REFLEXÕES SOBRE MODELAGEM MATEMÁTICA CRÍTICA E O FAZER MATEMÁTICO DA ESCOLA

Renato Borges Guerra (UFPA)
Francisco Hermes Santos da Silva (UFPA)

Resumo: Considerando a necessária tomada de consciência da matematização das ações sociais desejada pela educação matemática crítica e sobre as dificuldades de professores e estudantes em modelagem matemática de situações reais apontadas por diferentes autores, refletimos sobre o fazer de modelagem matemática nas práticas sociais e o fazer matemático formal de modo a contextualizar esses afazeres no ambiente de ação escolar sob a ótica da teoria antropológica do didático. A partir de objetos matemáticos do ensino básico, exploramos exemplos escolares e a análises de situações de ações sociais buscando evidenciar que é possível construir sequências didáticas, ou transposições didáticas, que podem contornar dificuldades na construção de modelos de situações reais e revelem o fazer de modelagem crítica como um fazer matemático da escola.

Palavras-Chave: Modelagem Matemática; Modelagem Sócio-Crítica; Teoria Antropológico do Didático (TAD)

REFLECTIONS UPON CRITICAL MATHEMATICAL MODELING AND SCHOOL MATH TEACHING

Abstract: Authors reflect upon mathematical modeling application in social practices and math formal teaching in school environment under the perspective of Anthropological Theory of the Didactic (TAD). This is a necessary exercise given the essential awareness in the *mathematisation* of social actions as required for a critical math education, especially considering teachers and students difficulties as reported by a variety of authors. By using basic education math objects research explores school examples and analyses social situations in search for evidence which shows that it is possible to build teaching sequences or teaching transpositions to bypass difficulties in the construction of real life models and reveal critical mathematical modeling as a legitimate school math teaching approach.

Keywords: mathematical modeling; sócio-critical modeling; Anthropological Theory of the Didactic (TAD).

1- Introdução

Nas atividades humanas, mesmos nas cotidianas, há necessidades de tomadas de decisões que exigem relacionar, comparar, simular e quantificar grandezas ou objetos. Por essas e outras razões, é notório afirmar que os desenvolvimentos das capacidades de utilizar à matemática no enfrentamento de situações e de interpretar informações estatísticas do mundo real são indispensáveis para formação do cidadão da sociedade moderna (PONTE, 2002).

Skovsmose (1994, 1995, 1998, 2001, 2004), Skovsmose e Yasukawa (2004), buscam evidenciar a matemática como parte integrante da realidade, presente em diferentes contextos e situações, não somente como uma linguagem viva a expressar e justificar os fazeres dos sistemas econômicos, tecnológicos e sociais, mas também como produtora de tecnologias e de legitimação de ações sociais. Os autores apontam intencionalidades no fazer matemático que atendem interesses e intenções na produção desses sistemas que, além de poder nos submeter a riscos às vezes catastróficos e não-controláveis por quaisquer outras tecnologias que possam ser criadas, controlam decisões e nessas imbricadas relações políticas, tecnológicas e econômicas se evidenciaria a idéia de que a matemática pode gerar, influenciar e limitar ações sociais**.** Configurar-se-ia, assim, um misto de conhecimento e poder e, no núcleo desse misto, encontrar-se-ia a matemática em ação**.** Nesse sentido, parece se justificar a alfabetização matemática para a formação do sujeito partícipe da sociedade, consciente da importância do papel desempenhado pela matemática no mundo, como orientadora de decisões e reflexões críticas, como deseja a Organisation for Economic Co-operation and Development Programme for International Student Assessment.

A grande questão com que nos defrontamos parece ser a de saber o que devemos entender por alfabetização matemática, às vezes referida como mathemacy, numeracia ou ainda literacia. As opiniões variam consideravelmente e podem ser vistas como num *continuum* em que um extremo a alfabetização matemática é "considerada como a entrada à matemática e no outro extremo, como meio de interagir com os aparatos matemáticos na sociedade" (JULIE, 2006, p-62). Juilie (2006) destaca a alfabetização matemática crítica como uma região da alfabetização matemática fundamentada no paradigma da educação matemática crítica (SKVOSMOSE, 1994) em que é anunciado que o essencial para esta é "se é ou não possível desenvolver uma competência, mathemacy, que tenha um potencial semelhante ao da alfabetização e que possa ajudar os estudantes a reinterpretar sua realidade e de propor uma realidade diferente?". (SKOVSMOSE, NIELSEN e COLIN POWELL, 1995; JULIE, 2006).

Em que pese a complexidade das questões anunciadas, os entendimentos nos encaminham ao ensino que privilegie a análise de situações em contextos reais, no sentido da alfabetização matemática crítica que "tem foco sobre a cidadania e interesses nos modelos matemáticos que estruturam a vida social" (JULIE, 2006, p.63). No entanto, o ensino envolvendo modelagem de situações reais revela dificuldades, mesmo na presença de um bom repertório matemático como apontam os questionamentos do tipo "Why do students who score well on traditional standardized tests often perform poorly in more complex "real life" situations where mathematical thinking is needed?"[5] (LESH & SRIRAMAN, 2005a, p. 7), ou ainda, "What are the connections between students' abilities in standardized tests and their abilities working with messy "real life situations" involving mathematics[6] (i.e. situations where mathematical modeling is

[5] Por que razão alunos bem sucedidos em testes padronizados tradicionais frequentemente apresentam mal desempenho em situações mais complexas de "vida real" onde é necessário pensamento matemático?
[6] Quais são as conexões entre as habilidades dos alunos em testes padronizados e suas capacidades trabalhando no confuso mundo das "situações de vida real" envolvendo matemática?

emphasized?) (IVERSEN & LARSON, 2006, p.281), que, de certo modo, confirmam a posição de Ponte (2002) de que estudar matemática abstrata, nomeadamente álgebra e geometria, não levaria necessariamente ao desenvolvimento da numeracia. Isso se evidencia mais ainda quando nos damos conta dos trabalhos de Grandsard (2005) e Julie (2006).

Grandsard observa que embora os estudantes sejam excelentes em memorizar fatos, fórmulas e provas, não respondem bem em aplicações da matemática, ou mesmo em reconhecê-la, em contextos incomuns para eles e, então, levanta questões sobre a eficiência do ensino da matemática para alertar que tais dificuldades dos estudantes são também dos professores já que "alguns dos nossos futuros professores mestre em matemática não puderam traduzir ao nível do liceu. Como será possível que ensinem modelagem para seus alunos?" (GRANDSARD, 2005, p.7). Julie (2006), por sua vez, analisando a alfabetização matemática na África do Sul, também aponta manifestações de docentes experientes e hábeis sobre a dificuldade de ensinar a alfabetização matemática e imputa, entre outros fatores possíveis, às deficiências de análise didática e, entre elas, cita a pouca experiência em desenvolvimento experimental do ensino e a dependência epistêmica de especialistas ao esperarem uma transposição didática (CHEVALLARD, 1999) de especialistas da alfabetização matemática para um fazer elementar escolar.

Sob as dificuldades do tipo apontadas e buscando o desejado para a alfabetização matemática crítica, Ponte (2002) entende que a alfabetização matemática deve ser assumida como uma competência interdisciplinar que deve ser trabalhada em todas as disciplinas escolares que usam informação de natureza numérica e outros conceitos matemáticos que nos levam ao entendimento sobre Modelagem Matemática (MM) como um dos veículos da alfabetização matemática. Por outro lado, Barbosa (2006) propõe a MM sócio-crítica que assume a modelagem de situações reais do entorno social do aluno por meio de uma articulação discursiva entre o domínio da matemática pura, da técnica de modelagem e da reflexão sobre a situação que busca, de certo modo, atender o desejado pela educação matemática crítica.

Ambas as abordagens poderiam evitar, de certo modo, em nossa opinião, dificuldades dos tipos apontadas por Grandsard, mas as propostas desses autores correm riscos de restringir-se a uma reflexão sobre a situação particular analisada, embaçando o fazer reflexivo matemático na situação e alijá-lo como parte integrante das complexidades sociais e humanas envolvidas no processo de análise, além de não assegurar o fazer da generalização e da universalidade indispensáveis, entre outros aspectos, para a tomada de consciência do fazer matemático no contexto da situação e o consequente valor dos modelos matemáticos para as sociedades.

Desse modo, torna-se imperioso refletirmos sobre as complexidades envolvidas no processo de MM na escola que evidencie, mesmo que parcial, o desejado pela educação matemática crítica considerando, sobretudo, as dificuldades aqui apontadas e a modelagem sócio-crítica de Barbosa, mas sem perder de vista o que diz Yasukawa e Colaboradores (1995; p. 816) sobre a numeracia; como "mais do que matemática, como a capacidade de situar, interpretar, criticar e, talvez até mesmo criar, a matemática em um contexto, tendo em conta nisso tudo a matemática e as complexidades sociais e humanas envolvidas nesse processo", ou seja, o contexto da situação e o fazer matemático, como um fazer humano e social, estão incrustados um no outro como parte única e singular do processo de modelagem e, desse modo, os sujeitos que modelam são também partes integrantes do contexto da situação analisada.

Esse pensar nos conduz ao entendimento da atividade de MM na escola como uma atividade matemática do modo postulado por Chevallard, Bosch e Gascon (2001) e da transposição didática no sentido de "extrair um elemento de um contexto (universitário, social, etc.) para (re)contextualizá-lo no ambiente sempre singular e único da sala de aula" (D'AMORE, 2007, p.226). Tal entendimento da MM de situações reais nos permite vê-la como uma atividade humana pertinente a diferentes práticas sociais, inclusive de matemáticos no sentido de promover e ser promovida pelo formalismo matemático, por tecnologias dele decorrente como o computador e que pode levar a uma iniciação de uma consciência crítica de que os modelos matemáticos são construtos de sujeitos culturais, formados no seio de grupos com quem compartilham atividades, e, portanto, que tais modelos matemáticos, como saberes matemáticos, "são bens culturais que são produtos da atividade humana em sua prática de modificar e construir sua realidade, tanto natural como social" (SIERRA, 2005, p.197).

2-O fazer matemático e modelagem matemática

Como destacamos, estudar matemática abstrata, embora necessária, não garante sucesso em MM na escola e sobre isso postulamos que um dos aspectos, que levam às dificuldades docentes em MM, decorre da crença desta como uma estratégia ou metodologia de ensino fundamentada no fazer do matemático aplicado. Acreditariam que esse fazer consiste em "fotografar" parte de uma realidade para em seguida a "revelar" em equações matemáticas com precisão inumana, neutra, fiel a realidade objetiva e que, para isso, são requeridos saberes específicos da "revelação" não estudados na formação docente. Nesse sentido, revelar-se-ia a subordinação dos professores e de estudantes, a epistemologia de especialistas, no sentido descrito por Julie (2006), ou seja, esperariam uma transposição didática (CHEVALLARD, 1999) por especialistas da educação matemática de modo a tornar possível o fazer da MM escolar.

Acreditamos que essa crença docente se constrói na baixa ênfase no enfrentamento de situações de modelagem no ensino escolar, com mais vigor na sua formação inicial docente, e eclode na concepção de que análises de situações reais exigem "adequar" métodos, algoritmos e fórmulas e que, isso, ainda pode demandar o uso de computadores ou máquinas específicas para por a matemática em ação - como as máquinas ditas financeiras que foram construídas para atender a interesses de grupos sociais específicos. Em que pese esta meia verdade, é preciso ter em conta que o ensino não tem se mostrado suficiente para dar conta do fazer, "do adequar" e para evidenciar a necessidade do fazer de métodos, fórmulas e algoritmos que constituem a matemática automatizável. De outro modo, a matemática escolar poderia até ser suficiente para o entendimento da ação como automação, mas não seria suficiente para o entendimento de que estas não se confundem como mostram resultados previstos pela automação que não são verificáveis em ação, e fazer, com isso, o emergir das necessidades para o desenvolvimento de novos métodos e algoritmos para um mesmo modelo matemático.

Assim, entender o porquê de tantos métodos para um mesmo modelo, como evidencia o estudo escolar da resolução de sistemas de equações algébricas lineares do ensino fundamental que adentra o ensino médio e depois o superior, poderia evitar quando da busca desse entendimento, por exemplo, de serem encaminhados à concepção de que tal preocupação não é da matemática, mas da matemática aplicada. Mais precisamente de serem encaminhados para a concepção binária, pura e aplicada, da matemática e de que a segunda não é objeto da matemática básica, mas de estudos científicos e tecnológicos que são evidenciados por meio das disciplinas científicas escolares e ratificados no do ensino de graduação nessas áreas.

Para entendermos esse fazer matemático que ignora as situações reais na construção do conhecimento matemático, mais precisamente, o fazer formal destituído de significados no sentido referenciado amiúde pelos estudantes de que, na matemática vis ambem tema mostrou-se inconsistente como indicou Russel em 1902 com seu paradoxo de Russel. "existem regras através das quais se obtém fórmulas a partir de outras, mas as fórmulas não são acerca de nada, são apenas cadeias de símbolos" (DAVIS e HERSH, 1995, p. 300), é preciso levar em conta que, em muito, é herdado de grande parte da comunidade matemática acadêmica que não associa o fazer matemático com a modelagem de situações em contexto real acreditando, como posto por Russel (1965, p. 50), que não se está fazendo matemática quando se encontra um resultado a partir de hipóteses particulares como ocorre nessas situações.

Esse pensar tem suas raízes na escola logicista de pensamento matemático de redução da matemática à lógica que visava criar uma linguagem universal, uma espécie de cálculo universal para o raciocínio de modo a assegurar as certezas do pensamento humano. Nesse sentido, de mecanização do raciocínio primando pela consistência de modo a assegurar as certezas do pensamento é também o desejado pela escola formalista de pensamento matemático que por meio de seu principal precursor, Hilbert, desejava saber se uma prova de toda assertiva poderia ser realizada por um procedimento mecânico, ou seja,

> (...) Hilbert estava pedindo nada menos do que a subordinação de toda a matemática, com seus conceitos abstratos e sutis, uma rotina mecânica – mecânica em suas regras de formação e regras de inferência, mecânica na verificação de suas provas, mecânica em sua capacidade de decidir questões matemáticas sem pensamento, intuição, significado, ou deliberação. Mecânica como em uma máquina. E mecânica, deixe-me acrescentar imediatamente, de um modo que parece quase inumano. (BERLINSKI, 2002, p.152).

Como podemos notar a concepção do fazer matemtico como um fazer quase inumano, destituído de significados, sem relações com a realidade, com ênfase nos métodos, algoritmos e fórmulas acerca de nada, privilegiando a mecanização do raciocínio consistente de modo a assegurar a certeza do pensamento, h muito tem sido cuidado para assegurar o fazer dos matemáticos, e, como tal, subjaz o fazer matemático acadêmico.

Assim, a busca de um fazer matemático escolar mais próximo do fazer acadêmico formal, despista as construções de modelos para anlise de situações reais e contribui para tornar invisíveis as articulações entre objetos matemticos no fazer de diferentes tipos das atividades humanas. Tal atitude, em contraste com a óbvia ação da matemática na ciência e tecnologia, fomenta a concepção binária da matemática, pura e aplicada, e com isso a crena do fazer de MM como fazer especialista de matemáticos aplicados.

No entanto, torna-se necessário observar dois aspectos sobre MM. Primeiro que modelar uma situação real ou hipotética uma atividade matemática e como tal um fazer que se constrói com o formal matemático. Segundo, e não menos importante, que modelar uma situação real não uma atividade restrita do matemático, em particular do matemático aplicado.

No primeiro aspecto, importante ter em conta que a matemática se desenvolve e evolui por foras internas concernentes s questões da matemática e por forças externas, decorrentes das necessidades sociais para o enfrentamento de situaões reais de interesses. Examples are societal needs, money, and, not least, war to mention a few. For example, the U.S. funding of research after World War 2 and during the Cold War was a major (outer) driving force for several scientific and technological disciplines at the time[7]. (JANKVIST, 2009, p.75). Nesse sentido, a MM revelada como uma prática reflexiva que busca atender intencionalidades e interesses sociais e que, para tal, articula e integra fórmulas, métodos, e algoritmos j bem

[7] Exemplos são necessidades sociais, dinheiro e, não menos importante, a guerra, para mencionar algumas. Por exemplo, o financiamento de pesquisa pelos EEUU, após a 2ª guerra mundial e durante a Guerra Fria foi um grande (exterior) motor para várias disciplinas científicas e tecnológicas no momento.

estabelecidos ou que são desenvolvidos no processo, mas que se justificam nas regras de inferência e sintaxe do fazer formal matemático. Portanto, o fazer de modelagem, de fórmulas, mtodos, e algoritmos constituem partes do pensamento matemático e seus usos são indispensáveis para pensar, para "fazer matemática, pois, grosso modo, são snteses de elaborações de pensamentos que quando evocados, não necessitam mais ser (re) elaborados.

Adicionalmente, as articulações e integrações de fórmulas, métodos e algoritmos promovem um pensar matemático-computacional para atender práticas sociais que exigem modelos com métodos, algoritmos e fórmulas com universalidade e automação para cada tipo de situação de interesse, levando em conta o ganho simultneo de tempo e esforço intelectual, de modo a tornar o fazer matemático-computacional menos árduo nas construções de outras fórmulas, mtodos, e algoritmos em novas situações. E que, por isso, se constituem no somente objetos matemáticos, mas também ferramentas do aparato matemático da sociedade que precisam ser tornados simples e acessíveis a todos que deles necessitem em suas práticas sociais, inclusive na escola.

Quanto ao segundo aspecto, preciso destacar que as construções de modelos matemticos nas práticas sociais, por exemplo, das economias, ciências e tecnologias, são realizadas por equipes de especialistas, em conjunto ou isolados por área de conhecimento, que podem contar ou não com a colaboração de matemáticos aplicados, pois modelar não uma tradução do real para a linguagem matemática. Exige uma compreensão objetiva do que se deseja do contexto da situação, e, portanto, de uma descrição nas linguagens de conhecimentos específicos do contexto da situação a ser enfrentada ou desejada.

Como uma descrição, um modelo matemático não descreve necessariamente a situaão descrita, mas o produto da relação do sujeito com a descrição, subordinada as limitações das linguagens matemáticas, e não raro dos recursos computacionais. Pois tal limitação pode, durante o processo de MM, exigir novas descrições da situação nas linguagens específicas ou, at mesmo, se mostrar incapaz para a construção de um modelo matemático, por exemplo,

> pode haver um local sagrado para a população indígena que conhecida tambm por ser rico em minerais. Pode muito bem ser possível analisar os custos e benefícios econômicos da

> exploração mineral do stio por meio de uma detalhada descrição matemática, entretanto tanto inadequado e impossível "matematizar" o significado cultural do sítio. (CHRISTENSEN, SKOVSMOSE, YASUKAWA, 2008. p.78).

Além disso, o desejado de uma situação, que participa do contexto da situação pode não se revelar, necessariamente, na descrição. É possível, por exemplo, que ao escolher a definição geométrica de parábola se construa uma antena parabólica sem se dar conta das propriedades físicas da reflexão e refração que permitem a compreensão objetiva da situação, ou seja, de captar sinais e potencializá-los em um ponto, pois tais saberes não estão explícitos nos modelos matemáticos de construção de uma parábola.

De outro modo, o domínio exclusivo de saberes matemáticos pelo sujeito pode não ser suficiente para permitir a ele vislumbrar, necessariamente, a complexidade de tessituras entre os interesses, intenções e outros saberes que envolvem um modelo matemático do qual ele não tenha participado de sua construção. Nesse sentido, modelar uma situação ou identificar um modelo matemático que governa uma situação, exemplificado na construção da parábola, pode se revelar uma tarefa complexa, senão, impossível de ser realizada no estrito domínio matemático. Isso pode contrariar a concepção de MM desejada pela alfabetização matemática, como uma competência revelada pela capacidade do sujeito de identificar aspectos relevantes, variáveis, relações ou hipóteses de uma situação e traduzir isto num problema matemático (NISS, BLUM & GALBRAITH, 2007), pois tais habilidades não, necessariamente, se revelariam em situações reais inusitadas para o sujeito ou que não tenham significados outros não-matemáticos e de interesses para ele, mesmo que o sujeito seja um habilidoso matemático, o que nos leva a compreender, de certo modo, as dificuldades do processo de MM na escola, por estudantes e professores, citadas por Grandsard.

Para pensar o processo de modelagem de uma situação real é preciso observar que a construção de um modelo matemático de uma situação real, como todo construto humano e social, é um produto de experiências dos sujeitos e como tal envolve intenções, interesse, saberes, crenças e emoções que não se mostrarão visíveis em um modelo matemático de uma situação real, como alerta Barbosa (2006, p. 296) de que em Busse & Kaiser (2003) e Busse (2005) "there is evidence that the problem context may be reconstructed in different ways by students, having diverse effects on them, since each has his/her own experiences and beliefs".[8]

Contextualizando esse pensar no ensino básico, podemos evidenciá-lo, por exemplo, pelos problemas ditos de "regra de três" que são objetos de estudo no ensino fundamental. Esse tema que julgamos ser de extrema relevância para o estudo de MM por tratar de um tipo de relação entre grandezas presente em inúmeros modelos matemáticos de diferentes áreas do conhecimento.

O ensino de regra de três, em geral, está vinculado a um tipo de situação já realizada em que são conhecidos os valores de diferentes grandezas de interesses e deseja-se encontrar para essa situação, implicitamente sob as mesmas condições, o valor de uma dessas grandezas para novos valores das demais e associada a isso um tipo de técnica como a do tipo descrita por Trajano (1927). Assim, mais tarde, situações assim descritas quando enfrentadas pelo sujeito em outras etapas da vida como estudante ou profissional, inclusive no ensino, são rapidamente interpretadas como uma situação do tipo 'regra de três' e trazem consigo a técnica para enfrentá-la.

No entanto, quando as situações que não apresentam explicitamente as características acima descritas, as dificuldades de professores se revelam como a por nós vivenciada com um grupo de professores em um curso de educação continuada. A situação exigia obter de uma expressão algébrica para cálculo da área de um jardim em forma de um setor circular conhecido o seu perímetro. As dificuldades se manifestaram em primeiro momento por não se lembrarem de argumentos geométricos que poderiam levá-los à expressão procurada. Quando vislumbradas as grandezas envolvidas como a medida do raio, o comprimento de arco e a relação de proporcionalidade entre essas

---

[8] Há evidências de que o contexto do problema pode ser reconstruído de maneiras diferentes pelos alunos, com diversos efeitos sobre eles, pois cada um tem suas próprias experiências e crenças.

medidas e a medida de área, não sabiam como expressar isso algebricamente. O problema escrito como uma situação de regra de três foi determinante para produzir o modelo para a situação.

Como podemos destacar a situação descrita, ou seja, interpretada na forma de um problema de regra de três evocou a técnica como a citada por Trajano, que por sua vez remeteu para o modelo. A situação interpretada, segundo um tipo de situação com uma técnica de resolução já presente no repertório de experiências matemáticas dos sujeitos, acabou por determinar o modelo, evidenciando que situações distintas interpretadas de modo similar podiam ter um mesmo tipo de formulação e então concluírem que uma expressão algébrica do tipo $y = ax$ não é um amontoado de letras, mas uma relação entre grandezas que ganha significados em situações descritas algebricamente, como por exemplo, $e = vt$ ou $f = ma$ estudadas no ensino médio, ou seja, é um tipo de modelo matemático que dá conta de diferentes situações.

Oportunamente, a riqueza de situações que podem ser exploradas com a regra de três podem também nos ajudar a desvendar parte da complexidade de "adequação" de fórmulas no processo de modelagem, pois evidencia que as relações entre as grandezas são em geral estabelecidas pela relação do sujeito com o contexto da situação frente ao repertório de experiências do sujeito. Ou seja, não é uma relação pré-existente à espera de ser descoberta como podem nos fazer acreditar. Lima (1986), por exemplo, sobre os problemas de regra de três, destaca que é preciso identificar por um critério prático e simples da proporcionalidade (direta - para algumas grandezas, inversa - para outras), e comprovar a relação de proporcionalidade entre as grandezas envolvidas.

O fazer cultural matemático, mesmo o escolar, evidencia o fazer da regra de três sem verificações de proporcionalidade que se mantém vivo em inúmeros exemplos de modelos matemáticos, encontrados na escola e na academia, envolvendo grandezas relativamente fáceis de serem observadas não-proporcionais, mas que são assumidas como tal, como nos mostram vários modelos matemáticos da física, os problemas de regra de três que envolvem grandezas como metros quadrados de muro, número de homens e de dias, os modelos ecológicos/demográficos que relacionam a taxa de crescimento populacional com a população presente, e muitos outros, da química, da biologia estudados e/ou aplicados na escola, na academia e em outras instituições.

Para ilustrar que as grandezas e as relações entre elas são escolhas do sujeito que atendem intencionalidades que não se mostram na situação, recorremos ao modelo empregado pelo IBGE (2008) para estimar populações $P_i(t)$; i = 1, 2, 3,... , n, de municípios de uma região com população estimada *P(t)* em um momento *t,* com $P(t)=\sum_{i=1}^{n} P_i(t)$. Os modeladores assumem que o crescimento da população de cada município *i,* , depende do crescimento da população da região *P(t)* numa relação "linear" da forma em que o coeficiente é *coeficiente de proporcionalidade* do incremento da população do município *i* em relação ao incremento da população da região, e é o coeficiente linear de correção. Desse modo, conhecido as populações de um município *i,* , e de sua região, *P(t),* em dois momentos t_0 = 2000 e t_1 = 2007, por exemplo, determinamos os coeficientes e para aquele município resolvendo o sistema de equações, o que nos permite fazer estimativa da população em outro momento, *t* = 2008, por exemplo.

Mas, por outro lado, podemos pensar que a população de uma região, o Brasil, por exemplo, como uma função do tempo expressa pelo polinômio . Assim, conhecidas as populações do Brasil em 1950, 1960 e 1970 podemos estimar por esse modelo a população do Brasil em 1980. Consultando os arquivos do IBGE, encontramos que as populações do Brasil 1950, 1960 e 1970, são respectivamente em milhões da ordem de 51,944 , 70,07 e 93,138 e assumindo que *P(0)* = 51,944, *P(10)* = 70,070 e *P(20)* = 93,138 isso nos leva ao seguinte sistema de equações lineares.

$$\begin{cases} a.0^2+b.0+c=P(0) \\ a.10^2+b.10+c=P(10) \\ a.20^2+b.20+c=P(20) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0a+0b+c=51,944 \\ 100a+10b+c=70,070 \\ 400a+20b+c=93,138 \end{cases}$$

De onde encontramos os valores de *a* = 0,02471, *b* = 1,5655 e *c* = 51,944 que determinam

P(t) = 0,02471t^2 + 1,5655t + 51,944 e $P(30) = 0{,}02471(30)^2 + 1{,}5655(30) + 51{,}944 = 121{,}148$ que correspondente à população no ano de 1980. A população do Brasil em 1980, conforme o arquivo do IBGE é da ordem de 119,002 milhões de habitantes e se encontra numa faixa de dois por cento do valor estimado, que o torna um valor relativamente aceitável, pois outras propostas de relações da população com o tempo podem ser estabelecidas e podem gerar resultados melhores que o encontrado.

Não há um critério matemático que permita por simples observação, distinguir um arco de parábola, como assumido no exemplo acima, do arco de exponencial/logaritmo, ou mesmo do arco de uma cúbica, para citar uns poucos exemplos, e assim "Many models can be imagined for one situation, and many different situations may be represented by the same model. A difficult task is to choose, if possible, the best model"[9] (REVUZ,1971, p.49). Nesse sentido, não há um modelo certo e outros errados para uma situação, mas um modelo que pode ser legitimado socialmente para a situação por produzir soluções aceitáveis socialmente para diferentes situações do mesmo tipo.

No entanto, a concepção binária da matemática no ensino básico não permite a tomada de consciência do fazer de modelagem. Essa concepção evidenciada no trabalho de Barbosa (2006) quando distingue claramente os domínios da matemática pura e das técnicas, acreditamos que se consolida pela não tomada de consciência do fazer paramatemático dos matemáticos ao longo do desenvolvimento e evolução da matemática que é tão bem representado pelos "números complexos que foram utilizados como ferramentas para resolver equações algébricas em 1500, mas que se tornaram objetos estudos próprios mais tarde." (JANKVIST, 2009, p.74). Nesse sentido, não há uma matemática binária no fazer escolar, mas um fazer que frequentemente use noções matemáticas unicamente "como ferramentas transparentes, não questionadas ou até mesmo inquestionáveis, e que são consideradas somente úteis para descrever outros objetos" (CHEVALLARD, BOSCH e GASCÓN, 2001, p. 75).

---

[9] Muitos modelos podem ser imaginados para uma situação, e muitas situações diferentes podem ser representadas pelo mesmo modelo. É uma tarefa difícil escolher, se é que é possível, o melhor modelo.

Por isso, de modo distinto de Barbosa, entendemos que a matemática básica escolar não binária, pura ou aplicada, mas que o formal e o técnico são ou precisam ser faces indistinguíveis do mesmo fazer, como mostra o fazer dos matemticos ao longo do desenvolvimento e evolução do conhecimento matemático que se nutriu e se nutre, não somente das questes que emergem no interior da matemática, mas também das que emergem no enfrentamento de situações reais. Defendemos a MM de situações reais no ensino bsico como produtora e produto do fazer formal matemático que destaca, entre outras coisas, o fazer de previsão – a mecanização do raciocínio com a segurança da certeza do pensamento preconizada pelas escolas de pensamento matemático citadas - que permite gerar e controlar realidades por meio de modelos com a garantia dos resultados obtidos dedutivamente por esse fazer formal.

A intenção de previsibilidade que permite transformar os modelos matemáticos em molas propulsoras da matemtica em ação nas sociedades, nas economias e nas ciências e tecnologias em geral, como alerta a educação matemática crtica, revela o sujeito como parte integrante e inseparável do contexto da situação que modela medida que esse fazer de previsibilidade atende a desejos dos sujeitos integrantes do contexto da situação.

4- A situação, o modelo e o método

Lembrando que a MM de situações reais pode depender de um bom repertório teórico matemático, mas que depender, sobretudo, de um bom repertório de experiências legitimadas e dominadas pelo sujeito em modelagem de situações do seu entorno social que se revela, por exemplo, nas práticas humanas sociais da economia, das ciências e tecnologias, cujos afazeres são marcados pela recorrência a modelos e métodos matemáticos j socialmente significados e legitimados no fazer regular de suas atividades, ou pela criação de novos modelos e novos métodos por meio de articulação e integração de métodos e modelos j significados e legitimados.

E assumindo esses afazeres como um fazer matemtico que permite ao homem a previsibilidade de e para situações reais de interesse sociais, reivindicamos o olhar para esse fazer como uma atividade humana em busca de atender interesses e intencionalidades de grupos sociais, que realizadas regularmente são modeladas em praxeologias que se organizam em tarefas que exigem tcnicas fundamentadas em tecnologias de teoria matemáticas j criadas, ou que se desenvolvem no seio dessas praxeologias, mais precisamente, como postula a teoria antropolgico do didático (TAD), de que atividade matemática uma atividade humana e "pode ser identificada como uma atividade de MM" (CHEVALLARD, BOSCH e GASCÓN, 2001, p. 50) ou ainda que atividade matemática , essencialmente, uma atividade de modelagem em si (GARCIA et al, 2006, p.232) e, como j evidenciamos, inclusive modelagem de situações reais. Tal entendimento nos permite pensar que o mesmo tipo de atividade pode ser transposto, no sentido da transposição didática, para o ambiente singular da sala de aula.

Nesse pensar, a modelagem não se restringe a formulação do modelo M e a interpretação de uma solução para a situação S, mas também da adequação ou criação de um mtodo P, pois, um modelo sem método não útil por não prover uma solução para a situação e, por outro lado, o método pode não ser útil frente a um modelo j validado para um tipo de situação S por não produzir soluções coerentes para o contexto específico da situação. Assim, uma situação do tipo S demandar um par (M, P), mesmo que P = M, evidenciando que o método não somente para o modelo M, mas também para a situação S. As limitações que impeçam encontrar, ou criar, um par para a análise da situao S, poderão levar a uma adequação do contexto da situação a um contexto que j possui um par legitimado. Assim, o modelo M e o método P podem ser produtos ou produtores da situação S e quando provêem uma solução interpretada como coerente e aceita socialmente, a tríade (S, M, P) legitimada. A recorrncia de enfrentamento de situações interpretadas como do tipo de situação S evocar o modelo do tipo M com o método P.

Assumimos, assim, a MM escolar como um trabalho regular de análise de situações do entorno social do sujeito, a a se inclui o fazer escolar, por meio de identificação, gerao, ou de criação, de tríades (S, M, P) que permitam o desejado pelos sujeitos do contexto da situação. Parafraseando Chevallard, Bosch e Gascón (2001), destacamos nesse trabalho três aspectos: "a utilização rotineira de tríades j conhecidas; a aprendizagem (e o eventual ensino) de tríades e da maneira de utiliz-los; e a criação de conhecimentos matemáticos, isto , de novas tríades para os sistemas estudados (p.56). Esses aspectos, não são sequenciais e associados a níveis cognitivos ou a níveis de ensino e nem sobre situações particulares, podendo ocorrer simultaneamente em uma única situação em qualquer nível de ensino.

Seguindo nesse pensar**,** o enfrentamento de uma situação real pode inicialmente parecer simples e mecânico no sentido dela poder ser enfrentada por uma pessoa que não domine saberes específicos matemáticos e que pode se limitar a cálculos de valores numéricos de expressões algébricas por meio de uma máquina, mas por outro lado pode exigir, de modo indispensável, pôr em ação um fazer justificado, para atender interesses e intencionalidades de grupos sociais ou individuais, estratégias de articulações e integrações de modelos, métodos, algoritmos e fórmulas já desenvolvidas, ou desenvolvê-los, no processo de modelagem da situação. Ilustraremos o que afirmamos por meio de análise de situações reais, algumas, por nós, vivenciadas em curso de formação de professores.

Inicialmente, consideremos a situação identificada em um anúncio de jornal por dois professores em formação motivados por uma matéria do Caderno Classificados Veículos da Folha de São Paulo de 04/11/2007 que denunciava no-conformidades no financiamento de veículos. Eles intencionavam torn-las de fácil compreensão para alunos do ensino básico. É uma situação de progressiva complexidade que revela aspectos supracitados com as integrações de modelos e oportunamente as conexões de saberes matemáticos de diferentes níveis de ensino por meio da MM como sugerido por Garcia e colaboradores (2006).

O anúncio da revendedora de veículos propõe a venda de um carro no valor de R$ 32.000,00 com entrada de 10% do valor anunciado e taxa de 1,53% a.m. em 60 parcelas iguais e fixas de R$ 767,34. Desejamos saber *"se os valores anunciados da prestação e da taxa estão coerentes com as condições anunciadas?"* Para respondermos a essa questão, recorremos à atividade rotineira do cálculo do desconto como segue.

Entrada de 10% nos conduz a = R$ 28.800,00.

Em seguida, assumimos o modelo rotineiro usado pelas financeiras que relaciona o valor de prestações iguais e fixas p, com a taxa de financiamento i, o valor a ser financiado D e o número de períodos n, e substituindo os valores, n = 60, i = 0,0153 e D = 28.800, obtemos o valor de p como segue.

$$p = \frac{D[i(1+i)]^n}{(1+i)^n - 1} \quad \text{de onde segue que} \quad p = \frac{28.800(0,03805)}{1,4869} = \text{R\$ } 736,98$$

O valor da prestação de R$ 736,98 e contraria o anunciado pela financeira. Isso mostra que algo não est correto no anncio e nos encaminha para nova questão *"Se as parcelas e a taxa estão corretas, então qual o valor que est sendo financiado?*. Usando o mesmo modelo, mas relacionando D com p, i e n, e substituindo os valores respectivos anunciados, encontramos D como segue.

$$D = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} p \Rightarrow D = \frac{(1+0,01531)^{60} -}{0,0153(1+0,0153)^{60}} \times 767,34 = \textit{R\$ 29.986,32}$$

Assim, concluímos que *se os valores de p e i* estão corretos, então o valor financiado verdadeiro *de* R$ 29.986,32 e isso acarreta um adicional praticado de R$1.186,32, como denunciado pelo Caderno Classificados Veículos da Folha de São Paulo de 04/11/2007.

Por outro lado, se não h cobrança de adicionais, ento a taxa praticada pode ser diferente do anunciado, ou seja, se pratique outro valor para a taxa. Disso resultou o novo questionamento *Se as parcelas e o valor financiado estão corretos, qual taxa de financiamento est sendo praticada pela financeira?*. Para encontrar a taxa usada, recorremos novamente ao mesmo modelo, substituindo 1+i por x e com os valores de p = *R*$767,34, D = *R*$28.800,00 e *n* = 60meses.

$$p = \frac{D[i(i+1)^n]}{(1+i)^n - 1} \Rightarrow 767,34 = \frac{28800[(x-1)x^{60}]}{x^{60} - 1}$$

Ou ainda, para $x \neq 1$, $28800x^{60} - 767,34x^{59} - \ldots - 767,34x - 1 = 0$

Para encontrar uma raiz para essa equação polinomial, tornou-se necessrio pesquisarmos na literatura especializada da matemática numérica um método para encontrar raízes de polinômios, acessível, pelo menos intuitivamente, aos estudantes do ensino básico. Nesse aspecto intuitivo, o método da bissecção permite ser usado sem maiores elaborações matemáticas assumindo a noção paramatemática de continuidade para uma função *f(x)* que muda de sinal em um intervalo [*a, b*]. Ele consiste em subdividir este intervalo em suas duas metades, ou seja, em dois subintervalos de menor amplitude $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ e $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ e verificar se a raiz está contida na primeira ou na segunda metade do intervalo inicial. Se a função *f(x)* mudar de sinal em $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ indicará que a raiz está nessa primeira metade do intervalo [*a*,*b*]. Caso contrário à função *f(x)* ter mudado de sinal na segunda metade do intervalo $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ e nesse intervalo estará localizada a raiz. Repetimos esse processo assumindo sempre que a melhor estimativa da raiz em cada etapa ser o ponto médio do intervalo que contém a raiz. O processo repetido at que a amplitude do intervalo ou o valor do polinmio seja, suficientemente, pequeno, de modo a podermos assumir, a estimativa, como raiz do polinômio.

Como se observa, o conhecimento matemático para aplicação do método da bissecão próprio do ensino médio, onde os objetos matemáticos manipulados, entre outros, o método, a continuidade de uma função e a sequncia convergente, serão somente objetos de estudo no nível superior, mas que aqui se destacam como ferramentas para a consecução de suas intencionalidades. O mesmo exige o esforço do fazer repetitivo dos cálculos para a obtenção das aproximações sucessivas da raiz, pois necessário recorrer ajuda de ferramentas como um computador com um programa para o processo iterativo e para o cálculo do valor do polinômio por meio do processo de Briot-Ruffini.

A automação do processo produziu o valor para taxa i= 1,6873% a.m mostrando que existe uma a diferença entre esta e a taxa anunciada e que corresponde um acréscimo da ordem de 10% . Além, disso mostra que o enfrentamento da situação foi realizado, inicialmente, pela simples identificação da tríade, revelada pelos primeiros questionamentos, o modelo e método pela fórmula da financeira, seguida de geração de nova tríade, revelada pelo ltimo questionamento, modelo da equação polinomial e o método da bissecção.

Mostra também que o par (M,P) pode acabar determinando a situação, como alerta a educação matemática crítica, ao recorrermos a uma fórmula da matemática financeira legitimada por instituições sociais (associações comerciais, bancos, financeiras e etc.) que orientam a política de financiamento de bens de consumo. Como se observa, o fazer matemático parte integrante do contexto da situação.

Destacamos que os modelos matemáticos tomados como interpretações fiéis de situações do mundo real, por se mostrarem exatos para situações como o exemplo tratado e outros, como o de redimensionar uma receita de bolo, o cálculo do custo do consumo de energia elétrica, do cálculo do rendimento de uma aplicação financeira, da simulação do custo de jogar um dado número de dezenas na mega sena, ou da simulação de custo para a construção de um piso considerando o tipo de revestimento, são geralmente produtos do fazer matemático institucionalizado e construídos para governar essas situações, no sentido da matemática em ação posto por Skovsmose (1988), Valero & Skovsmose (2002) e se constituem em excelentes oportunidades para análises no sentido da modelagem critica significada matematicamente pela TAD.

Nessas situações, a MM pode tornar-se uma decodificação do modelo que governa a situação. Muitos estão instituídos em nossa sociedade explicitamente e/ou decodificveis pela matemática básica. A vantagem nesses casos a objetividade do que se quer e das grandezas ou variáveis envolvidas, como j destacamos. No entanto, intenções outras dos sujeitos que vivem a situação podem no fazer parte de forma objetiva das formulações e constituem importantes exemplos para revelar essas intenções não-explicitadas pelos sujeitos que modelaram a situação. Um exemplo nos foi revelado por estudantes de graduação e professores de matemática quando em situações do mercado financeiro, que são governadas pela matemática financeira, não conseguem entender quando o regime de juros simples ou composto. Nesses casos, claramente se mostra que os modelos financeiros são construídos com intenções de assegurar vantagens financeiras a quem possui o dinheiro ou o bem desejado pelo outro.

Nessa ótica não difícil entender o porqu do regime de juros ser composto nos financiamentos de bens e ser simples nos descontos de duplicatas. E mais ainda, entender o porqu das alíquotas de ICMS incidentes sobre as aquisições de bens e serviços, inclusive sobre serviços públicos como de energia e comunicações, serem calculados sobre os valores faturados e não sobre os valores dos serviços ou do consumo. A intenção nesse caso pode ser uma arrecadação maior e mascarar o real valor dos impostos pagos pelo cidadão, que não questiona por, não raro, acreditar na certeza matemática e da no se dar conta que, neste caso, a situação determinada pelo modelo que produz o desejado pelo governo por meio da matemática como alerta a educação matemática crítica.

4-Considerações finais

Por meio dos modelos aqui tratados, com simplicidade de formulações e economia de cálculos necessários para aplicação no ensino básico, ilustramos o afirmado pela educação matemática crtica de que a matemática pode orientar e legitimar políticas públicas e governar ações sociais.

Com isso, buscamos revelar que o modelo matemático construído de e para uma situação levando em conta o repertório de modelos, métodos, algoritmos e fórmulas, e que a escolha das variáveis e da relação de funcionalidade entre elas determinada pela relação dos sujeitos com a situação contemplando seus interesses e intenções, nem sempre explícitos, em busca de uma solução aceitável para a situação. E que, inicialmente, uma solução provida pelo modelo para o modelo e não para a situação que est sendo tratada. A pertinência das soluções propostas para o modelo que atendam os interesses e intenções em jogo na situação que legitima essas propostas de soluções do modelo matemático como também soluções para a situação.

As situações inusitadas ou que exijam saberes de outras disciplinas não-matemáticas podem revelar dificuldades de serem interpretadas por meio de um modelo matemático numa atividade restrita dessa disciplina. Assim, analisar situações do entorno social do aluno, como as que governam políticas e ações sociais, nos parecem viáveis para permitir interpretações que revelem o fazer de negociações entre os interesses e intenções dos sujeitos e o contexto da situação, e, com isso, destaque a não-neutralidade no processo de modelagem como recomenda Barbosa (2006).

Além disso, a modelagem de e para situações reais por meio de tríades (S, M, P) j dominadas e instituídas socialmente, numa articulação e integração, frmulas e algoritmos no sentido proposto pela TAD, pode revelar o fazer de pesquisa envolvido no enfrentamento de uma situação real, pois nesse fazer assumido descrever a estratégia para enfrentar o tipo de situação, destacando a estrutura do modelo matemático que se confunde com o fazer de um novo modelo, fórmula, método ou algoritmo, ou ainda, com o fazer desejvel de demonstrar um teorema e, em tudo, muito contribui para evidenciar o desejado caráter universalizante da natureza da matemática. Revela que a experiência no enfrentamento de situações reais pela matemática fator importante na construção de modelos matemáticos, mas que se desenvolve, paulatinamente, no seio das experiências matemáticas em situações reais vivenciadas pelos sujeitos. E mais, que um fazer coletivo e colaborativo, como os das práticas sociais de modelagem da economia, engenharia, por exemplo, pode ser pensado na escola de modo a movimentar um conjunto de experincias mais rico para propor e legitimar modelos no enfrentamento de situações de entorno social dos estudantes, inclusive as situações matemáticas escolares.

Acreditamos, assim, que possível pensar esse fazer de modelagem por meio de transposições didáticas de práticas sociais com a matemática do ensino básico, que evidencie o fazer matemático escolar de modelos, algoritmos e fórmulas matemticas como indispensáveis, não somente para desenvolvimento e a evolução do conhecimento matemático, mas também para a tomada de consciência de que ações e decisões tecnológicas, econômicas, polticas e sociais no mundo podem estar subordinadas a modelos matemáticos e, como tais, podem conter pontos cegos que deixam de fora, segundo as intenções em jogo ou por limitação da linguagem matemtica, outras facetas da realidade ou do fenômeno vivido como assim deseja mostrar a educação matemática crítica.

e

Referências

BARBOSA, J.C. *Mathematical Modelling in classroom: a socio-critical and discursive perspective*, ZDM, v.38, n.3, p.293-301, June. 2006.

BERLINSKI, David. *O Advento do Algoritmo: a idéia que governa o mundo*. São Paulo: Globo, 2002.

BLUM, W.; GALBRAITH, P.L.; HENN, H-W; NISS, M. (Eds). *Modelling and applications in mathematics education*: The 14th ICMI study, ZDM, v.40, n.2, p.337-340, May. 2008.

BUSSE, A. *Individual ways of dealing with the context of realistic tasks: first steps towards a psychology*, ZDM, Hamburg, v.37, n.5, 354-360, Oct. 2005.

BUSSE, A.; KAISER, G. *Context in application and modelling: an empirical approach*. In: Q.-X,Ye; BLUM, W.; HOUSTON, S. K.; JIANG, Q.-Y. Mathematical modelling in education and culture: ICTMA10. Chichester: Horwood Publishing, 2003. p. 3-15.

CHEVALLARD, Y. *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique, 1996.

____. L'*Analyse des pratiques enseignantes en thorie anthropologique du didactique*. Recherches en Didactique des Mathematiques, Grenoble, v.19, n.2, p. 221-266,1999.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH. M.; GASCÓN, J. *Estudar matemáticas: o elo perdido entre o ensino e aprendizagem*. Porto Alegre: Artmed, 2001.

CHRISTENSEN, O. R.; SKOVSMOSE, O.; YASUKAWA, K. *The Mathematical State of the World: explorations into the characteristics of mathematical descriptions*. Alexandria Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v.1, n.1, p. 77-90, Mar. 2008.

D'AMORE, B. *Elementos de didática de matemática*. São Paulo: Livraria de Física, 2007.

DAVIS, Philip J.; HERSH, Ruben. *O sonho de Descartes*. Rio de Janeiro: F. Alves, 1998.

GARCÍA, Javier; GASCÓN, Josep; RUIZ HIGUERAS, Luisa; BOSCH, Marianna. *Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics*, ZDM, v. 38, n. 3, p.226-246, June. 2006.

GRANDSARD, Francine. *Mathematical modelling and the efficiency of our mathematics*. 2005. Disponível em: http://math.ecnu.edu.cn/earcome3/sym4/Earcome3_Francine%20Grandsard_sym4.doc. Acesso em: 02.06.2009.

IBGE. Metodologia das estimativas das populações residentes nos municípios brasileiros para 1 de julho de 2008: uma abordagem demográfica para estimar o padrão histórico e os níveis de subenumeração de pessoas nos censos demográficos e contagens da população. Rio de Janeiro: IBGE, 2008. 30p.

IVERSEN, Steffen M.; LARSON, Christine J. *Simple Thinking using Complex Math vs. Complex Thinking using Simple Math: a study using Model Eliciting Activities to compare students' abilities in standardized tests to their modelling abilities*, ZDM, v. 38, n.3, 281-292, June. 2006.

JANKVIST, U. T. *On empirical research in the field of using history in mathematics education*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, v. 12, n. 1, p. 67-101, Feb. 2009.

JULIE, C. *Mathematical Literacy: Myths, further inclusions and exclusions*. Pythagoras, v. 64, p.62-69, dez. 2006.

KAISER, G.; SRIRAMAN, B. *A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education*, ZDM, v.38, n.3, p.302-310, June. 2006.

LIMA, E.L. *Que são grandezas proporcionais?* Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, n. 9, p. 21-29, jul/dez. 1986.

PONTE, João Pedro da. *Literacia matemática*. In: CONGRESSO LITERACIA E CIDADANIA, CONVERGÊNCIAS E INTERFACE, 2002, Évora, Actas eletrónicas... Évora: Centro de Investigação em Educação Paulo Freire, 2002, 1 cd-rom.

REVUZ, A. *The position of geometry in mathematical education*. Educational Studies in Mathematics, v. 4, n. 1, p. 48-52, June. 1971.

RUSSEL, B. The Study of Mathematics. In: SHAPLEY, H.; RAPPORT, S.; WRIGHT, H. *The New Treasury of Science*. New York: Harper & Row Publishers, 1965. p. 48-50.

SKOVSMOSE, O. *Toward a Critical Philosophy of Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994.

____. *Critical Mathematics Education*. In: CLAUDI, A.; ALVAREZ, J. M.; NISS, M.; PÉREZ, A.; RICO, L.; SFARD, A. (Eds). Proccedings of the 8th International Congress on Mathematics Education, Seville: [s.n.], 1998, p. 413-425.

____. *Cenários para Investigação*, Bolema, Rio Claro, SP, v. 13, n.14, p. 66-91, 2000.

____. *Mathematics as part of technology.* Educational Studies in Mathematics, v.19, n.1, p. 23-41, Feb. 1988.

____. *Mathematics in action: a challenge for social theorizing?. Philosophy of Mathematics Education Journal, n.18, Oct. 2004.*

SKOVSMOSE, O.; NIELSEN, L.; POWELL, A. *Critical Mathematics Education*. Research Report R-95-*2023*, Aalborg University: Department of Mathematics and Computer Science, 1995.

SKOVSMOSE, O., YASUKAWA, K. *Formatting power of mathematics: a case study and questions for mathematics education*. In: *MATHEMATICS EDUCATION AND SOCIETY – INTERNATIONAL CONFERENCE., 2nd,* 2000, Montechoro, Algarve, Portugal. Proceedings … Montechoro, Algarve, Portugal, 2000.

SIERRA, G. M. *Los procesos de convención matemática como generadores de conocimento*. Relime, v.8, n.2, p.195-218, jul. 2005.

TRAJANO, Antonio. *Arithmetica progressiva: Curso completo theorico e pratico de arithemetica superior*. 62.ed. Rio de Janeiro: [s.n.], 1927.

VALERO, P. SKOVSMOSE, O. (Eds.). *Proceedings of the 3rd International Mathematics Education and Society Conference*. Copenhagen: Centre for Research in Learning Mathematics, 2002, p. 1-13.

YASUKAWA, K.; JOHNSTON, B.; YATES, W. *Numeracy as a critical constructivist awareness of maths: Case studies from engineering and adult basic education*, Regional Collaboration in Mathematics Education: An ICMI regional conference, Monash University, Melbourne, Bowater Reding,. 1995. p. 815 – 825.