# UM ESTUDO DE REGISTROS ESCRITOS EM MATEMÁTICA*

*Sibéle Cristina Perego***
*Regina Luzia Corio de Buriasco****

**Resumo:** Este trabalho apresenta o estudo da produção escrita de alunos da Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Londrina-UEL numa questão aberta (que não contém as alternativas de resposta) de uma prova de matemática. Verifica como esses alunos lidam com a questão no que diz respeito à escolha da estratégia para a resolução, a interpretação e uso das informações contidas no enunciado, aos erros cometidos, ao conteúdo matemático que utilizaram. Faz um levantamento das estratégias mais utilizadas e dos erros mais freqüentes. Para a coleta dos registros escritos dos vinte e quatro (24) alunos envolvidos na pesquisa utiliza uma prova escrita contendo seis questões abertas de Matemática e para auxilio da interpretação dos registros utiliza entrevistas. Aponta como pontos mais relevantes que: a) a maioria dos alunos utiliza-se de estratégias tipo escolar nas resoluções das questões; b) os alunos lidam bem com os algoritmos envolvidos nas estratégias escolhidas; c) os erros encontrados nos algoritmos estão relacionados à interpretação dos enunciados; d) é possível detectar muito das estratégias e do conteúdo matemático utilizado quando se analisa a produção escrita dos alunos e que isso pode ser implementado nas salas de aula.

**Palavras-chave:**
Educação Matemática; Avaliação da aprendizagem em Matemática;
Registros escritos; Resolução de problemas.

***Abstract:*** *The main intention of this work is to interpret the written/dissertative production given by students of a Math Teachers Preparation Course (University of Londrina – Parana – Brazil) when they're answering an open-question test (i.e. a test in which there are no pre-given set of possible answers to solvers indicate the correct one). In order to get this goal we've focused two major points: which strategies and resources were employed by twenty-four undergraduate students and how these students deal with such strategies when trying to interpret the given data to solve one problem. Our research allows us to understand that: (a) school-based solving strategies were employed by the most part of those twenty-four students (implying that they seem to uncritically repeat the classical approach – school-based form – teachers use in classrooms, trying no other ways to solve problems); (b) the development of algorithms seems to be well done by all of them (errors found in algorithmical treatment were related only to a lack of attention); (c) the main problem detected was students difficult in dealing with data interpretation; and (d) we can detect – and do some important remarks on – a lot of mathematical contents, approaches and strategies when analyzing students written/ dissertative registers (which allow us to perceive many possible teaching strategies can to effectively implement in real classrooms).*

***Keywords:***
*Mathematics Education; assessment process,*
*written registers, problem solving.*

---

* Este artigo é uma adaptação de parte da dissertação de mestrado de PEREGO (2005).

** Docente da Educação Básica na Rede Privada de Ensino – PR - sibelecris@netceu.com.br.

*** Docente do Programa do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina – reginaburiasco@terra.com.br.

## INTRODUÇÃO

Para este trabalho, apresentamos o estudo da produção escrita de alunos de Licenciatura em Matemática, contida em uma de seis questões abertas[1] com a intenção de verificar como esses alunos lidam com essa questão aberta de matemática básica e avançar no entendimento do que sabem quando resolvem esse tipo de questão e de que forma mostram o que sabem por meio de registros escritos. Discutimos também, qual pode ser o papel do erro e a função da avaliação escolar como parte dos processos de ensinar e aprender.

## DA AVALIAÇÃO ESCOLAR

A avaliação, tomada como capaz de ajudar o professor na regulação do processo de ensino com base em informações reais (acertos e erros), permite-lhe interferir na aprendizagem de seus alunos de maneira significativa, pois fornece subsídios para o planejamento das atividades em sala de aula. Segundo Buriasco,

> [...] Ao ter uma noção o mais precisa possível do que seus alunos sabem e são capazes de fazer, o professor pode, além de tomar decisões adequadas sobre sua prática escolar, contar com seus alunos como interlocutores na compreensão dos caminhos por eles percorridos na busca da resolução da situação. Isso contribui para melhorar a aprendizagem, na medida em que favorece a continuidade da aprendizagem e a progressiva autonomia do aluno (BURIASCO, 2002, p. 259).

Praticada como parte dos processos de ensinar e aprender, a avaliação, denominada formativa, trata de *"levantar informações úteis à regulação do processo ensino/aprendizagem"* (HADJI, 2001, p. 19), informando assim o professor sobre o andamento desses processos.

Para a recolha de informações, o professor pode e deve dispor de vários instrumentos para melhor desenvolver uma avaliação. Os diferentes instrumentos utilizados pelo professor, sejam eles provas escritas ou orais, trabalhos, observações em sala, entre outros, devem-lhe permitir conhecer o que sabem seus alunos, *"examinar as-*

---

[1] Questões abertas ou discursivas, de conteúdo matemático, enunciadas em um contexto de informação verbal, predominantemente linguística, nas quais não são apresentadas alternativas de resposta. Esta, quando encontrada, pode indicar os caminhos percorridos para se chegar a ela.

*pectos tais como conhecimentos e utilização dos conteúdos, estratégias utilizadas, hipóteses levantadas, recursos escolhidos pelos alunos"* (BURIASCO, 2002, p. 261). Por conseguinte, esses instrumentos devem permitir ao professor um 'diálogo' com a produção dos alunos de modo a obter o maior número possível de informações sobre o que os alunos mostram saber e o que mostram não dominar totalmente.

Dessa forma, torna-se importante a exploração tanto dos erros quanto dos acertos, pois a *"informação útil é aquela que permitirá compreender o percurso do aluno, e determinar a significação da resposta produzida, quer seja ela verdadeira ou falsa"* (HADJI, 1994, p. 123), já que, na avaliação, é relevante o conhecimento utilizado pelo aluno para resolver as questões propostas.

A avaliação assume, assim, outro papel: deixa de ser instrumento de exclusão, que possibilita a classificação dos alunos pela falta, pelas respostas incompletas ou resoluções não terminadas, e, passa a ser um instrumento de inclusão, que oportuniza a valorização do saber em construção dos alunos num processo de investigação e regulação da aprendizagem (PEREGO, 2005).

Como afirma Esteban (2002), *"a avaliação não deve ser reduzida a um instrumento de classificação e exclusão dos alunos e alunas, mas deve constituir-se como uma ferramenta para a tomada de decisões em todo o processo ensino/aprendizagem"* (p. 121).

Nessa perspectiva, torna-se fundamental ao professor o papel de investigador na recolha de informações que possam guiar sua ação em sala de aula, visto ser papel do professor *"o de gerenciar, de facilitar o processo de aprendizagem e, naturalmente, de interagir com o aluno na produção e crítica de novos conhecimentos..."* (D'AMBROSIO, 1998, p. 80).

O erro tomado como uma fonte de informações sobre a situação real da aprendizagem do aluno auxilia, professores e alunos, na decisão das estratégias a serem utilizadas na superação dessa etapa de 'ainda não saber' (ESTEBAN, 2002).

Como possível reguladora dos processos de ensinar e aprender, a avaliação deve fornecer, também, aos alunos, informações sobre sua aprendizagem. Informações que lhes sejam compreensíveis e úteis e não reduzidas à nota, freqüentemente atrelada a dois significados: sucesso (se for considerada por ele uma ‘boa nota’) ou fracasso (se for considerada uma ‘nota ruim’). Como afirma D’Ambrosio (1998), do *“ponto de vista dos efeitos da avaliação para o aluno, o mais importante é que ele tome consciência do seu progresso...”* (p. 77). Portanto, mais do que somente informar sobre o certo e o errado, a avaliação deve fornecer informações que permitam o diálogo a partir do fazer dos alunos, dando-lhes *“informações sobre aspectos da sua produção, dignas de confiança, importantes e significativas em relação à aprendizagem que se ajuda a desenvolver e às competências que se ajuda a construir”* (BURIASCO, 2000, p. 172).

Os apontamentos avaliativos que o professor faz são, segundo Lacueva (1997), o primeiro passo para a prática de uma ‘avaliação da ajuda’, que pode contribuir para que os alunos detectem seus pontos fortes e fracos e desta forma possam ser também reguladores do processo de aprendizagem.

## DOS PROCEDIMENTOS DA INVESTIGAÇÃO

Como o objeto de estudo dessa investigação foi a produção escrita de alunos, para a análise dos instrumentos optou-se pela orientação presente na análise de conteúdo, que consiste em um conjunto de técnicas que pretende analisar as formas de comunicação verbal e não verbal. Para Freitas e Janissek (2000) esse conjunto de técnicas pode ser considerado como um método de observação indireto, pois, das várias formas de comunicação, é apenas a expressão verbal ou escrita que será observada. Por conseguinte, este é um estudo de cunho interpretativo, uma vez que, para a realização de inferências, foi necessário descrever e compreender a produção escrita dos alunos, de modo que se pudesse conhecer, por meio da análise da sua produção escrita, o conhecimento matemático que mostraram possuir, bem como a maneira como este conhecimento foi mobilizado na resolução de problemas.

De todos os alunos das quatro séries do curso de Licenciatura em Matemática da UEL no ano de 2004, vinte e quatro (24) aceitaram o convite para resolver a prova de matemática . Utilizamos então, para a coleta de informações, essas provas escritas, entrevistas semi-estruturadas (conduzidas individualmente com o objetivo de obter explicações dos alunos cuja produção escrita que não pudemos entender), um *Questionário Sobre as Impressões Sobre a Prova*, que continha perguntas relativas ao nível de facilidade da prova, e, uma *Folha de Identificação*, contendo informações sobre os alunos.

O primeiro instrumento utilizado para a coleta de informações foi uma prova escrita, contendo todas as questões que compuseram as Provas de Questões Abertas de Matemática da Avaliação Estadual do Rendimento Escolar do Paraná – AVA/2002, da 4ª. e 8ª. séries do Ensino Fundamental e 3ª. série do Ensino Médio, na edição de 2002. Escolhemos trabalhar com essas questões, porque são questões já validadas quando da sua utilização para a AVA/2002; foram elaboradas com diferentes níveis de complexidade; são questões que podem gerar uma produção avaliável num teste escrito, com tempo limitado e que permitem observar as estratégias utilizadas pelos alunos (BURIASCO; CYRINO; SOARES, 2004, p.4-5).

A prova teve a duração máxima de duas horas, e além da prova, os alunos responderam um *Questionário Sobre as Impressões Sobre a Prova* e uma F*olha de Identificação.* Julgamos necessário entrevistar apenas três alunos (A1, A8, A9) e as entrevistas foram gravadas em áudio e transcritas tal como aconteceram.

## NOSSA LEITURA DAS INFORMAÇÕES

No nosso primeiro contato propriamente dito com as provas resolvidas, descrevemos os procedimentos utilizados pelos alunos em cada questão, tentando traduzir o que eles registraram em suas provas. Em seguida, tentamos agrupar as resoluções semelhantes.

Nesta fase foram muitas ‘idas e vindas’, das provas às leituras e vice-versa. Houve até momentos de ‘ida para lugar nenhum’, ou seja, momentos em que a distância do processo se fez necessária para que nossos olhos perdessem um certo vício de olhar as resoluções sempre do mesmo jeito.

Optamos por fazer primeiro uma análise ‘vertical’ das provas, ou seja, questão por questão de todos os alunos, para em seguida, analisar cada prova horizontalmente, ou seja, todas as questões de cada um dos alunos, de modo a não perder de vista o todo de cada prova. Dessa forma, ao analisar uma questão, procuramos também nas outras do mesmo aluno indícios da possível razão que o levou a responder algo ou mesmo cometer algum tipo de erro.

‘Dialogando’, assim, com os registros dos alunos, com as informações colhidas nas entrevistas e com nossas referências, fomos tecendo observações e considerações a respeito da produção escrita dos alunos participantes do estudo.

Na questão escolhida para este artigo, apresentamos, nesta seqüência:

• uma forma de resolução tipo escolar esperada para cada série avaliada na AVA/2002, mesmo sabendo que nem sempre o aluno resolverá utilizando ‘conteúdos próprios’ do seu nível de escolaridade. Chamamos tipo escolar a resolução usualmente utilizada pelo professor para resolver questões em sala de aula;

• a classificação da questão segundo o que entendemos da divisão que faz Butts (1997). Este autor divide os enunciados dos problemas matemáticos em cinco subconjuntos: a) exercício de reconhecimento aquele que, usualmente, pede ao resolvedor para reconhecer ou relembrar um fato, uma definição ou enunciado de um teorema; b) exercício algorítmico - aquele que pode ser resolvido com um procedimento passo-a-passo, freqüentemente um algoritmo; c) problema de aplicação - o que exige uma mudança da linguagem escrita com palavras para uma linguagem matemática de modo que se possa utilizar os algoritmos apropriados; d) problema de pesquisa aberta - aquele em cujo enunciado não há pistas da estratégia que pode ser utilizada para resolvê-los; e) situação-problema - na qual uma das etapas decisivas é identificar o(s) problema(s) inerente(s) à situação, cuja solução vai ajudar a ‘manejar’ a própria situação;

• o número de alunos que acertou a questão por completo, no item *acertos* e o número de alunos que errou parcial, totalmente ou que não resolveu e/ou não respondeu a questão no item *erros*;

• o número de alunos que utilizou um procedimento tipo escolar para resolver a questão;

• a leitura que fizemos a respeito das resoluções e das informações coletadas nas entrevistas com os olhos do referencial que estudamos.

Para finalizar apresentamos um quadro resumo das resoluções encontradas da questão.

## A QUESTÃO

Esta questão é parte integrante da Prova de Questões Abertas de Matemática da AVA/2002 para 3ª. série do Ensino Médio.

| |
|---|
| Pedro e Carla saem do cinema e resolvem pegar juntos um táxi para ficar mais barato, já que Carla mora no caminho da casa de Pedro. Carla mora à 8km do cinema e Pedro à 15km. Sabendo-se que o preço P (em reais) cobrado pelo táxi varia com a distância percorrida x (em quilômetros), de acordo com a função P(x) = 2x + 5, quanto cada um deve pagar de modo que seja vantajoso para ambos? |
| **Resolução tipo escolar:**<br><br>**Resolução 1:** O preço total a ser pago pela corrida é de $P(15) = 2 \cdot 15 + 5 = 35$.<br>Até a casa de Carla, ambos podem dividir a despesa da corrida, ou seja, cada um deve pagar por 4km. Como Pedro tem que percorrer mais 7km para chegar à sua casa, deve pagar por 11km. Assim o preço y que Carla deve pagar é de<br>$$\frac{35}{15} = \frac{y}{4} \to y \cong 9,33$$<br>- o preço *z* que Pedro deve pagar é de<br>$$\frac{35}{15} = \frac{z}{11} \to z \cong 25,66$$<br><br>**Resolução 2:** Outra possibilidade é dividir 5 por 2, pois como o valor é fixo e corresponde a bandeirada cobrada pelo taxista, ou seja, independe dos quilômetros rodados , cada um dos dois, Pedro e Carla pagaria a metade, ou seja, 2,50 cada um. Subtrair $15 - 8 = 7$, para calcular a distância que Pedro percorrerá sozinho de táxi. Substituir corretamente x por 8 e depois por 7 em $Q(x) = 2x$, obtendo $Q(8) = 16$ e $Q(7) = 14$ que são os valores correspondentes às distâncias de 8 e 7 quilômetros rodados pelo táxi. Dividir o valor dos 8 quilômetros por 2 ($16 : 2 = 8$), indicando que esse valor deve ser pago por Pedro e Carla, pois os dois farão juntos esse percurso. Finalmente, a soma: 8 + 2,50 = 10,50 representa o valor a ser pago por Carla e a soma: 14 + 8 + 2,50 = 24,50 indica o valor a ser pago por Pedro, no qual, o 14 representa o valor que Pedro pagará por percorrer sozinho 7 quilômetros. Responder que Carla deve pagar 10,50 e Pedro 24,50.<br><br>**Observação:** Se Pedro e Carla fossem sozinhos para casa, Pedro pagaria R$35,00 e Carla R$21,00. Qualquer resposta que garanta que Carla e Pedro paguem menos que esses valores e que a soma dos valores a serem pagos pelos dois não ultrapasse R$ 35,00 (que corresponde ao valor máximo cobrado pelo táxi para o percurso todo) é aceitável, desde que a resolução sustente as respostas encontradas. |

| Classificação do problema | Acertos | | Erros | | Uso de resolução tipo escolar | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | N | % | N | % | N | % |
| Problema de Aplicação | 17 | 70,8 | 7 | 29,2 | 23 | 95,8 |

## OBSERVAÇÕES SOBRE AS RESOLUÇÕES DOS ALUNOS

De acordo com o *Questionário Sobre as Impressões Sobre a Prova,* essa questão foi considerada a mais difícil por doze alunos, ou seja por 50% deles e considerada a mais fácil por um aluno o que representa 4% deles. As justificativas apresentadas pelos alunos que consideraram a questão difícil foram de que ela exigiu ‘muito raciocínio’, que foi difícil trabalhar com o raciocínio lógico e o fato de ter mais de uma possibilidade de resposta. Enquanto que o aluno que considerou essa a questão mais fácil justificou-se dizendo que a questão envolve “*uma função simples*”.

Vale a pena ressaltar que, independente da resposta ou da forma como foi conduzida a resolução, todos os alunos que responderam a questão iniciaram por calcular alguns valores da função $f(x) = 2x + 5$, como, por exemplo, para 7, 8 e 15 quilômetros. Independente da resposta porque alguns alunos escreveram respostas que de certa forma não foram geradas diretamente pelos cálculos desta função. Por exemplo, quando o aluno calcula $f(8) = 21$ e $f(15) = 35$ e responde que cada um deve pagar a metade, parece estar mais de acordo com uma ‘política da boa vizinhança’ do que com as operações que fez, pois nos seus cálculos não aparece a proposta de cada um pagar a metade.

Na questão em tela, as resoluções foram agrupadas em seis grupos, cujas estratégias comentaremos a seguir.

Dos vinte e quatro alunos que resolveram esta questão, cinco (5) resolveram e responderam corretamente utilizando a idéia da *resolução 2* descrita anteriormente. Destes cinco, dois calcularam a função $f(x) = 2x + 5$ para os valores 8 e 15. Dividiram 21 por 2, obtendo R$10,50 e diminuíram este valor de 35, respondendo que Carla deve pagar R$10,50 e Pedro R$24,50.

Um desses alunos mostrou apenas a operação: $35{,}00 - 10{,}50 = 24{,}50$ e respondeu como os anteriores. Outro apenas responde que Carla deve pagar R$10,50 e Pedro R$24,50.

O quinto aluno escreveu as funções:

$$C = x_1 + \frac{5}{2}$$

$$P = \left( x_1 + \frac{5}{2} \right) + 2x_2$$

Calculou a primeira para $x_1 = 8$ e a segunda para $x_1 = 8$ e $x_2 = 7$. Respondeu que Carla deve pagar R$10,50 e Pedro 24,50.

Outros cinco (5) alunos responderam que cada um deveria pagar a metade da distância total, ou seja R$17,50.

Dois (2) alunos calcularam o valor pago por quilômetro rodado dividindo 35 por 15. Percebemos que eles dividiram desta maneira o valor fixo de R$5,00, mas a idéia que utilizam é convincente. Um deles, $\mathbf{A}_7$, dividiu corretamente, obtendo 2,33. Em seguida, multiplicou esse valor por 8 e diminuiu o resultado de 35 corretamente. Respondeu que Pedro pagaria R$18,64 e Carla R$16,36.

O outro aluno, $\mathbf{A}_6$, dividiu incorretamente 35 por 15, obtendo 2,44. Efetuou ainda vários cálculos a fim de chegar ao valor que Pedro e Carla deveriam pagar. Obteve alguns valores como *R$ 26,84 e R$ 9,76* (Figura 1). Por fim ele 'arredondou' os valores ao dar a resposta e escreveu que Carla deve pagar *R$ 10,00 e Pedro R$ 25,00*. As duas respostas dadas por estes alunos são consideradas corretas por satisfazerem as duas condições impostas pelo problema, somam R$ 35,00 e é vantajoso para Pedro e Carla.

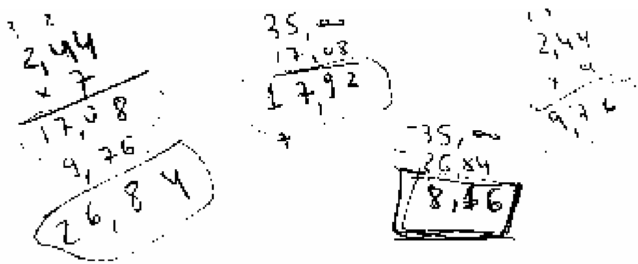

**Figura 1** - Resolução do aluno $\mathbf{A}_6$ na questão 6.

Seis (6) alunos procuraram estabelecer relações entre as informações do problema. Parece que eles tentaram encontrar a forma mais justa de dividir o valor da viagem sem que Pedro e Carla saíssem prejudicados. $\mathbf{A}_{14}$, por exemplo, escreveu: $\frac{23}{8} \times \frac{35}{x}$ e $\frac{23}{15} \times \frac{35}{x}$. Resolvendo essas multiplicações obteve R$ 12,20 para Carla e R$22,80 para Pedro. Acreditamos que o '23' é a soma de 15 com 8, porém o aluno parece não ter percebido que os 8 quilômetros já estavam sendo contados nos 15 e que esse valor sim custa R$35,00. O aluno tentou estabelecer uma relação entre o maior valor a ser pago, que seria de R$35,00 pelos 15 quilômetros até a casa de Pedro, e a maior distância a ser percorrida pelo táxi caso fosse levar um de cada vez pra casa. A resposta do aluno satisfaz as condições postas pelo problema, ou seja, o valor a ser pago por Carla e Pedro é vantajoso para ambos e a soma desses valores não ultrapassa R$ 35, 00, porém o uso do ‘23’ não está correto.

Outro aluno também utilizou o ‘23’. Escreveu que Carla deveria pagar $\frac{8}{23} \times 35 \cong R\$12{,}16$ e Pedro $\frac{15}{23} \times 35 \cong R\$22{,}84$. Resposta que também satisfaz as exigências do problema.

Outro aluno buscou na porcentagem a resposta. Resolvendo a equação $\frac{15}{8} \times \frac{100}{x}$ encontrou o valor de $x$ igual a 54%. Calculou o valor em reais correspondente a essa porcentagem. Com esse valor fez duas operações: 1) dividiu por dois $(18{,}90 : 2 = 9{,}45)$ e 2) diminuiu de 35 $(35 - 18{,}90 = 16{,}10)$. Respondeu que Carla vai pagar R$9,45 e Pedro R$ 25,55 $(16{,}10 + 9{,}45)$. Também neste caso as exigências do problema são satisfeitas e a resolução segue uma posição que convence.

Na sua resolução, $\mathbf{A}_2$ calculou quanto Pedro e Carla pagariam, se cada um fosse sozinho para casa, mas não conta a bandeirada. Chega em 16 e 30 reais. Propõe que Carla pague 8 reais (16:2) e Pedro 22 (30-16=14+8). Numa tabela vai anotando esses valores, como mostra a Figura 9.

O aluno fez um cálculo que parece ser a tentativa de dividir o valor da bandeirada proporcionalmente aos quilômetros percorridos por Pedro e Carla. Ele escreveu: $\frac{5}{x}\ \frac{15}{8}$. Dividiu incorretamente 40 por 15, obteve 2,333... Mais abaixo escreveu

$$x = \frac{8}{3}$$

$$x = \frac{4}{3} = 1{,}333$$

O que parece é que, ao resolver a regra de três, o aluno encontrou o valor referente aos 8 primeiros quilômetros percorridos, nos quais Pedro e Carla estavam juntos. Sabendo disso, o aluno dividiu entre os dois essa diferença. E neste momento ele acertou o valor que anteriormente havia errado. Colocou na tabela mais R$1,33 para cada um.

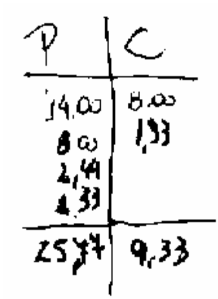


**Figura 2** - Anotações feitas pelo aluno $\mathbf{A}_2$ na resolução da questão 6.

Na seqüência, $\mathbf{A}_2$ calculou $1{,}33 + 1{,}33 = 2{,}66$. Sendo assim, falta ainda R$2,44 para completar os R$5,00 da bandeirada. E ele colocou na sua planilha esse valor para que Pedro pague. Respondeu de acordo com sua planilha que Pedro deve pagar R$25,77 e Carla R$9,33.

Dessa forma, o aluno tratou o valor fixo como se fosse dependente dos quilômetros percorridos. Mas é interessante perceber que ele não contou o valor duas vezes, como foi o caso de outros alunos, e a regra que criou de dividir por dois tudo que fosse referente aos 8 quilômetros até a casa de Carla foi respeitada até o fim dos cálculos.

A relação: $\begin{matrix} 15 \rightarrow 35 \\ 8 \;\; \rightarrow x \end{matrix}$ foi proposta por $\mathbf{A}_5$. Ele respondeu que Carla deveria pagar R$18,70 e Pedro o restante. Escreve ainda que se dividirmos R$35,00 por 2, R$17,50 para cada um já seria vantajoso.

O aluno $\mathbf{A}_3$ escreveu que Carla pagaria ***a*** reais e Pedro ***b*** reais, sendo $a + b = 35$ e $\frac{a}{b} = \frac{21}{35} = \frac{3}{5}$. E explicou: “Se dividirmos R$35,00 em 8 partes, o valor de ***a*** representa 3 partes e o valor de ***b*** representa 5 partes. Assim:

$$a = \frac{3}{8} \times 35 = 13{,}125$$

$$b = \frac{5}{8} \times 35 = 21{,}875 \quad "$$

Concluiu que Carla pagaria aproximadamente R$13,00 e Pedro pagaria aproximadamente R$22,00.

Esses seis alunos parecem ter buscado estabelecer relações que envolvessem alguma proporção. Todos eles chegam a respostas satisfatórias do ponto de vista das duas exigências postas pelo problema: o fato de ser vantajoso para ambos e a soma das quantidades a serem pagas pelos dois não ultrapassar R$35,00. Como nos interessa discutir o todo, vimos que nem sempre as relações estabelecidas obedeceram as informações postas pelo enunciado. Tão importante quanto chegar à resposta satisfatória é compreender o problema e seguir caminhos que estejam dentro das possibilidades abertas pelas informações dadas no enunciado.

Pudemos perceber nessas resoluções que os alunos têm idéia de proporção, porcentagem, regra de três e que reconhecem situações nas quais é possível fazer uso dessas ferramentas.

Os cinco (5) alunos restantes apresentaram resoluções e respostas que não vimos como agrupar.

Um deles, **A**$_{13}$, calculou corretamente $P(8)=21$ e $P(15)=35$. Sem mais nenhum registro de cálculo, respondeu que "Karla deve pagar 25 e Carlos 32". A nosso ver, esse aluno não entendeu a situação proposta e apenas retirou 3 reais do total que Pedro (e não Carlos como respondeu o aluno) pagaria sozinho e adicionou 4 ao valor de Carla (e não Karla como respondeu o aluno).

**A**$_8$ calculou *P(8) e P(7)* e respondeu que ambos deveriam pagar a metade R$ 20,00. Isso nos leva a pensar que o aluno somou: $P(8)+P(7)=21+19=40$. Neste caso, o aluno 'pagou' duas vezes a taxa fixa de 5 reais.

**A**$_{10}$ calculou $P(8)$ e $P(15)$ e escreveu que seria vantajoso para ambos se Pedro pagasse $\frac{2}{3}$ do valor total. Pensamos que o aluno escolheu uma maneira de resolver o problema sem muitas complicações, porque, de fato, essa divisão traz vantagem para Pedro e Carla.

**A**$_{15}$ calculou $P(23)=51$, $P(15)=35$ e $P(8)=21$. Somou 35 com 21 e escreveu que são 5 reais a mais. Estava comparando com o 51. Então sem mais nenhum registro respondeu que Pedro pagaria R$32,50 e Carla R$18,50. O aluno parece não ter entendido bem o propósito da situação, não entendeu que os dois pegando juntos o táxi andariam 15 quilômetros no total e não 23. Então propõe valores que sejam vantajosos para ambos, ou seja, para Pedro menor que 35 e para Carla menor que 21, mas que somam 52 reais, valor a ser pago por 23 quilômetros.

O aluno **A**$_1$ declarou em entrevista que pensou em calcular o *x* para ver quanto ele percorria, mas sabe que o que fez está errado. A Figura 3 mostra a resolução do aluno.

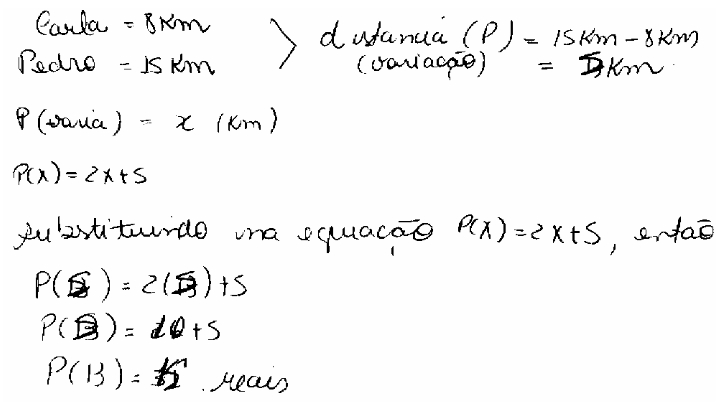
Carla = 8Km
Pedro = 15 Km
distancia (P) = 15Km − 8Km
(variação) = 7Km
P (varia) = x (Km)
P(x) = 2x+5
substituindo na equação P(x)=2x+5, então
P(7) = 2(7)+5
P(7) = 14+5
P(13) = 19 reais

**Figura 3** - Resolução do aluno **A**1 na questão 6.

Parece-nos claro pela resposta dada pelo aluno na entrevista, que ele não conseguiu entender o que o problema estava propondo. Reconheceu a função, mas não soube o que fazer com ela para solucionar o problema. Este mesmo aluno foi o que disse se sentir pressionado em situações de avaliação. Porém, não é nosso propósito aqui discutir isso.

**A**$_{18}$ também parece não ter entendido muito bem o problema, pois calculou a função para 8 e 15 quilômetros e respondeu que Carla pagaria R$21,00, valor de P(8) e Pedro pagaria R$35,00, valor de P(15).

Com exceção desses dois últimos alunos, que parecem não ter conseguido interpretar o enunciado, todos os alunos resolveram a situação preocupando-se em cumprir a exigência de que Pedro e Carla tivessem alguma vantagem em dividir o táxi. Alguns se preocuparam a ponto de querer dividir proporcionalmente até a bandeirada, o que não podemos considerar como errado, pois, apesar de a bandeirada ser um valor fixo, que não varia com o total de quilômetros percorridos, o aluno fez essa divisão tentando ser o mais justo possível com Pedro e Carla.

Por ter sido considerada a questão mais difícil, poderíamos ter esperado mais dificuldades por parte dos alunos com essa questão.

<table>
<tr><td rowspan="5">Escolhe um procedimento que resolve a questão (17)</td><td rowspan="3">Responde corretamente a questão (17)</td><td rowspan="2">Usa resolução tipo escolar</td><td>Corretamente</td><td>17</td></tr>
<tr><td>Incorretamente</td><td>0</td></tr>
<tr><td colspan="2">Não usa resolução tipo escolar</td><td>0</td></tr>
<tr><td colspan="4">Responde Incorretamente a questão (0)</td></tr>
<tr><td colspan="4">Não responde a questão (0)</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Escolhe um procedimento que não resolve a questão (6)</td><td rowspan="4">Responde incorretament e a questão (6)</td><td rowspan="2">Usa resolução tipo escolar</td><td>Corretamente</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Incorretamente</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Não usa resolução tipo escolar</td><td>Corretamente</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Incorretamente</td><td>0</td></tr>
<tr><td colspan="3">Não responde a questão (0)</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">Não apresenta registros do procedimento escolhido (1)</td><td rowspan="2">Responde a questão (1)</td><td colspan="2">Corretamente</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2">Incorretamente</td><td>0</td></tr>
<tr><td colspan="3">Não responde a questão (0)</td><td>0</td></tr>
</table>

**Quadro 1** - Resumo das resoluções da Questão

Pensamos que como havia mais de uma possibilidade, os alunos se sentiram inseguros quanto à resposta e optaram por dizer que era a mais difícil, porque, se errassem, o erro já estaria justificado.

## CONSIDERAÇÕES

Nosso estudo nos mostrou que as dificuldades mostradas pelos alunos nos registros escritos e nas entrevistas estão diretamente relacionadas com a interpretação dos enunciados. Muitos de nós professores temos trabalhado os enunciados por meio de palavras-chave em listas de ‘problemas’ de determinado conteúdo após sua explicação. Nesse caso os alunos não precisam interpretar, basta procurar a(s) palavra(s)-chave ou ‘jogar’ com os dados, porque a estratégia usada para resolver uma lista inteira de problemas, muitas vezes, é a mesma, o que acaba tornando os alunos dependentes de ‘macetes’ e ‘desabituados’ a pensar sobre cada problema particularmente.

Essa questão das palavras-chave é bastante séria, pois ao contrário do que esperamos, utilizar "macetes", entre eles encontrar a(s) palavra(s)-chave faz com que os alunos não consigam ter sucesso nas resoluções de situações cujo enunciado não contém essas mesmas palavras.

Tão importante quanto interpretar corretamente as situações a serem resolvidas é a utilização correta dos procedimentos. Após a escolha da estratégia adequada é importante que os alunos saibam desenvolver com segurança os procedimentos escolhidos. Isso, porém, não é uma dificuldade para os alunos pesquisados, pois mesmo quando a estratégia escolhida não foi adequada, os algoritmos envolvidos nas resoluções foram efetuados com sucesso. Essa constatação revela que no treinamento da resolução de algoritmos temos feito um bom trabalho em sala de aula, já que os poucos erros na aplicação dos algoritmos relacionam-se especialmente à falta de atenção, como no caso do aluno que, na sua resposta à Questão **6** escreveu Karla no lugar de Carla, e Carlos no lugar de Pedro.

Uma maneira de lidar com a dificuldade de interpretação dos enunciados pode começar com a investigação, junto aos alunos, das razões que os levaram a escolher determinada estratégia, pois essa escolha passa pela leitura/interpretação do enunciado e também pelo leque de conhecimentos matemáticos que o aluno dispõe naquele momento. Dessa forma, qualquer que seja a natureza do erro, o aluno sempre será a melhor fonte de informação do professor e pode ser acessada por meio de observações, diálogos, registros escritos.

Ainda sobre a escolha das estratégias, os alunos mostraram-se bastante decididos quanto à utilização das estratégias escolhidas, os procedimentos utilizados e as respostas dadas. Queremos dizer que não há registros, nas provas, de que algum aluno tenha utilizado uma estratégia e desistido dela para tentar resolver de outra forma, o mesmo aconteceu com os procedimentos e respostas. Observamos que os alunos parecem não ter o hábito de rever cálculos e questionar resultados e respostas encontradas, o que pode gerar uma falta de consciência de que podem estar fazendo uma interpretação incorreta dos enunciados.

A atitude de não questionar respostas parece revelar uma postura frente à Matemática de que esta é uma ciência exata e que por isso, o resultado do cálculo efetuado na resolução é a resposta correta da situação em estudo, sem necessidade de maiores verificações. O que nem sempre é verdade. No caso da Questão aqui estudada por exemplo, aplicar o algoritmo, ou seja, calcular a função $P(x) = 2x + 5$ para os valores dados em quilômetros não é suficiente para chegar a uma resposta para o problema.

Essa Questão pode ser resolvida até mesmo com uma dose de 'bom senso' como responderam alguns alunos ao afirmarem que Carla e Pedro deveriam pagar a metade, cada um do valor da viagem. Ou seja, primeiro deram uma resposta ao problema, e só depois, fizeram os cálculos para saber numericamente a solução. Essa atitude, de não rever os procedimentos e respostas encontradas, pode também estar ligada ao fato de que os professores não incentivam seus alunos a fazerem essa validação e também, ao fato de que os alunos acreditam que os algoritmos são infalíveis, o que pode provocar uma falsa segurança e até certo comodismo.

Questionamentos por parte dos colegas e do professor sobre a leitura e interpretação dos enunciados e sobre a resposta dada, colocando em dúvida o pensamento do aluno, fazem com que o aluno mesmo passe a questionar-se sobre suas decisões, leituras e interpretações de situações diversas, proporcionando maiores chances de sucesso na 'arte de resolver problemas'.

Esse tipo de 'diálogo' com os alunos vai propiciando que os erros tornem-se observáveis por eles e, com isso, contribui para sua superação. Por vezes o aluno sozinho não consegue chegar a sanar sua dificuldade e é preciso a intervenção do professor, por isso é importante que este esteja sempre atento ao processo de aprendizagem de seus alunos.

Dessa forma, o processo de validação da resolução, ou seja, a verificação dos resultados encontrados à luz do enunciado, o que muitas vezes passa por mais uma interpretação por parte do aluno é tão necessário quanto uma eficaz leitura e interpretação do enunciado, uma escolha de estratégias que resolvam o problema e, uma correta utilização dos procedimentos na sua resolução.

Convém ressaltar também a importância da interpretação, que o professor faz dos registros dos alunos nas provas escritas. Mais do que corrigir, o professor precisa tentar entender o que está 'por trás' desses registros: que conhecimentos matemáticos o aluno mostra saber, quais conhecimentos ainda não sabe; que ferramentas matemáticas ele utiliza para resolver situações em sala de aula; como lida com as informações contidas no problema, enfim, o professor precisa fazer uma verdadeira investigação dos registros que servem como base para conversas sobra a Matemática com os alunos.

Como afirma Santos (2000), citado em Garnica e Fernandes (2002), vivemos um momento de incertezas, complexidades e de caos, um momento em que há mais de uma forma de dominação e opressão. Sendo assim, existe também mais de uma forma de resistência e de agentes que as protagonizam.

Acreditamos que este trabalho, em certa medida, pode ser visto como uma espécie de resistência, uma vez que de certa forma se contrapõe ao discurso predominante ainda em nossas escolas, dando atenção especial à avaliação pela valorização daquilo que os alunos mostram saber por meio dos registros escritos, sem a preocupação em criar um 'novo' discurso que vá se tornar a 'verdade' vigente, mas com a intenção de contribuir para a prática docente.

## REFERÊNCIAS

BARDIN, Laurence. *Análise de Conteúdo*. Luís Antero Neto e Augusto Pinheiro (trad.) Portugal: Edições 70, 1977.

BURIASCO, Regina Luzia Corio de. *Algumas Considerações Sobre Avaliação Educacional. Estudos em Avaliação Educacional.* Fundação Carlos Chagas, n. 22, p. 155-177, jul-dez. 2000.

————. *Sobre Avaliação em Matemática: uma reflexão*. *Educação em Revista*, Belo Horizonte, n. 36, 255-264, dez. 2002.

BURIASCO, Regina Luzia Corio de; CYRINO, Márcia Cristina da Costa Trindade; SOARES, Maria Tereza Carneiro. *Manual Para Correção Das Provas Com Questões Abertas De Matemática AVA/2002.* Curitiba: SEED/CAADI, 2004. No Prelo.

BUTTS, Thomas. *Formulando Problemas Adequadamente*. In: KRULIK, S; REYS, R.E.A. *Resolução de Problemas na Matemática Escolar.* São Paulo: Atual, 1997. P. 33-48.

D'AMBROSIO, Ubiratan. *Educação Matemática*: Da teoria à prática. 4.ed. Campinas,S.P.: Papirus, 1998.

ESTEBAN, Maria Teresa. *O que sabe quem erra?* Reflexões sobre avaliação e fracasso escolar. 3.ed. Rio de Janeiro: DP&A, 2002.

FREITAS, H.; JANISSEK, R. *Análise Léxica e Análise de Conteúdo:* Técnicas complementares, seqüenciais e recorrentes para exploração de dados qualitativos. Porto Alegre: Sagra Luzatto, 2000.

GARNICA, Antonio Vicente Marafioti; FERNANDES, Dea Nunes. *Concepções de Professores Formadores de Professores: exposição e análise de seu sentido doutrinário. QUADRANTE*, APM:Lisboa, Portugal, v. 11, n. 2, pp. 75-98, 2002.

HADJI, Charles. *A Avaliação, Regras do Jogo:* Das Intenções aos Instrumentos. 4. ed. Portugal: Porto,1994.

______. *Avaliação desmistificada.* Patrícia C. Ramos (trad.). Porto Alegre: ARTMED, 2001.

LACUEVA, Aurora. *La evaluacioón em la escuela: una ayuda para seguir aprendiendo. Revista da Faculdade de Educação,* São Paulo, v.23, n1-2, Jan./Dez. 1997. Disponível em http://www.scielo.br. Capturado em 05/04/2002.

PEREGO, Sibéle Cristina. *Questões Abertas de Matemática:* um estudo de registros escritos. 2005. 104 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, PR.