INDUÇÃO? FINITA OU EMPÍRICA?

INDUCTION? FINITE OR EMPIRIC?

Eduardo Machado da Silva*
Angela Marta Pereira das Dores Savioli**

Resumo

Este artigo apresenta considerações sobre a utilização da indução finita, método de demonstração formal puramente matemático, e o emprego da indução empírica, que é amplamente utilizado nas ciências experimentais. O objetivo é descrevê-los, destacando suas diferenças conceituais e aplicações. Para tanto, busca-se em dicionários etimológicos e filosóficos, em teóricos como Chauí (2000), Eco (1979), Bicudo (2005), Davis & Hersh (1985), Carvalho (2004), Frege (1988), Russel (1974), entre outros, e em livros didáticos, abordagens desses conceitos, procurando confrontá-las. Como aplicação, finaliza-se com Baron (1985), apresentando um exemplo com números figurados.

Palavras-chave: Indução finita. Indução empírica. Demonstração formal. Educação Matemática.

Abstract

This article presents considerations on the use of finite induction, method of purely formal mathematical demonstration, and the use of empirical induction, which is widely used in experimental sciences. The goal is to describe them, highlighting their conceptual differences and applications. To do so, we search in philosophical and etymological dictionaries, in Chauí (2000), Eco (1989), Bicudo (2005), Davis & Hersh (1985), Carvalho (2004), Frege (1988), Russel (1974), among others, and in textbooks, approaches these concepts, seeking to confront them. We conclude with Baron (1985), presenting an application with figured numbers.

Keywords: Finite induction. Empirical induction. Formal demonstration. Mathematic education.

Introdução

É possível notar que uma das características presentes na área de ciências exatas é o fato de suas afirmações estarem fundamentadas em demonstrações (ou provas). Porém, um dos problemas está relacionado ao uso da palavra demonstração. Este termo possui significados diferentes dependendo do contexto onde ele é aplicado, mesmo que sua interpretação seja a de validar ou justificar alguma declaração. Para Godino e Recio (1997) existem quatro contextos distintos onde a palavra demonstração pode ser empregada, são eles: lógica e fundamentos da matemática, matemática profissional, ciências experimentais e sala de aula de matemática.

Com relação aos métodos de demonstração, outro termo, cujo significado depende do contexto onde é utilizado, é o de indução. Este vocábulo é usado tanto na matemática quanto na física ou química, porém seu significado é completamente diferente. Na maioria das vezes a interpretação que deve ser feita quando um matemático emprega o termo indução

* Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela UEL.

** Docente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina-UEL - e-mail: angelamarta@uel.br.

é que ele está se remetendo a indução finita (ou indução matemática[1]), enquanto que para um físico ou químico fica implícita a indução empírica. Por uma questão de simplificação de linguagem são omitidos os adjetivos, finita ou empírica, que aparecem após a palavra indução. Tal omissão pode causar um entendimento equivocado sobre qual método de demonstração estava sendo utilizado.

Constatou-se o problema descrito anteriormente na pesquisa de Silva (2010), onde o autor relata que alguns estudantes da 3ª série de um curso de Licenciatura em Matemática apresentaram dificuldades em demonstrar proposições que envolviam o conceito de indução finita confundindo este método de demonstração, exclusivamente matemático, com o da indução empírica.

Motivados por essa dificuldade objetiva-se neste trabalho descrever os métodos de indução finita e indução empírica, destacando suas diferenças conceituais e aplicações. Para tanto, foi necessário consultar em dicionários etimológicos e filosóficos, em obras de teóricos como Chauí (2000), Eco (1989), Bicudo (2005), Davis & Hersh (1985), Carvalho (2004), Frege (1988), Russel (1974), entre outros autores, além de livros didáticos, abordagens desses conceitos, procurando confrontá-las.

Dedução e Abdução

Segundo Chauí (2000), existem dois tipos de atividade racional: a intuição (razão intuitiva) e a razão (razão discursiva), sendo que

> A razão discursiva ou o pensamento discursivo chega ao objeto passando por etapas sucessivas de conhecimento, realizando esforços sucessivos de aproximação para chegar ao conceito ou à definição do objeto, enquanto que a razão intuitiva é [...] uma visão direta e imediata do objeto do conhecimento, um contato direto e imediato com ele, sem necessidade de provas ou demonstrações para saber o que conhece (CHAUÍ, 2000, p.77).

Geralmente a razão intuitiva consiste no ponto de partida para o desenvolvimento de um novo conceito, teoria ou teorema, porém a fundamentação das ideias, isto é, a demonstração ou a prova de que uma dada afirmação é verdadeira se dá por meio da razão discursiva (ou raciocínio). Dessa forma, tem-se que os tipos de raciocínios empregados para generalizar certo pensamento são dedução, indução e abdução.

Para o conceito de dedução encontrou-se a seguinte definição:

> A **dedução** consiste em partir de uma verdade já conhecida (seja por intuição, seja por uma demonstração anterior) e que funciona como um princípio geral ao qual se subordinam todos os casos que serão demonstrados a partir dela. Em outras palavras, na dedução parte-se de uma verdade já conhecida para demonstrar que ela se aplica a todos os casos particulares iguais. Por isso também se diz que a dedução vai do geral ao particular ou do universal ao individual. O ponto de partida de uma dedução é ou uma idéia verdadeira ou uma teoria verdadeira. (CHAUÍ, 2000, p. 81).

---

[1] Neste trabalho optamos por utilizar o termo indução finita.

O exemplo clássico de Peirce[2] sobre o raciocínio dedutivo é apresentado da seguinte maneira por Eco (1989):

> Suponhamos que sobre esta mesa eu tenha um saco cheio de feijões brancos. Eu sei que está cheio de feijões brancos (suponhamos que eu tenha comprado numa loja saquinhos de feijão branco e que eu confie no vendedor): portanto, eu posso afirmar como Lei que "todos os feijões deste saco são brancos". Uma vez que conheço a Lei, produzo um Caso; pego às cegas um punhado de feijões do saquinho (às cegas: não é necessariamente que os veja) e posso predizer o Resultado: "Os feijões que estão na minha mão são brancos". A Dedução de uma Lei (verdadeira), através de um Caso, prediz com absoluta certeza um Resultado. (ECO, 1989, p. 160).

Além dos raciocínios, dedutivo e indutivo, Peirce apresenta também o raciocínio abdutivo, que se caracteriza pela formação de novas hipóteses explicativas para um determinado fenômeno. Assim, tem-se que:

> A abdução é uma espécie de intuição, mas que não se dá de uma só vez, indo passo a passo para chegar a uma conclusão. A abdução é a busca de uma conclusão pela interpretação racional de sinais, de indícios, de signos. O exemplo mais simples oferecido por Peirce para explicar o que seja a abdução são os contos policiais, o modo como os detetives vão coletando indícios ou sinais e formando uma teoria para o caso que investigam. (CHAUÍ, 2000, p. 83).

O exemplo do raciocínio abdutivo é apresentado do seguinte modo por Eco (1989):

> Há um saquinho sobre a mesa e, ao lado, sempre sobre a mesa, um grupo de feijões brancos. Não sei como estão ali, ou quem os colocou, nem de onde vêm. Consideremos este resultado um caso curioso. Agora eu deveria encontrar uma Lei tal que, se fosse verdadeira, e se o Resultado fosse considerado um Caso daquela Lei, o Resultado não seria mais curioso, mas sim, razoabilíssimo. Neste ponto eu faço uma conjectura: teorizo a Lei pela qual aquele saco contém feijões e todos os feijões daquele saco são brancos e tento considerar o resultado que tenho diante dos meus olhos como um Caso daquela Lei. Se todos os feijões do saquinho são brancos e esses feijões vêm daquele saco, é natural que os feijões da mesa sejam brancos. (ECO, 1989, p. 160).

Outro aspecto que se deve considerar sobre a atividade racional refere-se à utilização do método indutivo, como já destacado inicialmente. A seguir será abordado esse método, enfocando algumas características da indução finita e a indução empírica.

Aspectos Gerais Sobre a Indução Empírica e Indução Finita

Nas ciências experimentais, como a Física e a Química, muitos resultados são generalizados como leis após o estudo de certo número de observações. As conclusões destas observações estão fundamentadas na realização de experiências. Tais experiências são repetidas um número finito de vezes e atendem a certas condições. Assim, após a coleta de dados, feita por meio das observações, os cientistas experimentais buscam generalizar um

[2] Charles Sanders Pierce (1839 – 1914).

resultado a partir do estudo de um caso particular. O método descrito anteriormente é denominado indução empírica.

Em busca de uma definição precisa para o método de indução (empírica) investigou-se seu significado em alguns dicionários. No dicionário de língua portuguesa Houaiss (2001, p. 1608) tem-se:

> 1 ação, processo, ou efeito de induzir 2 *p. ext.* raciocínio que serve de indícios para chegar a uma causa por eles tornada patente 3 *p. met.* conclusão ou conseqüência extraída desse(s) raciocínio(s) 4 FIL raciocínio que parte de dados particulares (fatos, experiências, enunciados empíricos) e, por meio de uma seqüência de operações cognitivas, chega a leis ou conceitos mais gerais, indo dos efeitos à causa, das conseqüências ao princípio, da experiência à teoria [...]

O dicionário etimológico Nova Fronteira (1997, p. 434) trás para o termo indução (empírica) a seguinte definição: "*sf.* 'introdução, condução' 'raciocínio em que, de fatos particulares se tira uma conclusão genérica' ...".

E no dicionário de filosofia de Abbagnano (2000, p. 556) tem-se:

> 'A I. é o procedimento que leva do particular ao universal': com esta definição de Aristóteles (*Top.*, I, 12, 105 a 11) concordaram todos os filósofos. O próprio Aristóteles vê na I. um dos caminhos pelos quais conseguimos formar nossas crenças; a outra é a dedução (*silogismo*) (*An. pr.*, II, 23, 68 b 30). Além disso, atribuiu a Sócrates o mérito de haver descoberto os 'raciocínios indutivos' (*Met.*, XIII, 4, 1078 b 28)

Assim, tomando as definições acima, conclui-se que a indução empírica é o raciocínio ou método que nos leva a passagem do particular ao geral por meio de observações de fenômenos ou experiências. O método de indução empírica é amplamente utilizado no campo das ciências experimentais, como já mencionado.

Diferentemente do que ocorre nas ciências experimentais, em Matemática não se pode afirmar que uma proposição é verdadeira ou falsa a partir de certo número de observações de uma experiência ou fenômeno. Por exemplo: não é possível afirmar que a soma dos n primeiros números naturais ímpares é n^2, para qualquer número natural n, testando a mesma para um grande número de valores. Pode-se analisar essa afirmação para $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, e mesmo depois de realizadas várias tentativas não será possível concluir que se trata de uma afirmação verdadeira ou falsa. Sempre ficará dúvida se para o próximo teste a proposição será verdadeira.

$$\begin{array}{cc}
1 & 1^2 \\
1+3 = 4 & 2^2 \\
1+3+5 = 9 & 3^2 \\
1+3+5+7 = 16 & 4^2 \\
1+3+5+7+ \ldots + 2n+1 & n^2\ (?)
\end{array}$$

A Matemática é uma ciência que possui características próprias e seus resultados não são baseados somente em observações empíricas. Assim, uma das diferenças apontadas entre a Matemática e a Física, a Química, a Biologia e outras ciências experimentais, é que seus resultados necessitam ser demonstrados por meio de provas formais, o que não ocorre, necessariamente, no campo das outras. Davis & Hersh (1985, p. 178) afirmam que "[...]

a matemática fica caracterizada, de maneira única, por algo conhecido como 'demonstrações'".

A organização da Matemática, segundo Bicudo (2005), é descrita da seguinte maneira:

> Ao desenvolver sua ciência, a missão do matemático consiste em *definir* os *conceitos* do ramo em questão, isto é, *definir* seus *objetos matemáticos* e em *demonstrar* as *propriedades* que esses conceitos possuam, ou as *relações* que tais objetos satisfaçam. Ora, definir um conceito significa explicá-lo em termos de outros conceitos já definidos, e demonstrar uma proposição que enuncie uma relação entre os objetos matemáticos considerados é argumentar por sua validade, usando regras de inferência fornecidas pela *lógica* (*dos predicados de primeira ordem com igualdade*), a partir de proposições anteriormente demonstradas. (BICUDO, 2005 p. 59)

Entende-se que a proposta de Bicudo (2005) não é viável para ser aplicada em demonstrações matemáticas, pois, segundo as regras da lógica, dever-se-ia a todo o momento que se demonstrasse certa proposição, remeter-se a conceitos anteriores, relacionando-os com propriedades já demonstradas a fim de obter novas definições e provas de teoremas. Dessa forma, apesar das provas e demonstrações matemáticas não possuírem o rigor da lógica são consideradas como provas formais. Assim, tem-se que:

> A prova aceitável é aquela vista como um princípio normativo; mais do que enraizada em critérios lógicos, a prova precisa ser compatível com o corpo de conhecimento matemático que define o que é aceitável ao matemático. A prova é considerada um processo social, sendo uma de suas funções 'promover o entendimento'. (CARVALHO, 2004, p. 60)

Além disso, para o desenvolvimento de suas atividades o matemático considera que

> Se uma definição presta-se de bom grado às demonstrações, se em nenhum momento esbarra-se em contradições, se conexões entre temas aparentemente distantes entre si deixam-se perceber, e se deste modo resulta em ordem e regularidade superiores, costuma-se então considerar a definição suficientemente estabelecida, indagando-se pouco sobre sua legitimidade lógica. (FREGE, 1980, p. 203)

Dessa forma, com relação à prova por indução finita tem-se que se trata de um método dedutivo enquanto que a indução empírica é uma generalização não dedutiva, ou seja, na indução empírica não ocorre dedução no sentido matemático, pois a generalização é realizada por meio de observações. Portanto, entende-se que:

indução = indução empírica = indução finita = método dedutivo = demonstração formal

Com o objetivo de mostrar o mau uso da palavra indução em textos matemáticos realizou-se uma pesquisa em livros didáticos exclusivamente matemáticos e foi possível comprovar que alguns autores como, por exemplo, Domingues & Iezzi (1982), Lima (1999) e Gonçalves (2001) se referem à indução finita empregando apenas o termo indução. Dessa maneira, entende-se que tais autores propõem uma "simplificação" da linguagem natural. Dessa forma, a partir das definições de indução finita e de indução empírica acima é possível perceber que ambos os métodos não possuem características comuns. Concluímos então que essa simplificação da linguagem gera problemas, pois há a possibilidade de confusão entre tais métodos.

Retornando à indução (empírica), tem-se a definição dada pelo dicionário de filosofia de Abbagnano (2000, p. 557):

> Entre a indução e o silogismo, Aristóteles estabelece, todavia uma grande diferença de valor. No silogismo dedutivo ('Todos os homens são animais; todos os animais são mortais; logo, todos os homens são mortais') o termo médio (animal) constitui a *substância* ou a *razão de ser* da conexão necessária entre os dois extremos: os homens são mortais *porque* são *substancialmente* animais. No raciocínio indutivo, entretanto ('O homem, o cavalo e o mulo são duradouros; o homem, o cavalo e o mulo são animais sem fel; logo, os animais sem fel são duradouros'), o termo médio (sem ser fel) aparece na conclusão, o que significa que ele não é um *porquê* substancial, mas um simples fato (*An. pr.*, II, 23, 68 b 15). Portanto a I. não tem valor necessário ou demonstrativo, conquanto seja mais clara que o silogismo; seu âmbito de validade é o mesmo do fato, ou seja, da totalidade dos casos em que sua validade foi efetivamente constatada. Pode, portanto, ser usada para fins de exercício, em dialética, ou com objetivos persuasivos em retórica (*R. her.*, I, 2, 1356 b 13), mas não constitui ciência porque a ciência é necessariamente demonstrativa (*An. post.*, I, 2, 71 b 19)

Ainda no mesmo dicionário de filosofia (p. 561) encontra-se, para indução (matemática) finita:

> Essa expressão designa o princípio que serve para estabelecer a verdade de um teorema matemático em um número indefinido de casos. Denomina-se também princípio de recorrência ou raciocínio por recorrência (POINCARÉ, *La science et l'hipothèse*, I, § 3). Peano assim definiu esse princípio: 'Seja *S* uma classe, suponhamos que *O* pertença a essa classe e que todas as vezes que um indivíduo pertença a essa classe o seguinte também pertence a ela; então todos os números pertencerão a classe. Essa proposição denomina-se princípio de I'. (*Formul. mat.*, § 10).

E nesse dicionário ainda é encontrada, como conclusão, que a indução finita e a indução empírica não têm nada em comum a não ser o caráter de generalização.

Se as definições de indução finita e indução (empírica) nada têm em comum, então porque os autores de livros didáticos e professores de matemática utilizam o termo indução como sinônimo para indução finita? Uma possível resposta a essa pergunta é apresentada por Carvalho (2004, p. 154): "A palavra que define, que dá nome ao objeto matemático, deixa de ser do domínio do corpo matemático, passa a ser da pessoa." Dessa forma, acredita-se que provavelmente quem detém controle sobre os termos indução e indução finita são os autores de livros didáticos e os professores, sendo assim, eles são responsáveis sobre a utilização adequada ou não da terminologia. Portanto,

> O dito rigor matemático então sustentado pelo sujeito identificado com o papel que lhe é reservado, escapa da especificidade da fala e passa ao sentindo do discurso. O papel que o sujeito desempenha é o de garantir que a Matemática possa exercer o sentido da fala do rigor no para si de seu discurso, isto é, garantir que termos usados rigorosamente são o próprio sentido do discurso. É, em parte, daí que o efeito autoritário aparece na sala de aula. (CARVALHO, 2004, p. 153.)

Assim, pode-se concluir que, a simplificação de linguagem gera confusão levando à utilização da indução empírica como demonstração de proposições matemáticas.

A Indução ou Indução Empírica

Para Popper (1996, p. 27) as ciências empíricas são caracterizadas por empregarem métodos indutivos. Além disso, para ele "É comum dizer-se 'indutiva' uma inferência, caso ela conduza de *enunciados singulares* (por vezes denominados também enunciados 'particulares'), tais como descrições dos resultados de observações ou experimentos, para *enunciados universais*, tais como hipóteses ou teorias." E conclui dizendo:

> Ora, está longe de ser óbvio, de um ponto de vista lógico, haver justificativa no inferir enunciados universais de enunciados singulares, independentemente de quão numerosos sejam estes; com efeito, qualquer conclusão colhida desse modo sempre pode revelar-se falsa: independentemente de quantos casos de cisnes brancos possamos observar, isso não justifica a conclusão de que *todos* os cisnes são brancos. (POPPER, 1996, p. 28)

O processo de indução (empírica) é usado naturalmente nas ciências física, química, dentre outras. Segundo Chauí (2000) o método de indução empírica é caracterizado pela busca de uma conclusão, isto é, de uma lei geral que a partir do estudo de casos particulares, iguais ou semelhantes explica todos os casos particulares. Porém, para a utilização da indução (empírica) é necessário que sejam respeitadas certas regras, caso contrário a mesma poderá levar a resultados falsos. A seguir será apresentado o exemplo da aplicação do método de indução (empírica), por meio da análise de Peirce, nas palavras de Eco (1989):

> Tenho um saquinho e não sei o que contém. Coloco a mão dentro dele, tiro um punhado de feijões e observo que são todos brancos. Coloco de novo a mão, e de novo são feijões brancos. Continuo por um número x de vezes (quantas sejam, às vezes, depende do tempo que eu tenho, ou do dinheiro que recebi da Fundação Ford para estabelecer uma lei científica a respeito dos feijões do saco). Depois de um número suficiente de provas, faço o seguinte raciocínio: todos os Resultados das minhas provas dão um punhado de feijões brancos. Posso fazer a razoável inferência de que todos esses resultados são *Casos* da mesma Lei, isto é, que todos os feijões do saco são brancos. De uma série de Resultados, inferindo que sejam Casos de uma mesma Lei, chego à formulação indutiva dessa Lei (provável). Como já dissemos, basta que numa última prova aconteça que um só dos feijões que tiro do saco seja preto para que todo o meu esforço indutivo se dissipe no nada. Eis o porquê da desconfiança dos epistemólogos em relação à Indução. (ECO, 1989, p. 160).

Complementando a crítica apresentada por Popper ao método indutivo, destaca-se o seguinte contraexemplo que pode ser encontrado em Watanabe (1986), Sominski (1996) e Gerônimo & Franco (2002) com relação ao uso da indução empírica e que é dado pelo trinômio $n^2 + n + 4$. Substituindo n por 0, 1, 2, 3, 4 e 5, encontram-se respectivamente os números primos 41, 43, 47, 53, 61 e 71. Analisando os resultados anteriores (e mais alguns) induz-se que é possível determinar números primos a partir desse trinômio. Isso, entretanto não é verdadeiro. Basta observar que substituindo n por 40 encontra-se o número 1681 que é um número composto, pois seus divisores pertencem ao conjunto $\{1, 41, 1681\}$.

Com relação ao método de indução utilizado nas ciências empíricas, Popper (1996) afirma que:

> O problema da indução também pode ser apresentado como indagação acerca da validade ou verdade de enunciados universais que encontrem base na experiência, tais como as hipóteses e os sistemas teóricos das ciências empíricas. Muitas pessoas acreditam, com efeito, que a verdade desses enunciados universais é '*conhecida através da experiência*'; contudo, está claro que a descrição de uma experiência – de uma observação ou do resultado de um experimento – só pode ser um enunciado singular e não um enunciado universal. (POPPER, 1996, p. 28)

Apesar de levantar tal problema, quanto ao método de indução empírica, Popper (1996, p. 29) diz que as justificativas e inferências produzidas por esse método necessitam estarem embasadas na lógica indutiva e conclui afirmando que "[...] o princípio de indução há de constituir-se num enunciado sintético, ou seja, enunciado cuja negação não se mostre contraditória, mas logicamente possível."

Origens e História da Indução Finita

A axiomatização do conjunto dos números naturais deve-se ao matemático italiano Giuseppe Peano (1858 – 1932). Essa realização quer dizer que é possível deduzir e demonstrar todas as propriedades desse conjunto a partir dos axiomas de Peano. Tais axiomas foram divulgados numa obra de 1889, denominada *Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita*. É nesta obra que Peano apresenta seus axiomas e enuncia a base de um processo demonstrativo designado como indução finita.

Enuncia-se a seguir os axiomas de Peano, segundo Lima et al (2006, p. 30), com algumas adaptações[3]:

a) existe uma função $s : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$, que associa a cada $n \in \mathrm{N}$ um elemento $s(n) \in \mathrm{N}$, chamado sucessor de *n*, que significa dizer todo número natural possui um único sucessor, que também é um número natural;

b) a função $s : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$, é injetiva, ou seja, números naturais diferentes possuem sucessores diferentes;

c) existe um único elemento 0 no conjunto N, tal que $0 \neq s(n)$ para todo $n \in \mathrm{N}$, isto é, 0 é o único número natural que não é sucessor de nenhum outro;

d) Se um subconjunto $X \subset N$ é tal que $0 \in N$ e $s(X) \subset X$ (isto é, $n \in X \Rightarrow s(n) \in X$), então $X = N$. O que significa dizer que se um conjunto de números naturais contém o número 0 e, além disso, contém o sucessor de cada um de seus elementos, então esse conjunto coincide com N, isto é, contém todos os números naturais.

O axioma referente ao item d é chamado de axioma de indução finita. Sobre este axioma pode-se dizer que, é possível obter qualquer número natural a partir de 0 por meio de

[3]Esse autor assume o conjunto dos números naturais a partir de 1, isto é, N = {1, 2, 3, ...}, neste trabalho será abordado N como N = {0, 1, 2, 3, ...}.

operações de tomar o sucessor de n.

Com relação a utilização e aplicação do princípio de indução finita, Lima (1999, p. 27) enfatiza: "O Princípio de Indução é muito útil para demonstrar proposições que se referem a inteiros. Ele está implícito em todos os argumentos onde se diz 'e assim por diante', 'e assim sucessivamente' ou 'etc'."

Desse modo, a partir dos axiomas de Peano pode-se enunciar o princípio de indução finita:

Princípio de Indução Finita (Teorema): Seja P(n) uma proposição envolvendo um número natural n e suponha que:

a - P(0) é verdadeira

b - $\forall\ k \in$ N, P(k) verdadeira $\Rightarrow$ P(k+1) verdadeira.

Então P(n) é verdadeira para todo $n \in$ N.

Dem.

Considere o seguinte subconjunto de N, A = $\{n \in$ N / P(n) é verdadeira$\}$. Observe que 0 pertence a A, pois, sendo P(0) verdadeira, decorre do item a do teorema. Agora se supõe que, para todo n pertencente ao conjunto A, tem-se que P(n) é também uma proposição verdadeira. Portanto, deriva do item b do teorema, que P(n+1) é também uma proposição verdadeira. Sendo assim, tem-se que n+1 pertence ao conjunto A. E desse modo, pode-se concluir que A é igual a N.

A abordagem anterior adota o conjunto dos números naturais N para enunciar o princípio de indução finita, entretanto, há abordagens que consideram o conjunto dos números inteiros Z para enunciar o princípio de indução finita. Assim, autores como Domingues & Iezzi (1982), Gonçalves (1999), Shokranian, Soares & Godinho (1999) iniciam a apresentação da indução finita a partir do princípio de boa ordenação[4].

As demonstrações baseadas na indução finita são caracterizadas por duas propriedades. A primeira diz que a proposição deve ser verdadeira para um número natural n_0 (que não necessita ser o 0). A segunda considera que, se a proposição for verdadeira para um número natural n arbitrário, então é também verdadeira para $n+1$, ou seja, é válida para o seu sucessor. A primeira propriedade é denominada como base da indução e a segunda é chamada de passo indutivo. Segundo Gerônimo & Franco (2002), as propriedades da indução finita podem ser comparadas ao efeito dominó, isto é, se se tem uma fila de dominós dispostos verticalmente de modo que as distâncias entre eles permitam que uns toquem nos outros ao caírem, então se a primeira peça do dominó cai a seguinte também cairá.

Apesar do princípio de indução finita ter sido desenvolvido por Peano, Katz (2004) mostra indícios de que a indução finita já era conhecida desde a Antiguidade, aparecendo de

[4]Princípio da Boa Ordenação: A definição desse princípio segundo Shokranian, Soares & Godinho (1999) é: "todo subconjunto não vazio A de inteiros não negativos possui em elemento mínimo (isto é, existe $n_0 \leq n$, para todo $n \in$ A)."

forma implícita na obra *Os Elementos*, de Euclides (300 a.C.). Além disso, há autores como Milies e Coelho (2006) que apontam o matemático francês Blaise Pascal (1623 – 1662) como o primeiro a utilizar o princípio de indução finita para demonstrar as propriedades do triângulo aritmético, em um folheto que tinha como título *Traité du Triangle Arithmétique*.

Porém, contrariando a posição anterior, Vacca (1909) defende que foi Francesco Maurolico, matemático italiano (1494 – 1575), o primeiro a utilizar a indução finita em seus trabalhos e que Pascal teria apenas utilizado-a em seu folheto. Hefez (1993), ao encontro de Vacca (1909), vai além e diz que o primeiro problema de indução finita resolvido por Maurolico foi provar que, para todo natural n, a soma dos n primeiros números naturais ímpares é dada por n^2.

Há outros autores como Cajori (1918), que apontam que a indução finita apresenta origens diferentes. Este autor ainda afirma que foi apenas em 1838 que o nome indução finita foi utilizado aparentemente pela primeira vez. Fato esse, que se deve ao matemático britânico Augustus De Morgan (1806 – 1871) em um artigo publicado com o título *Induction* (*Mathematics*).

Outra perspectiva em que se pode abordar o princípio de indução finita é apoiando-se na filosofia da matemática, como fez Russel (1974). Segundo Monk (2000), Russel buscava definir a matemática como uma ciência livre de contradições, sendo assim incontestavelmente verdadeira. Russel (1974) a fim de explicar os axiomas de Peano, introduz a sequência 1, 2, 3, ..., dos números naturais, dizendo que um ponto de partida óbvio em relação à matemática e que, para reescrever esta sequência como 0, 1, 2, 3, ..., n, $n + 1$, ... a civilização passou por vários níveis de desenvolvimentos intelectuais. Para isso, basta notar, que nesta última série tem-se 0 como elemento, fato que mostra desenvolvimento intelectual da humanidade, já que, por exemplo, os gregos e os romanos não dispunham de uma representação para tal algarismo.

Deste modo, Russel (1974) alerta que:

> Pouquíssimas pessoas têm uma definição para o significado de 'número' ou '0' ou '1'. Não é difícil ver que, partindo-se de 0, pode-se atingir qualquer número natural por adições repetidas de 1, mas teremos de definir o que queremos dizer com as expressões 'adicionar 1', e 'repetir'. Essas questões não são de modo algum fáceis. (RUSSEL, 1974, p. 11)

Assim, Russel (1974) aponta que, para construir a série dos números naturais basta saber o que se quer dizer com os termos "0" e "sucessor", e afirma:

> Quais os números que podem ser atingidos sendo dados os termos '0' e 'sucessor'? Haverá algum meio pelo qual possamos definir toda a classe de tais números? Atingimos 1 como sucessor de 0; 2, como sucessor de 1; 3, como sucessor de 2, e assim por diante. É esse 'e assim por diante' que desejamos substituir por algo menos vago e indefinido. Poderemos ser tentados a dizer que 'e assim por diante' significa que o processo de passar para o sucessor pode ser repetido *qualquer número finito* de vezes, mas o problema em cuja solução estamos empenhados é o de definir 'número finito', e, portanto, não devemos usar essa noção em nossa definição. Nossa definição não deverá pressupor que saibamos o que seja um número finito. (RUSSEL, 1974, p. 27)

A solução que Russel (1974, p. 27) apresenta para este problema está no princípio de indução finita. Este autor diz que: “Essa proposição declara que qualquer propriedade que pertença a 0, e também ao sucessor de todo número que tenha essa propriedade, pertence a todos os números naturais.”

Portanto, com relação às ideias primitivas de Peano, Russel (1974) apresenta uma perspectiva na qual diz que:

> [...] demos definições delas que as tornam precisas, não mais capazes de uma infinidade de significados diferentes, como eram quando ainda determinadas apenas até ao ponto de obedecer aos cinco axiomas de Peano. Nós retiramos do aparato fundamental de termos que têm de ser meramente apreendidos, e aumentamos assim a articulação dedutiva da Matemática. (RUSSEL, 1974, p. 30)

Assim, a partir dos conceitos apresentados por Russel (1974) tem-se agora que o princípio de indução finita é o meio pelo qual se define os números naturais e somos capazes de deduzir, demonstrar e generalizar todas as suas propriedades. Tais propriedades estão baseadas no conceito de posteridade de 0 com relação entre um número natural e seu sucessor imediato. Russel (1974) diz que:

> Uma propriedade é ‘hereditária com respeito a N’, ou simplesmente ‘N-hereditária’, se, quando pertencer a um número m, também pertencer a $m + 1$, isto é, ao número com o qual m tenha a relação N. E se dirá que um número n pertence a ‘posteridade’ de m com respeito à relação N se n tiver todas as propriedades N-hereditárias pertencentes a m. (RUSSEL, 1974, p. 31)

Dessa maneira Russel (1974, p. 33) enuncia o princípio de indução finita como “o que pode ser inferido do seguinte para o seguinte pode ser inferido do primeiro ao último.” Tal enunciado é segundo Russel (1974) um modo popular de definir a indução finita.

Gástev (apud Sominski, 1996) afirma que a indução finita é um método dedutivo e a define da seguinte maneira:

> O ‘princípio de indução matemática’ é uma proposição precisa (cuja evidência intuitiva é aceita por muitos matemáticos como indiscutível, ainda que no momento da exposição axiomática da Aritmética figure como um axioma) que permite obter, a partir da base e do passo indutivo, uma demonstração puramente dedutiva da proposição para todos os números naturais n. (GÁSTEV, apud SOMINSKI, 1996, p. 59)

Para este autor os nomes indução e indução finita, estão relacionados devido a uma associação que a nossa consciência, ao realizar argumentações, produz ao envolver esses dois princípios. Além disso, Gástev (apud Sominski, 1996) relata que a indução empírica necessita de algumas experiências em particular a fim de que tenhamos hipóteses iniciais sobre um determinado fenômeno enquanto que a indução finita não necessita de tais hipóteses. Este autor ainda declara que a indução finita é “completa” ou “perfeita”, pois é um método dedutivo que pode ser empregado com 100% de segurança, já a indução empírica é “imperfeita” porque não se pode assegurar que a experiência produzirá os mesmos resultados sempre. Deste modo, Gástev (apud Sominski, 1996) conclui que a indução finita é um método de demonstração de teoremas aritméticos, isto é, que em se tratando do conjunto dos números naturais a indução finita é um instrumento universal para demonstrar as propriedades desse conjunto.

Complementando as ideias de Gástev tem-se que:

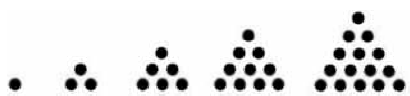
> A indução é o processo de descoberta de leis gerais pela observação de casos particulares. É utilizada em todas as áreas das ciências, inclusive na matemática. A indução finita é utilizada exclusivamente na Matemática, para demonstrar teoremas de um certo tipo. É de lamentar que estes nomes estejam relacionados, pois há muito pouca conexão lógica entre os dois processos. Há, no entanto uma conexão prática, pois muitas vezes utilizamos ambos conjuntamente. (POLYA, 1975, p 91).

Assim, é necessário tomar cuidado quando se refere à indução finita e à indução empírica. A indução finita é um método dedutivo, enquanto que a indução empírica, como já dito, trata-se de um estudo de casos particulares, iguais ou semelhantes e busca uma lei geral que explica e subordina tais casos. Assim, tem-se que neste último "a definição ou a teoria são obtidas no ponto final do percurso."

Ao encontro da posição de Katz (2004) quanto ao aparecimento da indução finita, Baron (1985) trás algumas aplicações para este princípio, que, segundo a autora, se devem aos pitagóricos.

> [...] que o número exercia para os pitagóricos o papel da *matéria* e da forma do universo. Eles chamavam um ponto de *um*, uma reta de *dois*, uma superfície de *três* e um sólido de *quatro*. O somatório de pontos gerava retas, o de retas, superfícies e o de superfícies, sólidos; com os seus *um*, *dois*, *três* e *quatro* eles poderiam construir o universo! (BARON, 1985, p. 17)

Assim, Baron (1985) afirma que os pitagóricos já conheciam os números figurados[5], como os números triangulares, quadrangulares, dentre outros, mas foi Nicômano de Gerasa (100 d. C.) que em sua obra intitulada *Introductio Arithmetica* apresentou a melhor e mais completa descrição dos números figurados. Um exemplo dessas descrições é que os números triangulares que são dados por:



cuja expressão algébrica que representa cada um desses números, é dada por:

$T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, pois, $T_1 = 1$,

$T_2 = 3 = 1 + T_1 + 2$,

$T_3 = 6 = 3 + 3 = T_2 + 3$,

$T_4 = 10 = 6 + 4 = T_3 + 4$,

$T_5 = 15 = 10 + 5 = T_4 + 5$

[5]Ou números poligonais.

Portanto, observando as parcelas anteriores, tem-se que $T_n = T_{n-1} + n$, isto é, que cada número triangular é a soma do anterior com seu número de ordem. Agora somando, membro a membro, a igualdade anterior tem-se:

$$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + \ldots + T_n = 1 + T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + \ldots + T_{n-1} + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n$$

e, simplificando os termos iguais em ambos os lados da igualdade, encontra-se a seguinte representação para os números triangulares: $T_n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n$. Essa fórmula expressa a soma dos *n* primeiros termos de uma progressão aritmética e é dada por $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$. De modo análogo, pode-se deduzir outras expressões para os números figurados.

Será utilizado o exemplo anterior para mostrar como se dá uma demonstração por indução finita.

Dem.

Consideremos P(n) a proposição $1+2+3+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Temos que P(1) é verdadeira, pois $1 = \dfrac{1(1+1)}{2}$. Vamos supor P(k) é verdadeira para qualquer k, com $k \leq 1$. Dessa forma, temos que:

$$1+2+3+\ldots+k = \frac{k(k+1)}{2} \Leftrightarrow 1+2+3+\ldots+k+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

$$\Leftrightarrow 1+2+3+\ldots+k+1 = 1+2+3+\ldots+\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

Logo a proposição P(k+1) é verdadeira para todo k, pelo princípio de indução finita.

Considerações Finais

O objetivo desse artigo foi descrever os métodos de indução finita e de indução empírica, destacando suas diferenças e aplicações. Isso se deve pela maneira equivocada que alguns estudantes utilizam, tratam e interpretam a demonstração por indução finita.

Não foi a intenção coibir o uso da indução empírica pelo matemático, mas alertar que seu uso não se constitui uma demonstração formal em problemas de contextos matemáticos.

Existem várias aplicações onde o matemático pode utilizar a indução empírica com objetivo de buscar padrões, como por exemplo, os números figurados e a torre de Hanói, porém para os padrões onde são tratados os números naturais ou os números inteiros o método de demonstração formal a ser empregado é o princípio de indução finita.

Outra consideração a destacar é que a simplificação da linguagem com a utilização somente da palavra indução para designar tanto a indução empírica quanto a indução finita acaba provocando algumas confusões levando os estudantes de cursos de matemática ao erro, conforme aponta Silva (2010).

Referências Bibliográficas

ABBAGNANO, N. *Dicionário de Filosofia*. 4ª ed. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

BARON, M. E. Curso de *História da Matemática*: origens e desenvolvimento do cálculo. Tradução: Jose Raimundo Braga Coelho, Rudolf Maier e Maria José M. M. Mendes. Brasília, Editora Universidade de Brasília, 1985, v. 1.

BICUDO, I. Peri Apodeixeos/DeDemonstratione. In BICUDO, M. A. V. & BORBA, M. C. *Educação Matemática*: pesquisa em movimento. 2ª Ed. Revisada, São Paulo: Corteza, 2005.

CAJORI, F. Origin of the Name "Mathematical Induction". *The American Mathematical Monthly*, v. 25, n.5 p.. 197–201, Mai. 1918.

CARVALHO, A. M. F. T. *A Extimidade da Demonstração*. 2004. Tese (Doutorado) – Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, São Paulo.

CHAUÍ, M. *Convite à Filosofia* . 12ª ed. São Paulo, Ática, 2000.

CUNHA, A. G. *Dicionário Etimológico Nova Fronteira da Língua Portuguesa*. 2ª ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.

DAVIS, P. J. & HERSH, R. *A Experiência Matemática*. Tradução: João Bosco Pitombeira. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1985.

ECO, U. *Sobre os Espelhos e Outros Ensaios*. Nova Fronteira: Rio de Janeiro, 1989.

FERREIRA, A. B. H. *Dicionário Aurélio Básico da Língua Portuguesa*. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1999.

FREGE, G. *Os Fundamentos da Aritmética*. Seleção e tradução de Luís Henrique dos Santos – 2ª ed. São Paulo: Abril Cultural, 1980. (Os Pensadores).

GERÔNIMO, J. G. & FRANCO, V. S. *Fundamentos de Matemática*. Maringá: Eduem, 2002.

GODINO, J. & RECIO, A. (1997). Meanings of proof in mathematics education. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol.2, pp.313-320). Lahti, Finland: University of Helsinki.

HOUAISS, A. & VILLAR, M. S. *Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa*. Rio de Janeiro: Objetiva, 2001.

KATZ, V. J. *A History of Mathematics*: an introduction. Reading: Addison-Wesley, 2004.

LIMA, E. L., CARVALHO, P. C. P., WAGNER, E. & MORGADO, A. C. *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. (Coleção Professore de Matemática).

LIMA, E. L. *Curso de Análise*. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1999. (Projeto Euclides).

MILIES, F. C. P. & COELHO, S. P. *Números*: uma introdução à matemática. Editora Universidade de São Paulo: São Paulo, 3ª Ed, 2006. (Acadêmica).

MONK, R. Bertrand Russel. *Matemática:* sonhos e pesadelos. Trad. Luiz Henrique de A. Dutra. São Paulo: Editora da UNESP, 2000. (Coleção Grandes Filósofos).

POLYA, G. *A Arte de Resolver Problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 1975.

POPER, K. R. *A Lógica da Pesquisa Científica*. São Paulo, Cultrix, 1996.

RUSSEL, B. *Introdução à Filosofia Matemática*. Trad. Giasone Rebuá. Editora da Universidade Federal do Rio de Janeiro: Rio de Janeiro, 3ª Ed, 1974.

SILVA, E. M. *Compreensão de Estudantes de um Curso de Matemática a Respeito do Conceito de Indução Finita*. 2010. Dissertação (Mestrado) – Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, Paraná.

SOMINSKI, I. S. *Método de indução matemática***.** São Paulo: Atual, 1996. (Coleção matemática: aprendendo e ensinando).

VACCA, G. Maurolycos, the First Discoverer of the Principle of Mathematical Induction. *Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 16, p. 70–73, 1909.

Submetido em setembro de 2010
Aprovado em novembro de 2010