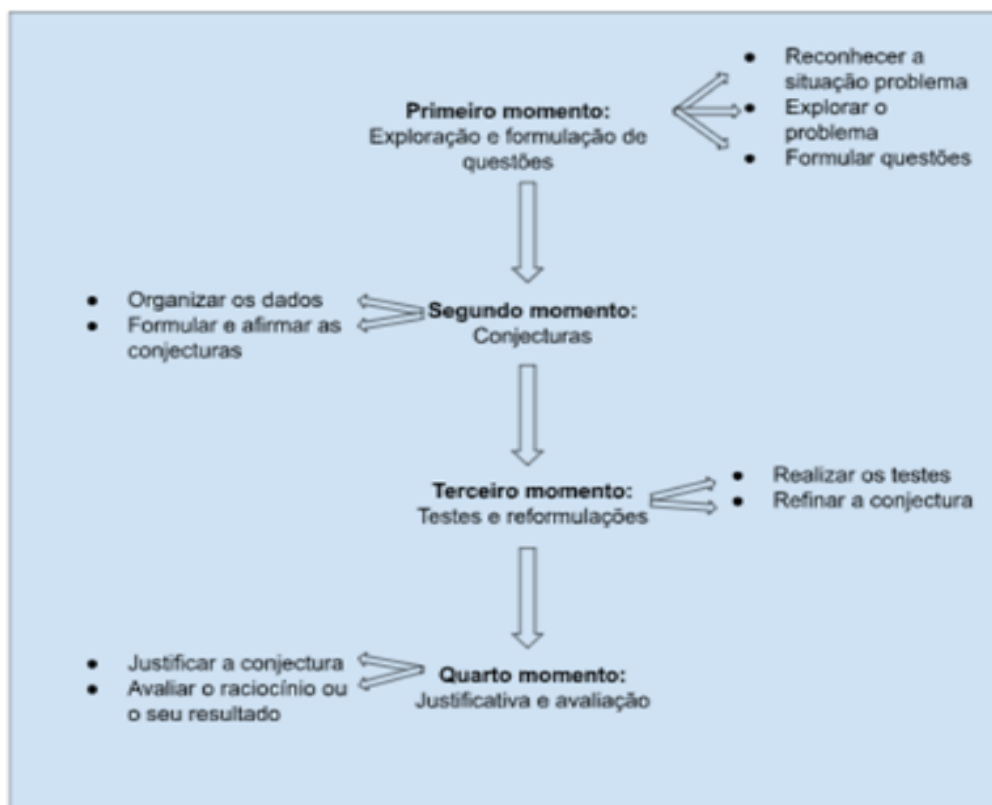
Importa aqui destacar que, nas tarefas exploratório-investigativas, é importante que os estudantes expliquem, nas formas oral e escrita, como chegaram à resposta, para validar ou refutar a tríade conjectura-teste-demonstração. Nesta

serra, os estudantes defendem suas ideias e as colocam em discussão com os demais. Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p. 10) afirmam que "Investigar em Matemática assume características muito próprias, conduzindo rapidamente à formulação de conjecturas que se procuram testar e provar, se for o caso". E completam: "As investigações matemáticas envolvem, naturalmente, conceitos, procedimentos e representações matemáticas, mas o que mais fortemente as caracteriza é este estilo de conjectura teste-demonstração" (Ibidem, p.10).

Na questão seis os estudantes deveriam encontrar o valor de y quando $x = 0,8$. Os estudantes responderam corretamente, sendo que a maioria optou pela divisão do valor de x e a subtração do respectivo valor de y . Na questão seguinte, era necessário descrever o padrão utilizado para descobrir os valores. Dos grupos, onze utilizaram a divisão dos valores de x (1º o de menor valor) e a subtração dos respectivos valores de y , explicitando ser necessário "dividir dois números em x a fim de obter a resposta do número a se calcular e subtrair os valores em y , é necessário que os dois números escolhidos possuam valor em y ".

A questão oito solicitava que se descobrisse os valores faltantes no quadro. Seis grupos explicitaram que, para os números com potência basta multiplicar o valor em y equivalente a base pelo expoente. Como um deles explicitou: "No caso da raiz foram multiplicados dois números para chegar no radicando, somamos os valores em y e dividindo pelo índice". Cinco grupos utilizaram a fórmula $y = \log_4 x$; e as propriedades dos logaritmos, conforme expresso na figura 3. Dois grupos não responderam. Outros dois relataram já ter explicado nas questões anteriores e dois mencionaram que depende dos valores de x .

Figura 03 – Resposta da questão oito



Fonte: Autores da pesquisa (2026)

Convém destacar que um grupo, após descobrir que a tabela se relacionava com logaritmos, escreveu as principais propriedades, mesmo que nenhum item da tarefa solicitasse, conforme expresso na figura 4. Uma das hipóteses reside no fato de que usualmente no Ensino Médio, os estudantes fazem uso de fórmulas quando necessitam resolver alguma questão. Nessa ótica, a matemática escolar e/ou acadêmica acaba por se restringir a um conjunto de regras que, de modo geral, pode ser utilizado para resolver qualquer situação.

Figura 04 – Propriedades dos logaritmos

* PROPRIEDADES DOS LOGARITMOS

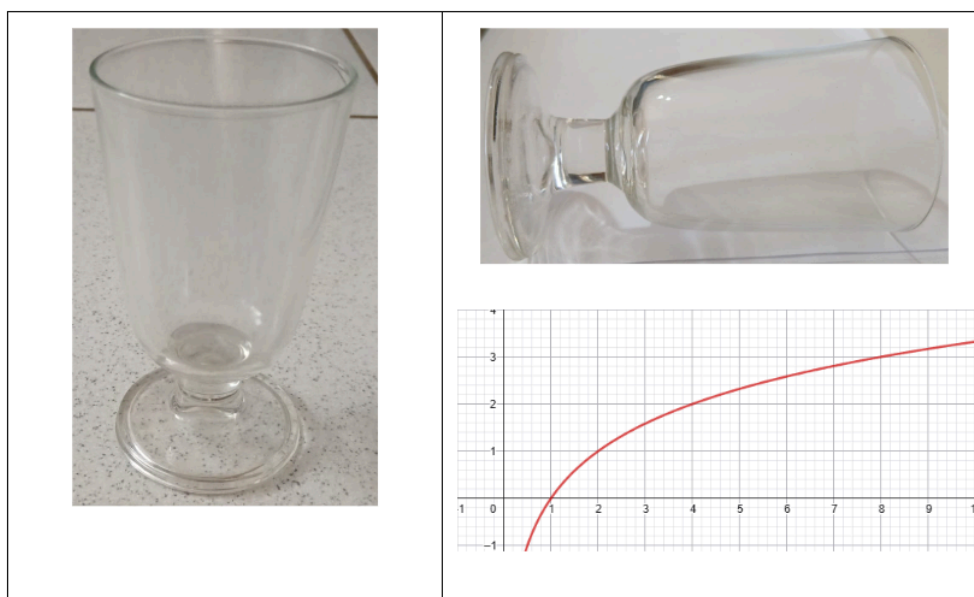
- $\bullet \log_x (a \cdot b) = \log_x a + \log_x b$
- $\bullet \log_x \left(\frac{a}{b}\right) = \log_x a - \log_x b$
- $\bullet \log_x a^n = n \cdot \log_x a$

Fonte: Autores da pesquisa (2026)

Na questão seguinte, os estudantes deveriam calcular o valor de y quando $x = 17$. Nove grupos fizeram a média do número anterior e posterior e quatro utilizaram a fórmula $y = \log_4 x$. Na questão 10 - construir o gráfico de y em função de x e escrever algumas características tais como domínio, imagem, interceptos e crescimento da função - sete grupos não responderam. Oito responderam $D=\mathbb{R} +$ e $Im=\mathbb{R}$. Três explicitaram que $x > 0$ e x diferente de 1. Quatro responderam que intercepta em $x = 1$ e $y \notin \mathbb{R}$. Um grupo respondeu que intercepta em $y = 1$ e $x = \nexists$. Sete grupos responderam que a função é crescente, dentre eles, dois, que a base 4 é maior que 1 e três grupos citaram a fórmula $y = \log_4 x$. No que se refere à última questão - Qual a função que representa a relação que existe no quadro? - foi consenso tratar-se de $y = \log_4 x$, dado todo o processo em curso no momento das discussões.

Os bolsistas de Iniciação Científica escolheram compor um objeto inspirados num cálice pois, segundo eles, haveria chances de “aparecer um logaritmo no contorno”. Após discutirem com a pesquisadora orientadora qual a base da função logarítmica, expressaram que seria conveniente optar pela 2, pois, ainda segundo eles, “a inclinação com uma base maior iria subir muito a linha do contorno”, sobretudo se fosse, por exemplo, a base 10. Para ilustrar a ideia, optaram pelo gráfico a seguir exposto:

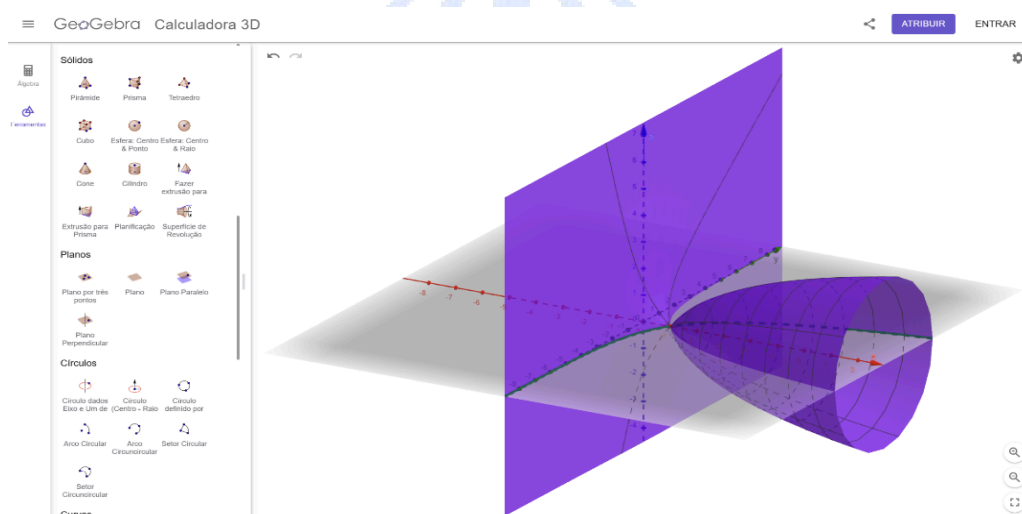
Figura 5: Material I produzido pelos bolsistas



Fonte: Produção dos bolsistas (2026)

Conforme os estudos avançavam, os dois bolsistas optaram por construir um conjunto de instruções para a construção. Inicialmente, inseriram no Geogebra 2D a função. Ativaram a ferramenta “Superfície de Revolução”, na barra lateral esquerda na opção “Ferramentas” e em seguida em “Mais”. No menu, encontraram a seção “Sólidos” e clicaram na ferramenta chamada “Superfície de Revolução”. A seguir, selecionaram a curva a ser rotacionada, ativando a ferramenta de “Superfície de Revolução”, clicando diretamente sobre a curva da função logarítmica que apareceu na visualização 3D, como expresso na figura a seguir:

Figura 6: material II produzido pelos bolsistas



Fonte: Produção dos bolsistas (2026)

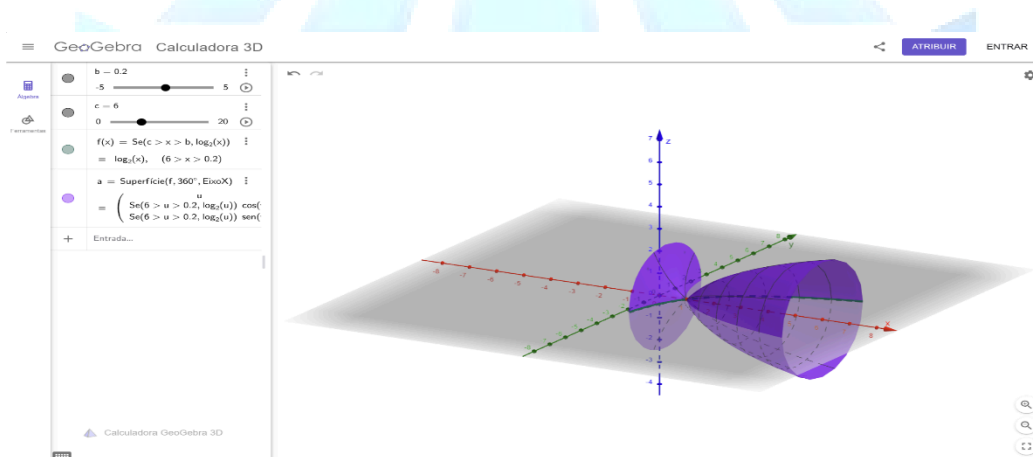
Para personalizar o tamanho da base do cálice no GeoGebra 3D, foi necessário criar a variável b , inserindo manualmente uma nova entrada definindo, por exemplo, $b = 0$. A seguir, clicaram nos três pontos localizados ao lado dessa variável e selecionaram a opção “Criar controle deslizante”, criando uma barra interativa que permitirá ajustar o valor de b dinamicamente.

Em seguida, alteraram a função $y = \log_2 x$ já inserida para o seguinte formato $f(x) = \text{Se}(x > b, \log_2 x)$. Ao mover o controle deslizante, foi possível modificar visualmente a largura da base do cálice, facilitando a escolha do tamanho ideal. O comando $\text{Se}(\dots)$ no GeoGebra atua como uma condição lógica, exibindo a curva apenas quando a regra estabelecida é verdadeira. Nesse caso, a função foi desenhada apenas para valores de x maiores que b , de modo que o trecho anterior é “cortado”. Para controlar a altura máxima da parte superior do cálice, primeiro criaram a variável c , inserindo manualmente uma nova entrada definindo, por

exemplo $c = 0$, clicando nos três pontos localizados ao lado dessa variável e selecionar a opção “Criar controle deslizante”. Assim como no ajuste da base, o controle deslizante permitirá alterar o valor de c dinamicamente. Ato contínuo, substituíram a função utilizada no passo anterior por $f(x) = Se(c > x > b, \log_2 x)$.

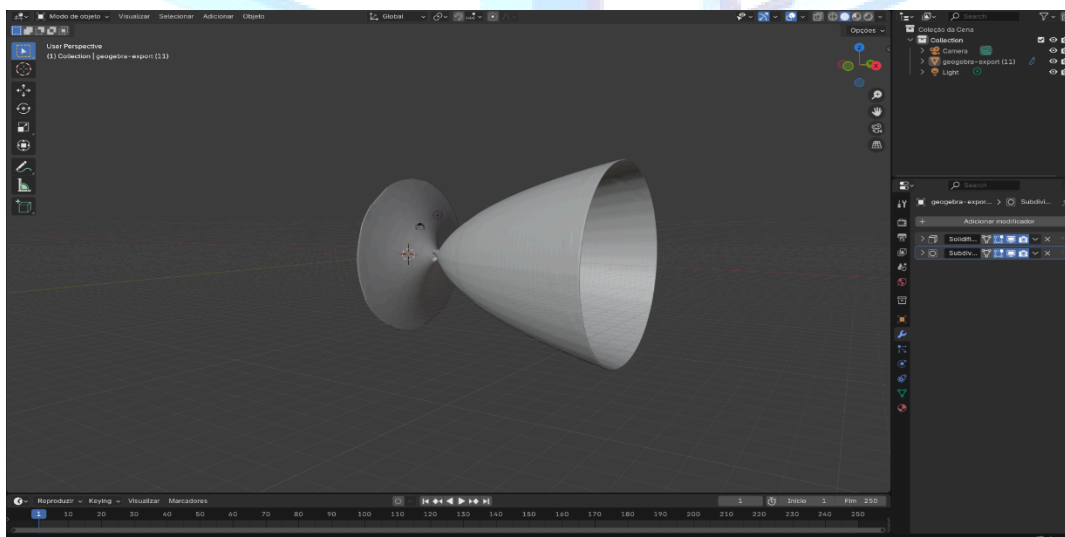
Ao mover o controle deslizante, foi possível limitar a extensão da borda superior do cálice, encontrando o formato mais adequado antes de avançar para a próxima etapa, pois a variável c define o ponto onde o desenho da função é interrompido no topo. Ao diminuí-la, encurta-se a curva e reduzimos a altura da borda superior do cálice, conforme expresso na figura 7. Com o modelo concluído no GeoGebra, exportaram em formato .stl e realizaram os refinamentos no Blender. Após aplicaram os ajustes de espessura e suavização e o cálice adquiriu sua forma definitiva, apresentada na figura 8.

Figura 7: Material III produzido pelos bolsistas



Fonte: Produção dos bolsistas, 2026

Figura 8: Material IV produzido pelos bolsistas



Fonte: Produção dos bolsistas, 2026

Quanto ao modelo matemático usado geral, os estudantes escreverem-no da seguinte forma:

$$a = \text{Surface}((x, \log \log(\text{base}, x) * \cos \cos(t), \log \log(\text{base}, x) * \sin \sin(t), x \text{ Min}, x \text{ Max}, t, 0, 2\pi)$$

A função Superfície (ou surface) no Geogebra segue o seguinte padrão: superfície <Expressão X>, <Expressão y>, <Expressão Z>, <Parâmetro 1>, <Início>, <Fim>, <Parâmetro 2>, <Início>, <Fim>. Particularmente, para o desenho representado na taça, ele foi parametrizado da seguinte forma:

$$a = \text{Surface}((x, \log \log(2, x) * \cos \cos(t), \log \log(2, x) * \sin \sin(t), x \text{ 0.2, 5.8}, t, 0, 2\pi)$$

. Neste caso, os valores das coordenadas x, y e z são definidas da seguinte forma:

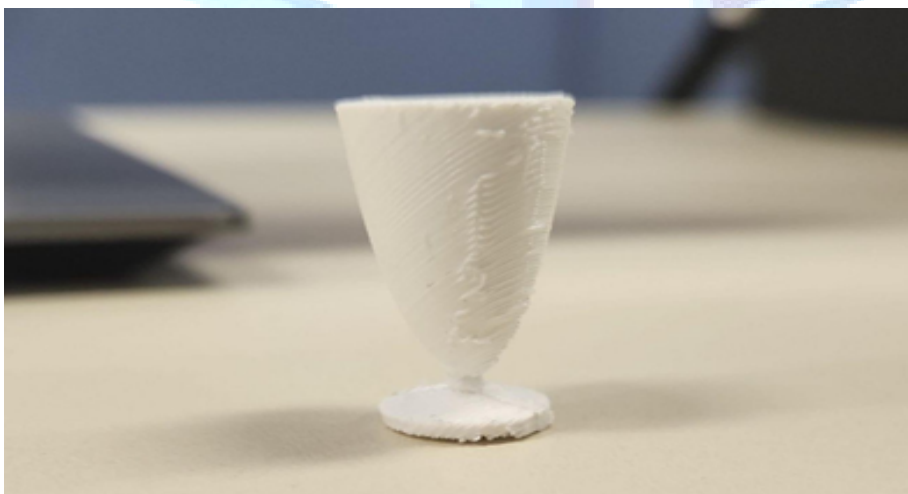
$x = x$ (é o comprimento/altura da taça deitada);

$y = \log_2 x \cdot \cos(t)$ (é o raio de rotação que atua no plano vertical);

$z = \log_2 x \cdot \sin(t)$ (completa o círculo no plano z).

O uso de $\cos \cos(t)$ e $\sin \sin(t)$ multiplicado por uma função $\log_2 x$ é o que faz a forma circular (uma revolução). O raio do círculo em qualquer altura é dado por $\log_2 x$. A segunda parte da fórmula $[x \text{ 0.2, 5.8}]$ define os limites de "desenho" da figura. Os valores 0.2, e 5.8 são de x . Como $z = x$, isso significa que sua superfície começará na altura 0,2 e terminará na altura 5.8. A terceira parte $[t, 0, 2\pi]$ indica que t é o segundo parâmetro (o ângulo de rotação), 0, é o ângulo inicial (0 graus) e 2π , o ângulo final (360°). Isso diz ao GeoGebra para dar uma volta completa. A primeira impressão, ainda com ranhuras, está sendo refinada e ficou assim constituída:

Figura 9 - Primeiro objeto impresso pelos bolsistas de Iniciação Científica



Fonte: Produção dos bolsistas, 2026

Considerações finais

O desenvolvimento da pesquisa evidenciou que a articulação entre tarefas exploratório-investigativas e tecnologias digitais — especialmente o GeoGebra e a impressora 3D — configura-se como possibilidade potente para o ensino de logaritmos. Ao deslocar o foco da aplicação mecânica de fórmulas para a formulação de conjecturas, testagem de hipóteses e argumentação, observou-se ampliação qualitativa na compreensão das propriedades e da estrutura funcional dos logaritmos. No que se refere à aprendizagem dos estudantes, os dados indicam avanços na identificação de regularidades e na articulação entre multiplicação e adição, divisão e subtração, evidenciando a compreensão das propriedades operatórias como decorrência de relações estruturais. Os grupos reconheceram o logaritmo como operação inversa da exponencial e o registro espontâneo de propriedades por alguns grupos sugere movimento de sistematização conceitual a partir das regularidades exploradas. Entretanto, persistem limitações. As dificuldades na construção e interpretação do gráfico da função logarítmica — especialmente quanto ao domínio, à imagem e aos interceptos — revelam fragilidades na articulação entre registros algébricos e gráficos.

No que diz respeito aos bolsistas de Iniciação Científica, o processo de modelagem e materialização do objeto tridimensional demandou decisões matemáticas que implicaram compreensão mais refinada do comportamento da função logarítmica. A escolha da base, a delimitação do domínio e os ajustes na parametrização da superfície de revolução evidenciam apropriação que ultrapassa o uso instrumental da tecnologia. A impressão do objeto operou como instância de validação e reflexão, tornando visíveis limites e exigindo reformulações no modelo matemático. Sob a perspectiva formativa, a experiência favoreceu o desenvolvimento da autonomia intelectual, do pensamento investigativo e da articulação entre teoria e prática. Como limitações da pesquisa, destaca-se seu caráter qualitativo e contextualizado, o que não permite generalizações. Além disso, o tempo didático mostrou-se restrito para aprofundar dimensões gráficas e formais do conceito. A integração da impressora 3D também exige infraestrutura e formação específica, o que pode dificultar sua replicação em outros contextos.

Como desdobramentos, sugere-se ampliar o tempo dedicado à articulação entre as duas representações evidenciadas na pesquisa, investigar a permanência das aprendizagens em disciplinas subsequentes e explorar aplicações em contextos científicos que mobilizem escalas logarítmicas. Em síntese, os resultados indicam

que a integração entre investigação matemática e materialização tecnológica favorece deslocamentos de uma racionalidade procedimental para uma compreensão mais conceitual, relacional e aplicada dos logaritmos, ainda que desafios permaneçam.

Referências

ANDRADE, Érico Felinto de. **Uma proposta para o aprofundamento do ensino de logaritmos: as escalas logarítmicas**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2023. Disponível em <https://dspace.sti.ufcg.edu.br/handle/riufcg/33257>. Acesso em: fev 2026.

BISPO, Joselito da Silva. **O ensino de derivadas de funções reais mediado pelo uso do GeoGebra para Aprendizagem Significativa: contribuições de uma sequência didática**. 2024. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências Exatas) – Universidade do Vale do Taquari (Univates), Lajeado, 2024.

BLENDER FOUNDATION. **Blender: The Free and Open Source 3D Creation Suite**. 2024. Disponível em: <https://www.blender.org>. Acesso em: 9 dez. 2024.

BORBA, Marcelo de Carvalho; SILVA, Ricardo Scucuglia Rodrigues da; GADANIDIS, George. **Fases das tecnologias digitais em educação matemática: sala de aula e internet em movimento**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2020.

CONCENTINO, Jéssica. **Caminhos a percorrer: desafios no processo de investigação matemática**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2019.

DENZIN, N. K. e LINCOLN, Y. S. Introdução: a disciplina e a prática da pesquisa qualitativa. In: DENZIN, N. K. e LINCOLN, Y. S. (Orgs.). **O planejamento da pesquisa qualitativa: teorias e abordagens**. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2006. p. 15-41.

FERRUZZI, Elaine Cristina; BORSSOI, Adriana Helena; DA SILVA, Karina Pessoa. Investigação Matemática em foco: evidenciando possibilidades para a sala de aula. **Revista de Educação, Ciências e Matemática**, [S. l.], v. 11, n. 3, 2021, p. 1-20. Disponível em: <https://publicacoes.unigranrio.edu.br/recm/article/view/6085>. Acesso em mar. 2026.

LUCI NETO, Rynaldo. **Ensino de logaritmos na educação profissional técnica de nível médio**. Dissertação. 2022. (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo; Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Disponível em <https://repositorio.pgsscogna.com.br/bitstream/123456789/47137/1/dissertacao%20revisada%20COM%20ficha%20catalografica.pdf>. Acesso em: jan. 2026.

LOPES, Érika Maria Chioca. **Integração de mídias na disciplina de geometria analítica em um curso de graduação em matemática**. 2019. 275 f. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-graduação em Educação, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2019. DOI: 10.14393/ufu.te.2019.920.

LOUSADA, Márcio Sousa. **Logaritmos e aplicações**. (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Pará, Abaetetuba, 2022 Disponível em: https://sca.proformat-sbm.org.br/busca_tcc_det.php?id=171055135&id1=6605. Acesso em: jan. 2026.

HEDLER, Larissa Weyh Monzon. **Desenvolvimento do pensamento geométrico espacial: GeoGebra, Impressora 3D e Abstração Reflexionante**. 2020. 252 f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2020. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/219414>. Acesso em: fev. 2026.

QUEIROZ, Plácido Anthony Lima Martins. **Metodologias de ensino e ferramentas tecnológicas para o professor de matemática abordar áreas de polígonos**. 2023. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2023. Disponível em: https://sucupira-legado.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?id_trabalho=13685711&popup=true. Acesso em: fev. 2026.

MENEGUCCI, Maicon do Nascimento. **Uma proposta de metodologia de ensino de logaritmos através da tecnologia**. 2022. PROFMAT/Mestrado em Matemática em Rede Nacional, 2022. Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Disponível em <https://rima.ufrjr.br/jspui/handle/20.500.14407/15580>. Acesso em: fev. 2026.

PONTE, João Pedro; BROCARD, Júlia; OLIVEIRA, Hélia. **Investigação Matemática em sala de aula**. 2.edição. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

PONTES, Fabiany Lais Gomes. **Uma análise de significados produzidos por alunos do ensino superior a partir de uma proposta didática de logaritmos**. 2023. Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática. Natal, RN. Disponível em <https://repositorio.ufrn.br/server/api/core/bitstreams/ccb5c27e-901a-46ad-94a9-6389c98f14fb/content>. Acesso em jan. 2026.

TAVARES, F. **Estudo histórico do objeto matemático “logaritmos” em coleções de livros didáticos**. [São Paulo]: PUC-SP, 2023 (dissertação/monografia).

TRIVINOS, Antonio Nelson Sena. **Introdução à pesquisa em ciências sociais: a pesquisa qualitativa em educação**. 9. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

WICHNOSKI, Paulo; KLÜBER, Tiago E. Investigações Matemáticas na Educação Matemática: uma experiência na formação inicial de professores. **Revista de Educação Matemática**, v. 15, n. 18, p. 69–83, 2018. Disponível em: <https://www.revistasbemsp.com.br/index.php/REMat-SP/article/view/275>. Acesso em: fev. 2026..

Submetido em: 02/03/2026

Aceito em: 28/04/2026