

# ENTRE O OLHAR, O ESQUEMA E A INTERVENÇÃO PSICOPEDAGÓGICA NA PRODUÇÃO MATEMÁTICA DA CRIANÇA

*Cristiano Alberto Muniz<sup>1</sup>*

**Resumo:** Este artigo insere-se no campo de investigação da produção matemática de crianças e jovens escolarizados, objetivando descrever e analisar as convergências de três estudos que identificaram os esquemas subjacentes às produções matemáticas em diferentes níveis e contextos educativos. Foram analisados os protocolos de alunos de alfabetização, de 1ª a 4ª e de 6ª série. Os eixos de integração desses estudos foram a educação matemática em escolas públicas, a Teoria dos Campos Conceituais Vergnaud (1994) como ferramenta de análise e a sala de aula como espaço de pesquisa-ação. Os resultados apontaram algumas estruturas cognitivas, reveladas na ação do sujeito na resolução de situações-problema que tiveram como mediadores diferentes instrumentos: de grãos de milho ao software cabri-géomètre II. O conhecimento desses esquemas mostra-se de suma importância para a constituição de uma intervenção psicopedagógica que contribua efetivamente para a aprendizagem matemática dos alunos.

**Palavras-chave:** esquemas; intervenção psicopedagógica; educação matemática.

Between the eye, the schema and psychopedagogical intervention in children's mathematical production

**Abstract:** This article is an investigation of the mathematical production of children and young people at school, seeking to describe and analyse the points of convergence between three studies that identify the schemas underlying mathematical production at different levels and in different educational contexts. Records were analysed for students in

---

<sup>1</sup> Professor do Programa de Pós-Graduação em Educação da UnB.

pre-school, 1<sup>st</sup> to 4<sup>th</sup> grade and 6<sup>th</sup> grade. The axes of integration in these studies were mathematical education in public schools, Vergnaud's conceptual fields theory (1994) as an analytical tool and the classroom as the action and research space. The results suggest certain cognitive structures, revealed in the action of the subject in resolving problem situations with different mediating technologies, from grains of corn to the cabri-géomètre II software. Knowledge of these schemas is shown to be of great importance for the constitution of a psychopedagogical intervention that contributes effectively to the students' mathematical learning.

**Keywords:** schemas; psychopedagogical intervention; mathematical education.

## INTRODUÇÃO

**É** crescente a discussão sobre a complexidade em descrever e compreender a produção do conhecimento pelos alunos. Esse desafio tem levado pesquisadores a se organizarem de modo multidisciplinar, especialmente, nos campos da psicologia cognitiva, educação matemática e pedagogia, na busca de um instrumental teórico e metodológico que traga contribuições nesse entendimento fundamental na constituição da intervenção psicopedagógica.

Inserido nesse campo de pesquisa, o presente trabalho tem por objetivo descrever e analisar as convergências de três estudos que buscaram identificar e revelar os esquemas subjacentes às produções matemáticas de alunos em diferentes níveis e contextos educativos. Estes apresentam o processo de construção de conceitos matemáticos evidenciados em protocolos organizados de modo a mostrar tanto a riqueza quanto a complexidade das produções matemáticas de alunos.

No primeiro estudo analisaram-se situações ocorridas numa classe de alfabetização matemática<sup>2</sup> em que os sujeitos encontravam-se envolvidos com a idéia de número, a contagem e a operação de juntar. No segundo discutiram-se os protocolos identificados em classes de 1<sup>a</sup> e 4<sup>a</sup> série<sup>3</sup> em que as situações oportunizaram a construção de diferentes algoritmos na resolução das operações de multiplicação e divisão com números naturais e decimais. E, no terceiro observaram-se alu-

---

<sup>2</sup> Escola Pública Municipal do interior da Bahia – Classe de Alfabetização.

<sup>3</sup> Escola Pública Estadual do Distrito Federal – Séries Iniciais do Ensino Fundamental.

<sup>4</sup> Escola Pública Federal do Distrito Federal – Séries Finais do Ensino Fundamental.

nos de 6ª série num ambiente informatizado<sup>4</sup>, construindo projetos e utilizando como ferramenta o software cabri-géomètre II na construção de conceitos geométricos.

O que integra os três estudos aqui apresentados além de terem como objeto o desenvolvimento da educação matemática em escolas públicas é o fato desses pesquisadores apoiarem-se Teria dos Campos Conceituais (TCC) de Gerard Vergnaud como ferramenta de análise. Além disso, os três estudos têm a sala de aula como espaço de pesquisa com fortes traços do estudo etnográfico da práxis pedagógica. O favorecimento da produção de protocolos em situações-problema, a reflexão e a fala do aluno assim como a análise conjunta da pesquisadora com o aluno e professor constituem o eixo norteador desse trabalho. Assim, a relevância deste artigo está em identificar a contribuição da TCC no desenvolvimento de pesquisas inseridas na práxis pedagógica procurando desvelar as estruturas cognitivas presentes na atividade matemática das crianças, conhecimento de suma importância para a constituição da mediação pedagógica (Vigotski,2000).

### **ESTUDO 1: CONSTRUINDO CONCEITOS NO PROCESSO DE ALFABETIZAÇÃO MATEMÁTICA**

Esta seção apresentará resultados parciais de uma pesquisa realizada em uma classe de alfabetização, com o objetivo de compreender como ocorre o processo de construção de conceitos matemáticos e a mediação estruturada pela professora em torno desses conceitos e a possível evolução dessa mediação quando a professora tornou-se atuante no processo de pesquisa. Buscou-se neste estudo responder aos questionamentos: O que vem a ser um conceito matemático e como ele se forma? É possível o professor de alfabetização entender esse processo? Qual o papel da escola e do professor nesse processo? Para tanto, trabalhamos com uma turma em processo de alfabetização matemática, cientes de que este não se restringe ao saber ler e escrever a “língua dos números”, mas envolve compreensão, interpretação, construção e comunicação de hipóteses, nas formas oral e escrita e que, essas elaborações mentais são produzidas na

---

<sup>5</sup> Conceitos matemáticos, aqui entendidos como os que têm como referência objetos matemáticos, tais como números, operações, espaço, forma, tempo, medidas, proporção, probabilidades, entre outros.

vivência de situações que envolvem conceitos matemáticos<sup>5</sup>, especificamente, nos campos conceituais dos números naturais, estruturas aditivas e multiplicativas.

Com base no pressuposto de que a aprendizagem ocorre por meio da interação no contexto histórico-cultural, fora e dentro da escola, desenvolvemos esta pesquisa, tendo como principais instrumentos observação participante das aulas e entrevistas não-estruturadas com a professora e os alunos, gravadas em áudio e vídeo. A observação teve como objetivo acompanhar e registrar a ação da professora e das crianças em situação de mediação professor – aluno.

Durante as aulas, estivemos próximos às crianças e foi possível observar produções registradas e verbalizadas, o processo de construção de conceitos dessas crianças, o que foi essencial para a realização de uma análise microgenética do processo de conceitualização matemática.

Neste estudo, focaremos uma das muitas categorias definidas na pesquisa (Nascimento, 2002) “as *atividades* realizadas pelas crianças”. Serão analisados, dentre os muitos casos observados, apenas três, sendo que dois ilustram a construção das estruturas aditivas e um mostra a construção da seqüência numérica numa situação de contagem, que revelam a conceitualização matemática da criança e o papel da mediação.

### CASO 1: OPERANDO COM AS BARRINHAS CUISINAIRE<sup>6</sup>:

Em um dos momentos da pesquisa, observamos o trabalho de uma criança com as barrinhas de Cuisinaire. Even (06 anos) realizou algumas operações utilizando este material como recurso. A figura mostra o registro de cada operação onde em alguns casos (1°, 4°, 6°) ele registrou somente os resultados.

25	15+4=	6	3+2=5	5+4=9	14+
(6°)	(5°)	(1°)	(2°)	(3°)	(4°)

Figura 1: Registro da operação com as barrinhas.

<sup>6</sup>Material criado pelo professor belga Georges Hottelet Cuisenaire composto de barrinhas de madeira, em forma de prisma, com altura que varia de 1 a 10 cm, com valores entre 1 a 10 de acordo com as cores.

O registro escrito foi feito porque assim o solicitamos. As operações aparecem na figura na ordem em que ele registrou após ter realizado as contas mentalmente. O aluno olhava e arrumava as barrinhas, não utilizou os dedos ou qualquer outro material manipulativo, tendo que lembrar do valor associado a cada cor.

**1ª operação:** 01 amarela + 01 branca =  $5 + 1 = 6$  (escreveu apenas 6)  
**2ª operação:** 01 verde + 02 brancas =  $3 + 2 = 5$ . (retirou as barrinhas verde e branca e substituiu por 01 amarela), registrou  $3 + 2 = 5$ .  
**3ª operação:** 01 amarela + 01 roxa =  $5 + 4 = 9$  (conforme registro). Após essa “continha” pedi que fizesse uma “conta maior”.  
**4ª operação:** 01 amarela + 01 amarela + 01 roxa =  $5 + (5 + 4) = 14$ . Acrescentou uma amarela a continha feita anteriormente e registrou apenas o resultado. Novamente solicitei que ele fizesse uma “conta maior”. (observe que maior foi significado pela criança como sendo uma parcela maior).  
**5ª operação:** 01 amarela + 01 amarela + 01 amarela + 01 roxa =  $5 + (5 + 5 + 4) = 19$ . Acrescentou outra amarela e registrou  $15 + 4$  (porque não  $14 + 5$ ?).  
**6ª operação:** 01 amarela + 01 amarela + 01 amarela + 01 amarela + 01 amarela =  $5 + 5 + (5 + 5 + 5) = 25$ . Ele retirou a barrinha roxa (valor 04) e colocou mais duas amarelas.

**Figura 2:** Registro da ação da criança.

O que pode ter ocorrido com essa criança na construção desses esquemas? A atividade exigia a atribuição dos valores associados a cada cor e, ainda a realização de operações de juntar quantidades, o que implicava em olhar para a barrinha amarela e pensar: “tenho 5” colocando uma roxa “tenho mais 4”, então tenho  $5 + 4 = 9$ . Ao pedir a ele que realizasse uma conta maior, Even poderia ter somado 2, 3, 4, ou 6, 7, 8, 9, porque optou pela amarela? Será que ele pensava que contar de 5 em 5 é mais fácil? Ou seria essa uma operação mais familiar? Qual a origem desta capacidade cognitiva?

Esse procedimento é revelador da capacidade de a criança lidar com as representações simbólicas, em que a “barra” mais do que ser “uma peça” representa certa quantidade numérica socialmente atribuída. Essa habilidade é, na nossa concepção, fundamental no processo de conceitualização que ocorre durante o desenvolvimento da alfabetização matemática.

É necessário ressaltar que essa criança passava o dia andando pela rua, convivendo com várias pessoas e comprava laranjinhas (geladinho/picolé) e operava bem com dinheiro. Essas ações cotidianas podem ter contribuído para a construção de esquemas mobilizados sempre que ele era solicitado a realizar operações, como ocorreu nesse

caso e no caso 2, observado durante uma seqüência de atividades com o Jogo de Pega Varetas<sup>7</sup>.

### CASO 2: OPERANDO COM O PEGA-VARETAS

Depois de alguns dias trabalhando com o jogo, as crianças realizaram várias operações, ampliando a aprendizagem das estruturas aditivas e ao mesmo tempo evoluindo na contagem, aprendendo o nome de novos números na seqüência de 1 a 100, à medida que conseguiam pegar maior quantidade de varetas e operando com seus valores/cores. Colocamos à disposição das crianças um jogo para cada 4 alunos e eles criavam e recriavam as regras, na intenção de avançar cada vez mais nos pontos obtidos por meio das adições dos valores. Isso era permitido porque o nosso objetivo era que eles conseguissem contar além do vinte, do trinta, do quarenta, enfim, aprendessem na relação social no jogo os nomes dos números e o lugar de cada um na seqüência numérica, além de associar o nome do número ao objeto contado. A contagem dos pontos de acordo com as varetas obtidas a cada jogada exigia um cálculo proporcional, por exemplo, uma vareta vermelha = 2 pontos, duas varetas vermelhas = 2 vezes o dois = 4 pontos. Na tabela utilizada no jogo, o registro ficaria assim:

Cores	Quantidade de Varetas	Valores	Pontos
Vermelho		2 + 2	4

Figura 3: Registro dos pontos no jogo pega-varetas.

Aprender a ler a tabela e a registrar os pontos obtidos no jogo exigiu muito dos pequenos que se encontravam em processo de alfabetização, pois muitos deles não conseguiam perceber como uma vareta podia valer dois pontos e outra cinco, sendo diferentes somente na cor. Mas o desafio foi motivador e desencadeador de muitas novas aprendizagens.

Em um dos momentos do trabalho disponibilizamos para a turma uma tabela pronta simulando uma possibilidade de resultado no jogo. A turma deveria calcular o total de pontos obtidos somando os valores

---

<sup>7</sup> Fizemos uma adaptação de valores do jogo original de Pega-Varetas para trabalhar com as adições de 2,3,4,5 e 6. verdes-3 pontos; azul-4 pontos; vermelho-2 pontos; amarelo-5 pontos; preto-6 pontos;

que apareciam na coluna dos pontos. O que por sua vez, requeria uma capacidade de leitura e interpretação dessa forma de representação matemática (dados em uma tabela).

Cores	Quantidade de varetas	Valores	Pontos
Vermelho		2+2+2+2+2	12
Verde		3+3+3	9
Azul		4+4+4	12
Amarelo		5+5	25
Preto		6	12

Figura 4: Registro dos pontos no jogo pega-varetas.

Uma das crianças, para nossa surpresa, em um pequeno espaço de tempo resolveu mentalmente as operações e disse o total de pontos explicando dessa forma o que fez:

"Tia eu contei assim:  
 10 e 20 = 30;  
 30 e 10 = 40;  
 40 e 10 = 50 (concluiu as dezenas).  
 E 50 com 2 = 52,  
 52 + 9 = 61  
 61, 62, 63 (61+2=63)  
 63+5=64, 65, 66, 67, 68,  
 68 + 2 = 70.  
 É setenta tia!"

Figura 5: Registro da fala da criança.

Observa-se que o esquema apresentado por essa criança buscava um caminho facilitador dos cálculos, ou seja, operar com dezenas exatas e, somente depois de obter os resultados das dezenas contar um a um as unidades. Tal esquema nos revela habilidades tanto da contagem de dez em dez quanto da realização da sobrecontagem (Nunes, 1997). Devemos destacar nessa produção as operações  $50 + 2 = 52$  e  $52 + 9 = 61$  feitas mentalmente. Ele usou os dedos apenas quando disse 61, 62, 63, batendo o dedo sobre o quadro de giz ao dizer 63 mais 5 é igual a 64, 65, 66, 67, 68. Observa-se aqui uma prova cabal da existência da sobrecontagem no seu repertório cognitivo.

O caminho seguido pela criança é diferente do normalmente proposto pela escola, que ensina a operação iniciando pela casa das unidades. Essa forma de operar implica conhecer a composição do número (dezena + unidade), decompor este número ( $25 = 20 + 5$ ) operar apenas com as dezenas iniciando de baixo para cima e da esquerda para direita. Depois de obter o resultado das dezenas juntar as unidades, algumas vezes colocando uma a uma. Por tudo isso, ressalta-se que, em situação de jogo, podemos ter a oportunidade de analisar os complexos e criativos esquemas mentais que sustentam os procedimentos cognitivos da criança. Esquemas estes que deveriam ser do conhecimento de todo professor e ponto de partida de uma mediação mais eficaz.

### CASO 3: CONTANDO COM O AUXÍLIO DE GRÃOS DE MILHO

Tendo como objetivo explorar as muitas possibilidades de proposição de problemas no jogo de pega-varetas, continuamos o trabalho, mas houve necessidade de disponibilizar um recurso intermediário para as crianças que não conseguiam olhar para uma vareta e atribuir o valor que estava associado àquela cor. Esse pequeno grupo de crianças apesar de pertencer a mesma turma encontrava-se em um nível de desenvolvimento conceitual bem diferente da criança do caso 2. Assim, optamos em colocar sobre a mesa além do jogo de pega-varetas, papel de registro, tabelas em branco, lápis de cor, um conjunto de fichas com números e uma porção de grãos de milho.

As crianças utilizavam os grãos para intermediar a contagem de pontos. Por exemplo: A vareta verde correspondia a 3 pontos – estes seriam representados por três grãos. Assim, se eles tirassem 4 varetas verdes deveriam arrumá-las, colocando a quantidade de grãos correspondente ao número de pontos de cada vareta. Esse recurso buscou contribuir na construção das relações necessárias à compreensão da correspondência 3 para 1.

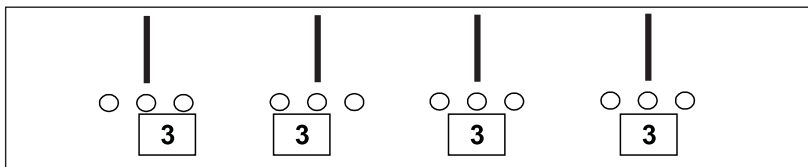


Figura 6: Registro da ação da criança.



Disponibilizar os grãos contribuiu para melhor visualização da relação entre as varetas e o seu respectivo valor, possibilitando a construção de imagens que foram dando suporte aos novos esquemas mentais ainda não presentes no repertório cognitivo desse grupo, mas que estavam sendo construídos em função do tipo de mediação pedagógica realizada no contexto do jogo. A seguir, apresentamos duas seqüências que ilustram esse fato:

“No grupo víamos o Rob (10 anos), a Daí (08 anos), a Sam (07 anos), o Wand1 (07 anos). Inicialmente eles jogavam e pegavam as suas varetas, anotavam na tabela. Quando todos registravam, iniciava-se a contagem oral de pontos. Os grãos estavam disponíveis em um pratinho sobre a mesa e os algarismos com os valores de cada vareta também. Eles olhavam na tabela, começando pela vareta vermelha: dispunham as varetas sobre a mesa, colocavam a quantidade de grãos correspondente a cada vareta (colocando dois grãos para cada vareta vermelha), contavam o total....1, 2 (1ª vareta), 3, 4 (2ª vareta), 5, 6 (3ª vareta) e assim sucessivamente (...). Na contagem das varetas verdes vimos que o Rob contou e o resultado foi 15, a Sam contou e deu 15, mas quando a Daí contou o resultado foi 12. Perguntamos o que poderia ter acontecido. Eles disseram: “- Ela saltou algum”. Então teria uma nova chance. Eles diziam que ela deveria colocar o dedo sobre o grão, um de cada vez.”

**Figura 7:** Extrato da transcrição da fita de vídeo.

Observa-se que a contagem era realizada diferentemente do caso 2, quando a criança tinha uma representação mental do valor de cada vareta, pois, nesse contexto a contagem se apoiava na quantidade de grãos que correspondia, por sua vez, ao valor de cada vareta colorida. Em outra seqüência, eles estavam fazendo a contagem das varetas azuis. Primeiro olharam o registro na tabela, colocaram as varetas azuis da *Sam* sobre a mesa (oito varetas). Cada vareta azul tinha valor 4. Vimos:

“A contagem feita por Daí de 1 a 24 não apresentou problemas, quando chegou no 24 ela disse: 24, 31, 32, 33..... Pedimos que tentasse novamente. Ela começou: 24, 41, 42...Wand1 interferiu dizendo que estava errado. Olhou para mim e disse: “Tia ela saiu do 24 e foi para o 41, 42, 49...? Sugerimos que eles voltassem: “Ela estava no 24, então ajudem-na. Recomece bem devagar.” Ela recomeça colocando o dedo sobre o grão que correspondia ao 24 e disse 23.

Wand1 disse impaciente: “É 24 menina!!” Enfim eles decidem contar juntos e chegam até o 29. Mas ainda faltaram três grãos. Sugerí que arrumássemos novamente colocando os grãos próximos as varetas, formando grupos de 4. Eles recomeçaram. Novamente Daí diz a seqüência correta até o 25, então “pula” para o 29. Wand1 diz interrompendo: Você pulou para o 29, agora é o 26!! Eles continuaram contando juntos e chegam até o 32. Essa seqüência repetiu-se com outros alunos.”

**Figura 8:** Extrato da transcrição da fita de vídeo.

Em síntese, as situações do jogo de pega-varetas envolveram crianças em processo de aprendizagem da contagem que, é uma operação complexa. (Nunes, 1997). Ao contar para descobrir o total de pontos em uma jogada eles faziam a correspondência do número de grãos de acordo com a cor da vareta, contavam o total de grãos em cada cor, juntavam todos para totalizar os pontos em uma jogada e, ainda, comparavam as diferentes quantidades obtidas pelos colegas do grupo para saber quem obteve o maior número de pontos.

Considerando os estudos de Vergnaud (1994), sobre o desenvolvimento de um conceito, procuramos em todos as situações observar o *sujeito em ação*. O jogo de pega-varetas exigiu, entre outras, a ação de contar e possibilitou ao aluno o aprendizado e o desenvolvimento das habilidades enunciadas por Nunes (1997) de lembrar os nomes dos números ao contar cada objeto em um conjunto, uma vez e apenas uma vez; entender que o número de objetos no conjunto é representado pelo último número que produzem quando contam o conjunto. Esse jogo, fruto da mediação proposta pela pesquisa, mais que oferecer “uma situação” favoreceu a vivência da “classe de situações” nos campos conceituais das estruturas aditivas e multiplicativas reveladoras de esquemas invariantes operacionais, tão importantes na compreensão dos procedimentos da aprendizagem matemática pela criança. Continuando a busca de identificar e revelar esses esquemas, na próxima seção serão analisados os protocolos de alunos de 1<sup>a</sup> a 4<sup>a</sup> série em resolução de operações.

## **ESTUDO 2: OS SABERES MATEMÁTICOS DOS ALUNOS: BASE PARA A MEDIAÇÃO PEDAGÓGICA**

Nesta seção, relataremos alguns resultados parciais de uma pesquisa realizada, nesses últimos dois anos, numa escola pública in-

clusiva do Distrito Federal, focando a compreensão da produção matemática de crianças consideradas, aprioristicamente, como sujeitos em situação de dificuldade de aprendizagem, buscando refletir sobre algumas análises mais recentes obtidas num projeto de ensino-pesquisa-extensão da Faculdade de Educação da Universidade de Brasília, intitulado “(Re)Educação Matemática: uma investigação sobre a produção matemática na escola e as mediações pedagógicas”.

A questão central que nos conduziu neste projeto de pesquisa-ação foi compreender em que sentido e medida os saberes matemáticos dos alunos estão servindo de base para a mediação pedagógica na aprendizagem. Isso implicou a presença da pesquisa no contexto da práxis pedagógica, não para identificar problemas e apontar soluções a serem produzidas no seio da academia, mas para que, conjuntamente, crianças-professores-pesquisadores pudessem criar na escola, lócus de discussão de ordem epistemológica centrado nas análises do fazer matemática em sala de aula, identificando e refletindo sobre as dificuldades de compreensão deste fenômeno social.

Participam dessa investigação, além do pesquisador-coordenador, doze professores de uma escola pública de séries iniciais do DF, todos com formação em ensino superior, quinze alunos graduandos em pedagogia, dois Bolsistas de Iniciação científica (PIBIC-CNPq) e duas mestrandas em Educação, constituindo uma comunidade de investigação, tanto ampla quanto complexa, articulando práxis pedagógica, identificação e resolução de situações-problema, formação inicial e continuada, desenvolvimento profissional, desenvolvimento de pesquisa participante e resignificação curricular da educação matemática. Essa complexidade requer a concepção de procedimento de pesquisa igualmente ampla e complexa, que permita tanto a inter-relação entre crianças-professores-graduandos-pesquisadores-família.

Os instrumentos principais de investigação no contexto da etnografia da sala de aula foram: observação participante das atividades em sala de aula, no laboratório de aprendizagem<sup>8</sup>, oficinas e reuniões da equipe pedagógica, relatos dos grupos de discussão (com fortes características do grupo focal), diários de campo (produzidos pelos alunos da

---

<sup>8</sup> Laboratório de Aprendizagem um espaço de encontro privilegiado entre grupo de crianças em situação de dificuldade, professor e pesquisador, em que são propostas novas formas de mediação no processo de aprendizagem matemática.

graduação e do mestrado, sendo que as produções dos graduandos são analisadas e reelaboradas conjuntamente com os professores), e, em especial, a análise de protocolos produzidos pelas crianças.

Nessa seção, será foco de nossas discussões a análise microgenética (CELLÉRIER, 1992) dos protocolos<sup>9</sup> das crianças, identificadas e anotadas pelo próprio professor, pelos graduandos ou pesquisadores de iniciação científica ou mestrandos, em sala de aula ou em laboratório de aprendizagem.

### CASO CAROL<sup>10</sup>: CRIANDO NOVOS ESQUEMAS PARAMULTIPLICAR

A professora estava muito satisfeita com os resultados de Carol em suas operações de multiplicação com dois dígitos no multiplicador (objeto de aprendizagem da 4<sup>a</sup> série). Apesar de suas “dificuldade em outros conteúdos matemáticos” ela sempre dá a resposta certa nessas operações. Entretanto, uma graduanda observou que essa criança apresenta um procedimento para a realização dessa operação que a professora não percebeu, uma vez que estando o resultado correto, o procedimento para obtê-lo fica em segundo plano de importância no processo pedagógico:

$  \begin{array}{r}  907 \\  \times 27 \\  \hline  189 \\  00 \\  \hline  243 \\  \hline  24489  \end{array}  $	<p>Esquema:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>7 \times 7 = 49</math>, onde o 4 é uma dezena</li> <li>• <math>7 \times 2 = 14</math>, somado com os 4 = 18, assim, primeiro produto parcial = 189</li> <li>• <math>0 \times 7 = 0</math> e <math>0 \times 2 = 0</math>, segundo produto parcial 00, posicionando de forma a indicar que estamos a multiplicar dezenas.</li> <li>• <math>9 \times 7 = 63</math>, onde o 3 é centenas e o 6 é unidade de milhar.</li> <li>• <math>9 \times 2 = 18</math> unidades de milhar, que somado com os 6 resulta em 24 unidades de milhar.</li> </ul>
<p>(4<sup>a</sup> série - menina, 10 anos 2005)</p>	

**Figura 9:** Protocolo produzido pela criança.

<sup>9</sup> Considera-se protocolo toda e qualquer produção matemática escrita pela criança e/ou adolescente, tais como: desenho, esquema, algoritmos, procedimentos, entre outros, que utilizem de figuras, palavras, números que para análise podem servir como reveladores da produção cognitiva do sujeito em uma dada situação.

<sup>10</sup> Nomes fictícios para preservar a identidade dos sujeitos participantes da pesquisa. Arquivo da produção – refere-se aos arquivos produzidos pelas duplas durante as inúmeras tentativas de desenvolvimento dos projetos. Estes foram salvos em disquete e separados por encontros. Depois de cada encontro, a professora-pesquisadora analisava os arquivos e extraía deles todos os passos (todos os comandos efetivados dentro do software) compondo os protocolos das duplas.

A produção de Carol nos permite identificar o esquema presente na sua produção, como um procedimento que pode ser surpresa tanto para o pesquisador quanto para o professor e para a família, ainda mais quando se trata de uma criança considerada socialmente como em situação de dificuldade de aprendizagem.

A análise do procedimento de Carol nos revela que ela: (1) Transpõe esquemas construídos em situações prévias (Vergnaud, 1994) para uma nova situação. Entretanto esse esquema produzido e apresentado não corresponde à forma da escola conceber o algoritmo da multiplicação; (2) Opera no mesmo sentido das operações aditivas, de cima para baixo (contrário ao que é ensinado na escola); (3) Opera no sentido valorizado pela escola, das unidades para as centenas, fazendo unidade vezes unidade, unidade vezes dezenas, depois fazendo o mesmo com a multiplicação das dezenas, e então, multiplicando as centenas; (4) Revela preocupação com o posicionamento espacial dos valores de cada número obtido, por exemplo, ao realizar  $9 \times 7$ , o 3 do 63 obtido é centena assim como o 6 é unidade de milhar; (5) Opera dígito por dígito, levando em conta o valor de cada um na composição aditiva na estrutura decimal do número; (6) Possui um algoritmo validado produzindo de forma eficaz o produto esperado.

Alguns desses pontos de análise indicam o quanto os conceitos matemáticos de Carol, em especial, os relacionados à estrutura dos números no sistema decimal e a idéia que a operação suscita geram a produção de determinado esquema mental. Nesse primeiro caso, este esquema nos revela uma forte indissociabilidade entre conceito e procedimentos/esquemas (Vergnaud, 1994), permitindo a produção de esquemas operatórios não esperados pela escola, mas que aponta para a alta capacidade de produção da criança que é considerada, aprioristicamente, como sujeito em dificuldade para produção matemática.

Nesse contexto, questionamos: até que ponto tal dificuldade não está associada à incapacidade de compreender produções matemáticas diferentes daquelas ortodoxas, tão veiculadas nas formações dos professores e nos livros didáticos? Os conhecimentos prévios dos professores acabariam por constituir obstáculos epistemológicos e profissionais (Bachelard, 1996), não permitindo aceitar as produções das crianças como estruturas matemáticas válidas? Por que justamente os alunos considerados em “situação de dificuldade” matemática, muitas

das vezes, são justamente os que apresentam esquemas mais “inusitados” na perspectiva do educador?

Tal análise impõe-nos um paradoxo importante a se discutir tanto no espaço da pesquisa em educação quanto no espaço escolar: a produção que inicialmente indica uma “dificuldade na aprendizagem matemática” na ótica da escola é na ótica da investigação calcada na TCC de Vergnaud a revelação de todo um potencial para pensar e produzir a matemática. Isso nos conduz a um necessário embate epistemológico e metodológico (por não dizer didático) dos significados e sentidos da produção matemática, uma vez que tais produções chocam-se, por vezes, com a percepção sobre a matemática dos professores dessas crianças.

A revelação dessas potencialidades matemáticas servem, no contexto da pesquisa-ação, para o estabelecimento de novos paradigmas na formação inicial e continuada dos professores. A identificação dos esquemas mentais presentes nas produções, articulando teoremas em ato e conceitos em ato (Vergnaud, 1994) possibilita-nos melhor compreender os potenciais e as reais dificuldades tanto das crianças quanto dos professores no processo mediacional. A questão de comunicação dos procedimentos e esquemas será objeto de discussão no caso apresentado a seguir:

### CASO CELSO E JOÃO: CONSTRUINDO NOVOS ESQUEMAS PARA DIVIDIR

Nesse caso, dois alunos de segunda série construíram procedimentos próprios e semelhantes numa situação de dividir R\$ 545,00 em 5 prestações, saber o valor de cada prestação:

Celso		João	
$\begin{array}{r} 545 \\ \div 5 \\ \hline 19 \end{array}$	5 dividido por 5 = 1 4 não dá para dividir por 5 4 junto com 5 fica 45 45 dividido por 5 = 9 Resultado 19	$\begin{array}{r} 545 \\ \div 5 \\ \hline 100 + 9 = 109 \end{array}$	500 dividido por 5 = 100 4 não dá para dividir por 5 4 junto com 5 fica 45 45 dividido por 5 = 9 Resultado 100 +9

**Figura 10:** Protocolo de meninos da 2ª série, de 9 anos

O interessante nesses casos é que a essência dos esquemas produzidos por Celso e por João é absolutamente a mesma, mas produzem resultados diferenciados.

Em ambos os casos, nossa análise nos revela que eles: (1) Reproduzem espacialmente o algoritmo das estruturas aditivas (adição e subtração) previamente trabalhadas na escola, impondo unidade abaixo de unidade, dezena abaixo de dezena e assim sucessivamente, até a posição do sinal da operação é a mesma; (2) Iniciam a operação pela esquerda, o que pode ser interpretado como uma ruptura com procedimento imposto pela escola que requer a realização no sentido direita-esquerda nas operações aditivas e na multiplicação; (3) O sentido da operação parece ter a ver com o sentido do cálculo mental, pois este é normalmente efetivado a partir das quantidades de maior ordem.

A diferença de resultado e efetividade entre os esquemas acima diz respeito ao conceito de número na estrutura decimal, no qual Celso visualiza o 5 de forma absoluta ( $5 \div 5 = 1$ ), enquanto João já vê 5 como 500 ( $500 \div 5 = 100$ ). Isso nos indica que a mediação a ser realizada não é no sentido de negar o valor do esquema produzido por Celso e sim de considerar a forte influência da concepção da estrutura do número na produção do esquema. Observa-se que o problema situa-se na visualização daquilo que se está dividindo, da composição numérica 545, não como  $5+45$ , mas como  $500+40+5$ . Se, assim como João, Celso tiver uma visualização adequada para a quantidade a ser dividida, o algoritmo mostrar-se-á igualmente adequado.

Isto reforça a idéia de que a mediação nesse caso, não é no sentido de negar o esquema de resolução apresentado por Celso, mas a partir dele, fazer uma reflexão conjunta sobre a natureza do erro, o que nos levará de forma necessária a uma reflexão sobre o conceito do número no sistema de numeração decimal. Essa reflexão deve propiciar um avanço do esquema de Celso, uma vez que o sujeito revê os conceitos em ato que geram sua produção matemática.

O esquema operatório identificado não pode ser negado, alegando que a “resposta” não está matematicamente correta. A dificuldade na visualização da composição decimal do número não pode servir de justificativa de uma intervenção psicopedagógica para alteração do esquema espontâneo do sujeito nesse caso. Ao observar que o esquema é vertiginosamente diferente daquele esperado pelo professor e postulado pelo currículo tradicional de matemática, o educador não pode aproveitar o erro de Celso para persuadi-lo a abandonar seu esquema e aderir ao proposto pelo professor e pelo livro didático. Se isso ocorrer Celso estará abdicando de um elemento importantíssimo na constituição do seu

“ser matemático”, que por uma dificuldade quanto à composição numérica, abandona a criação de esquemas mentais que tem muito a ver com suas concepções das estruturas matemáticas. Colocar as produções de Celso e João em confronto e discussão coletiva seria uma postura mais adequada que poderia permitir tanto a descoberta da falha de Celso quanto a valorização no grupo das produções de cada sujeito epistêmico.

Entretanto, identificar, analisar e permutar, no grupo, os esquemas que estão subjacentes a tais produções (e os conceitos em ato aí presentes), não são ações, geralmente, triviais, nem para o pesquisador tampouco para o professor. Portanto, a identificação e a valorização desses esquemas no processo pedagógico requerem, quase sempre, a imprescindível fala interpretativa e argumentativa da produção pelo próprio sujeito autor (a criança).

Vergnaud (1994) propõe discutir a articulação entre significantes e significados nesse processo, no contexto das representações semióticas. Essa interpretação da produção de natureza psicológica nos conduz freqüentemente a erros de tradução que revelam uma distância epistemológica entre o pensamento do aluno e a atribuição de significados pelo educador ou pesquisador. No próximo caso, procuraremos mostrar como é importante a fala da criança, refletindo sobre sua produção, para identificação dos esquemas subjacentes para, então, o desenvolvimento de uma mediação pedagógica mais eficaz.

### CASO LUÍSA: APRENDENDO COM A FALADA CRIANÇA

Nesse caso, Luísa uma aluna de terceira série apresenta um registro escrito na realização de uma divisão em que a interpretação primeira do mediador é, normalmente, caracterizá-la como uma produção errada uma vez que o quociente de 48 por 14 não é “21”.

Caso Luísa	Esquema
$  \begin{array}{r}  48 \quad   \quad 14 \\  - 28 \quad   \quad 2 \\  \hline  20 \\  - 14 \\  \hline  6  \end{array}  $	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 48 dividido por 14 = 2</li> <li>• 2 vezes 14 = 28</li> <li>• 48 menos 28 = 20</li> <li>• 20 dividido por 14 = 1</li> <li>• 1 vezes 14 = 14</li> <li>• 20 menos 14 = 6</li> </ul> <p>( o que revela grande quantidade de conceitos em ato).</p>

Figura 11: Protocolo de menina da 3ª série, 9 anos.



Esse engano interpretativo, baseado numa leitura do educador da produção de registro semiótico da criança em processo de produção de conhecimento e de aprendizagens localmente válidas, foi realizado no contexto de nossa pesquisa, mas que permitiu um aprendizado significativo da importância da fala da criança sobre sua produção matemática.

Isso nos revela que o entendimento da produção matemática não pode se limitar à análise da produção escrita do aluno. Por ser o esquema um produto de ordem psicológica, apoiada na representação mental, a análise das competências matemáticas do aluno via análise do registro, freqüentemente gera erros por parte do avaliador seja ele pesquisador, seja professor. O esquema é geralmente um construto mais amplo e complexo que o apresentado no papel ou no quadro. Somente a fala do seu autor pode contribuir com o processo de análise da produção de esquemas, permitindo ao mediador uma mais real compreensão dos reais significados das produções matemáticas (Muniz, 2004).

Ao ser questionada sobre sua produção, ela diz: " *Vinte e um, não! Tá vendo, é 2 e 1, três, 2 vezes 14 e 1 vezes 14, dá 3 de 14, e sobra 6, porque dá 42*". Assim, o esquema que Luisa acaba por revelar, mas que não aparece na produção escrita é:

$$\begin{array}{r}
 48 \quad | \quad 14 \\
 - 28 \quad | \quad 2 + 1 = 3 \\
 \hline
 20 \\
 - 14 \\
 \hline
 6
 \end{array}$$

**Figura 12:** Protocolo de menina da 3ª série, 9 anos.

Isto nos leva a uma discussão sobre a avaliação das produções matemáticas na escola que ocorre exclusivamente nas produções escritas, não garantindo, como vimos com Luísa, um julgamento mais fidedigno da real produção matemática e seus significados. Como dissemos de início neste caso, se nos limitarmos em dizer que está errada tal produção, isso gera um contexto epistemológico e metodológico, acerca do que é certo ou errado, que nos impede de construir um espaço de mediação pedagógica tendo os reais esquemas mentais das crianças como fonte primária de construção de conhecimento matemático na escola. Essa discussão tem sido objeto central de análise e discussão na escola pesquisada, onde, a cada momento, os professores revelam mais competência de melhor entender o fazer matemática

de nossas crianças, em especial, daquelas consideradas em “situação de dificuldade”.

Esse estudo de natureza etnográfica nos leva a rever o foco da “dificuldade” em questão para uma discussão dos obstáculos epistemológicos e profissionais do professor de matemática, uma vez que, o conhecimento matemático construído ao longo da formação inicial faz com que nos distanciemos ou não compreendamos o fazer matemático de nossas crianças. É essa incompreensão um dos fatores que geram na escola o fenômeno da “dificuldade” na aprendizagem matemática, para a qual, o trabalho de análise microgenética dos esquemas produzidos pelas crianças, apoiado na TCC, pode trazer importantes contribuições para o avanço tanto da práxis quanto da pesquisa em educação matemática.

### **ESTUDO 3: CONSTRUINDO CONCEITOS GEOMÉTRICOS NUM AMBIENTE INFORMATIZADO**

Nessa seção, focaremos uma das categorias de análise da pesquisa-ação desenvolvida com o intuito de compreender e analisar o processo de conceitualização geométrica junto a grupo de alunos de 6ª série de um colégio público federal da cidade de Brasília, em ambiente informático tendo como instrumento mediador o software cabri géomètre.

Acompanhamos, nos últimos 15 anos, uma ampla discussão acerca do ensino e da aprendizagem da geometria nas produções acadêmicas de Educação Matemática. Estudos como, Pavanelo (1989), Perez (1991), Lorenzato (1995) e Pais (1999) apontam como consenso, a omissão da geometria no currículo; a deficiente formação dos professores em geometria; a necessidade de desenvolver metodologias de ensino; as dificuldades de alunos e professores na formação de conceitos geométricos, entre outros.

No tocante a formação dos conceitos geométricos, os estudos liderados por Rina Hershkovitz e Abraham Arcavi no Weizmann institute (Israel) e na Berkley University (EUA) demonstram que as interações do aprendiz com o meio desempenham papel ativo no processo ensino-aprendizagem da geometria e estão baseadas na teoria da concepção do espaço pela criança, bem como nos aspectos psicológicos desses processos. (Arcavi apud Fainguelernt, 1999).

Segundo esses estudos, nos processos de ensino e aprendizagem da geometria dois enfoques importantes devem ser considerados: o da geometria como uma ciência do espaço e como uma estrutura lógica. Esses aspectos estão ligados uma vez que, para compreender a geometria como uma estrutura lógica, é preciso ter dominado alguns níveis da geometria como ciência do espaço.

Não pretendemos, aqui, definir “conceito geométrico”. No entanto, é importante esclarecer como o percebemos, destacando algumas características: *ele é provisório*, não existindo um conceito pronto, pois a cada experiência, a cada situação ele é modificado; *está em processo de transformação*; *pertence a uma rede conceitual*; *é muito mais do que consigo representar*, seja por uma definição escrita ou verbal; *é elemento cultural*, existe através das relações sociais; *têm uma dimensão filogenética e ontogenética*; *está estritamente ligado ao objeto e à representação*; *está ligado aos elementos matemáticos próprios da geometria*, tais como: espaço, forma, medidas, grandezas, proporcionalidade, entre outros. Vergnaud (1994).

Concomitantemente, às discussões sobre ensino e aprendizagem da geometria, é crescente o estudo da Informática Educativa, sinalizando o uso de softwares como instrumentos mediadores na prática pedagógica, apontando-os como criadores de variadas situações de interação alunos-saber geométrico a partir da representação dinâmica dos objetos no ambiente virtual.

Pesquisas como Magina (1994), Sangiacomo (1996), Henriques (1999) apresentam como vantagens do cabri, a possibilidade de efetivar diferentes registros de representação de um mesmo objeto geométrico nas ações de construção, conjectura e validação, dentro do software. Esses autores o situam como elemento vital na construção da noção de “ponto” dinâmico. Contudo, essas pesquisas pouco revelam sobre como alunos do ensino Fundamental, constroem conceitos geométricos, analisando o aluno em ação.

Tendo como marco teórico a noção de conceito geométrico destacada anteriormente, necessitávamos, para o estabelecimento de nossa metodologia, de um ambiente cooperativo, aberto e capaz de estimular os adolescentes na interpretação da realidade a sua volta.

Para tanto, elegemos a pedagogia de projetos (Hernández, 2000), como procedimento, pois esta possibilita momentos de autonomia e de

dependência do grupo; de cooperação do grupo na ajuda mais experiente e também de liberdade; momentos de individualidade e de sociabilidade; de interesse e de esforço; de jogo e de trabalho, como fatores que expressam a complexidade do fato educativo. Desse modo, o desenvolvimento de projetos possibilitou a criação de uma comunidade de investigação, no laboratório de informática e essa dinâmica estendeu-se a outros espaços, proporcionando aos adolescentes uma aprendizagem mútua, nos diálogos entre si e com a professora-pesquisadora.

Participaram da pesquisa-ação oito alunos e cinco alunas voluntários de três turmas de 6ª série, nas quais atuávamos como docente (Neves, 2002). Os alunos foram incentivados a desenvolver projetos livres em duplas, sendo que os temas Bandeira Nacional e esporte foram dominantes. A maioria dos alunos possuía familiaridade com o ambiente informático.

Contudo, alguns alunos apresentavam dificuldades e estas foram sanadas com o apoio dos colegas nos primeiros encontros.

Como instrumentos para a construção dos dados foram utilizados, os diários de campo, o arquivo da produção e o grupo focal. Cada instrumento contemplou uma necessidade do processo de construção dos dados. Sendo que o diário possibilitou a coleta dos diálogos (alunos-alunos e alunos-professora-pesquisadora) durante o desenvolvimento dos projetos, as tentativas de elaboração e as discussões. O arquivo da produção\* organizou e apresentou na forma de protocolos todas as tentativas. O grupo focal esclareceu dúvidas quanto às tentativas de construção de determinado projeto, possibilitando um olhar meta-cognitivo sob a produção. Nessa seção, apresentaremos a produção de uma dupla no contexto do projeto construção da bandeira nacional, contudo, traremos, quando necessário, a contribuição de outros alunos.

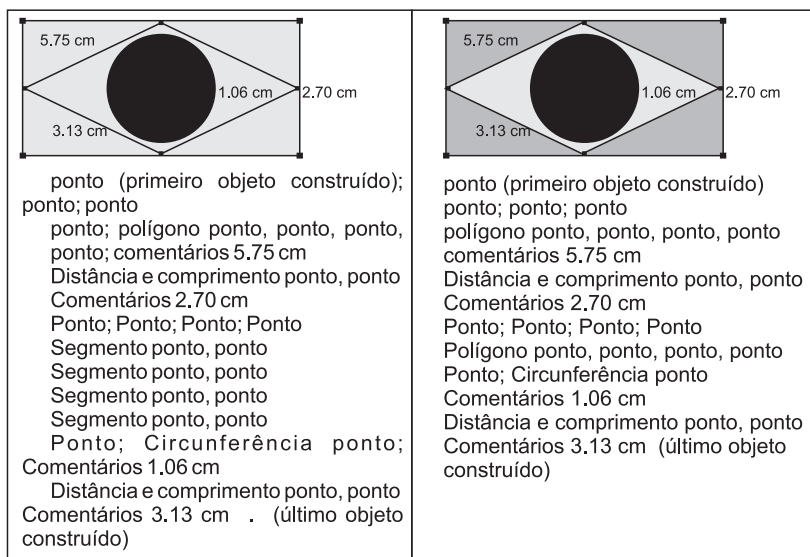
---

\*Arquivo da produção – refere-se aos arquivos produzidos pelas duplas durante as inúmeras tentativas de desenvolvimento dos projetos. Estes foram salvos em disquete e separados por encontros. Depois de cada encontro, a professora-pesquisadora analisava os arquivos e extraía deles todos os passos (todos os comandos efetivados dentro do software) compondo os protocolos das duplas.

## O CASO DA DUPLA DANIE E CISSA: CONSTRUINDO A BANDEIRA NACIONAL

A dupla era formada por meninas que, em sala de aula (na análise da professora-pesquisadora), não se encontravam em situação de dificuldade, apresentou grande motivação pela proposta de trabalho. Depois de primeiras sondagens do ambiente cabri, as alunas passaram a observar os ícones como lugares que continham objetos geométricos na busca da construção da bandeira brasileira. Apresentaremos, a seguir, momentos dessa construção na qual evidencia-se a elaboração de esquemas reveladores do processo de conceitualização geométrica.

A dupla começou com as seguintes tentativas:



**Figura 13-** Tentativas 1 e 2 da dupla.

Analisando nessas tentativas, percebemos que Dani e Cissa utilizaram os ícones *segmento* e *distância e comprimento* como ferramenta, pois já dominavam suas características/conseqüências dentro da figura que almejavam construir. Assim, demonstraram o conceito de retângulo, baseado nos segmentos verbalizado por elas como: “*figura que tem os lados iguais dois a dois*”.

Diante desse conceito de retângulo que possuíam inicialmente, saíram em busca dos ícones que fornecessem os objetos de que necessitariam. Assim, segmento e distância foram ferramentas para a construção do retângulo. Para garantir o retângulo como definido anteriormente, utilizaram o ícone *distância e comprimento* para deixá-lo *igual dois a dois*. Nesse momento, podemos perceber que a questão dos ângulos do retângulo não é importante para os pequenos geométricos em ação e não aparece como ferramenta nem como propriedade fundamental do retângulo porque seu conceito está ancorado apenas na questão dos lados.

No próximo passo realizado, demonstraram, ao marcar aleatoriamente quatro pontos para o losango, que esse conceito estava em fase de elaboração e precisavam de novos elementos e que somente nessa tentativa, talvez, não conseguissem avançar. Mas mesmo sem certeza, terminam a construção. Fixaram quatro pontos quaisquer e conseguiram, com o ícone *segmento*, um losango aparente.

Precisamos ponderar que a questão da aparência da figura encontra-se ancorada também no “olhar geométrico sobre as figuras” do sujeito em situação, pois um conjunto de segmentos consecutivos e fechados é um polígono para o aluno, o que não é para o programa Cabri.

Terminada a construção da bandeira, queriam pintá-la e novamente são conduzidas a outra reflexão quanto aos objetos ali presentes. Com o ícone *preencher*, a dupla estabeleceu a diferenciação de figuras construídas, empregando segmentos ou polígonos. Desse modo, construir uma figura usando os ícones *segmento* e *polígono* tinha um diferencial conceitual que elas verbalizaram um conceito em ato da seguinte maneira:

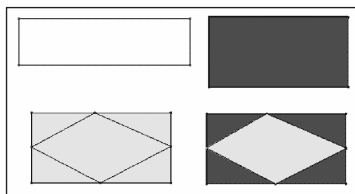


Figura 14 -Rascunho1 da dupla.

“com segmento tenho a linha de fora, como uma figura feita de canudinhos e com polígono a linha de fora e o espaço de dentro, como uma figura recortada numa cartolina.”

Aqui, encontramos o exemplo de uma ferramenta utilizada para o entendimento de um objeto. Segmento é um objeto já muito familiar

para a dupla, funcionando como ferramenta nessa fase para o entendimento do objeto polígono que depois dessas tentativas e validação, passa a funcionar como ferramenta. Ou seja, com os nossos participantes no ambiente Cabri, o estatuto de “ferramenta” só é atingido quando se constrói a noção de objeto: seu significado, portanto, assimilado para ser utilizado em construções.

No conjunto de tentativas 1, percebemos que segmento e retângulo funcionaram como ferramentas para o entendimento do objeto polígono o qual passa a funcionar daqui para frente como ferramenta. O ícone *pre-ench*er que a princípio não teria ligação direta com objetos geométricos, ao olhar dos alunos e da professora-pesquisadora, foi o gerador do desequilíbrio que depois de compreendido, com a ajuda das ferramentas segmento e retângulo, auxiliou no entendimento da variação conceitual entre contorno e superfície de uma figura, remetendo-os aos objetos perímetro e área. Na tentativa 2, observamos o uso do ícone polígono já como uma ferramenta, conseguindo o resultado que almejavam na construção: pintar a figura losango e retângulo de cores diferentes.

No entanto, faltava para a dupla o conceito de losango. Tinham uma imagem mental da figura e a expressaram ao marcar quatro pontos quaisquer sobre o retângulo e construíram o losango, tanto na tentativa 1 como na 2. Não conseguiram verbalizar nenhuma informação a respeito da figura e ficaram estagnadas diante da dificuldade. Mesmo assim, encerraram as primeiras tentativas e, tendo-a como base, partiram para comentar, verbalizando para o grupo e professora-pesquisadora que: “*A construção está diferente da bandeira e precisamos de “alguma coisa” para marcar as pontas do losango “iguais em todos os lados” para que losango fique dentro do retângulo e não assim*”.

Percebemos que as tentativas estavam apoiadas nos primeiros conceitos em ato que conseguiram buscar em suas redes conceituais e nos novos que conseguiram elaborar, como: polígono, contorno e superfície de uma figura e avançaram até o momento de estagnação no qual o conceito novo (losango) não existia ou estava muito confuso.

A construção do losango no ambiente Cabri, desenvolvendo projetos, constituiu-se numa situação-problema, o que não seria fora desse ambiente. Portanto, temos nesse ponto uma evidência da importância de se trabalhar nessa proposta apoiada na TCC, como mecanismo para a significação dos conceitos.

Diante da estagnação conceitual que se apresentava, a dupla partiu para superar sua dificuldade e avançar conceitualmente para conseguir uma construção coerente com Bandeira Nacional. Para tanto, deviam avançar no entendimento dos conceitos por uma necessidade do projeto e não da professora-pesquisadora, o que caracteriza a presença das situações adidáticas. Nesse aspecto vemos a forte conexão entre desenvolvimento conceitual e construção de esquemas em situação.

Nessa fase, alguns alunos foram até a Bandeira Nacional dependurada no laboratório abriram-na e começaram a conversar, olhando para a bandeira, a dupla Dani e Cissa começou a participar da conversa geral. Passou a olhá-la com novos olhos, necessidade provocada pela situação-problema. A aluna M comentou: *a figura losango parece um quadrado virado, meio torcido*. Ou seja, nesse momento ela se aproximou mais do conceito matemático da figura, ressignificando o losango na classificação dos polígonos, avançando no conceito do losango. A dupla interessou-se em observar um quadrado. Antes de encontrar o quadrado refez o retângulo, conferindo as medidas, como mostra a figura a seguir.

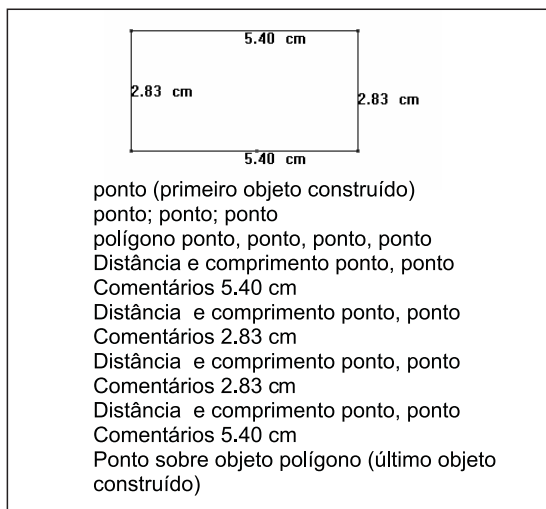


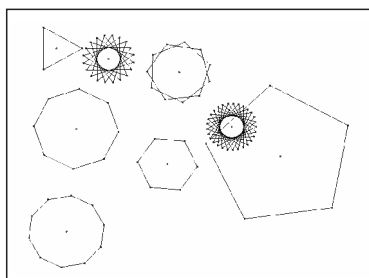
Figura 15 - Tentativa 3 da dupla.

Dani e Cissa fizeram uma tentativa de quadrado, usando polígono e modificando os lados até chegarem à definição de quadrado “*todos os lados iguais*”.



Percebemos aqui uma conceitualização não da dupla, mas do grupo, a elaboração dos conceitos de retângulo e de quadrado está pautada nos lados da figura, nada observaram quanto aos ângulos. Pelo menos no plano da verbalização, pois, acreditamos que a necessidade de deixar todos os segmentos retos é um indício da vaga noção de ângulo reto. Vimos que o fazer e a argumentação ocorrem *pari passu*, revelando que o fazer matemático não prescinde da fala, ao contrário, é esta é ferramenta do pensamento matemático.

No mesmo instante em que a dupla tentava entender melhor o objeto quadrado e como ele ajudaria em sua construção, outra dupla fazia uma descoberta que logo passou a ser de todos. Eles descobriram o ícone *polígono regular* e lutaram para entender o objeto geométrico *polígono regular*. Assim, a dupla voltou-se para esse ícone tentando entendê-lo e buscar nele o que almejavam, fazendo várias tentativas como mostra a figura abaixo:



**Figura 16** -Rascunho2 da dupla.

O problema passou a ser diferenciar “polígono” de “polígono regular” para então ver se esse avanço conceitual traria alguma ajuda em termos da construção em questão (o projeto bandeira).

A não-presença do retângulo no grupo dos polígonos regulares e o conceito de quadrado, presente no grupo, auxiliaram na conceitualização logo verbalizada pelo grupo de que polígono regular era: “*figura com todos os lados iguais*”.

Nesses momentos, nos quais as dificuldades diante de determinado conceito poderiam prejudicar o desenrolar da dialética ferramenta–objeto (Doaudy apud Pais,2001), a função da professora-pesquisadora foi a de fazer observar, retomar os conceitos já assimilados pelo grupo e colocá-los em evidência, fazê-los perceber os

elementos comuns e os contraditórios para que avançassem em seus teoremas em ato.

Novamente, percebemos o uso de uma ferramenta para a aquisição de um objeto. Nesse momento, vimos os objetos: retângulo, quadrado e polígono funcionarem como ferramentas para a aquisição do novo objeto geométrico: polígono regular. Daí em diante, esse objeto esteve presente no rol das ferramentas que os auxiliaram no entendimento de novos objetos.

Anteriormente a essa discussão que permeou pelo laboratório, a dupla queria entender melhor o quadrado e verificar se ele ajudaria na construção da figura losango. Com essas novas descobertas, começam algumas tentativas com o apoio da mais nova ferramenta: o polígono regular, como mostra a figura 17.

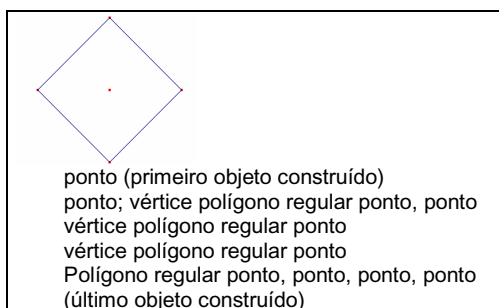


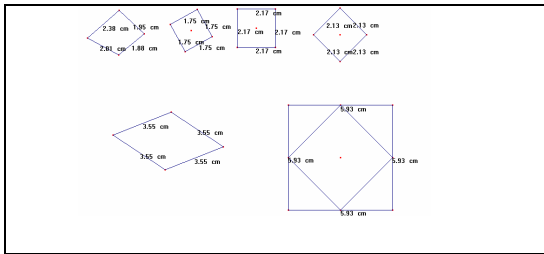
Figura 17 -Tentativa 6 da dupla.

Nessa tentativa, já utilizaram o ícone *polígono regular* e ele já era uma ferramenta empregada na busca do entendimento do objeto losango. Observamos que a dupla já havia posicionado o quadrado sugerindo a figura losango. Essa sugestão gerou nova e imensa discussão no grupo e provocou falas, tais como: “*o losango é um quadrado torcido*” e “*o losango não é um quadrado*”. Isso nos mostra o quanto a necessidade de construção de esquemas para dar conta de uma situação, lança o sujeito epistêmico a colocar em movimento seu processo de conceitualização.

Diante do novo impasse, ou melhor, da nova estagnação/bloqueio, o grupo voltou-se para a discussão em pauta. A discussão foi sobre o interesse de todos, já que todos estavam envolvidos na mesma situação-problema: a construção da bandeira e compreender o objeto

losango seria fundamental para a finalização do projeto. Assim, todas as falas, reflexões e tentativas visavam entender esse objeto e foram divididas no grupo e mostradas no *data show* para auxiliar as duplas que apresentavam dificuldades.

Novamente, a opção da professora-pesquisadora foi a de organizar o espaço de reflexão, registrando as falas, as tentativas e as descobertas já efetivadas. Assim, conduzimos um momento de tentativas-observação-conclusão, usando os ícones *polígono* e *polígono regular* os quais já funcionavam como ferramentas nessa etapa da dialética, usando para isso, as tentativas da dupla Dani e Cissa, como mostra a figura abaixo.



**Figura 18** –Rascunho 4 da dupla.

Depois dessas tentativas, o grupo, mediado pela professora-pesquisadora, levantou alguns pontos comuns em todas as figuras. A tentativa de chegarem a lados iguais, já que essa característica forneceria a figura losango e não apenas o losango aparente, merecia destaque. E diante de todos, com o auxílio do *data show*, o grupo chegou ao seguinte conceito de losango: *figura que tem 4 quatro lados iguais e que o quadrado é um losango, mas que o losango pode ser mais esticado ainda*” Nessa conceitualização verbal, percebemos um avanço na direção do objeto losango, compreenderam uma característica para conceitua-lo, ou seja, uma propriedade, a questão dos quatro lados iguais. Entenderam que o quadrado é um losango, entretanto, outras variações que não seriam quadrado continuavam sendo losango, a palavra *esticada* remeteu-os à questão dos ângulos que ainda não haviam pensando, ou melhor, não tinham sido provocados em nenhum momento do projeto.

Essa necessidade de separar as figuras, utilizando os ângulos remeteu-os aos ícones *marcar ângulo* e *ângulo* (ícone que calcula a

medida do ângulo-instrumento transferidor). Essa nova discussão requereu novamente a atenção de todo grupo e todos começaram a buscar soluções para esse novo momento de estagnação/bloqueio.

A iniciativa de clicar sobre os três pontos que definia o ângulo e o segundo clique sobre o vértice aconteceu depois de inúmeras tentativas: uma clicando sem seqüência, outra criando um ponto sobre o segmento e muitas outras. Mas o fato que alterou a desenfreada seqüência de cliques foi a mediação da professora-pesquisadora com vistas em elaborar e em sintetizar, no grupo, o conceito de ângulo e compará-lo com o conceito que o Cabri exigia.

Nas discussões sobre ângulo, os alunos definiram-no assim: “*aquilo que aparece entre os segmentos, mas os segmentos não entram*”. Outra idéia presente foi a “*de ângulo é a marca*”. Essas noções foram muito desenvolvidas depois das atividades executadas pelo aluno Nando que muito contribuíram para o avanço conceitual do grupo em relação ao objeto ângulo.

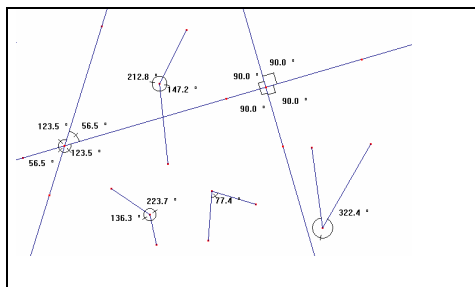


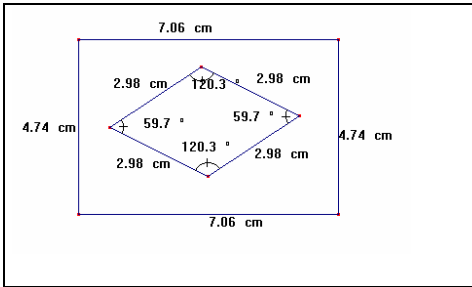
Figura 19 – rascunho 1 da dupla Nando e Ed.

Suas tentativas e conclusões quanto aos ângulos fizeram todo o grupo parar e refletir sobre vários novos objetos como: retas paralelas, retas perpendiculares, ângulo reto, ângulo agudo, ângulo obtuso, ângulo raso e, principalmente, a variação de todas essas medidas na manipulação do mouse e a vivência *on line* de todas as medidas num curto espaço de tempo, marcando aqui uma diferença das experiências vivenciadas em sala de aula com transferidor e papel, o que reforça o cabri como elemento criador de um novo espaço de interação com os objetos geométricos.

Terminadas as discussões sobre o ângulo e a incorporação dele ao rol de ferramentas, a dupla Dani e Cissa estava pronta para conti-

nuar suas tentativas de construção da bandeira, conscientes de que conseguiriam um losango se garantissem “*uma figura com todos os lados iguais e ângulos iguais dois a dois*”.

Como resultado desse momento, registramos a seguinte tentativa:



**Figura 20** -Tentativa 9 da dupla Dani e Cissa.

Observamos a preocupação em manter na figura todas as propriedades assimiladas

No entanto, todas as descobertas e conquistas conceituais foram divididas entre todos os participantes, agora, é bem verdade que os mais avançados continuaram ainda mais avançados, tendo em vista a capacidade de observação e análise individual. No entanto, cresceram nas tentativas de ajuda aos colegas nas quais foram provocados a reformular suas definições e conclusões, avançando cada vez mais na elaboração dos conceitos em questão.

Essa realidade de diferentes momentos conceituais é um fato concreto, pois o campo conceitual que cada aluno possui é diretamente proporcional ao número de experiências que vivencia na variedade de instrumentos mediadores com os quais interage. Assim, exploramos essa diversidade em favor dos alunos em situação de dificuldade ou em momentos conceituais bem primários, conseguindo conquistar, no grupo, a necessidade de crescimento coletivo e a certeza de que ninguém perde em ajudar e sim, que todos ganham.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

A análise conjunta das produções aqui apresentadas é uma oportunidade de levantar novas concepções sobre as produções dos alunos e, por conseqüência, rever nossas percepções da capacidade de cada aluno no fazer matemática. Pensar na possibilidade de novas formações do conhecimento é fator de geração de desestabilização

e ansiedades diante de novos paradigmas que somente o convívio com a práxis da pesquisa científica na sala de aula pode dar conta.

Identificar, analisar, compreender, socializar e valorizar tais produções requer de todos os indivíduos implicados no processo, um conhecimento matemático mais profundo, mais amplo e dinâmico. Reconhecer, nos esquemas mentais parcialmente comunicados, os conceitos em ato (Vergnaud apud Fávero, 2005) que os determina, colocar-se como mediador diante das produções parciais ou ineficientes, obriga-nos ao desenvolvimento de uma nova espécie de produção matemática na comunidade escolar. Por vezes, esse processo investigativo requer um abandono ou revisão dos conhecimentos matemáticos aprendidos e desenvolvidos ao longo da formação.

Diante de cada situação-problema, sentimo-nos impulsionados a, além de uma revisão dos conteúdos matemáticos e seus significados, buscar em teorias cognitivistas, tais como a TCC de Vergnaud, as ferramentas necessárias para, não apenas interpretar e analisar tais produções, mas também para conceber novas perspectivas de mediação e intervenção psicopedagógica. E neste contexto, a TCC tem-se mostrado tanto fértil quanto profunda, alimentando discussões e estudos, favorecendo o amadurecimento do olhar dos educadores e pesquisadores para o fenômeno da produção matemática na escola.

Mais que responder às questões a floradas a cada caso desafiante, como os aqui exemplificados, encontramos, professores e pesquisadores, num processo crescente e contínuo, de estudo e investigação, de descobertas novas e de indignações, que reforçam a idéia freiriana que a competência pedagógica passa pela formação contínua alicerçada no engajamento à pesquisa (Freire, 2000).

Como reflexões finais, apontamos alguns dos resultados parciais destes estudos:

A escola passa a ser reconhecida pelos integrantes da comunidade escolar, como um *lócus* privilegiado de produção de conhecimento matemático e não apenas de reprodução; A identificação de esquemas, apoiado na TCC, revela que alunos em situação de dificuldade de aprendizagem, apresentam, por vezes, grande potencial matemático; As produções de muitos alunos, por diferirem com a concepção de conhecimento matemático presente na formação dos profes-

res, acabam sendo negligenciadas; Atividade matemática torna-se ato solidário no confronto, na troca, na ajuda, na argumentação; Ir ao encontro da análise dos esquemas dos alunos tem sido um fértil espaço de formação inicial e continuada, associando pesquisa a práxis pedagógica; Compreender tais produções requer uma aliança epistemológica e metodológica da escola e da pesquisa científica; Reconhecer tais produções implica um permanente processo de desestabilização do professor que descobre, em cada aluno, novas formas de pensar as situações matemáticas, de produzir processos resolutivos e de registros e argumentação lógica.

Em síntese, neste processo, descobrir o ser matemático em cada um de nossos alunos, tem sido oportunidade impar de redescobrirmos-nos como produtores de conhecimento e agentes na construção de uma nova realidade educativa.

## REFERÊNCIAS

- BACHELARD, G. *A formação do espírito científico*. São Paulo: Contraponto, 1996.
- CELLERIER, G. Organisation et fonctionnement des schèmes. in: INHELDER, B. et al. *Le cheminement des découvertes de l'enfant. Recherche sur les microgenèses cognitives*. Paris: Delachaux et Niestlé, 255-299, 1992.
- FAINGUELERNT, E. K. *Educação matemática: representação e construção em geometria*. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999.
- FÁVERO, M. H. *Psicologia e conhecimento, subsídios da psicologia do desenvolvimento para análise de ensinar e aprender*. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2005.
- FREIRE, P. *Pedagogia da indignação*. São Paulo: UNESP, 2000.
- HENRIQUES, A. *Ensino e aprendizagem da geometria métrica: uma seqüência didática com o auxílio do software Cabri Géomètre II*. 1999. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Faculdade de Educação, UNESP, Rio Claro, 1999.
- HERNANDEZ, F. *Cultura visual, mudança educativa e projeto de trabalho*. Porto Alegre: Artes Médicas, 2000.
- LORENZATO, S. *Por que não ensinar geometria?* Educação Matemática em Revista, n. 4, p. 4-13, 1995.
- MAGINA, S. *Como as crianças entendem a noção de rotação/ângulo*. Em Aberto, Brasília, n. 62, p. 63-72, 1994.

- MUNIZ, C.A. *A criança das séries iniciais faz Matemática?* In.: PAVANELLO, R.M.(org.) *Matemática nas séries iniciais do ensino fundamental: a pesquisa e a sala de aula*. Biblioteca do Educador Matemático. Coleção SBEM. Volume 2. São Paulo, 2004.
- NASCIMENTO, A.M.P. *A pesquisa como instrumento de mediação num ambiente de aprendizagem matemática*. Dissertação (Mestrado em Educação – Faculdade de Educação, UnB, Brasília, 2002.
- NUNES, T. e BRYANT, P. *Crianças fazendo Matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.
- NEVES, R.S.P. *A formação de conceitos geométricos no contexto dos projetos de trabalho mediada pelo software Cabri Géomètre*. Dissertação (Mestrado em Educação – Faculdade de Educação, UnB, Brasília, 2002.
- PAVANELLO, R. M. *O abandono do ensino da geometria: uma visão histórica*. 1989. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, UNICAMP, Campinas, 1989.
- PAIS, L. P. Transposição didática. In: MACHADO, S. (Org.). *Educação matemática: uma introdução*. São Paulo: PUC, 1999.
- \_\_\_\_\_. *Educação matemática: uma análise da influência francesa*. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.
- PEREZ, G. *Pressupostos e reflexões teóricos e metodológicos da pesquisa participante no ensino da geometria para as camadas populares*. 1991. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, UNICAMP, Campinas, 1991.
- SANGIACOMO, L. *O processo de mudança de estatuto: de desenho para a figura geométrica: uma engenharia didática com o auxílio do Cabri Géomètre*. 1996. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, PUC, São Paulo, 1996.
- VERGNAUD, G. *L'enfant, la mathématique et la réalité*, Paris, Peter Lang, 1994.
- VIGOTSKI, L. S. *A construção do pensamento e da linguagem*. São Paulo: Martins Fontes, 2000.