

COMPETÊNCIAS, HABILIDADES, ATITUDES E FLEXIBILIDADE COGNITIVA NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

Marlene Alves Dias (UNIBAN)
Tânia Maria Mendonça Campos (UNIBAN)

Resumo: Apresentamos uma breve exposição sobre o ponto de vista que consideramos a questão da flexibilidade cognitiva em matemática. Essa exposição está centrada no estudo realizado por Dias (1998) em sua tese. Em seguida, associamos essa questão à classificação proposta por Artigue (2004) e a abordagem teórica em termos de níveis de conhecimento esperados dos estudantes de Robert (1997). Na sequência, a partir do referencial teórico escolhido e do nosso questionamento sobre as possibilidades de um trabalho flexível com a noção de números racionais delineamos nossa metodologia que permitiu, por meio de um estudo epistemológico, observar a complexidade e as dificuldades do desenvolvimento histórico dessa noção e por meio de uma análise didática, que existe um espaço para tarefas, em geral, centradas no tratamento e conversão de registros de representação semiótica, conforme Duval (1995), que podem ser introduzidas em diferentes níveis possibilitando a articulação dos conhecimentos matemáticos institucionalmente trabalhados nas diferentes etapas da escolaridade e que permitem o desenvolvimento das competências, habilidades e atitudes necessárias para o desenvolvimento de atividades matemáticas.

Palavras-chave: flexibilidade cognitiva, níveis de conhecimento, números racionais.

Abstract: We present a short exhibition on the point of view that we found the question of the cognitive flexibility in Mathematics. This exhibition is centered in the study carried out by Dias (1998) in her thesis. Next, we associate this question to the classification proposed by Artigue (2004) and to the theoretical approach in terms of levels of knowledge expected of the students of Robert (1997). In the sequence, from the theoretical framework chosen and our questioning of the possibilities for a flexible job with the

notion of rational numbers we outline our methodology that allowed, from the epistemological point of view, to observe the complexity and the difficulties of the historical development of this notion and, from the educational point of view, there is a space for tasks, in general centered in the treatment and conversion of records of semiotic representation, according to Duval (1995), which can be introduced in different levels enabling the articulation of mathematical knowledges in different institutional worked stages of schooling and which allow the development of the competences, skills and necessary attitudes for the development of mathematical activities.

Key-words: cognitive flexibility, levels of knowledge, rational numbers.

Introdução

Observamos que, nas pesquisas em educação e, em particular, em educação matemática, conforme nosso ponto de vista, a flexibilidade entre formas de conhecimento e representações simbólicas tende a ser reconhecidas como uma componente essencial da conceituação e da compreensão matemática. A articulação de uma noção matemática com outros conceitos, seja na sua utilização como ferramenta implícita ou explícita ou como um objeto matemático do saber, possibilita revisitar esse conceito em função do nível de conhecimento esperado dos estudantes no decorrer de sua trajetória escolar, ou seja, ele pode ser trabalhado sob diferentes pontos de vista em um mesmo quadro ou em diferentes quadros conduzindo a identificação dos registros de representação mais adequados nos diferentes momentos.

Para esse estudo escolhemos a noção de número racional, que é trabalhada desde os primeiros anos da educação básica até o ensino superior, onde ela é tratada por meio da noção de estrutura algébrica que permite um tratamento rigoroso que lhe confere o status de número. Mas, é importante observar que o conceito de número racional tem sido muito pesquisado por apresentar grandes dificuldades para os estudantes desde sua introdução nos primeiros anos da educação básica.

Consideramos, ainda, que a noção de número racional pode ser trabalhada em diferentes conteúdos e de diferentes formas em função dos diferentes níveis de abstração que se propõe desenvolvê-la. Além disso, como já observamos acima, ela permite levar em conta as

conexões entre os diferentes campos de experiência dos estudantes, os pontos de vista que possibilitam o trabalho com a noção, os quadros para o seu desenvolvimento e as representações que permitem sua manipulação. Trata-se de uma noção que exige uma abordagem articulada dos conhecimentos desenvolvidos pelos estudantes desde os primeiros anos de sua vida escolar e que está associada a várias aplicações do cotidiano.

Dessa forma, sendo o objetivo de nossa pesquisa compreender quais as possibilidades de tratamento da noção de número racional em função do nível de conhecimento esperado dos estudantes, para que se possa desenvolver uma abordagem que se leve em conta a articulação dessa noção com as outras noções em jogo, dependendo do contexto escolar, e das competências, habilidades e atitudes que desejamos desenvolver, fundamentamos esse estudo no trabalho de Dias (1998), que coloca em evidência a evolução e certas características da flexibilidade entre diferentes formas de conhecimento, para o caso específico da álgebra linear, apoiando-se prioritariamente em trabalhos que concernem o ensino superior.

Apesar de seu trabalho focar o ensino superior, o referencial teórico por ela escolhido coloca em evidência a evolução e as características do que ela denomina flexibilidade cognitiva. Para isso, Dias distingue duas grandes categorias de abordagens do conhecimento matemático:

As abordagens que se estruturam no domínio global dos modelos “cognitivos” **hierárquicos**, onde certa flexibilidade aparece através das relações dialéticas existentes entre essas hierarquias. A autora destaca os trabalhos de:

- Piaget e Garcia (1983) cujo objetivo central é estudar os instrumentos e os mecanismos comuns à construção dos conteúdos de determinados sistemas de noções de física, geometria e álgebra.

- Hillel e Sierpiska (1994) que se inspiram no trabalho de Piaget e Garcia para se interrogar sobre qual dos três níveis intra, inter e trans é necessário em um curso de introdução à álgebra linear.

- Dubinsky (1991) que parte da noção de abstração refletida definida por Piaget para mostrar como essa noção pode ser utilizada para descrever a epistemologia de vários conceitos matemáticos,

sugerir explicitações para as dificuldades dos estudantes na construção desses conceitos e influenciar um projeto de ensino que permite uma melhora significativa da forma como os estudantes se apropriam dos conceitos.

- Sfard (1991) que parte da questão “Como a abstração matemática pode diferir de outros tipos de abstrações na sua natureza, no seu desenvolvimento, nas suas funções e aplicações?” Que a conduz a distinguir para os conceitos matemáticos duas dimensões fundamentais: uma dimensão estrutural, estática, instantânea e integrativa e uma concepção operacional, dinâmica, sequencial e detalhada. Para Sfard, essas duas dimensões são duais e complementares; um mesmo conceito matemático pode ser considerado como um processo e um objeto ao mesmo tempo e a possibilidade de conceber um conceito sobre essas duas dimensões é indispensável para uma profunda compreensão da matemática.

- Tall (1994) que introduz a noção de “procept” e “versatile thinking” inspirado nas teorias anteriores fundamentadas na distinção entre processos e objetos e com a intenção de considerar teoricamente a flexibilidade do simbolismo matemático que, muitas vezes, pode ser interpretada ao mesmo tempo como processo e objeto, favorecendo o jogo entre os dois níveis necessários do trabalho matemático.

As abordagens onde a flexibilidade ocupa um papel central, mesmo se a dimensão hierárquica continua presente. Neste caso, Dias (1998) escolhe centrar sua atenção sobre as abordagens que acentuam uma flexibilidade entre diferentes quadros de funcionamento de um conceito, entre os diferentes registros de representação semiótica nos quais os conceitos são expressos ou trabalhados matematicamente e, finalmente, sobre os diferentes pontos de vista que lhe podem ser associados. Ela se refere, mais particularmente, aos trabalhos de:

- Douady (1984) que propõe uma teorização didática baseada em uma análise epistemológica que coloca em evidência a dualidade dos conceitos matemáticos, que, em geral, funcionam primeiro como ferramentas implícitas, depois explícitas antes de ter o status de objeto e ser trabalhado como tal. Essa análise epistemológica a conduz a transpor essas características do funcionamento do matemático para o domínio da didática via as noções de dialética ferramenta/objeto e jogo de quadros.

- Duval (1995) introduz a noção de registro de representação semiótica partindo do fato que a atividade matemática constitui um campo privilegiado para análise das atividades cognitivas fundamentais como a conceituação, o raciocínio, a resolução de problemas e a compreensão de textos. Ele observa que essas atividades cognitivas demandam a utilização de sistemas de expressão e de representações distintas da língua materna e das imagens, sendo essenciais para a aprendizagem matemática. Observamos que enquanto a noção de quadro refere-se, globalmente, ao funcionamento de um conceito matemático, a noção de registro concerne, mais especificamente, aos registros semióticos que permitem representá-los.

- Pavlopoulou (1994, 1997) se situa na perspectiva de Duval para desenvolver sua pesquisa sobre a aprendizagem das noções de vetor, combinação linear e dependência e independência linear em \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 .

- Rogalsky (1995) que observa que dois pontos de vista sobre um mesmo objeto matemático são diferentes maneiras de observá-los, de fazê-los funcionar, eventualmente defini-los. Nesse sentido, observar um objeto em diferentes quadros é considerar diferentes pontos de vista. Mas, podem-se considerar vários pontos de vista em um mesmo quadro.

- Robert e Tenaud (1989) que se interessam pelo ensino da geometria no final do correspondente ao ensino médio na França e que partem da hipótese que a interação dialética de um ensino de métodos e de um trabalho regular em pequenos grupos sobre exercícios adaptados é benéfica para a aprendizagem, pois a utilização de métodos supõe uma determinada classificação dos problemas e uma identificação das estratégias e técnicas disponíveis. Nesse caso, os métodos gerais estão associados à noção de ponto de vista.

Em função de sua escolha de trabalhar com as abordagens em que a flexibilidade entre formas de conhecimento e representações simbólicas ocupa um papel central, podemos traduzi-la pela capacidade do estudante de articular os diferentes quadros em que um determinado conceito pode ser trabalhado, efetuar as atividades de tratamento e conversão de registros de representação semiótica, mudar de pontos de vista quando necessário sem que seja necessário um apelo explícito,

isto é, pode-se dizer que quando o estudante é capaz de efetuar estes diferentes tipos de atividade ele se encontra preparado para trabalhar as noções matemáticas em um nível disponível, sendo capaz de reconhecer as noções em jogo nas tarefas que lhe são propostas, as representações mais adequadas para desenvolver o trabalho matemático em jogo nesta tarefa, os diferentes métodos que possibilitam sua solução, ou seja, o caminho mais econômico para desenvolver o que lhe é proposto.

Certamente, em relação a uma nova noção que está sendo introduzida poderão existir, ainda, conhecimentos que não foram desenvolvidos, mas sua flexibilidade de trabalho em relação a conhecimentos anteriores é um elemento essencial para encontrar o significado e poder utilizá-lo posteriormente de forma disponível em outras questões onde este conhecimento se mostrar necessário, sendo capaz de dar contra-exemplos, mudar de quadro, aplicar métodos não previstos, pois está familiarizado com a nova noção e suas representações, isto é, ele possui situações de referência que podem auxiliá-lo a interpretar e encontrar as ferramentas adequadas para o novo trabalho matemático que está sendo proposto.

Não é somente em relação ao estudante que se espera essa flexibilidade com o trabalho matemático, mas ela é ainda mais necessária para os professores, que em sua prática diária são chamados a preparar seus planos de aula, considerando as capacidades, competências, habilidades e atitudes que precisam ser desenvolvidas e associá-las às noções matemáticas que fazem parte das propostas para os anos das diferentes etapas escolares em que irão ministrar suas aulas.

Além disso, esses mesmos professores devem estar atentos em relação à distância que, muitas vezes, pode existir entre o nível de conhecimento por eles esperados das turmas com que trabalham e o nível real de conhecimento dos seus estudantes. Isso conduz a importância de reconhecimento do suporte institucional que permite identificar os possíveis conhecimentos prévios dos estudantes. A falta desse trabalho pode representar um obstáculo para o processo de ensino-aprendizagem, pois os professores ao preparar suas aulas precisam elaborar tarefas que permitam desenvolver determinadas capacidades, competências e habilidades que só podem ser desenvolvidas se os estudantes dispõem dos conhecimentos necessários para esse trabalho.

Isso conduz a escolha de associarmos à noção de flexibilidade cognitiva o conceito de competências, por meio da classificação em torno dos oito pólos abaixo descritos, conforme proposta de Artigue (2004). Os oito pólos, abaixo relacionados, nos parecem essenciais para que o estudante seja capaz de trabalhar de forma flexível em matemática.

Pensar matematicamente.

Colocar e resolver problemas.

Analisar e construir modelos matemáticos.

Raciocinar matematicamente.

Representar entidades matemáticas.

Manipular símbolos e formalizações matemáticas.

Comunicar em, com e a propósito da matemática.

Saber utilizar ajudas e instrumentos, portanto, as TIC (tecnologias da informação e comunicação).

Para compreender melhor como relacionar competências, habilidades e atitudes e a articulação dos conhecimentos matemáticos em jogo na etapa escolar que se está trabalhando, é preciso estabelecer quais conhecimentos podem ser levados em conta e de que forma. Para isto, escolhe-se como referencial teórico central à noção de níveis de conhecimentos esperados dos estudantes conforme definição de Robert (1997). Essa noção permite reconhecer como é trabalhada a matemática do ponto de vista institucional, ou seja, qual a relação institucional esperada e existente para o desenvolvimento de uma determinada noção matemática, conforme definição de Chevallard (1996). Além disso, é possível determinar quais as relações pessoais que se espera que os estudantes possam desenvolver em função das relações institucionais existentes, ou seja, segundo nosso ponto de vista o nível escolhido para trabalhar determinada noção matemática em uma determinada etapa da escolaridade auxilia na escolha das competências, habilidades e atitudes que desejamos desenvolver.

Para isso, analisamos aqui, via livro didático, os níveis de conhecimento esperados dos estudantes de 6º ao 9º ano do ensino fundamental, quando se introduz a noção de números racionais.

Para melhor compreender quais as escolhas feitas para trabalhar a noção de número racional na educação básica, mais especificamente, do 6º ao 9º ano, inicia-se o trabalho com uma análise epistemológica conforme o ponto de vista de Dorier (1997), que consiste em dispor de uma análise histórica da gênese do saber que será transmitido ou adquirido, esta análise histórica constitui um banco de dados, que já subentende uma reflexão epistemológica. Esse estudo está fundamentado no texto de Besnard (2000) sobre o conceito de número.

A partir dos estudos acima, elaboramos um conjunto de tarefas e práticas que nos parecem essenciais para que os estudantes possam trabalhar de forma autônoma em qualquer um dos três níveis definidos por Robert (1997), podendo, assim, desenvolver as competências, habilidades e atitudes necessárias para o trabalho em matemática.

Referencial teórico da pesquisa e questionamento

Escolhem-se como referencial teórico central os três níveis de conhecimento esperados dos estudantes segundo definição de Robert (1997), a saber:

O **nível técnico** corresponde a um trabalho isolado, local e concreto. Está relacionado, principalmente, às ferramentas e definições utilizadas em uma determinada tarefa. Por exemplo, para a noção escolhida, isto é, a noção de número racional, podemos considerar a tarefa, “Conversão de uma fração dada no registro de representação geométrico (figura geométrica dividida em partes iguais) para o registro de representação algébrico explícito ($\frac{2}{3}$ para um retângulo dividido em três partes iguais com duas pintadas, determinar a razão parte-todo).

O **nível mobilizável** corresponde a um início de justaposição de saberes de certo domínio, podendo até corresponder a uma organização. Vários métodos podem ser mobilizados. O que se questiona é explicitamente pedido no enunciado da tarefa e o saber, ao ser identificado, é considerado mobilizável se ele é acessível, isto é, se o estudante o utiliza corretamente. Por exemplo: Representar uma fração dada por meio do registro de representação algébrico explícito ($\frac{5}{3}$) no registro de representação geométrico (as figuras são dadas já divididas em partes iguais).

O **nível disponível** corresponde, a saber, responder corretamente o que é proposto sem indicações de ser capaz, por exemplo, de encontrar contra-exemplos, mudar de domínios, de fazer relações e de aplicar métodos não previstos. Esse nível de conhecimento está associado à familiaridade, ao conhecimento de situações de referência variadas que o estudante sabe que as conhece e que servem de terreno de experimentação. Por exemplo: numa caixa com 4 bolas vermelhas e 5 bolas azuis. Se retirarmos, sem olhar, uma bola dessa caixa, qual a possibilidade de sair vermelha?

Após a escolha da noção matemática a ser pesquisada e do referencial teórico central, nos colocamos as seguintes questões:

- Quais os conhecimentos matemáticos necessários para introduzir a noção de número racional e como essa noção se desenvolve historicamente?
- Sobre quais níveis de conhecimento podemos fundamentar estas necessidades: técnicos, mobilizáveis e disponíveis?
- Em que sistema de tarefas e práticas é possível desenvolver estes três níveis de desenvolvimento?
- Como estão sendo trabalhados institucionalmente estes diferentes níveis de conhecimento?

Objetivos

O objetivo da pesquisa é compreender as possibilidades de tratamento da noção de número racional em função do nível de conhecimento esperado dos estudantes, para que se possa desenvolver uma abordagem que se leve em conta a articulação dessa noção com as outras noções em jogo, dependendo do contexto escolar e das competências, habilidades e atitudes que desejamos desenvolver.

Sendo assim, os objetivos específicos são:

- esclarecer qual é o papel desempenhado pelos três níveis de conhecimento (técnico, mobilizável e disponível) na aprendizagem do conceito de número racional e como esta questão é tratada nos livros didáticos, o que corresponde à identificação das relações institucionais existentes para o desenvolvimento da noção de número racional;

- compreender quais dos três níveis de conhecimento são privilegiados pelo ensino atual e os problemas didáticos associados a esta escolha;
- identificar um conjunto de tarefas e práticas que permitem ao aluno trabalhar de forma autônoma em qualquer um dos três níveis.

Metodologia

A metodologia foi dividida em três etapas:

- Análise epistemológica baseada no estudo histórico por meio do texto de Besnard (2000) sobre o conceito de número.
- Análise das diferentes tarefas que intervêm no ensino da noção de número racional e os diferentes níveis de conhecimento por elas exigidos. Com base nesta análise, estuda-se o funcionamento institucional em relação aos três níveis de conhecimento (técnico, mobilizável e disponível).
- Construção de um sistema de tarefas que permita ao aluno trabalhar de forma autônoma os principais conceitos de fração que necessitam ser desenvolvidos durante o ensino fundamental I.

Resultados

Da **análise epistemológica**, obtêm-se estes resultados:

Uma organização complexa quando trabalhamos com a introdução da noção de número racional, que são utilizados devido às necessidades de cálculos para a agricultura, arquitetura, comércio, mas que, ao serem estudados como objetos matemáticos, apresentam um alto grau de complexidade que só o desenvolvimento das estruturas algébricas permitirá considerá-los como números como é possível verificar no texto abaixo de Besnard.

As necessidades do cálculo, principalmente para a agricultura, arquitetura, conduziram os egípcios, os babilônios e outros, a utilizar as frações. Apesar disso, essas demoraram muito tempo para serem consideradas como verdadeiros números. Euclides, por exemplo, repugnava utilizá-las. No lugar das frações, ele construiu uma teoria sutil, a teoria dos números

“comensuráveis”. Duas grandezas A e B **de mesma espécie** (por exemplo, 2 comprimentos, 2 áreas, etc...), são ditas comensuráveis se existe outra grandeza C, de mesma espécie, e 2 naturais p e q, tais que:

$$A = pC$$

$$B = qC$$

É somente na idade moderna (após a Renascença), que podemos escrever alguma coisa como:

$$\frac{A}{B} = \frac{p}{q}$$

O cálculo sobre as frações, cada vez mais, consideradas como verdadeiros números, foram muito bem aceitos, principalmente após Diophante, mas por muito tempo permaneceu a idéia que A e B deveriam ser grandezas de mesma natureza. Em particular, Galileu nunca esteve em condições de escrever a

fórmula $v = \frac{d}{t}$. [...] Para encontrar uma fração $\frac{a}{b}$, devemos naturalmente considerar um par de naturais $(a, b) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^*$

com $b \neq 0$. Mas, se $ad = bc$, as frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são iguais,

vamos, portanto identificar os pares correspondentes, introduzindo a noção de **relação de equivalência**:

$$(a, b) \approx (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$$

(observar que, no caso, é a mesma fórmula da equivalência definida para a adição, nesse caso trocamos a adição pela multiplicação).

Inspirando-se nessas fórmulas, encontramos:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Definimos assim uma adição e uma multiplicação para os pares:

$$(a, b) + (c, d) = (ad + bc, bd)$$

$$(a, b)(c, d) = (ac, bd)$$

Verificamos que essas duas leis são compatíveis com a relação de equivalência (isto é, elas não mudam se trocamos um par por outro par equivalente), e chamamos “fração $\frac{a}{b}$ ” a **classe de equivalência** do par $\frac{a}{b}$. Indicamos **Q** o **conjunto das frações**. Identificamos **Z** como **subconjunto** das frações do tipo $\frac{a}{1}$ e escrevemos **Z** \subset **Q**. (BESNARD, 2000)

Da **análise didática**, observa-se que:

Em geral, quando se trabalha com os números racionais na educação básica utiliza-se apenas o seu caráter ferramenta implícita e explícita, como o que encontramos no seu desenvolvimento histórico, isto é, os números racionais do 6º ao 9º ano são trabalhados apenas por meio de suas representações que, em geral, estão associadas às grandezas de mesma espécie. Mas, também no caso dos anos iniciais são levadas em conta, apenas, as diferentes representações para esses números, fazendo a passagem de uma representação à outra através de situações de divisão de pizzas, bolos em partes iguais ou de um conjunto de objetos com uma determinada quantidade, por exemplo, balas, bolas ou bombons, que devem ser divididos em partes iguais que são bem ilustradas e bastante trabalhadas deixando a impressão que as maiores dificuldades não estão associadas a essas novas representações, mas à compreensão do conceito em si, pois não é feita uma real articulação entre as situações concretas e o conceito de número racional, ou seja, o trabalho aqui desenvolvido é centrado na conversão dos diferentes registros de representação sem levarem em conta as dificuldades associadas a outros conceitos em jogo nessas representações como é o caso das representações geométricas que podem não ser disponíveis para determinados estudantes.

Além disso, no caso das operações com esses números, que poderiam auxiliar nessa articulação entre representação e conceito, não existe um trabalho de conversão entre essas representações, pois a ênfase é dada para a representação algébrica intrínseca e explícita

para a qual parece mais simples trabalhar as técnicas. O trabalho desenvolvido para representar frações por meio da representação geométrica, em geral, não é utilizado para desenvolver as operações.

Observamos ainda, que em relação à classificação em oito pólos de competências a serem consideradas para um trabalho flexível com a noção de número racional, verifica-se que se pode considerar que existe uma introdução ao pensamento matemático que permite que os estudantes possam ser capazes de resolver problemas e alguns até mesmo de propor problemas que relacionem grandezas de mesma espécie, sendo ainda capazes de representar os números racionais em pelo menos dois registros, isto é, o registro algébrico intrínseco e explícito, onde a fração é representada na forma a/b e o registro de representação geométrico, onde a fração é representada por uma figura geométrica dividida em partes iguais.

Mas, as competências trabalhadas que podem ter sido desenvolvidas pelos estudantes precisam ser complementadas e, não se deve estranhar que os estudantes tenham muitas dificuldades em utilizar de forma disponível a noção de número racional em outros momentos e por meio de novas representações e conceitos a ela associados. É preciso estar consciente da necessidade de revisitar essa noção em outras etapas da escolaridade, considerando os registros de representação semiótica já introduzidos, os novos registros e suas conversões de forma que os estudantes possam desenvolver as competências classificadas em oito pólos por Artigue (2004), que lhes auxiliarão a construir uma nova relação com a matemática, em que a aprendizagem de novos conceitos articulados com seus conhecimentos prévios permitirá resolver problemas cada vez mais complexos de forma autônoma.

Análise das **tarefas** existentes para o desenvolvimento da noção de número racional na educação básica:

Para a noção de número racional, quando se consideram as diferentes representações introduzidas na definição do conceito de fração e as operações com frações, verifica-se que não é feito um trabalho explícito de conversão entre os diferentes registros de representação semiótica introduzidos e que todo o trabalho permanece em um nível técnico de gravar as regras que regem a adição e a multiplicação destes números, isto é, mesmo sendo capazes de representar algumas entidades

matemáticas associadas à noção de número racional, os estudantes não trabalham com as possíveis conversões entre elas e muitas vezes não são capazes de utilizar as mais adequadas no momento de resolver os problemas que lhes são propostos. Em geral, passa-se diretamente dos cortes de bolos, pizzas ou figuras geométricas, das divisões de balas ou chocolates para as representações fracionárias e destas para as técnicas operatórias sem que haja uma articulação entre a noção de número racional com as representações já trabalhadas e suas operações.

Em relação ao conjunto de tarefas que permitem ao estudante trabalhar de forma autônoma escolheu-se classificá-las em função do nível de conhecimento esperado dos estudantes em relação à noção de número racional na sua solução.

Verificou-se assim que é possível dividir as tarefas em três grandes grupos associados aos níveis de conhecimento esperados dos estudantes em sua solução:

O primeiro grupo de tarefas corresponde ao conjunto de atividades para as quais a ênfase é dada ao **nível técnico**, que é representado pelas atividades que envolvem a divisão de figuras geométricas, balas, bolos e pizzas, pois estas permitem um trabalho de tratamento e conversão dos registros de representação algébricos intrínsecos e explícitos, do registro da língua natural, do registro de representação geométrico (caso contínuo) e do registro de representação figural (caso discreto), sendo que este trabalho pode se estender às operações que também podem ser representadas nos quatro registros e que auxiliariam a desenvolver competências de representação de entidades matemáticas e manipulação de símbolos, podendo possibilitar a formalização do trabalho matemático.

O segundo grupo corresponde ao conjunto de atividades onde a ênfase é dada ao **nível mobilizável**, que corresponde às atividades em que ainda se trabalha com os registros de representação algébrico intrínseco e explícito, como registro da língua natural, como o registro de representação geométrico (caso contínuo) e com o registro de representação figural (caso discreto), mas não se trata apenas de trabalhar uma conversão de registros de representação, pois neste grupo de atividades os estudantes devem associar a representação a uma situação de forma a encontrar sua solução, isto é, inicia-se um trabalho onde os estudantes necessitam pensar

matematicamente para resolver problemas por meio da utilização de modelos matemáticos, mesmo que bastante simples.

O terceiro grupo corresponde aquele em que a ênfase é dada ao **nível disponível**, onde o estudante deve reconhecer na atividade que lhe é proposta a noção matemática em jogo para que seja capaz de utilizar o modelo matemático adequado para resolvê-la, isto é, para os estudantes da educação básica pode-se dizer que estes começam a desenvolver competências associadas ao raciocínio matemático e as possibilidades de comunicação em matemática, pois neste grupo supõe-se que os estudantes são capazes de resolver situações de diferentes contextos utilizando como ferramenta matemática para sua solução a noção de número racional por meio de suas representações.

Discussão e conclusão.

A análise epistemológica nos mostra a alta complexidade existente na construção da noção de número e que esta construção só pode ser percebida quando fundamentada nos conhecimentos de lógica, teoria dos conjuntos e álgebra. Certamente, não podemos introduzir o conceito de número com toda esta fundamentação teórica na educação básica e mesmo em determinados cursos do ensino superior, mas nos parece importante que os professores discutam este desenvolvimento histórico para que possam compreender melhor as dificuldades de seus alunos, pois é na história que encontramos os obstáculos epistemológicos², que segundo Brousseau (1987) devem ser integrados explicitamente ao saber transmitido aos estudantes, lembrando aqui que ao falar de saber estamos nos referindo ao saber escolar³.

² **obstáculos epistemológicos:** (ponto de partida histórico) Trata-se dos obstáculos que tiveram um papel importante no desenvolvimento histórico dos conhecimentos e que a rejeição deve ser integrada ao saber transmitido. Identificar os obstáculos epistemológicos é fazer a triagem entre as dificuldades encontradas daquelas que são verdadeiramente incontornáveis. (BROUSSEAU, 1983)

³ **saber escolar:** é aquele cujo estudo está no coração da didática da matemática e das outras disciplinas. Ele é constituído por certo número de saberes e de saber-fazer que são socialmente identificados como objetos de ensino. Ele é elaborado pelo Sistema Ministerial, isto é, fora do Sistema Escolar estrito. Os livros didáticos que escapam parcialmente do Sistema Ministerial desempenham um papel importante sobre os saberes escolares, e poderão assim transformar substancialmente os objetos elaborados pelo Sistema Ministerial. (CHEVALLARD, 1991)

A análise didática em termos de níveis de conhecimento esperado dos estudantes nos permitiu observar que os diferentes níveis devem ser tratados do ponto de vista da representação das noções a serem introduzidas. Sendo assim, nos parece interessante que os alunos trabalhem continuamente as conversões das diferentes representações para que sejam capazes de escolher as mais adequadas sem que seja feito um apelo explícito. Foi possível verificar também que mesmo com um trabalho mais centrado nas representações e suas conversões, sem desenvolver a noção propriamente dita de números racionais, é possível propor uma abordagem que leve em conta a possibilidade de desenvolvimento das diferentes competências para um trabalho flexível e autônomo em matemática conforme a classificação nos oito pólos proposta por Artigue (2004).

Além disso, sabemos que um dos registros de representação semiótica é a linguagem natural, portanto, nos parece interessante trabalhar a conversão entre este registro e os diferentes registros matemáticos de uma determinada noção em todas as etapas da escolaridade, pois este trabalho é que poderá auxiliar no desenvolvimento do pólo comunicar em, com e a propósito da matemática. Este pólo quando atingido pelo estudante lhe dará condições de desenvolver um trabalho científico, uma vez que ele não se limita apenas a aplicar seu conhecimento matemático, em particular, em atividades do contexto escolar, mas se torna capaz de planejar, justificar e controlar o trabalho matemático que desenvolve nas diferentes tarefas que lhe são propostas, tanto no âmbito escolar como em sua trajetória profissional.

Referências

- ARTIGUE, M., *Compétences, Habilités et Attitudes*, 2004 Disponível em: <[http://64.233.187.104/search?q=cache:0tyNFqLq3N8J:www.ac-grenoble.fr/maths/perso/OKJPT/APMEPgrenoble2004%2520\(relu%2520JPT\).pps+%22Michele+Artigue%22&hl=pt-BR&ie=UTF-8](http://64.233.187.104/search?q=cache:0tyNFqLq3N8J:www.ac-grenoble.fr/maths/perso/OKJPT/APMEPgrenoble2004%2520(relu%2520JPT).pps+%22Michele+Artigue%22&hl=pt-BR&ie=UTF-8)>, acesso em: 05 out. 2009.
- BESNARD, F., *Autour du concept de nombre*, 2000. Disponível em: <<http://www.math.jussieu.fr/~besnard/nombres/nombres/node3.html>>, acesso em: 02 nov. 2009.
- BROUSSEAU, G., *Études en didactique des mathématiques*, IREM, Université de Bordeaux I, 1987.
- _____, G., Les obstacles épistémologiques et les problèmes em mathématiques, *Recherche em didactique des mathématiques*, volume 4.2., La Pense Sauvage, Grenoble, França, 1983.
- CHEVALLARD, Y., *La transposition didactique*, La Pensée Sauvage, Grenoble, França, 1991.
- _____, Y., Les outils sémiotiques du travail mathématique, *Petit-x*, n° 42, 33-57, 1996.
- DIAS M. A., *Les problèmes d'articulation entre points de vue «cartésien» et «paramétrique» dans l'enseignement de l'algèbre linéaire*. Thèse de doctorat de l'Université Denis Diderot – Paris 7. Editor: IREM, Paris, 1998.
- DOUADY, R., *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématique*. Thèse de doctorat d'état de la Université Paris VII, Editor IREM, Paris, 1984.
- DORIER, J.L. *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*. La Pensée Sauvage, Grenoble, 1997.
- DUBINSKY, E., Reflective abstraction in advanced mathematical thinking, in *Advanced Mathematical Thinking*, D. Tall (ed.), Dordrecht: Kluwer, 95-123, 1991.
- DUVAL, R., *Sémiosis et pensée humaine*. Peter Lang, Paris, 1995.

HILLEL, J., SIERPINSKA, A., On one persistent mistake in linear algebra. In: *Proceedings of the XVIII International Conference of PME*, Portugal, vol 2, 65 – 72, 1994.

PAVLOPOULOU, K., *Propédeutique de l'algèbre linéaire : la coordination de représentation sémiotique*. Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur (Strasbourg 1) prépublication de l'Institut de Recherche Mathématique Avancée, 1994.

PAVLOPOULOU, K., Coordination des registres de représentations sémiotiques, en *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*. La pensée sauvage, éditions, 1997.

PIAGET, J., GARCIA.R. *Psychogenèse et histoire des sciences*, Flammarion, Paris, 1983.

ROBERT A., Quelques outils d'analyse épistémologique et didactique de connaissances mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Actes de la IXième école d'été de Didactique des Mathématiques*. Éditeur: Association pour la Recherches en Didactique des Mathématiques, 192 – 211, 1997.

ROBERT, A., TENAUD, I., Une expérience d'enseignement de la géométrie en terminale C, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, volume 9.1., La Pensée Sauvage, 31-70, 1989.

ROGALSKI, M., Manuscrits du séminaire à São Paulo, Brasil, 1995.

SFARD, A., On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on process and objects as different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics*, K22(1), 1-36, 1991.

TALL, D., A versatile theory of visualisation and symbolisation in mathematics, *Invited plenary lecture at the CIAEM Conference*, Tome I, Toulouse, France, 15-26, 1994.