RAZÃO ÁUREA AUXILIANDO O ENSINO DE ALGUNS CONTEÚDOS DE MATEMÁTICA

THE SUPPORT OF GOLDEN RATIO IN THE TEACHING OF SOME MATHEMATICS CONTENTS

Danilo Baccaro*
Armando Paulo da Silva**

Resumo

Este artigo tem por objetivo mostrar os conhecimentos existentes em relação à Razão Áurea para auxiliar o ensino da matemática. Para fundamentar esta pesquisa foi realizada a revisão de literatura dos seguintes aspectos: segmento em média e extrema razão; as expressões que definem a razão Áurea; a construção do retângulo Áureo e suas propriedades; a espiral logarítmica; a sequência de Fibonacci; números irracionais e segmentos incomensuráveis; triângulo Áureo e o pentagrama. A metodologia utilizada foi de levantamento bibliográfico. O resultado da pesquisa mostra que é possível partindo da razão Áurea trabalhar no dia a dia de sala de aula com diversos aspectos da Matemática e com isso estimular um maior interesse do discente, além de auxilia-lo no processo ensino e aprendizagem da mesma.

Palavras-chave: razão áurea, número de ouro, segmentos incomensuráveis.

Abstract

This article aims to show the existing knowledge in relation to the Golden Ratio on supporting the teaching of mathematics. In order to underlie this research it was made a literature review of the following aspects: average and extreme right segment; the expressions that define the Golden Ratio; the construction of the Golden Rectangle and its properties; the logarithmic spiral; the Fibonacci sequence; irrational numbers incommensurable segments; Golden triangle and the pentagram. The methodology used was a bibliographic literature review. The result of the research shows that from the Golden Ratio it is possible to have a daily work in the classroom within various aspects of mathematics and, thereby, stimulate greater interest of the students, as well as assists them in its teaching and learning process.

Keywords: Golden Ratio, Golden number, incommensurable segments.

Introdução

A realidade do ensino da Matemática no contexto escolar mostra uma dificuldade significativa para que os conteúdos elencados no plano anual de ensino sejam executados, com isso muitos aspectos importantes da Matemática, às vezes, não chegam ao conhecimento do discente. Essa ação passa a ser evidenciada quando nas séries consecutivas de sua formação, o mesmo precisa de conhecimentos não adquiridos, com isso prejudica o processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

* Especialista pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná - campus Cornélio Procópio.

** Mestre pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná - campus Ponta Grossa. Professor da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - campus Cornélio Procópio. E-mail: armando@utfpr.edu.br

Diante deste cenário propõe se o estudo da Razão Áurea para auxiliar a aprendizagem de alguns aspectos da matemática que muitas vezes foram omitidos ou não houve tempo hábil para ser estudado. A forma proposta neste estudo parte de aspectos históricos da Razão Áurea e envolve consequentemente o número Fi ou número de Ouro, procurando motivar os discentes a se interessarem pela pesquisa matemática através da curiosidade que estes números apresentam.

Segmento em média e extrema razão

Quando se pesquisa sobre Razão Áurea é bem provável que a primeira situação que aparece é um segmento de reta ou linha dividida na razão Áurea.

A análise da Razão Áurea pode se começar por um segmento de reta qualquer e se imagina que esse segmento esteja dividido de tal forma que o ponto resulte num segmento maior e outro menor. A Razão Áurea ocorre quando o segmento menor dividido pelo maior é igual ao maior dividido pelo segmento todo. Na figura 1, mostra-se como isso acontece.

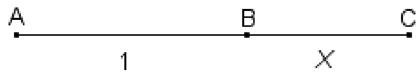


Figura 1 - Segmento em média e extrema razão

O segmento maior ($\overline{AB}$) da figura 1 possui o valor 1, e o menor ($\overline{BC}$) o valor x (unidade de medida). Então isso significa que: $\frac{x}{1}=\frac{1}{1+x}$ ou então, $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$. Tem-se por resultado que: $x/1=\varphi \ ou \ 1/(1+x)=\varphi$, onde φ representa a Razão Áurea.

O Número de Ouro é representado pela letra grega fi maiúscula $(\Phi = 1{,}6180339...)$ resultado da razão do segmento maior pelo menor, e a Razão Áurea é representada pela letra grega fi minúscula $(\varphi = 0{,}6180339....)$, resultado da razão do menor pelo maior.

Para esclarecer como o segmento da figura 1 está dividida numa Razão Áurea pode se resolver a seguinte equação:

$$\frac{x}{1}=\frac{1}{1+x} \Rightarrow x^2+x=1 \Rightarrow x^2+x-1=0.$$

Utilizando a fórmula de Báskara, tem-se:

$$x'=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=0{,}6180339... \text{ e } e\ x''=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}=-1{,}6180339...\cdot$$

Como pode se perceber um dos valores para x é o próprio $\varphi = 0{,}6180339....$, conhecido como a Razão Áurea. Como $x > 0$, pois se trata de um segmento, desconsideramos o resultado $x''=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ por ser negativo.

Quando isso ocorre podemos dizer que o segmento está dividido "em média e extrema razão" (ÁVILA, 1985) ou também como foi citado por Lívio (2008, p. 14): Diz-se que uma linha reta é cortada na razão extrema e média quando, assim como a linha toda está para o maior segmento, o maior segmento está para o menor.

Apesar da idéia de que a Razão Áurea foi estabelecida no estudo do pentagrama pelos Pitagóricos, uma definição mais clara dessa razão foi feita por Euclides, como sugere Lívio (2008, p. 13): A primeira definição clara do que mais tarde se tornou conhecido como Razão Áurea foi dada por volta de 300 a.C. pelo fundador da geometria como sistema dedutivo formalizado, Euclides de Alexandria.

Os Pitagóricos tiveram participação significativa na descoberta do pentágono-pentagrama. Em relação a isso, Lívio (2008, p. 49) escreve: (...) a preocupação Pitagórica com o pentagrama e o pentágono (...) tornou plausível que os Pitagóricos, e, em particular, talvez Hipaso de Metaponto, tenha descoberto a Razão Áurea e, através dela, a incomensurabilidade.

As expressões que definem a razão áurea e o número de ouro

Algumas propriedades da Razão Áurea foram, também, analisadas por Biembengut (1996): A Razão Áurea é o inverso do Número de Ouro $\left(\frac{1}{\Phi}=\varphi\right)$, consequentemente, se multiplicarmos os dois o resultado é 1.

Este resultado pode ser expresso por

$$\Phi.\varphi = \Phi.\frac{1}{\Phi} = 1 \text{ ou } \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = 1$$

Somando 1 ao número Φ obtém-se o seu quadrado,

$\Phi + 1 = \Phi^2$, ou seja, $(1,618...+1) = (1,618...)^2 = 2,618...$

Subtraindo 1 de Φ obtém-se o seu inverso,

$\Phi - 1 = \frac{1}{\Phi}$, ou seja, $(1,618...-1) = \frac{1}{1,618} = 0,618...$.

Subtraindo 2 de Φ^2, obtém-se o inverso de Φ, temos:

$\Phi^2 - 2 = \frac{1}{\Phi}$ ou $2,618... - 2 = 0,618...$.

Segundo Biembengut (2006) o nome dado ao Número de Ouro, Fi ou Phi é referente ao famoso escultor grego Phídeas, pois acredita-se que ele tenha usado este número nas suas obras, dentre elas, o "Partenon".

Outro aspecto do estudo está relacionado com a irracionalidade do Número de Ouro e a incomensurabilidade da Razão Áurea. Para que os leitores possam entender o motivo, duas expressões da Razão Áurea serão apresentadas devidas sua representação contínua, que consta sua irracionalidade, pois não existe.

$$m/n = \Phi \quad ou \quad p/q = \varphi$$

onde *m*, *n*, *p* e *q*, sejam números inteiros, condição necessária para um número racional (com $n \neq 0$ e $q \neq 0$).

A primeira expressão que se tem é $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}}$, e segundo Lívio (2008, p. 101): Um caminho muito trabalhoso seria começar calculando $\sqrt{1+\sqrt{1}}$ (que é $\sqrt{2} = 1,414...$), e depois calcular $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}$, e assim por diante.

Um método mais curto existente denota essa expressão por x, ou seja,
$x = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}}$

Elevam-se ao quadrado ambos os lados, obtendo a seguinte expressão: $x^2 = 1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}$

Ao extrair a raiz externa, note que o lado direito da equação é 1 mais a expressão indefinida dada como x, portanto o resultado é $x^2 = 1 + x$, justamente a equação vista analisando o segmento da figura 1 que define a Razão Áurea e o Número de Ouro, dependendo do sinal.

A segunda expressão seria envolvendo frações contínuas: $x = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+...}}}}$

Tem-se que o primeiro denominador é o próprio x, portanto, $x = 1 + \frac{1}{x}$.

Multiplicando-se os dois membros da equação por x, resulta $x^2 = x + 1$, a mesma equação que já foi obtida anteriormente.

O Retângulo Áureo

A simplicidade da construção do retângulo Áureo facilita que o docente ensina-a em sala de aula, utilizando a relação do seu lado pela sua base, para mostrar a existência da Razão Áurea.

Aproveitando a abordagem anterior, do segmento dividido em razão extrema e média (figura 1), o mesmo raciocínio pode ser utilisado para a construção do Retângulo Áureo.

O quadrado *ABCD* da figura 2 possui lado unitário. Encontra-se o ponto *M* (ponto médio do segmento $\overline{DC}$) e traça-se a diagonal $\overline{MB}$ do retângulo *MNBC*. Na reta suporte que passa pelos pontos *D*, *M* e *C*, obtêm um ponto *F* onde $\overline{MB} = \overline{MF}$.

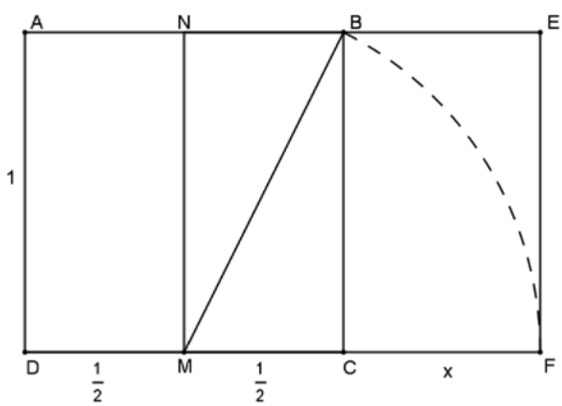


Figura 2 - Construção do retângulo Áureo

Pelo teorema de Pitágoras pode-se encontrar o valor de $\overline{MB}$:

$$\left(\overline{MB}\right)^2 = 1^2 + (1/2)^2 \Rightarrow \left(\overline{MB}\right)^2 = 5/4 \Rightarrow \overline{MB} = \sqrt{5/4} \Rightarrow \overline{MB} = \sqrt{5}/2 .$$

Se $\overline{MB} = \sqrt{5}/2$, então a base $\overline{DF}$ do retângulo *AEFD*, mede $1/2 + \sqrt{5}/2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180339...$., o qual comprova que o resultado é de um Retângulo Áureo. Também pode se confirmar a Razão Áurea quando se estabelece a razão entre a altura de medida 1 e a base que mede 1,6180339... , pois $\frac{1}{1,6180339...} = 0,6180339...$.

O Retângulo Áureo possui algumas propriedades especiais, tais como: a existência de infinitos Retângulos Áureos no seu interior; os arcos formados continuamente por esses infinitos retângulos geram a Espiral Logarítmica e o encontro das diagonais formadas por esses infinitos Retângulos Áureos consecutivos, coincidem sempre no mesmo ponto.

Na primeira propriedade, tomando a figura 2, o retângulo *AEFD*, onde o lado menor é $\overline{AD}$, pode se construir o quadrado *ABCD* e para dar sequência na construção utiliza-se o retângulo *BEFC*, onde o lado menor é $\overline{BE}$ e constrói-se um novo quadrado de medida igual $\overline{BE}$ e assim sucessivamente como na figura 3. Lívio (2008, p. 103) resume: O Retângulo Áureo é o único retângulo com a propriedade de que, ao se cortar um quadrado, forma-se outro retângulo similar.

Se os lados do retângulo *ABCD* estão em uma razão Áurea, o segmento $\overline{DF}$ e $\overline{FC}$ também estarão, visto que $\overline{FC}/\overline{DF} = \varphi$. O retângulo menor formado *EBCF* é Áureo, tal como *GHCF* e sucessivamente repetindo este processo infinitamente, como afirma Lívio (2008, p.103, grifo do autor): "Continuando este processo ***ad infinitum***, produziremos Retângulos Áureos cada vez menores (cada vez com dimensões 'deflacionadas' por um fator Φ)".

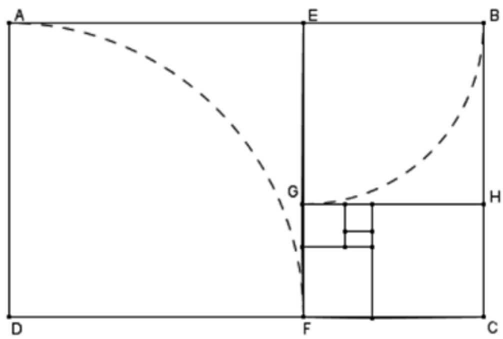


Figura 3 - Construção de infinitos retângulos Áureos

Na segunda propriedade simplesmente tem-se uma espiral logarítmica formada ao longo da continuidade dos arcos formados nos quadrados (figura 4).

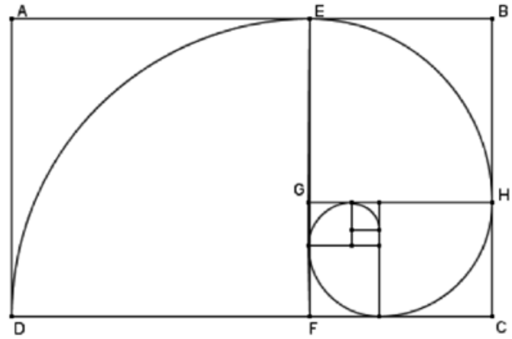


Figura 4 - Espiral logarítmica no retângulo Áureo

Um exemplo clássico dessa espiral na natureza ao pesquisar sobre Razão Áurea é o do formato da concha do molusco Náutilo ou *Nautilus* (figura 5 e figura 6).

Lívio (2008, p. 137) sustenta a idéia:

> Se você pensar a respeito por um momento, esta é exatamente a propriedade exigida por muitos fenômenos de crescimento na natureza. (...) "Cada aumento no comprimento da concha é acompanhado de um crescimento proporcional no raio, de modo que a forma permanece inalterada. Consequentemente, o náutilo vê uma 'casa' idêntica durante toda vida, e não precisa, por exemplo, ajustar seu equilíbrio à medida que amadurece".

Figura 5 - Concha do molusco Náutilo ou *Nautilus*

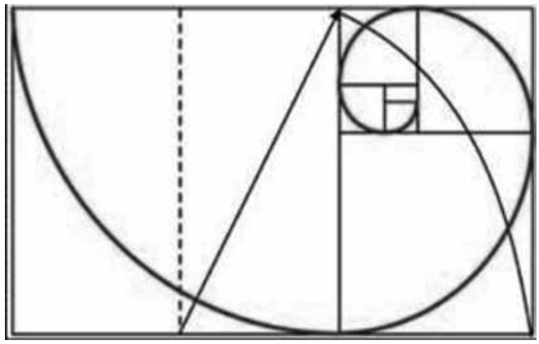


Figura 6 - Reprodução da espiral logarítmica

Na figura 7 apresenta-se o terceiro caso, que envolve o encontro das diagonais dos retângulos Áureos. Segundo Lívio (2008): por este ponto de encontro ser inatingível, o matemático Clifford A. Pickover sugeriu chamá-lo de “O Olho de Deus”.

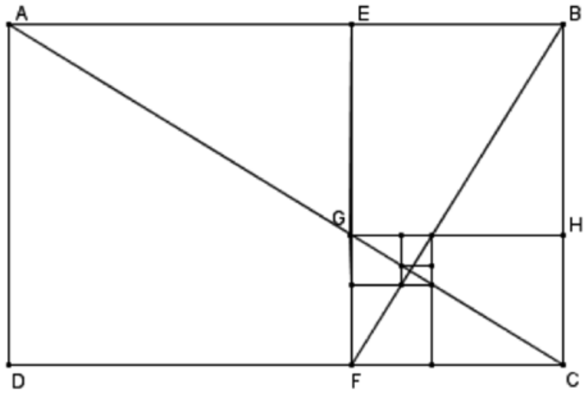


Figura 7 - Encontro das diagonais dos retângulos Áureos

Analisando a figura 7 e considerando os retângulos consecutivos como é o caso do *ABC*D e *EBCF* ou *EBCF* e *GHCF*, nota-se que suas diagonais encontram-se no mesmo ponto, e prosseguindo infinitamente com retângulos cada vez menores o fato se repete.

Razão Áurea e a Sequência de Fibonacci

A razão áurea facilmente pode ser obtida analisando uma rosa ou até mesmo aplicações no mercado financeiro. O estudo desses aspectos matematicamente a torna interessante. Uma rosa despetalada (figura 8) apresenta a disposição das “casas” da seguinte forma: a pétala 1 está a 0,618... $(1/\Phi - 0)$ de volta da pétala 0, a pétala 2 está a 0,236... $(2/\Phi - 1)$ de volta da pétala 1 (LÍVIO, 2008).

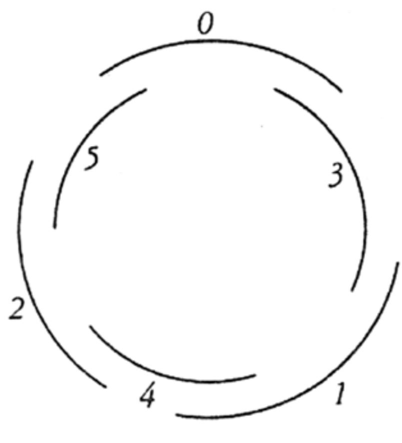


Figura 8 - Disposição das pétalas da rosa

Curiosamente algumas flores possuem um número de pétalas que coincidem com a sequência de Fibonacci. A sequência de Fibonacci em si não é difícil de ser compreendida. Alguns ramos de árvore crescem numa ordem igual à sequência de Fibonacci (figura 9). Este fato ocorre com os ramos dando voltas até sobrepor novamente outro ramo, sendo que o ramo inicial (0) só coincidirá de posição com o ramo 8, depois de 3 voltas (número dessa sequência).

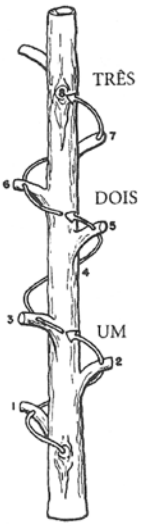


Figura 9 - O ramo da árvore e a sequência de Fibonacci

Esse fenômeno é descrito por Lívio (2008, p. 129, grifo do autor): as folhas ao longo do galho de uma planta ou talos ao longo de um ramo tendem a crescer em posições que aperfeiçoariam sua exposição ao sol, à chuva e ao ar. (...) Este fenômeno é chamado de ***phyllotaxis*** ("arranjo de folhas", em grego).

O mercado financeiro utiliza a razão Áurea e a sequência de Fibonacci relacionada com a geometria fractal. Para analisar o preço das ações Ralhph Nelson Elliott (1871-1948) tentou utilizar a razão Áurea (LÍVIO, 2008, p. 251). Nos estudos de Elliott utilizou a idéia de que cada fração da curva é uma versão em escala reduzida do todo, conceito este usado na geometria de fractal e associou que esta curva representa o gráfico de tendência do mercado financeiro (LÍVIO, 2008, p. 253)

Outra observação de Lívio (2008, p. 252) é referente a figura 10:

> Alguns livros recentes que tentam aplicar as idéias gerais de Elliott a estratégias reais de negociação vão ainda mais longe. Eles usam a razão Áurea para calcular pontos extremos de máximo e mínimo que podem ser esperados (embora não necessariamente atingidos) nos preços de mercado no fim de tendência de alta ou baixa (...).

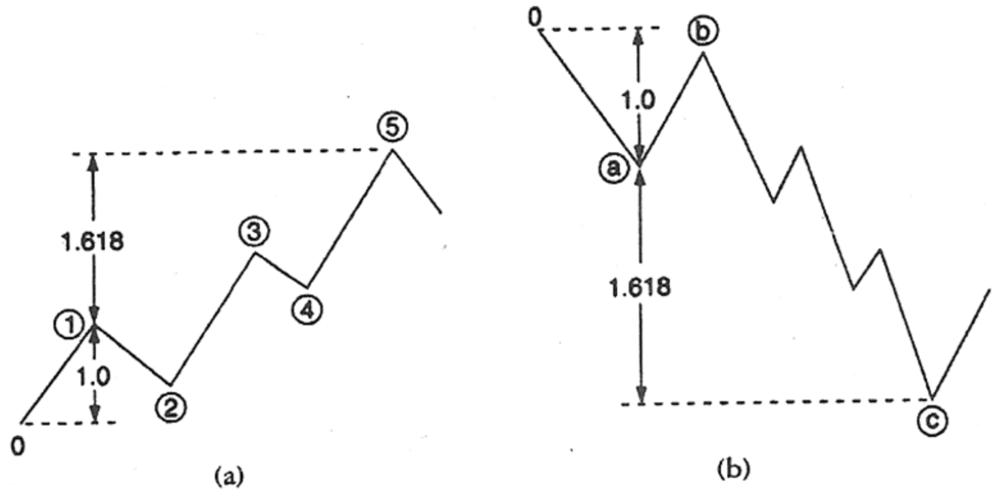


Figura 10 - Tendência do mercado de alta ou baixa

No estudo da razão Áurea encontra-se informações relevantes envolvendo Leonardo de Pisa (1170-1240), mais conhecido como Leonardo Fibonacci, ou apenas Fibonacci. Um de seus estudos, talvez mais famoso, pelos amantes da matemática foi a reprodução de coelhos. Em 1202, Fibonacci formulou este seguinte problema, descrito mais claramente por Azevedo (2001):

> A partir de um casal de coelhos recém-nascidos, quantos casais de coelhos existirão após 12 meses, supondo-se que: nenhum coelho morre, todo casal de coelhos tem um primeiro casal de filhotes com dois meses de idade e, após ter o primeiro casal de filhotes, gera um novo casal todo mês.

Esse problema deu origem a sequência de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233,... Onde cada termo é o resultado dos seus dois últimos antecessores somados, ou seja, $(\forall n \geq 3) f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.

A sequência acima "tem sido objeto de continuada atenção na literatura matemática" (Azevedo, 2001). Mas a relação dessa sequência com a razão Áurea está nos seus próprios termos, que resultam valores oscilando próximo ao número de Ouro. Segue abaixo algumas divisões para que sejam observadas:

1/1 = 1,000000	8/5 = 1,600000	55/34 = 1,617647
2/1 = 2,000000	13/8 = 1,625000	89/55 = 1,618182
3/2 = 1,500000	21/13 = 1,615385	144/89 = 1,617978
5/3 = 1,666666	34/21 = 1,619048	233/144 = 1,618056

Por essa relação entre a sequência de Fibonacci e a razão Áurea, não é de se estranhar que a sequência também poderá ser encontrada em alguns fenômenos da natureza. Como foi citado anteriormente, com o exemplo dos ramos e pétalas de algumas flores e plantas. Segundo Lívio (2008, p. 136): A botânica não é a única área da natureza em que a razão áurea e os números de Fibonacci podem ser encontrados. Eles aparecem em fenômenos que abrangem uma série de tamanhos que vão do microscópio ao das galáxias gigantes.

Na figura 11 é apresentado um exemplo interessante encontrado no ramo da física envolvendo óptica dos raios de luz que pode ser relacionado com a seqüência de Fibonacci.

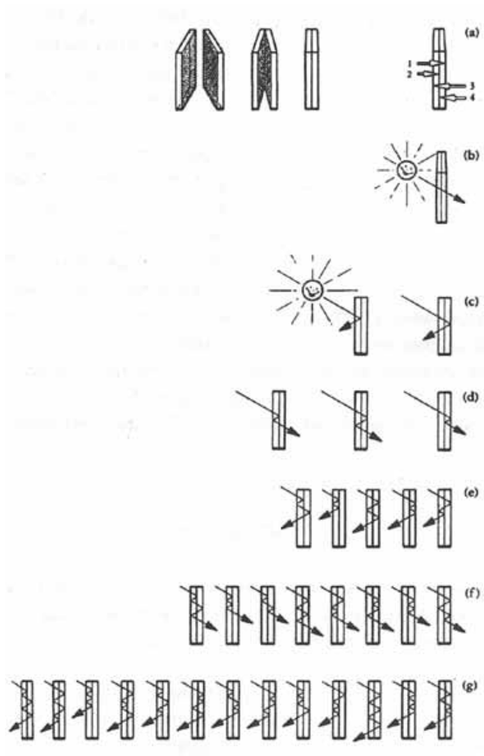


Figura 11 - Sequência de Fibonacci e os raios de luz

Esse exemplo, também é abordado por Lívio (2008, p. 117) quando escreve:

> Suponha que temos duas placas de vidro ligeiramente diferentes (propriedades de refração de luz, ou 'índices de refração' diferentes) colocadas face a face [como na figura 11]. Se expusermos as placas à luz (...) eles podem passar diretamente sem se refletir em nada ou podem ter uma reflexão interna, duas reflexões internas, três reflexões internas, e assim por diante.

Neste caso os raios podem passar direto ou refletir uma, duas, três até n vezes. O curioso é que as possibilidades fazem parte da sequência de Fibonacci, por exemplo: o número de possibilidade de passar direto é 1, de refletir uma vez é 2, de refletir duas vezes é 3, três vezes é 5, quatro vezes é 8, cinco vezes é 13 e assim sucessivamente. O número de possibilidades é a sequência 1,2,3,5,8,13..., a própria sequência de Fibonacci com exceção de um número 1 no início.

Números Irracionais e Segmentos Incomensuráveis

O ensino de razão áurea, irracionalidade e incomensurabilidade estão ligados entre si, como afirma Lívio (2008, p. 15): A descoberta de que a razão áurea é um número irracional, mostra consequentemente, a descoberta da incomensurabilidade.

Uma pequena demonstração poderá ser realizada para sugerir a explicação de números irracionais, usando o método da "redução ao absurdo". Não só por se tratar de um método simples, mas para incentivar o docente a utilizar esses métodos de raciocínio lógico. Lívio comenta (2008, p. 51, grifo do autor): "A idéia por trás do método engenhoso ***reductio ad absurdum*** é que se prova uma proposição simplesmente mostrando a falsidade de sua contraposição".

Apesar do método da "redução ao absurdo" mostrar, através de contraposição, que não há dois números que possam ser escritos na forma m/n para representar, por exemplo, $\sqrt{2}$, segundo Ávila (1984): é um argumento que encerra um alto grau de abstração, razão pela qual muitos historiadores da ciência acreditam que a descoberta dos incomensuráveis tenha ocorrido com um raciocínio mais concreto.

Analisando a relação lado e diagonal do quadrado. Lívio (2008, p. 50, grifo do autor) também sugeriu sobre o assunto, mas incrementando sobre o método da "redução ao absurdo":

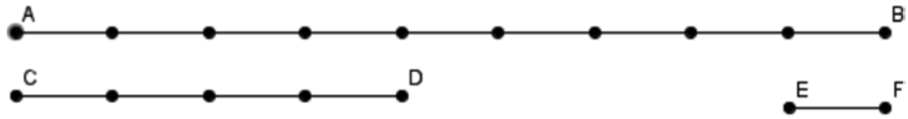
> Embora certamente seja possível (e talvez até provável) que a incomensurabilidade e os números irracionais tenham sido descobertos via Razão Áurea, a opinião mais tradicional é de que esses conceitos foram por meio da razão entre a diagonal e o lado do quadrado. Aristóteles escreve em **Analítica Anterior** que: ' a diagonal [de um quadrado] é incomensurável [com o lado], porque números ímpares serão iguais aos pares se supõe que sejam comensuráveis.

Ao falar sobre números irracionais, a razão Áurea é considerada como o número mais irracional de todos irracionais devido sua representação fracionária contínua como foi demonstrada anteriormente. Lívio (2008, p. 134) explica essa irracionalidade:

> Lembre-se de que a razão Áurea é igual a uma fração contínua composta inteiramente de uns. Essa fração contínua converge mais lentamente do que qualquer outra fração contínua. Em outras palavras, a razão Áurea está mais longe de poder ser expressa como uma fração do que qualquer outro irracional.

Contudo, quando estuda sobre segmentos incomensuráveis, tem que pensar primeiro em segmentos comensuráveis.

Os gregos do século VI a.C costumavam lidar com grandezas de mesma espécie. Tomando como exemplo dois segmentos retilíneos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, a razão $\overline{AB}/\overline{CD}$ sendo um número racional, significava para eles, assim também para nós, a existência de um terceiro segmento $\overline{EF}$ em que $\overline{AB}$ seja *m* vezes $\overline{EF}$ e $\overline{CD}$ *n* vezes o segmento $\overline{EF}$. (ÁVILA, 1984). O exemplo seguinte com medidas *m* = 9 e *n* = 4:



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{9}{4}$$

Analisando estes segmentos, podem-se imaginar intervalos cada vez menores, sendo $\overline{EF}$ sempre comum para $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, a razão $\overline{AB}/\overline{CD}$ sempre será um número racional.

Pitágoras e os matemáticos até por volta de V a.C, pensavam que os números racionais seriam suficientes para comparar estes segmentos de reta, e que sempre seria possível encontrar um segmento $\overline{EF}$, em que $\overline{AB}$ fosse *m* vezes e $\overline{CD}$ *n* vezes este segmento $\overline{EF}$, admitindo *m* e *n* como números inteiros. Nesta situação, $\overline{EF}$ seria submúltiplo comum de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. (ÁVILA, 1984).

Estes segmentos são considerados comensuráveis, pois é possível medi-los com a mesma unidade $\overline{EF}$. Existem segmentos, porém, que não possuem essa unidade $\overline{EF}$ em comum, os quais chamaram de segmentos incomensuráveis. Esses segmentos contrariam a nossa intuição geométrica, o que foi também o motivo de crise no desenvolvimento da matemática na antiguidade (ÁVILA, 1984).

Análise da Diagonal do Quadrado no Estudo de Segmentos Incomensuráveis

Alguns autores acreditam como é o caso de Geraldo Ávila, que a descoberta de segmentos incomensuráveis, foi feita demonstrando que o lado e a diagonal do quadrado sejam incomensuráveis, como demonstra a figura seguinte:

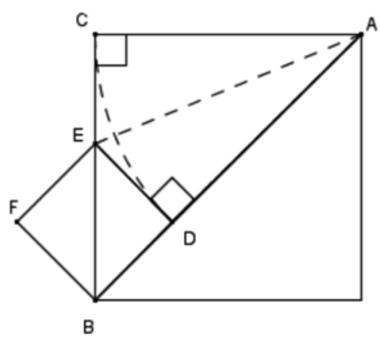


Figura. 12 - Segmento incomensurável

Observe que na figura 12 tem dois triângulos retângulos iguais, ACE = ADE, conclui-se que pelo arco $\overset{\frown}{CD}$, $\overline{AD} = \overline{AC}$, consequentemente $\overline{CE} = \overline{ED}$. O submúltiplo comum para $\overline{AB}$, diagonal do quadrado (δ), e para $\overline{AC}$ representado por λ (lado do quadrado), supondo que δ e λ sejam comensuráveis, não existe.

Analisando com maior profundidade percebe-se que $\overline{ED} = \overline{BD}$, então:

$\delta = \lambda + \overline{BD}$ e $\lambda = \overline{BE} + \overline{BD}$, ou seja, $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{BD}$ e $\overline{AC} = \overline{BE} + \overline{BD}$

Se esta representação geométrica pode ser feita com o quadrado maior, poderá ser feita com o quadrado *BDEF* e indefinidamente com quadrados ainda menores. Mas ao analisar o resultado $\lambda = \overline{BE} + \overline{BD}$, fica-se sem um segmento submúltiplo comum para λ (lado) e δ (diagonal), pois como resposta tem-se uma relação também entre a diagonal $\left(\overline{BE}\right)$ e o lado $\left(\overline{BD}\right)$ do quadrado menor. Chegando a conclusão de que esta relação entre o lado e a diagonal de qualquer quadrado são grandezas incomensuráveis (ÁVILA, 1984).

Outra demonstração para os números irracionais seria pelo método lógico "redução ao absurdo", onde pode ser constatado que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ e qualquer raiz quadrada de um número, que não seja um quadrado perfeito, é um número irracional. Esse método mostra através de uma verdade admitida inicialmente que por demonstração lógica é uma falsidade. Veja o exemplo de $\sqrt{2}$, podendo também relacionar com a diagonal do quadrado expressa por $L\sqrt{2}$:

O que se procura demonstrar é que $\sqrt{2}$ não pode ser expressa por uma razão entre dois números inteiros, ou seja, não existe nenhum número *a* e *b* inteiros que possam resultar $a/b = \sqrt{2}$, portanto $\sqrt{2}$ é um número irracional.

Usando o método da "redução ao absurdo" supõe-se que $\sqrt{2}$ seja um número racional, logo existe $a/b = \sqrt{2}$. Se *a* e *b* forem 9 e 6, respectivamente, simplificando até eles não terem mais fatores em comum, ficaria 3 e 2 (9/3 e 6/3, 3 é o fator comum), se *a* e *b* fossem outros dois números quaisquer, restaria dois números *p* e *q* que não tivessem fator em comum resultando $p/q = \sqrt{2}$. Prosseguindo com o raciocínio, *p* e *q* não podem ser ambos pares, pois haveria o fator 2 em comum. Elevando os dois lados da igualdade ao quadrado e multiplicando por q^2, ficaria $p^2 = 2q^2$, percebe-se que $2q^2$ sempre será um número par, independente do valor de *q,* portanto p^2 é par. Mas se o quadrado de *p* é par, então *p* tem que ser par, lembrando que *p* e *q* não podem ser ambos pares, *q* terá que ser ímpar. Se *p* é par, podemos dizer que $p = 2r$ (porque 2 é fator para um número ser par), substituindo em $p^2 = 2q^2$, temos $(2r)^2 = 2q^2$ (LÍVIO, 2008). Dividindo os dois lados por 2, resulta em $2r^2 = q^2$, $2r^2$ é par, então q^2 tem que ser par, assim como *q* também tem que ser par. Revendo um pouco acima, *q* deveria ser ímpar, e agora tem que ser par, chegamos a uma contraposição lógica, pois *q* não pode ser par e ímpar ao mesmo tempo. (LÍVIO, 2008).

Números Irracionais Algébricos e Irracionais Transcendentes

Os números irracionais são classificados em irracionais algébricos ou irracionais transcendentes. O Número de Ouro é irracional e pode ser analisado se o mesmo é algébrico ou transcendente.

Os Números, por exemplo, $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt[3]{4}, \sqrt{2}/\sqrt{3}$ entre outros, são irracionais algébricos, pois são soluções das equações, $x^2 - 2 = 0$, $x^2 - 3 = 0$, $x^2 - 6 = 0$, $x^3 - 4 = 0$, $3x^2 - 2 = 0$, respectivamente. Portanto, número algébrico é um número real resultante da raiz de alguma equação do tipo:

$a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_{k-1}x + a_k = 0,$ *onde* $a_0, a_1, \ldots a_k$ são números inteiros. (COSTA, 1982)

O número de Ouro é um número irracional algébrico, pois ele é a uma das raízes da equação polinomial de 2º grau, $x^2 - x - 1 = 0$. Pela fórmula de Báskara:

$$x' = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\Phi} = -\varphi \quad \text{e} \quad x'' = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi.$$

Um exemplo de número irracional transcendente é o número π, bastante conhecido na matemática. A comprovação de que π é transcendente foi dada em 1881 pelo matemático Lindemann. Sabe-se que existem mais números transcendentes do que algébricos. (COSTA, 1982)

A comprovação de que π é transcendente exige a compreensão de Cálculo Diferencial e Integral e o docente, por este motivo, fica a vontade de pesquisar sobre este assunto.

Exemplos para a aplicação da razão áurea no ensino

Todos os exemplos da razão Áurea estudados neste artigo poderão ser usados como atividades em sala de aula, porém serão apresentadas mais algumas situações onde a razão Áurea está presente, servindo de auxílio para pesquisas nesta área.

O Triângulo Áureo

Neste artigo abordou-se sobre o retângulo Áureo, o segmento dividido em média e extrema razão, demonstrou-se também que a diagonal do quadrado é incomensurável Reforçando a ideia, Lívio (2008, p. 97) complementa: “a construção do pentágono foi o principal motivo do interesse dos gregos pela razão Áurea”.

Antes de partir para a análise do pentágono-pentagrama, analisou-se a figura 13.

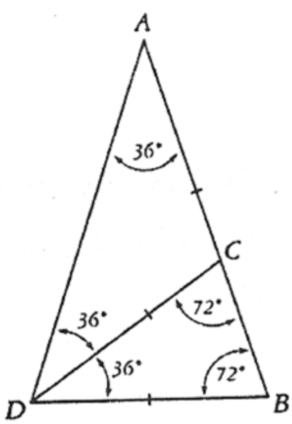


Figura 13 - Triângulo Áureo

O triângulo *ABD* trata-se de um triângulo Áureo, assim como o retângulo Áureo ele possui algumas propriedades especiais parecidas, como, por exemplo: O lado maior $\overline{AB}$ em relação com o lado $\overline{DB}$ estão numa razão Áurea, tais como os triângulos Áureos menores formados infinitamente no seu interior simplesmente bissecando seu ângulo de 72°. A figura formada por estes triângulos Áureos cada vez menores formam também uma espiral logarítmica, assim como ocorre no retângulo Áureo (figura 14).

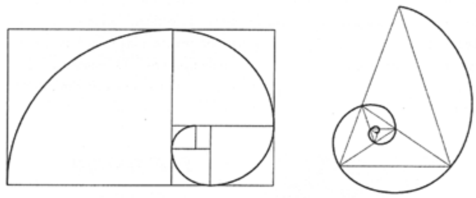


Figura 14 - Retângulo Áureo e Triângulo Áureo, respectivamente

É possível demonstrar como os lados $\overline{AB}$ e $\overline{DB}$ do triângulo *ABD* da figura 13 estão numa Razão Áurea:

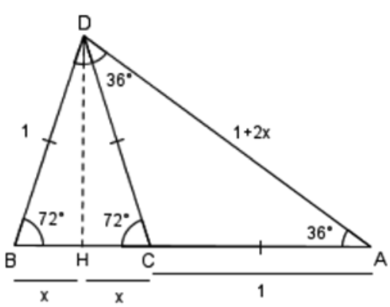
A principal característica deste triângulo Áureo está nos seus ângulos, dois de 72° e um de 36°. Como afirma Lívio (2008, p. 97, grifo do autor): "O triângulo (...), com uma razão de Φ, entre o lado e base, é conhecido como um ***triângulo Áureo*.**"

Estes ângulos têm ligação com a razão Áurea:

Os triângulos *ABD* e *DBC* são semelhantes, pois seus ângulos são iguais. Portanto, a razão $\overline{AB}/\overline{DB}$ é igual a $\overline{DB}/\overline{BC}$, por se tratar de triângulos semelhantes. Sabendo que ambos são triângulos isósceles, então $\overline{DB} = \overline{DC} = \overline{AC}$. Com essa relação tem-se $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$.

Retomando a explicação do segmento dividido em média e extrema razão: o lado do triângulo $\overline{AB}$ está dividido no ponto *C*, justamente nessa média e extrema razão porque temos a igualdade $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$, onde o segmento todo $\overline{AB}$ dividido pelo segmento maior $\overline{AC}$ é igual ao maior $\overline{AC}$ dividido pelo menor $\overline{BC}$ ou igual a Φ.

Analisando-se a figura 13 por outro ângulo e traçando-se a altura *H*, pode-se perceber a relação existente entre o $\cos 72°$ e a Razão Áurea.

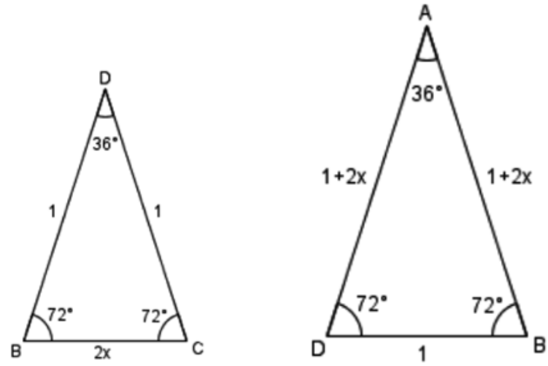


Considerando as medidas dos lados $\overline{DB} = 1$ e $\overline{BC} = 2x$ do triângulo *ABD* acima tem-se:

Se $\overline{DB}=1$, então $\overline{DC}=\overline{CA}=1$ e se $\overline{BC}=2x$, então $\overline{BH}=\overline{HC}=x$.

Logo $\overline{DA}=\overline{BA}=1+2x$.

Utilizando semelhança de triângulos entre os triângulos *DBC* e *DBA* têm-se as seguintes proporções:



$$\frac{\overline{BC}}{\overline{DB}}=\frac{\overline{DB}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{2x}{1}=\frac{1}{1+2x} \Rightarrow (1+2x).2x=1 \Rightarrow 4x^2+2x-1=0$$

Considerando a raiz positiva dessa equação de 2º grau, $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$, logo o valor de x é a metade da Razão Áurea, $\frac{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}{2}$ e tendo em vista que $\cos 72°$ equivale a x, o mesmo equivale, também, a metade da Razão Áurea. Se $x=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$, então o valor equivale a $\cos 144°$ que reduzindo ao primeiro quadrante é equivalente a $-\cos 36°$.

O Pentágono-pentagrama

A análise do pentágono-pentagrama pode ser feita observando a figura 15, e a partir disso demonstrar que a diagonal do pentágono é incomensurável em relação ao lado do pentágono, ou seja, eles não possuem segmentos em comum. Essa demonstração também parte do método da “redução ao absurdo”.

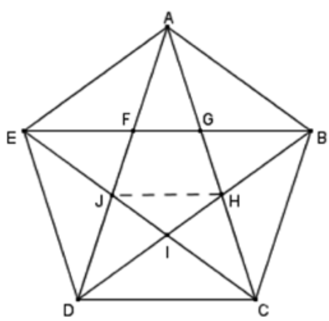


Figura 15 - Pentágono-pentagrama

Denotando o lado do pentágono $ABCDE$ por l_1 e a digonal por d_1. Usando as propriedades dos triângulos isósceles, observando os ângulos e sabendo que cada vértice do pentágono corresponde a 108°, pode-se perceber que $\overline{AB} = \overline{AH}$ e $\overline{HC} = \overline{HJ}$, consequentemente $\overline{AC} = \overline{AH} + \overline{HC} = \overline{AB} + \overline{HJ}$, colocando as denominações nessa igualdade tem-se: $d_1 = l_1 + d_2$ *ou* $d_1 - l_1 = d_2$.

Percebe-se que o pentagrama (figura em forma de estrela gerada pelas diagonais do pentágono) possui um pentágono menor $FGHIJ$ no seu centro, d_2 e l_2 será a denotação para a diagonal e lado respectivamente desse pentágono.

O que se pretende é determinar uma medida comum para d_1 e l_1. Pela igualdade $d_1 - l_1 = d_2$ e pelo pressuposto do método da "redução ao absurdo", essa medida deverá ser comum para d_2.

Analisando mais atentamente a figura 15 tem-se:

$$\overline{AG} = \overline{HC} = \overline{HJ} \qquad \overline{AH} = \overline{AG} + \overline{GH}$$

$$\overline{AH} = \overline{AB} \qquad \overline{AB} = \overline{HJ} + \overline{GH}$$

Colocando as denotações em $\overline{AB} = \overline{HJ} + \overline{GH}$ tem-se: $l_1 = d_2 + l_2$ ou $l_1 - d_2 = l_2$.

E segundo Lívio (2008), partindo do pressuposto que a medida comum de l_1 e d_1 também é de d_2, a igualdade $l_1 - d_2 = l_2$ mostra que essa também deve ser comum para l_2. Esse processo pode ser feito infinitamente para pentágonos cada vez menores, mostrando que a medida comum procurada serve para qualquer pentágono menor, concluindo que não pode ser verdade que o lado e a diagonal do pentágono possuem uma medida em comum.

Para completar e justificar o fato do pentágono-pentagrama ter relação com a razão Áurea observe a figura 13: O triângulo Áureo ABD é semelhante ao ACD da figura 15, possuindo as mesmas propriedades, portanto o lado e a diagonal do pentágono estão numa razão Áurea.

Considerações Finais

O estudo da razão Áurea apesar de ser um assunto aparentemente simples, pelo fato de existir aplicabilidade em diversas áreas do conhecimento a tornam, ao mesmo tempo, interessante e curiosamente complexa.

Este artigo visou buscar alguns aspectos e fundamentos da razão Áurea para ser trabalhado, tanto por docentes quanto por discentes, tendo como meta disponibilizar pressupostos que auxiliem o desenvolvimento de atividades com a utilização da razão Áurea, sem a pretensão de escrever um manual histórico, mas que o leitor situe-se nos acontecimentos e entenda a importância destes para a matemática.

A intenção em abordar o tema "irracionalidade e incomensurabilidade" é que ele justifica um pouco da história e também a mística em torno da razão Áurea, mostrando que pode ser estudada tal como qualquer número irracional.

O intuito da abordagem deste tema busca mudar a concepção de que, um número irracional não permite obter todas as casas decimais, dificultando seu estudo com profundidade. Ao tratar dos números irracionais procurou-se mostrar que os números podem ser estudados de maneira lógica, como foi exemplificado com o uso do método "redução ao absurdo", ou analisando geometricamente uma figura, como foi o caso da diagonal do quadrado e do pentagrama.

Outro aspecto aparece logo no início, apresentando as principais propriedades da razão Áurea e do segmento dividido em média e extrema razão, pois considera fundamental que o pesquisador entenda, primeiramente, esse contexto da razão Áurea presente na relação de segmentos especiais, onde o menor está para o maior, assim como o maior está para o todo e entender a diferença entre o número de Ouro e a razão Áurea.

As raízes da equação $x^2 + x - 1 = 0$ equivalem, respectivamente, à razão Áurea e ao número de Ouro, pois $x = 1,6180339... \cong \Phi$ é o número de ouro e $x = 0,6180339... \cong \varphi$ é a razão Áurea. Estes resultados mostram que ambos dependem de $ax^2 + bx + c, sendo\ a = 1$, o que irá influenciar é o sinal de b e c.

Quanto ao retângulo Áureo e suas propriedades, e admitindo que ele é uma figura importante no estudo de razão Áurea, procurou-se colocar o máximo de informação, mesmo assim, alguns assuntos, deixou-se por critério do pesquisador, pois a sua utilização nas artes e na arquitetura é muito vasta.

A questão da Razão Áurea na natureza procurou abordar os temas de maneira sucinta, passando pela Espiral Logarítmica e alguns fenômenos da natureza que trazem a razão Áurea na sua formação e também algumas situações onde a sequência de Fibonacci está presente. O objetivo principal neste momento foi buscar argumentos científicos para a existência da razão Áurea e mostrar sua relação com a sequência de Fibonacci.

Como já abordado anteriormente, o estudo realizado sobre a irracionalidade, usando como exemplo a $\sqrt{2}$ para tratar sobre incomensurabilidade para explicar sobre segmentos que não possuem medidas em comum, foi necessariamente importante para a explicação da Razão Áurea. Permeou-se um pouco sobre números irracionais algébricos e transcendentes, voltando a fazer uma relação com a equação $x^2 + x - 1 = 0$.

Depois de vários exemplos que já poderiam ser utilizados pelos docentes como atividades para a explicação da razão áurea e números irracionais, fez-se um paralelo sobre o retângulo áureo, o triângulo áureo e o pentágono-pentagrama, explicando onde se encontra a razão áurea.

Espera-se que este artigo contribua para despertar novas pesquisas sobre o assunto e que os exemplos utilizados seja uma referência.

Além disso, considera-se que a história do número Fi é realmente motivadora, conforme se avança nas pesquisas, começam-se encontrar situações matemáticas curiosas que leva à uma exploração sem igual. À medida que se aprende a razão áurea faz-se a conexão com outros assuntos, como é caso dos números irracionais, e esta ligação é muito interessante. Apesar das dificuldades encontradas, espera-se que este artigo auxilie os docentes estimulando as suas aulas, ou simplesmente para um amante da matemática, seja uma fonte agradável para adquirir e aprimorar o conhecimento sobre razão Áurea.

Referências

ÁVILA, G. Grandezas incomensuráveis e números irracionais. In: *Revista do Professor de Matemática***.** São Paulo: SBM, n.5, 2.semestre. 1984.

ÁVILA, G. Retângulo Áureo, Divisão Áurea e Sequência de Fibonacci. In: *Revista do Professor de Matemática.* São Paulo: SBM, n.6, p. 9-14, 1.semestre. 1985.

AZEVEDO, A. Sequencias de Fibonacci. In: *Revista do Professor de Matemática***.** São Paulo: SBM, n.45, p. 44-48, 1.quadrimestre. 2001.

BIEMBENGUT, M. S. *Número de Ouro e Secção Áurea***:** Considerações e Sugestões para a Sala de Aula. Santa Catarina: Ed. da FURB, 1996.

COSTA, R. C. F. O que é um número transcendente?. In: *Revista do Professor de Matemática.* São Paulo: SBM, n.1, 1.semestre. 1982.

LÍVIO, M. *Razão Áurea***:** A história de FI, um número surpreendente. 3.ed. Rio de Janeiro: Record, 2008.

Submetido em fevereiro de 2010
Aprovado em maio de 2010