CONTINUIDADE E NÚMEROS REAIS: DESCOBERTAS E JUSTIFICATIVAS DE PROFESSORES*

CONTINUITY AND REAL NUMBERS: DISCOVERIES AND JUSTIFICATIONS OF TEACHERS

Antonio Sérgio Cobianchi**

Resumo

O objetivo deste artigo é analisar a partir de ligações dos aspectos epistemológicos, históricos e matemáticos da idéia matemática de continuidade e, a posterior construção de números reais, feita por Richard Dedekind, para investigar quais são as justificações preferenciais de professores de Matemática. Para enfocar essas justificações escolhemos os **contextos da descoberta e justificação**. Entrevistamos professores e observamos as suas descobertas e justificativas, apresentando as idéias de continuidade em quatro justificativas escolhidas em quatro períodos da História. Analisamos o tema números reais e continuidade em livros didáticos dos três níveis de ensino, em dissertações, teses e artigos publicados em revistas de Educação Matemática. Indicamos alguns problemas encontrados no ensino desse assunto e apresentamos algumas sugestões e possibilidades de tratamento do tema continuidade e números reais para Licenciatura em Matemática.

Palavras-chave: Educação Matemática. Números Reais. Continuidade. História da Matemática. Epistemologia.

Abstract

The objective of this article is to analyze, through links between epistemological, historical, and mathematical aspects of the mathematical idea of continuity, and the later construction of real number done by Richard Dedekind, to investigate the justifications preferred by teachers. For focusing these justifications we decided by the contexts of discovery and justification. We conducted interviews with teachers and observed their discoveries and justifications about the subject, presented four justifications of continuity from the different periods of the history. We analyzed the theme of real numbers and continuity in textbooks from the three levels of education, dissertations, theses, and articles published in mathematics education journals. We end by remarking some problems in the teaching of this subject and we presented some suggestions regarding possible ways to deal with the theme continuity and real numbers in teacher education courses in mathematics.

Keywords: Mathematics Education. Real Numbers. Continuity. History of Mathematics. Epistemology.

* Este artigo é uma seleção originária da tese de doutorado "Estudos de Continuidade e Números Reais Matemática, Descobertas e Justificativas de Professores", defendida em novembro de 2001, junto ao programa de pós-graduação em Educação Matemática da Unesp - Rio Claro.

** Doutor em Educação Matemática pela Unesp – Rio Claro, Pós-doutor junto a Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo – FE - USP, Professor da Escola de Engenharia de Lorena – EEL - USP - Lorena. Endereço para correspondência: Rua Mamede de Campos 37, 12.607-050 – Lorena – SP. Endereços eletrônicos: aserco@uol.com.br ou cobi@debas.eel.usp.br / el. (12) 31595093 - EEL - USP

Introdução

O assunto continuidade, o qual possui relação direta com números reais, remonta à Grécia antiga onde provavelmente surgiu há mais de dois mil anos, com o problema da incomensurabilidade. O assunto números reais é um tópico encontrado em diversas situações da Matemática, tanto teóricas como práticas e observado de maneira tanto consciente como inconsciente. Devido à extensão do tema continuidade na História, decidimos realizar uma pesquisa enfocando quatro períodos históricos, em que esse assunto passou por transformações, mudando as justificativas e os enfoques do mesmo.

O Contexto da Descoberta e da Justificação

Decidimos pelos **contextos da descoberta e justificação**, com o objetivo de fornecer uma explicação filosófica e científica de cada um desses quatro períodos da História; e também a tentativa de resgate dos instrumentos e idéias usados para a explicação e justificativa desse assunto em cada época abordada, útil na compreensão dessa idéia nos dias de hoje.

A grande maioria dos problemas relacionados com a continuidade já está colocada há milênios, enquadrando-se no contexto da descoberta. Cada justificativa desse problema coloca-o em um novo patamar, e nesse processo existem novas descobertas que variam com a época em que surgiram. As justificativas para esses problemas são mudadas de acordo com os contextos científico-filosóficos da atualidade em que ocorreram.

O trabalho de John Hershel (1792-1871) *A Preliminary Discourse on the Study of Natural Philosophy* foi, na época, o mais abrangente e equilibrado sobre filosofia da ciência, e uma de suas maiores contribuições para essa área foi uma distinção clara entre o **contexto da descoberta** e o **contexto da justificação**. Ele afirmou que o procedimento para formular uma teoria é totalmente irrelevante para a questão de sua aceitabilidade. Uma ascensão indutiva cuidadosa e um palpite ao acaso encontram-se na mesma situação, se as suas conseqüências dedutivas são confirmadas pela observação.

Com relação ao **contexto da descoberta** Herschel afirmava a existência de duas maneiras diferentes de procedimento para o cientista, indo das observações às leis e teorias, isto é, dos fenômenos às "leis da natureza". Uma das abordagens é a *aplicação de um esquema indutivo específico*. Como exemplo, a lei de Boyle, que foi descoberta estudando-se a variação de volume de um gás com a sua pressão, e posteriormente generalizada a partir dos resultados experimentais. A outra abordagem é a *formulação de hipóteses*, que Hershel salientou ser caminho que não pode se reduzido à aplicação de regras fixas.

Herschel incluía entre "as leis da natureza" as correlações das propriedades e as seqüências de eventos; essas leis são formadas a partir da análise dos fenômenos. Ele chamava as correlações de "fatos gerais", citando a lei de Boyle. Entre as seqüências "legais" de eventos encontram-se as leis de queda livre de Galileu e a trajetória parabólica dos projéteis. Ele observou que as "leis da natureza" são afirmadas com uma estipulação implícita de que sejam cumpridas certas condições de contorno. Como exemplo, a lei da queda livre vale apenas para uma evolução à temperatura constante. A descoberta dessas "leis da natureza" é o primeiro estágio de interpretação científica. O segundo é a incorporação dessas leis em teorias, que aparecem por uma posterior generalização indutiva adicional, ou pela criação de hipóteses ousadas, que estabelecem uma interrelação de leis antes desconexas.

O conceito de Hershel do **contexto de descoberta** pode ser resumido como segue: o primeiro passo do procedimento científico consiste em subdividir os fenômenos complexos nas suas partes ou aspectos constituintes e observar com muita atenção as propriedades-chave para a explicação dos fenômenos. Por exemplo, para compreender o movimento dos corpos, devem-se focalizar propriedades como força, massa e velocidade. O exemplo mais importante usado por ele sobre a redução de um fenômeno complexo em seus aspectos relevantes é a análise do som da vibração de uma fonte, a transmissão do movimento vibratório através de um meio, a sua recepção pelo ouvido, e produção de uma sensação. Herschel acreditava (1987, p.88-90), que a compreensão completa do som exigiria o conhecimento dos fenômenos do impacto que redundam em vibração, o conhecimento da interação de uma partícula em movimento e das partículas que a rodeiam, e o conhecimento da filosofia das sensações auditivas.

Quanto ao **contexto de justificação**, ele enfatizou que a concordância com as observações é o mais importante dos critérios de aceitabilidade das leis e teorias científicas. Afirmou que alguns exemplos confirmadores possuem um significado maior do que outros. Um primeiro tipo de exemplo confirmador é a extensão da lei a casos extremos. Observou (Herschel, 1987, p.168) que a aceleração idêntica de uma moeda e de uma pena em um vácuo experimentalmente produzido era um "ensaio severo" da lei dos corpos cadentes de Galileu. Um segundo tipo de caso confirmador seria um resultado inesperado (Herschel, 1987, p.170), indicando uma lei ou teoria possuidora de um propósito que não lhe foi atribuído antes. Um terceiro tipo de caso confirmador, que é a "experiência crucial", considerada por Herschel como ensaios destrutivos a que as teorias aceitáveis devem sobreviver. Ele apresenta uma experiência sugerida por Bacon para determinar se a aceleração dos corpos para baixo é o resultado da atração da Terra ou de algum mecanismo interno dos próprios corpos. Bacon sugeriu que a questão fosse decidida comparando o comportamento de um relógio de contrapeso com o de um relógio de mola, em lugares altos e em minas. (Herschel, 1987, p.186-187)

Herschel exigia que o cientista assumisse o papel antagônico contra suas próprias teorias, buscando tanto refutações diretas quanto exceções que limitam o domínio de aplicação dessas teorias. Ele acreditava que o mérito de uma teoria é provado unicamente pela sua capacidade de resistir a tais ataques.

Para nos aproximarmos das justificativas na atualidade, procuramos também nos inteirar sobre visões e opiniões de alguns cientistas do século vinte, sobre os contextos da descoberta e justificativa como Carl G. Hempel, Hans Reichenbach, Rudolf Carnap, Karl Popper, Paul Feyerabend, Thomas S. Kuhn e Isaac Epstein.

Todos esses epistemólogos apresentam idéias semelhantes com relação a esses dois contextos. Para Popper (1993, p.42) o que deve ser tomado como critério de demarcação é a falseabilidade de um sistema, e não a sua verificabilidade. Reichenbach (1976, p.6) declara que a epistemologia atua apenas na construção do contexto da justificação, para a construção de uma teoria científica, pois, para ele, o ato do descobrimento escapa da análise lógica. Epstein (1988, p.40) afirma que a distinção entre esses dois contextos é importante devido à transição dos enunciados singulares da observação para os enunciados universais em formas de leis, hipóteses, teorias. Conforme Carnap (1970, p.408-10) nenhuma teoria pode ser estabelecida completa e definitivamente por qualquer classe finita de observações, pois, segundo ele, uma teoria é capaz de ser confirmada ou verificada somente de forma incompleta, porque somente um número finito de observações terá sido testada em qualquer instante. Segundo Hempel (1965, p.6) o que determina a solidez de uma hipótese não é o modo como se chegou a ela (pode ter sido sugerida até mesmo por um sonho ou por uma alucinação), mas o modo como se mantém quando é testada, isto é, quando confrontada com dados relevantes relacionados com a observação. Na opinião de Feyrenbend (1977, p.260) esses dois contextos são coisas diferentes, especialmente por serem executados por duas diferentes disciplinas (História da Ciência e Filosofia da Ciência) extremamente zelosas da respectiva independência. Kuhn (1982, p.27-8) afirma que o contexto da descoberta é fonte de fenômenos para aplicação do contexto da justificação, isto é, fatos são fontes de normas.

Práticas Educativas e Concepções no Ensino de Continuidade e Números Reais

Para verificar como o assunto números reais e continuidade são tratados por professores, resolvemos ouvir a opinião, sob a forma de entrevista, de professores de Matemática dos níveis, fundamental, médio e superior. Para tanto construímos um instrumento de pesquisa, dividido em dois instrumentos. O primeiro constou de um questionário escrito com quinze perguntas, que abrangeu a vida estudantil do entrevistado, a sua relação com a Matemática e sobre assunto, números reais e continuidade.

Inicialmente, foram entrevistados usando o primeiro instrumento, quarenta e três professores de um Curso Lato Sensu para professores de Matemática, na Faculdade de Engenharia Química de Lorena, atual Escola de Engenharia de Lorena da Universidade de São Paulo – EEL – USP, na disciplina por nós ministrada, História da Matemática. Também fizemos entrevistas com quatro professores do ensino fundamental e médio, alguns deles trabalhando também no ensino superior, e com quatro professores do ensino superior, esses também de Lorena e região. Para esses oito professores aplicamos os dois instrumentos de pesquisa.

Pelas entrevistas do primeiro instrumento foi possível observar que a maioria dos professores entrevistados introduz números reais, como o conjunto formado pela união do conjunto dos números racionais e dos números irracionais, sendo que o número irracional é definido como o contrário do racional. Afirmam que cada ponto da reta representa um número real. Esta maneira de exposição, talvez seja motivada pelas lacunas existentes em cursos de Licenciatura com relação a esse tema, e pela maneira como os livros didáticos o abordam. Fato constatado pelas entrevistas e também pelos livros didáticos e artigos analisados. Observamos que os professores de Matemática entrevistados não souberam interpretar a importância para a Educação Matemática em se ensinar/aprender números reais.

O segundo instrumento constou de uma entrevista gravada que apresentava três perguntas sobre o tema números reais e continuidade. Na primeira pergunta foram apresentadas quatro justificativas para a continuidade, escolhidas em quatro períodos da Historia, desde a Grécia Antiga até a segunda metade do século dezenove, em que a idéia de continuidade sofreu grandes transformações, e mudanças de explicações. Iniciamos com a justificação dada por Eudoxo (408-355 a.C.) para o problema dos incomensuráveis, surgido na Escola Pitagórica.

Dadas duas grandezas desiguais, se da maior se tira uma grandeza maior que sua metade e da que resta, outra grandeza maior que sua metade e se repete este processo, resta uma grandeza menor que a menor das grandezas dadas. Em linguagem moderna seria:

Se M é uma grandeza dada, ε uma grandeza prefixada de mesma espécie e r é uma razão tal que $1/2 \leq r < 1$, então podemos achar um inteiro N tal que $M(1-r)^n < \varepsilon$ para todo inteiro n>N. Isto é, a propriedade de exaustão eqüivale a dizer que $\lim_{n\to\infty} M(1-r)^n = 0$.

Para a segunda justificativa usamos os princípios de Boaventura Cavalieri (1597-1647):

Um indivisível de uma porção plana dada é uma corda dessa porção e um indivisível de um sólido dado é uma secção desse sólido. Uma área pode ser pensada como sendo formada de segmentos ou "indivisíveis" e o volume pode ser considerado como composto de seções que são volumes indivisíveis ou quase atômicos. Isto é, uma porção plana formada de uma infinidade de cordas paralelas e um sólido formado de uma infinidade de secções planas paralelas. Fazendo-se deslizar cada um dos elementos do conjunto das cordas paralelas de uma porção plana dada ao longo de seu próprio eixo, de modo que as extremidades das cordas ainda descrevam um contorno contínuo, a área da nova porção plana é igual à da original, uma vez que ambas são formadas das mesmas cordas. De maneira análoga é o procedimento para volumes.

Como terceira justificativa destacamos algumas idéias de Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), englobando seus estudos sobre infinitésimos, limites e função contínua, em que o tema continuidade é tratado. Destacamos a sua definição verbal de infinitésimo (Cauchy, 1989, p.26): *Diz-se que uma quantidade variável se torna infinitamente pequena quando seu valor numérico decresce infinitamente de modo a convergir para o limite zero.* Em linguagem moderna essa definição seria:

Dá-se o nome de infinitésimo a toda a variável representativa de um conjunto de pontos pertencentes à vizinhança da origem quando nessa variável considerarmos sucessivamente valores $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ *tais que* $|x_n| < \delta$ *para todos os valores de* $n > n_1$ *e todo o* $\delta > 0$.

Destacamos a definição verbal de limite (Cauchy, 1899, p.13): *Quando os valores sucessivos atribuídos a uma variável se aproximam indefinidamente de um valor fixo de* *modo a finalmente diferir deste de tão pouco quanto se queira, esse último chama-se o limite de todos os outros*. Que em linguagem moderna seria:

Seja $f(x)$ *definida em um intervalo aberto* I*, contendo* a*, exceto possivelmente no próprio* a*. Dizemos que o limite de* $f(x)$ *quando* x *aproxima-se de* a *é* b*, e escrevemos* $\lim_{x\to a} f(x) = b$*,* se para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que $|f(x) - b| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Apresentamos também a definição de função contínua de Cauchy .(1989, p.34-35):

A função $f(x)$ será, entre dois valores fixados da variável x, uma função contínua destas variáveis se para cada valor de x entre estes limites, o valor numérico (absoluto) da diferença $f(x+\alpha) - f(x)$ decresce indefinidamente com α. Em outras palavras, a função $f(x)$ continuará contínua em relação a x, entre dois valores dados se, entre estes valores, um incremento infinitamente pequeno de uma variável sempre produz um incremento infinitamente pequeno da função dessa variável.

Na quarta justificativa mostramos a construção dos números reais, feita por Richard Dedekind (1831-1916) em 1872. Dedekind (1963, p.11) baseou-se no axioma da continuidade da linha reta:

Se todos os pontos de uma reta estão em duas classes tal que todo ponto da primeira classe encontra-se à esquerda de todo ponto da segunda classe, então existe um e somente um ponto que produz esta divisão de todos os pontos em duas classes, esta separação da linha reta em duas porções.

Para provar que o sistema dos números reais também possuía o atributo da continuidade (1963, p.20):

Se o sistema $\Re$ *é separado em duas classes* A_1 *e* A_2 *tal que todo número* α_1 *em* A_1 *é menor que todo número* α_2 *em* A_2*, então existe um e somente um número real* α *pelo qual esta separação é produzida.*

Escolhemos a construção dos números reais de Dedekind e não outras, porque julgamos ser a mais didática e que melhor se ajusta ao nosso propósito: fazer um estudo direcionado para professores e futuros professores de Matemática.

O nosso principal interesse na primeira pergunta do segundo instrumento estava em verificar a opinião dos entrevistados, sobre qual dessas justificativas explicava melhor a continuidade, se os mesmos tinham conhecimento dessas justificativas, e também conhecer a amplitude desse conhecimento. O objetivo da segunda pergunta era verificar se os entrevistados usavam alguma dessas justificativas para a continuidade em sala de aula, e, em caso afirmativo, como a utilizam. Na terceira questão, estávamos interessados em observar se os entrevistados usavam em sala de aula alguma outra justificativa ou procedimento de ensino para a continuidade, diferente das apresentadas na primeira pergunta. Essas entrevistas foram gravadas e posteriormente textualizadas, e aplicada a dezesseis dos que tinham sido entrevistados anteriormente no primeiro instrumento.

Observamos que quando se aborda continuidade, os professores universitários imediatamente associam a idéia e definição de função contínua, vinculando a definição formal de limite, preferindo assim a justificativa de Cauchy. Julgaram a justificativa de Dedekind, somente como um elemento empírico que pode colaborar na compreensão da definição formal de função contínua. Os outros professores pensam em continuidade associando a reta com o conjunto dos números reais, procurando quase sempre uma noção intuitiva que justifique esta bijeção. Mas poucos observaram que a justificativa de Dedekind, apresenta muito mais do que uma simples noção intuitiva.

Os professores que trabalham nos ensino fundamental e médio que optaram pela justificativa de Cauchy, ressaltaram que devido ao formalismo da mesma, somente será possível a sua apresentação no terceiro grau, em cursos de Licenciatura em Matemática ou de Engenharia.

Diante da primeira pergunta do segundo instrumento de pesquisa constatamos que pelo menos dois dos entrevistados, associaram a definição de limite e função contínua, com os cortes de Dedekind, justificando que para a definição de limite é necessário o conjunto dos números reais, construído de acordo com as justificativas fornecidas pelos cortes de Dedekind.

Verificamos que em sua grande maioria, os professores entrevistados acreditam na viabilidade da junção das várias justificativas, para a construção de um procedimento de ensino para números reais. Observamos também que os entrevistados não saberiam como explicar continuidade e números reais de uma maneira diferente das justificativas apresentadas, situação que está ligada a maneira como o livro didático aborda esse tema. Em contrapartida os entrevistados mostraram que estão receptivos e interessados em futuras abordagens desse tema.

Com relação a novas maneiras para se introduzir continuidade e números reais, eles acreditam que preliminarmente devam ser feitos debates e estudos com alunos e professores de diferentes níveis, para a construção desses procedimentos. Isso demonstra que os professores estão abertos para discussões, fazendo frente a imposições pedagógicas; e também o quanto eles estão receptivos.

Síntese de Textos: Livros Didáticos, Artigos, Dissertações, Teses

Fizemos uma análise em livros didáticos dos três níveis de ensino e em obras que fornecem subsídios para o ensino da Matemática, sobre como é enfocado o assunto números reais e continuidade. Analisamos vinte e dois livros de Cálculo, cinco obras de Análise Real, trinta e cinco livros dos ensinos fundamental e médio, incluindo obras oficiais de subsídios.

Observamos também a produção científica específica ao tema, em forma de dissertações e teses de Universidades brasileiras que apresentam contribuições para a Educação Matemática. Verificamos o tratamento que é dado a esse assunto por revistas especializadas e anais de congressos e encontros de Educação Matemática e História da Matemática. Pesquisamos em dezenove dissertações e teses e em nove artigos. Cabe salientar que todas as obras que consultamos, foram publicadas até o ano de 2001.

Pela análise que fizemos em obras didáticas, contatamos que normalmente elas iniciam a apresentação do conjunto dos números reais, com a revisão dos conjuntos numéricos dos naturais, em seguida o conjunto dos números inteiros englobando o conjunto anterior, o dos números racionais contendo os conjuntos numéricos anteriores, os irracionais como um conjunto diferente dos racionais, e completando com o conjunto dos números reais, como sendo a união de todos esses conjuntos anteriores. Muitos artigos reafirmam esse fato. Baldino (1994) chama a atenção, ao afirmar que os irracionais definidos como números que não são racionais, leva a uma circularidade.

De acordo com essa abordagem, o conjunto dos números reais aparenta ter sido construído praticamente sem nenhum percalço em toda a sua longa trajetória, pois os conjuntos numéricos, de acordo com essa ordem de apresentação, surgem pedagogicamente encaixados um após o outro. Os autores de livros didáticos declaram que cada ponto da reta representa um número real, sem qualquer discussão de aprofundamento sobre essa afirmação, e alguns deles apresentam a demonstração da irracionalidade do número $\sqrt{2}$.

Mas podemos observar algumas tentativas diferentes, como por exemplo, nas obras para o ensino fundamental como as de Lamparelli (1976), Di Pierro Neto (1984 e 1995) e SMSG (1969), onde já existem aplicações dos conceitos de densidade, ordenação e uma bijeção empírica entre reta e número, na exposição do conjunto dos números reais. Essas abordagens estão em sintonia com obras de subsídios como a Proposta Curricular de 1992 e a Experiências Matemáticas de 1994, apesar de terem sido publicadas antes. As duas obras de subsídios sugerem que sejam usados os conceitos de ordenação e densidade, na apresentação dos números reais.

Consideramos relevante expressar a opinião de Elon Lajes Lima (2001, p. 462-3) publicada no livro “Exame de Textos: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio”. Lima afirma que após a extensa leitura que ele e um grupo de professores fizeram de textos didáticos do ensino médio, emergiu a idéia do livro genérico brasileiro de Matemática para o ensino médio; e considera que não é nenhum dos que atualmente estão publicados. Na opinião de Lima, apesar dos livros atuais estarem bem impressos e diagramados, seus textos não induzem o leitor (aluno) a pensar, e os problemas que exigem raciocínio não se relacionam com a matéria ensinada; e transmitem a impressão de que as conclusões gerais da Matemática resultam do exame superficial de poucos casos particulares.

Com relação ao assunto Números Reais, Lima (2001, p. 463) declara que a sua apresentação nos livros didáticos do ensino médio é obscura, não existindo menção a medidas, que deseduca e mistifica. Fornece como exemplo o número $\sqrt{2} = 1{,}414\ldots$, que os livros didáticos de maneira geral afirmam ser um número irracional porque não é uma decimal periódica, sem nenhuma garantia para essa afirmação. E outro exemplo: $a < b$ quando b está à direita de a na reta; o autor chama a atenção sobre o fato de como saber se $\sqrt{10} < \pi$ ou não.

De acordo com os livros de Cálculo analisados, verificamos uma única diferença na apresentação dos números reais: trata-se do livro de Maurer (1969), que faz a exposição do conjunto dos números reais, usando os cortes de Dedekind, resgatando os conceitos de densidade e ordenação usados pelo último, para a construção desse conjunto numérico.

Observamos alguns artigos que tratam diretamente do nosso tema; e naqueles que encontramos são abordados assuntos que reforçam os problemas que constatamos no ensino de números reais. Todos reforçam que o estudo dos sistemas numéricos é de fundamental importância na formação do professor de Matemática. Lourenço (1996) investigou o comportamento de alunos de graduação em Matemática diante de problemas que envolvem noções de infinito, infinitésimo, números reais e sua continuidade e conceitos correlatos como o de densidade. Concluiu que um número muito grande de alunos não apresenta conhecimento suficiente sobre esses temas, porque os cursos de Licenciatura não oferecem necessário embasamento ao preparo de um bom professor. Com uma freqüência considerável, os novos professores, ao iniciarem suas atividades docentes, apresentando lacunas no conhecimento adquirido na Universidade, buscam esclarecimentos em livros didáticos nem sempre recomendados.

Soares, Ferreira e Moreira (1999) constataram o conflito existente entre a abordagem axiomática de números reais apresentada na graduação e as imagens conceituais que os licenciandos apresentam. Com relação aos problemas observados, sugeriram que se deva construir uma nova abordagem para o ensino dos sistemas numéricos, visando à formação de professores; e que essa nova abordagem deva partir da problematização das representações conceituais já existentes entre os licenciandos e chegar a uma visão global do conjunto dos números reais, que efetivamente instrumentalize para o ensino. Essa nova abordagem deve aprofundar nos licenciandos a sua visão intuitiva dos conceitos relevantes dentro da sua prática, significando uma superação tanto da abordagem formal axiomática dos cursos de Análise como das encontradas nos textos didáticos. Os autores constataram dificuldades nos licenciandos, no confronto entre os números racionais e irracionais.

Conclusões

Nesta conclusão, tentamos articular idéias surgidas em todas as facetas de nossa pesquisa, que se tornaram novas idéias, conclusões e sugestões. São conclusões baseadas em estudos, observações, entrevistas e análises, que fizemos no decorrer do percurso dessa idéia de continuidade e números reais, tendo como objetivo principal o ensino desse tópico dentro do **contexto da descoberta e justificação**.

Nessas conclusões, procuramos destacar o que julgamos relevante do que foi observado e estudado em todas as ramificações desse trabalho, tais como os quatro períodos escolhidos da História, opiniões e crenças de professores sobre o assunto números reais, e o tratamento desse tema nos livros didáticos e artigos que expressam opiniões de pesquisadores. Procuramos também, baseados nos estudos que fizemos, sugerir futuros desdobramentos de pesquisa com relação a esse tema, pois temos a certeza de que, com esse trabalho, tentamos ajudar a mostrar que existem problemas no ensino desse conteúdo, na esperança de que medidas sejam tomadas para solucioná-los.

Observamos o desconhecimento por parte dos professores de Matemática entrevistados com relação aos trabalhos de Eudoxo e Dedekind.

Constatamos que, segundo a opinião dos entrevistados, em nossa análise de obras e trabalhos de pesquisas publicados sob a forma de artigos, o conteúdo números reais não é uma questão resolvida pelos autores de livros didáticos. Isso apesar de boas tentativas que encontramos em muitas obras didáticas e também de subsídios. Observamos que esse fato prejudica o ensino/aprendizagem de números reais e também que esse conteúdo ministrado em cursos de Licenciatura em Matemática, de modo geral, é falho. Verificamos também falhas na compreensão de que entre dois números quaisquer existem infinitos números e que existem infinitos números à direita e à esquerda da reta numerada. Julgamos que essas falhas sejam ocasionadas pela ausência de noções sobre os infinitos potencial e atual, em cursos de Licenciatura em Matemática.

Notamos a ausência, na maioria dos currículos dos cursos de Licenciatura em Matemática, das disciplinas História da Matemática e Filosofia da Matemática, ou falhas em seu conteúdo, que prejudicam o ensino de Números Reais e Continuidade; e também ausência de laboratórios de Matemática, onde poderiam ser feitas visualizações de certas noções intuitivas de continuidade. Essas lacunas favorecem a não-aplicação de números reais em situações de cotidiano e acadêmica, aumentando de certa forma o conflito/tensão pedagógica no trabalho dos professores de Matemática.

Constamos também, que os entrevistados desconhecem, com raras exceções, a importância para a Educação Matemática, em se ensinar/aprender números reais; e que, de modo geral, os professores introduzem esse conteúdo de uma mesma maneira.

A partir das situações citadas anteriormente, constatamos que de fato existe um problema no ensino de números reais, em qualquer nível. Assim, sugerimos a necessidade de pesquisas que se convertam em procedimentos de ensino ou atividades didáticas e que concorram para a operacionalização desse importante conjunto numérico. Acreditamos que qualquer procedimento de ensino ou atividade pedagógica objetivando os números reais deva passar por noções de continuidade, conceito de ordenação, densidade e infinito. E também que o aspecto teórico não seja abandonado, que tópicos da História da Matemática e da Filosofia da Matemática sejam utilizados, favorecendo discussões críticas em temas das disciplinas Cálculo e Análise e outras que acompanham o quadro de disciplinas específicas da Licenciatura em Matemática.

Bibliografia

BALDINO, Roberto Ribeiro, *A ética de uma definição circular de número real*, *Bolema.* UNESP - Rio Claro, n.10, p.31-52, 1994.

CARNAP, Rudolf; Neurath, edited by. *Logical Foundations of the Unity os Science, Toward an: International Encyclopedie of Unified Science,* volume 2. *Chicago*: The University of Chicago Press, 1970.

CAUCHY, D'Augustin, *OEuvres Complètes. Résumé des Leçons sur le Calcul Infinitésimal*, Publièes sous la direction Scientifique, II série, Tome IV. Paris: Gauthier-Villars, Imprimeur-Libraire, Du Bureau des Longitudes, de L'École Polytechnique, 1899.

________________ *Cours D'Analyse de L'École Royale Polytechnique* Paris: (Analyse Algébrique) De L'Imprimerie Royale, 1821, Fac-simile publicada por Éditions Jacques Gabay, 1989.

COBIANCHI, Antonio Sérgio, *Estudos de Continuidade e Números Reais: Matemática, Descobertas e Justificativas de Professores*, Tese de Doutorado em Educação Matemática, Departamento de Matemática, UNESP – Rio Claro, 2001.

DEDEKIND, Richard, *Essays on the Theory of Numbers.* New York: Dover Publications, Inc., 1963.

EPSTEIN, Isaac, *Revoluções Científicas*. São Paulo: Ática, 1988.

FEYERABEND, Paul, *Contra o Método*, Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1977.

HEMPEL, Carl G., *Aspects of Scientific Explanation and other Essays in the Philosophy of Science*. New York: A Free Press Paperback - The MacMillan Company, 1965.

HERSHEL, John F.W., *A Premiliminary Discourse on the Study of Natural Philosophy*, Reprodução fac-simile de 1830 publicado como I volume de Dionysius Lardner's Cabinet Cyclopaedia. Chicago: The University of Chicago Press, 1987.

KUHN, Thomas S., *A Estrutura das Revoluções Científicas*. São Paulo: Perspectiva, 1982.

LAMPARELLI, Lydia C., Canton, Adolfo Walter P., Morettin, Pedro A. & Indiani, Dalva F., *7 Matemática para o Primeiro Grau*. São Paulo: EDART, 1976.

LIMA, Elon Lages (editor), *Exame de Textos: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001.

LOURENÇO, Marcos Luiz, Números Reais: Dificuldades na Formação do Conceito, **Anais** *do IV Encontro Paulista de Educação Matemática*. São Paulo, p.194-202, 1996.

MAURER Willie A., *Curso de Cálculo Diferencial e Integral*, 2.ed., volume 2. São Paulo: Edgard Blücher Ltda., 1969.

PIERRO NETTO, Scipione Di, *Matemática: Conceitos e Operações 7*, primeiro grau, 2.ed. São Paulo: Saraiva, 1984.

__________________, *Matemática - Conceitos e Histórias 7*, São Paulo: Scipione, 1995.

POPPER, Karl, *A Lógica da Pesquisa Científica*. São Paulo: Cultrix, 1993.

REICHENBACH, Hans, *Experience and Prediction: An Analysis of the Foundation and the Structure of Knowledge*, Midway Reprints. Chicago: The University of Chicago Press, 1976.

SCHOOL MATHEMATICS STUDY GROUP: organizador, *Matemática - Curso Ginasial*, vol.III. São Paulo: EDART - São Paulo Livraria Editora Ltda., 1969.

SOARES, Eliana Farias e; FERREIRA, Maria Cristina Costa; MOREIRA, Plínio Cavalcanti, *Números Reais: Concepções dos Licenciandos e Formação Matemática na Licenciatura*, *Zetetiké.* UNICAMP, v.7, n.12, p.95-117, 1999.

Submetido em abril de 2010
Aprovado em junho de 2010