REVISTA DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL (UFMS)

Volume 9, Número 20 – 2016 - ISSN 2359-2842

Coordinación de Teorías en Educación Matemática: el caso del enfoque ontosemiótico[1]

Coordenação de Teorias em Educação Matemática: o caso do enfoque ontossemiótico

Vicenç Font[2]

Resumen

En este artículo se reflexiona primero sobre el hecho que la complejidad del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es una de las razones de que exista una pluralidad de teorías en el área de Educación Matemática y de que en estos momentos se plantee la necesidad del dialogo y articulación de teorías. En segundo lugar se reflexiona sobre el papel de la teoría en la investigación en Didáctica de las Matemáticas. En tercer lugar se explica brevemente el origen y desarrollo del llamado enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. Por último se analiza la problemática de la coordinación de teorías y se presentan ejemplos de coordinación del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática con otras teorías, en particular con la Teoría APOE, con la Teoría de la Génesis Instrumental y con la Teoría de los Registros Semióticos.

Palabras clave: Teorías. Coordinación. Educación matemática. Didáctica de las matemáticas. Enfoque ontosemiótico.

Abstract

Neste artigo, apresenta-se uma reflexão, em primeiro lugar, sobre o fato de que os processos de ensino e aprendizagem de matemática apresentem alto grau de complexidade é uma das razões para que exista uma pluralidade de correntes teóricas na área da Educação Matemática e de que, neste momento, programe-se a necessidade de um diálogo entre elas. Em segundo lugar, reflete-se sobre o papel da teoria na investigação em Didática da Matemática. Em terceiro lugar, explica-se a origem e o desenvolvimento do denominado Enfoque Ontossemiótico da Cognição e Instrução Matemática. Por fim, analisa-se a problemática da coordenação entre as distintas teorias que permeiam o campo da Educação Matemática e apresentam-se exemplos de articulação entre o Enfoque Ontossemiótico da Cognição e Instrução Matemática com outras teorias, em particular, coma a Teoria APOE, com a Teoria da Genesis Instrumental e coma a Teoria dos Registros Semióticos.

---

[1] Nota dos Editores: Em respeito à formatação original do texto, optamos por manter a estrutura do artigo segundo as normas APA.

[2] Doctor en Filosofia i ciències de l'educació; Universidade de Barcelona/ UB. Professor titular de la Facultat de Formació del Professorat, Departament Didàctica de les Ciències Experimentals i la Matemàtica; Universidade de Barcelona, Barcelona, Catalunya, España. Contacto: vfont@ub.edu

Palavras-chave: Teorias. Coordenação. Educação Matemática. Didática da Matemática. Enfoque Ontossemiótico.

Complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

El hecho de que los procesos de enseñanza y aprendizaje sean muy complejos conlleva que los problemas a los que el profesorado de matemáticas se enfrenta sean el origen de muchas preguntas que, además, son de categorías muy diferentes. Son preguntas que están relacionadas con muchos aspectos (por ejemplo, el contenido matemático, el aprendizaje de los alumnos, el entorno social, la organización de la clase, el uso de determinados recursos materiales y temporales, la motivación de los alumnos, etc.) y disciplinas diferentes (psicología, sociología, antropología, matemáticas, etc.).

Dado que la profesión de profesor de matemáticas es heterogénea en cuanto a sus miembros, las preguntas que un profesor se puede formular pueden ser muy diferentes a las que se formulará otro profesor. Ahora bien, puesto que la profesión de profesor de matemáticas es bastante homogénea con relación a los problemas que debe afrontar, las preguntas que se formule un profesor concreto, además de ser sus preguntas, serán preguntas relacionadas con los problemas de una parte importante de la profesión de profesor de matemáticas. Serán, por tanto, preguntas que merecen ser investigadas por las diferentes disciplinas que se preocupan por estudiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en particular por la Didáctica de las Matemáticas.

La gran variedad de preguntas y la dificultad para encontrar categorías para su clasificación se explica por la diversidad de problemas a los que se enfrenta en la actualidad la enseñanza de las matemáticas y los métodos a seguir para su estudio sistemático. Si bien los criterios de clasificación de las preguntas de investigación pueden ser muy diversos, las temáticas abordadas en los congresos importantes en el área de la Didáctica de las Matemáticas nos pueden dar una idea de cuáles son los problemas más importantes a los que se enfrenta en la actualidad la enseñanza de las matemáticas.

La investigación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

Conviene distinguir las dos esferas a las que se refiere el nombre "Educación Matemática" (GODINO, 2000). Por un lado, Educación Matemática es el conjunto de prácticas llevadas a cabo en distintos escenarios –instituciones formales de educación, instancias informales de aprendizaje, espacios de planificación curricular, etc. – que tienen que ver con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Y, por el otro lado, Educación Matemática hace mención al estudio científico de los fenómenos de la práctica de la educación matemática. La identificación de estas dos componentes de la educación matemática explica que en muchos casos se utilicen las expresiones "Didáctica de las Matemáticas" (DM) y "Educación Matemática" (EM) como sinónimas, mientras que en otros casos se considere que la DM sería la disciplina interesada principalmente por el campo de la investigación, mientras que la EM también incluiría el primer componente, esto es, abarcaría la teoría, el desarrollo y la práctica.

La DM, entendida como disciplina didáctica, en estos momentos tiene una posición consolidada en la institución universitaria de muchos países. Indicadores de consolidación institucional son las tesis doctorales sobre problemas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, los proyectos de investigación financiados con fondos públicos y las diferentes comunidades y asociaciones de investigadores en DM. Otros síntomas de consolidación son la existencia de institutos de investigación específicos, la publicación de revistas periódicas de investigación, congresos internacionales, etc.

Esta consolidación convive con una gran confusión en las agendas de investigación y en los marcos teóricos y metodológicos disponibles, situación propia de una disciplina emergente y de la complejidad del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas comentado en el apartado anterior. En cuanto a los métodos de investigación, podemos decir que se ha pasado del predominio de un enfoque psicoestadístico en la década de los 70 y parte de los 80 del siglo pasado, a una presencia importante de los métodos cualitativos en la actualidad. En cuanto a los marcos teóricos, si bien el enfoque psicológico no ha perdido su importancia se están desarrollando también investigaciones dentro de otros enfoques como el semiótico, el antropológico, el sociocultural, etc.

Por otra parte, existe un divorcio importante entre la investigación científica que se está desarrollando en el ámbito académico y su aplicación práctica a la mejora de la enseñanza de las matemáticas. Este divorcio se manifiesta, entre otros aspectos, en la existencia de congresos para investigadores y congresos de profesores, y en el tipo de comunicaciones que se presentan en ellos.

Aunque la DM pueda considerarse una disciplina madura en el sentido sociológico, no ocurre igual en el sentido filosófico o metodológico. No existe ningún marco establecido de manera universal o un consenso relativo a escuelas de pensamiento, paradigma de investigación, métodos, estándares de verificación y calidad. Se puede afirmar que, en la actualidad, no hay acuerdo en la DM sobre lo que es un hecho, un fenómeno o una explicación. Esto explica por qué hay un cierto número de investigadores en esta área que durante los últimos años han estado reflexionando sobre las características, problemas, métodos y resultados de la DM como disciplina científica intentando dar respuesta a la pregunta ¿Qué tipo de ciencia es la DM?

En su intento de responder a la pregunta anterior, la DM no ha permanecido ajena a la controversia "explicación versus comprensión" que ha sacudido a las ciencias sociales. El dualismo explicación-comprensión se relaciona con el problema de si la construcción teórica es intrínsecamente un mismo género de empresa tanto en las ciencias naturales como en las ciencias humanas y sociales.

En estos momentos a la DM, tanto si es entendida cómo ciencia de tipo explicativo o bien de tipo comprensivo, se le pide que dé respuesta a dos demandas diferentes: a) Comprender y/o explicar los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y b) Guiar la mejora de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. La primera demanda lleva a describir, interpretar y/o explicar los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (ciencia básica). La segunda lleva a su valoración y mejora (ciencia aplicada o tecnología). La primera demanda exige herramientas para una didáctica descriptiva y explicativa que sirva para responder "¿qué ha ocurrido aquí cómo y por qué?". La segunda necesita herramientas para una didáctica valorativa que sirva para responder la pregunta "¿qué se podría mejorar?". Se trata de dos demandas diferentes pero relacionadas ya que sin una profunda comprensión de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas no es posible conseguir su mejora.

Necesidad de marcos teóricos

Las dos demandas comentadas en el apartado anterior exigen herramientas teóricas que permitan la descripción, la interpretación y/o la explicación de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Una manera de satisfacer estas necesidades teóricas es entender la DM como una ciencia aplicada que importa y aplica los saberes de otras disciplinas más generales como la psicología, la sociología, etc. Desde esta perspectiva las investigaciones en DM serán cognitivistas (si aplica la psicología cognitiva), sistémicas (si aplica la teoría de sistemas), constructivistas, socioculturales, antropológicas, etc.

Otra posibilidad es considerar que los saberes importados de disciplinas como la psicología, sociología, etc. no permiten por sí mismos, sin modificaciones e independientemente los unos de los otros, explicar los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Por el contrario, es necesario crear programas de investigación propios del área de la DM que tengan en cuentan la especificidad del conocimiento matemático. Esta opción necesita investigaciones de tipo teórico que permitan la creación y el desarrollo de marcos teóricos propios menos generales.

Una tercera posibilidad es huir de marcos teóricos, propios o de teorías generales, consideradas demasiado ambiciosas, y limitarse al desarrollo a teorías de ámbito muy local que se puedan conectar y sincronizar razonablemente con los estudios empíricos. Esto es lo que propone, por ejemplo, *La Teoría Fundamentada* (GLASER; STRAUSS, 1967).

Después de constatar las limitaciones de las teorías psicopedagógicas generales para explicar los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, muchos investigadores en este campo han optado por desarrollar programas de investigación específicos del área. Se ha pasado de tener marcos generales (cognitivismo, constructivismo, teorías socioculturales, enfoques sistémicos, etc.) a tener marcos específicos de investigación en DM, que si bien están relacionados con enfoques generales, tienen en cuenta la especificidad del contenido matemático que se enseña. Entre otros, tenemos la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau y colaboradores), el Enfoque Ontosemiótico (Godino y colaboradores), la Teoría de la Objetivación (Radford y colaboradores), la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard y colaboradores), la Socioepistemología (Cantoral y colaboradores), la Educación Matemática Crítica de (Skovsmose y colaboradores), la Teoría APOE (Dubinsky y colaboradores), etc.

Estos marcos teóricos específicos exigen, por una parte, investigaciones de tipo teórico que permitan su creación y desarrollo y, por otra parte, la aplicación de dichos marcos teóricos al estudio de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (lo cual sirve, entre otras cosas, para desarrollarlos)

De acuerdo con Font (2002) consideramos que los diversos enfoques que se han propuesto en la DM se posicionan de manera explícita o implícita sobre los siguientes aspectos: 1) Una ontología general, 2) Una epistemología, general, 3) Una teoría sobre la naturaleza de las matemáticas, 4) Una teoría sobre el aprendizaje y la enseñanza en general y de las matemáticas en particular, 5) Una definición del objeto de investigación de la DM, y 6) Una metodología de investigación. A partir de sus posicionamientos, explícitos o implícitos, sobre los seis puntos anteriores, los diferentes programas de investigación han desarrollado constructos teóricos que, por una parte, se utilizan como marco teórico para las investigaciones en DM y, por otra parte, pueden ser utilizados en la mejora de la formación inicial y permanente del profesorado con el objetivo de conseguir una mejora de la enseñanza de las matemáticas.

La necesidad de los marcos teóricos se constata en que hay un cierto consenso en que una investigación tiene que seguir, entre otros, los siguientes pasos: 1) Una primera formulación de una pregunta de investigación, 2) La selección de un marco teórico y la reformulación de la pregunta de investigación en términos de dicho marco teórico. Este paso permite una mejor delimitación de los objetivos de la investigación, los cuales a su vez nos sugieren un tipo de investigación (explicativa, descriptiva, comparativa, etc.) y una metodología de investigación (un camino a seguir). 3) Aplicación del marco teórico seleccionado al estudio del problema de investigación planteado. 4) Selección y aplicación de técnicas de investigación.

El problema de la comparación y articulación de teorías

Una característica de la comunidad de investigadores en Educación Matemática, es la amplia diversidad de perspectivas teóricas. Cada una de ellas tiende a privilegiar alguna de las dimensiones del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas sobre las demás, pero hay un aspecto en el que muchas de estas teorías coinciden, nos referimos a que consideran que una característica de los objetos matemáticos que deben ser enseñados y aprendidos es su complejidad. Precisamente, en nuestra opinión, la complejidad de los objetos matemáticos, junto a la complejidad de su proceso de enseñanza y aprendizaje, es una de las razones de que exista una pluralidad de teorías en el área de Educación Matemática y que en estos momentos se plantee la necesidad del dialogo y articulación de teorías (PREDIGER; BIKNER-AHSBAHS; ARZARELLO, 2008; RADFORD, 2008).

Por una parte, la existencia de diversas teorías para abordar los problemas didáctico-matemáticos puede ser un factor positivo, dada la complejidad de tales problemas, si cada teoría aborda un aspecto parcial de los mismos. Por otra parte, cuando el mismo problema es abordado con teorías diversas, lo que frecuentemente implica el uso de lenguajes y supuestos distintos, se pueden obtener resultados dispares y contradictorios que pueden dificultar el progreso de la DM. Parece necesario pues abordar el problema de comparar, coordinar e integrar dichas teorías en un marco que incluya las herramientas necesarias y suficientes para hacer el trabajo requerido. Este problema se puede formular en los siguientes términos:

> *Dadas las teorías T_1,T_2,... T_n, focalizadas sobre una misma problemática de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ¿es posible elaborar una teoría T que incluya las herramientas necesarias y suficientes para realizar el trabajo de las T_i?*

En esta problemática las teorías pasan a ser los objetos del discurso y de la investigación. Para responder a esta pregunta hay que seguir un largo camino cuyo punto de partida es la existencia de un conjunto de teorías que se ignoran unas a otras y cuyo punto de llegada es una teoría que sea la unificación global de este conjunto de teorías. Para seguir este camino las teorías se tienen que entender unas a las otras, se tienen que comparar, coordinar, integrar parcialmente, etc. (PREDIGER; BIKNER-AHSBAHS; ARZARELLO, 2008). Algunos ejemplos de pasos dados en esta dirección son:

1) El Seminario Inter-Universitario de Investigación en Didáctica de la Matemática (SIIDM) en España entre 1995-2005 cuyo objetivo era coordinar teorías cuyo origen tenía relación con la llamada Didáctica Fundamental de las Matemáticas;
2) Grupos de Discusión en los congresos del área: PME34 (Research Forum), CERME 6, 7 y 8 (Working Group), ICME12 (Working Group), este CIBEM, etc.

Por la información que tengo diría que este diálogo no se ha producido en los congresos de ámbito latinoamericano si exceptuamos el último CIBEM.

El caso del Enfoque Ontosemiótico (EOS)

Fue en el contexto de reflexión epistemológica sobre las matemáticas, ofrecido por las teorías relacionadas con la Didáctica Fundamental de las Matemáticas, en el que nos planteamos el problema central que dio origen al EOS, al considerar que no había una respuesta suficientemente clara, satisfactoria y compartida en las teorías de la llamada Didáctica Fundamental al siguiente problema:

PE (problema epistemológico): ¿Qué es un objeto matemático?; o de manera equivalente, ¿Cuál es el significado de un objeto matemático (número, derivada, media...) en un contexto o marco institucional determinado?

Este problema epistemológico, esto es, referido al objeto matemático como entidad cultural o institucional, se complementa dialécticamente con el problema cognitivo asociado, o sea, el objeto como entidad personal o psicológica:

PC (problema cognitivo): ¿Qué significa el objeto O para un sujeto en un momento y circunstancias dadas?

Después de casi 30 años de trabajo, en el EOS tenemos una respuesta a estos dos problemas que consideramos relativamente satisfactoria y que se ha elaborado integrando elementos de otras teoría (ver Font; Godino; Gallardo, (2013)). Se trata de una respuesta en la que la noción de complejidad del objeto matemático y la de articulación de los componentes de dicha complejidad juegan un papel esencial. La complejidad del objeto matemático lleva a pensar no en un objeto unitario sino en un sistema complejo formado por partes o componentes. Nos encontramos pues que un objeto matemático, cuando participa en la actividad matemática, queda inmerso en un juego de lenguaje (WITTGENSTEIN, 1953) en el que se habla del objeto desde la dualidad unitario-sistémico. En algunas circunstancias los objetos matemáticos participan como entidades unitarias (que se suponen son conocidas previamente), mientras que otras intervienen como sistemas que se deben descomponer para su estudio. Un elemento esencial para que sea posible esta mirada dual a los objetos matemáticos es que los componentes que resultan de la mirada compleja se articulan (conectan) entre sí, posibilitando la mirada unitaria del objeto matemático. Dicha articulación de la complejidad asociada al objeto matemático es un paso previo y necesario para pasar a una visión unitaria del objeto matemático mediante diferentes niveles de emergencia (FONT; GODINO; GALLARDO, 2013).

La emergencia de los objetos matemáticos en el EOS

En la figura 1 se sintetizan una parte de las diferentes nociones teóricas propuestas por el EOS. En este enfoque la actividad matemática ocupa el lugar central y se modeliza en términos de sistema de prácticas operativas y discursivas. De estas prácticas emergen los diferentes tipos de objetos matemáticos primarios, que están relacionados entre sí formando configuraciones epistémicas (hexágono interior de la figura 1). Finalmente, los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser considerados desde las cinco facetas o dimensiones duales (decágono exterior de la figura 1). Tanto las dualidades como los objetos primarios se pueden analizar desde la perspectiva proceso-producto, lo cual nos lleva los procesos que se recogen en la figura 1.

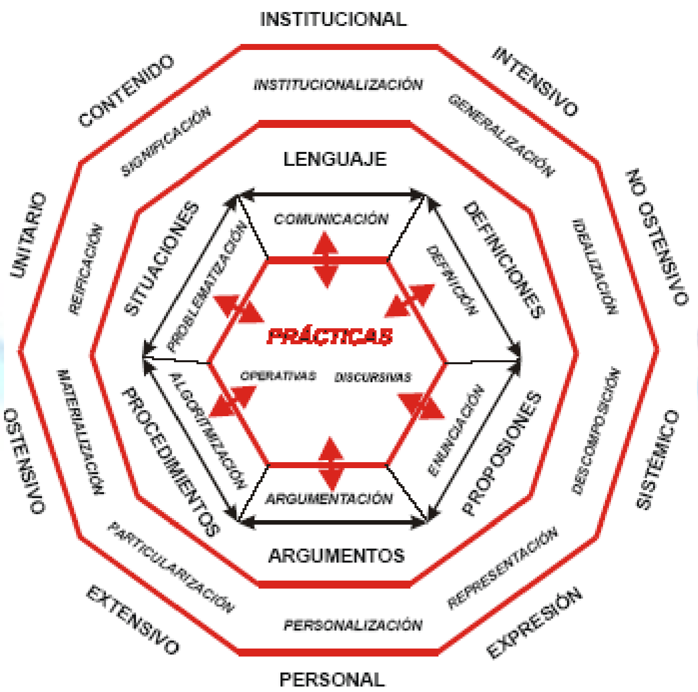

Figura 1. Model ontosemiòtic dels coneixements matemàtics

En el EOS no se intenta dar, de entrada, una definición de “proceso” puesto que hay muchas clases diferentes de procesos, se puede hablar de proceso como secuencia de prácticas, se puede hablar de procesos cognitivos, de procesos metacognitivos, de procesos de instrucción, de procesos de cambio, de procesos sociales, etc. Se trata de procesos muy diferentes en los cuales, quizás, la única característica común a muchos de ellos sea la consideración del factor “tiempo” y, en menor medida, el de “secuencia en la cual cada miembro toma parte en la determinación del siguiente”. Por lo tanto, en el EOS, en lugar de dar una definición general de proceso, se ha optado para seleccionar una lista de los procesos que se consideran importantes en la actividad matemática (los de la figura 1), sin pretender incluir en ella a todos los procesos implicados en la actividad matemática, ni siquiera a todos los más importantes, entre otros motivos porque algunos de los más importantes (por ejemplo, el proceso de comprensión o el de modelización) más que procesos son híper o mega procesos.

En el EOS (FONT; GODINO; GALLARDO, 2013) se considera que el camino por el cual los objetos matemáticos emergen a partir de las prácticas es complejo y que deben ser distinguidos, al menos, dos niveles. En un primer nivel, emergen representaciones, definiciones, proposiciones, procedimientos, problemas y argumentos (llamados objetos primarios, hexágono figura 1). Con relación a la naturaleza de dichos objetos, en el EOS, en consonancia con la filosofía de la matemática de Wittgenstein, se considera que el tipo de existencia de las definiciones, proposiciones y procedimientos es el que tienen las reglas convencionales. Desde este punto de vista, los enunciados matemáticos son reglas (gramaticales) para el uso de cierto tipo de signos porque de hecho se usan como reglas. No describen propiedades de objetos matemáticos con algún tipo de existencia independiente de las personas que quieren conocerlos y del lenguaje que se usa para conocerlos, aunque lo pueda parecer.

Si bien es cierto que en el EOS se adopta un punto de vista convencionalista sobre la naturaleza de los objetos matemáticos no se ignora que implícitamente se está sugiriendo, en los procesos de enseñanza, una visión descriptiva/realista de las matemáticas. Para poder explicar cómo se genera dicha visión es necesario considerar un segundo nivel de emergencia en el que emerge un objeto matemático, por ejemplo el objeto función, que es considerado como un objeto que se representa por diferentes representaciones, que puede tener varias definiciones equivalentes, que tiene propiedades, etc.

Para explicar cómo emergen los objetos primarios de las configuraciones epistémicas, resulta muy útil la metáfora “subir una escalera”. Cuando subimos una escalera siempre nos estamos apoyando en un pie, pero cada vez el pie está en un escalón superior. La práctica matemática la podemos considerar como “subir la escalera”. El escalón en el que nos apoyamos para realizar la práctica es una configuración de objetos primarios ya conocida, mientras que el escalón superior al que accedemos, como resultado de la práctica realizada, es una nueva configuración de objetos en la que alguno (o algunos) de dichos objetos no era conocido antes. Los nuevos objetos primarios aparecen como resultado de la práctica matemática y se convierten en objetos primarios institucionales gracias, entre otros procesos de la figura 1, a procesos de institucionalización que forman parte del proceso de enseñanza-aprendizaje estudiado. Para poner solo dos ejemplos, en Font (2007) y Font y Rubio (2008) se describen dos casos en los que se puede observar cómo se produce la emergencia de algunos de los objetos primarios que forman parte de las configuraciones epistémicas.

La segunda emergencia es el resultado de diferentes factores. Los principales son los siguientes:

1) *La objetividad de las matemáticas*, en las matemáticas escolares se realiza un discurso sobre las matemáticas que, de manera explícita o implícita, envía a los alumnos el mensaje de que las matemáticas es una ciencia “cierta”, “verdadera”, “objetiva”. Aparece pues el problema epistemológico de explicar la generalidad y objetividad de las proposiciones matemáticas. Si las proposiciones se consideran reglas, tal como se asume en el EOS, la “verdad”, “certeza”, “objetividad” o "necesidad" matemática no es más que el "estar de acuerdo" con el resultado de seguir una regla. Ahora bien lo habitual en el discurso escolar es explicar la objetividad de las matemáticas, explícita o implícitamente, sugiriendo que, si bien las matemáticas son el resultado de la actividad de resolución de problemas de las diferentes sociedades humanas, su verdad, objetividad, etc. no depende de las personas que las han desarrollado. En cierta manera, se les induce a lo que en filosofía se considera un realismo en valor de verdad o realismo epistemológico (SHAPIRO, 2000). Dicho tipo de realismo se puede formular de la manera siguiente: sin importar si los objetos matemáticos existen con independencia de las personas y del lenguaje que usamos para conocerlos, los valores de verdad de los enunciados matemáticos son objetivos e independientes de las personas que los enunciamos.

   El paso del realismo epistemológico al ontológico está relacionado con la suposición de que para que el conocimiento matemático sea objetivo y general, es necesario que sus objetos también lo sean. La cuestión epistemológica de la objetividad y generalidad del conocimiento matemático conlleva pues, explícita o implícitamente, la postulación de objetos matemáticos que también sean objetivos y generales.

2) *El éxito predictivo de las ciencias que usan las matemáticas*, se utiliza, de manera explícita o implícita, como argumento para avalar la existencia de los objetos matemáticos. Con este argumento se está potenciando, sobre todo, el realismo ontológico. En la mayoría de los procesos de instrucción hay referencias al éxito conseguido por las ciencias al utilizar las matemáticas. Dicho de otra manera, la relación entre las matemáticas y la realidad está presente, en mayor o menor medida, en casi todos los procesos de instrucción. Si bien la relación entre las matemáticas y la realidad es un "telón de fondo" presente en todos los procesos de instrucción, hay que resaltar que hay procesos de instrucción en los que este telón de fondo pasa a primer plano. En determinados procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas se hace un discurso de tipo descriptivo sobre las matemáticas que facilita, de manera implícita o explícita, la emergencia de los objetos matemáticos como objetos que existen en la realidad. Este es el caso, por ejemplo, de algunos procesos de instrucción que proponen una enseñanza contextualizada o realista de las matemáticas.

3) *Simplicidad, intencionalidad y reificación*, en la vida cotidiana es útil suponer que las diferentes experiencias que se tienen de un objeto, por ejemplo, una silla, se deben a que existe un objeto "silla" que es la causa de dichas experiencias. Así como la postulación de los objetos como las sillas es una ficción útil (tanto si realmente existen como si no), también es útil postular la existencia de los objetos matemáticos. Su postulación está justificada por ventajas prácticas, en especial simplifica la teoría matemática que se está estudiando. Resulta muy cómodo considerar que existe un objeto matemático que es representado por diferentes representaciones, que se puede definir por varias definiciones equivalentes, que tiene propiedades, etc.

Además de la comodidad y de la simplicidad que representa postular la existencia de objetos matemáticos hay razones de tipo filosófico para hacerlo. Nos limitaremos a señalar la tesis filosófica, introducida en la filosofía moderna por

Brentano, que afirma la intencionalidad del pensamiento. Fundamentalmente, la intencionalidad significa que la actividad de la mente se refiere a, indica o contiene un objeto. Por tanto, según este punto de vista el sujeto, al activar configuraciones de objetos primarios en las prácticas, inevitablemente asigna un contenido intencional a los elementos de dicha configuración. Esta asignación es lo que hace que se considere que el lenguaje representa "algo", las definiciones definen "algo", las propiedades son propiedades de "algo", etc. Dicho de otra manera, se asocia a la configuración un contenido intencional, el cual se considera un objeto.

4) *La metáfora del objeto en el discurso del profesor*, tal como se desarrolla en Font, Godino, Planas & Acevedo (2010), en el EOS se considera que la metáfora objeto juega un papel relevante para considerarlos objetos con un cierto tipo de existencia. Se trata de una metáfora conceptual que tiene sus orígenes en nuestras experiencias con los objetos físicos y permite la interpretación de los eventos, actividades, emociones, ideas... como si fueran entidades reales con propiedades. La metáfora objeto está siempre presente en el discurso de los profesores, porque en él las entidades matemáticas se presentan como "objetos con propiedades". En el discurso matemático es habitual el uso de determinadas expresiones metafóricas de esta metáfora conceptual que sugieren que los objetos matemáticos no son construidos sino que son objetos preexistentes descubiertos; nos referimos a palabras del tipo "describir", "hallar", "encontrar", "buscar" etc.

5) *Diferenciación entre ostensivos y no ostensivos*, tal como se argumenta en Font, Godino, Planas & Acevedo (2010), en el discurso matemático, es posible (1) hablar de un ostensivo que representa un no ostensivo que no existe (por ejemplo, podemos decir que f '(a) no existe debido a que el gráfico de f (x) tiene una forma puntiaguda en x = a), y (2) la diferenciación del objeto matemático de sus representaciones. Ambos aspectos llevan a los estudiantes a interpretar los objetos matemáticos como diferentes de sus representaciones ostensivas. Este tipo de discurso que producimos dentro de la clase de matemáticas, nos lleva a inferir la "existencia " del objeto como algo independiente de su representación.

Estos cinco factores generan, implícitamente o explícitamente, en el aula la visión descriptiva - realista de las matemáticas que considera (1) que las proposiciones matemáticas describen propiedades de objetos matemáticos y (2) que dichos objetos tienen algún tipo de existencia independiente de las personas que los conocen y del lenguaje que se usa para conocerlos. Dicha visión resulta difícil de evitar ya que las razones que llevan a generarla están actuando constantemente y de manera muy sutil. Más que una posición filosófica asumida conscientemente, se trata de una forma de entender los objetos matemáticos que está presente de manera implícita.

Según el EOS, el objeto derivada (por ejemplo) hay que situarlo en el segundo nivel de emergencia de objetos considerado en este enfoque. Se trata de la emergencia de una referencia global asociada a diferentes configuraciones epistémicas que permiten realizar prácticas matemáticas en diferentes contextos − en los cuales la derivada se ha interpretado como límite, como pendiente de la recta tangente o como velocidad instantánea, además como un operador que transforma una función en otra-, lo cual lleva a entender que la derivada se puede definir de diversas formas, representar de formas diferentes, etc. El resultado, según el EOS, es que se considera que hay un objeto, llamado derivada, que juega el papel de referencia global de todas las configuraciones.

En el EOS, tanto la emergencia de los objetos primarios como la emergencia del objeto que se considera como referencia global de una o varias configuraciones de objetos primarios, se explica por el efecto conjunto que producen los procesos asociados a las diferentes dualidades. La dualidad unitaria-sistémica permite considerar a una configuración, como un objeto (derivada), o bien al conjunto formado por varias configuraciones como un objeto (derivada). Existen otras dualidades que son importantes para delimitar propiedades que se le atribuyen a dicho objeto. La dualidad expresión –contenido, permite duplicar el objeto considerando la representación y el objeto representado como objetos diferentes (esto lleva a pensar que las diferentes configuraciones son representaciones o descripciones parciales del objeto derivada). La dualidad ostensivo/no ostensivo, permite considerar que el objeto representado es un objeto ideal diferente de sus representaciones materiales, la dualidad extensivo-intensivo lleva a considerar, normalmente, este objeto como algo general y la dualidad personal-institucional, que es objetivo. La combinación de estas dualidades produce la emergencia de una referencia global sobre la cual se pueden realizar determinadas acciones.

Ahora bien, dicha referencia global, en la actividad matemática se concreta en una configuración epistémica determinada. Por tanto, lo que se puede hacer con este objeto está determinado por esta configuración. En el EOS, el objeto que juega el papel de referencia global, se puede considerar como único por razones de simplicidad y, a la vez, como múltiple ya que, metafóricamente, se puede decir que estalla en una multiplicidad de objetos primarios agrupados en diversas configuraciones.

La mirada sobre la complejidad de los objetos matemáticos que tiene el EOS permite reformular la visión "ingenua" de que "hay un mismo objeto matemático con diferentes representaciones". Lo que hay es un sistema complejo de prácticas, que permiten resolver problemas, en las cuales el objeto matemático (secundario) no aparece directamente, aquello que si aparece son representaciones del objeto (secundario), diferentes definiciones, proposiciones y propiedades del objeto, procedimientos y técnicas que se aplican al objeto y argumentos sobre el objeto matemático (configuraciones epistémicas de objetos primarios en términos del EOS). Dicho de otro modo, a lo largo de la historia se han ido generando diferentes configuraciones epistémicas de objetos primarios para el estudio del objeto matemático (secundario), algunas de las cuales han servido para generalizar a las preexistentes.

Por ejemplo, la media aritmética (RONDERO; FONT, 2015) se ha usado, a lo largo de la historia de las matemáticas, en diversas prácticas matemáticas: 1) el método babilónico y el de Herón de Alejandría para calcular raíces de enteros positivos, 2) el método de Arquímedes para el equilibrio de los cuerpos, y el cálculo de áreas y volúmenes, 3) el método de Merton para estudiar el movimiento uniformemente acelerado, etc. Este conjunto de prácticas se puede parcelar en diferentes subconjuntos de prácticas que se realizan gracias a la activación de determinadas configuraciones epistémicas, algunas de las cuales se pueden considerar como reorganizaciones y generalizaciones de las anteriores. Rondero y Font (2015) identifican para la media aritmética diferentes contextos intramatemáticos y extramatemáticos, a cada uno de los cuales se les asocia un conjunto de prácticas matemáticas y una configuración epistémica (CE) que las permite realizar. A estas configuraciones las denominamos: 1) el método babilónico y de Herón para calcular raíces, (CE1); 2) el método de Arquímedes sobre el equilibrio de los pesos, principio básico de la estática (CE2); 3) sucesiones, progresiones aritméticas y geométricas (CE3); 4) método de Merton para el estudio del movimiento (CE4); 5) cálculo de áreas, métodos de cuadraturas, fórmulas, etc.

(CE5). La media aritmética, a lo largo de su evolución histórica, se ha activado implícita o explícitamente en al menos estos cinco subsistemas de prácticas cada uno de los cuales tiene una configuración epistémica asociada. Estas configuraciones, a pesar de ser distintas entre sí, presentan articulaciones entre ellas, de manera que se pueden relacionar atendiendo al mayor grado de generalidad.

Para el estudio del objeto matemático *función*, Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006) afirman que a lo largo de la historia las distintas civilizaciones han ido generando diferentes configuraciones epistémicas, algunas de las cuales han servido para generalizar a otras de las preexistentes. Estos autores consideran que esta evolución se puede organizar en cuatro configuraciones epistémicas (tabular, gráfica, analítica y conjuntista).

Para el objeto matemático *límite*, Contreras, García y Font (2012) y García (2008), caracterizan dicha complejidad por medio de las siguientes configuraciones epistémicas: geométrica, preinfinitesimal, infinitesimal, numérica, métrico-analítica y topológica.

Para el objeto matemático *derivada*, Pino, Godino y Font (2011) caracterizan su complejidad mediante nueve configuraciones epistémicas : 1) tangente en la matemática griega; 2) variación en la edad media; 3) métodos algebraicos para hallar tangentes; 4) concepciones cinemáticas para el trazado de tangentes; 5) ideas intuitivas de límite para el cálculo de máximos y mínimos; 6) métodos infinitesimales en el cálculo de tangentes; 7) cálculo de fluxiones; 8) cálculo de diferencias y, 9) derivada como límite. En Pino, Castro, Godino y Font (2013) se utilizan estas nueves configuraciones epistémicas para la reconstrucción del significado global de la derivada, el cual es utilizado para valorar la representatividad del significado pretendido en el currículo de Bachillerato de México (a partir de las configuraciones epistémicas activadas en las prácticas matemáticas propuestas tanto en el Plan de Estudios como en los libros de texto de dicho nivel).

En relación con la complejidad del objeto *integral*, Contreras, Ordóñez y Wilhelmi (2010) y Ordóñez (2011) consideran las siguientes configuraciones epistémicas: 1) Geométrica, 2) Resultado de un proceso de cambio, 3) Inversa de la derivada, 4) Aproximación al límite, 5) Generalizada: (Lebesgue, Riemann, etc.), 6) Algebraica, 7) Métodos numéricos. Crisostomo (2012), en su tesis doctoral considera, basándose en la red de configuraciones epistémicas propuesta por Ordóñez (2011), útil distinguir ocho tipos diferentes de configuraciones que designa con los nombres de: intuitiva, primitiva, geométrica, sumatoria, aproximada, extramatemática, acumulada y tecnológica, situando el

TFC como un objeto primario central de la configuración epistémica llamada primitiva, aunque también aparece en la geométrica, la sumatoria, la extramatemática y la tecnológica.

Otros estudios sobre la complejidad de los objetos matemáticos se han realizado para el caso de los números naturales (GODINO; FONT; WILHELMI; ARRIECHE, 2009) y para la noción de igualdad (WILHELMI; GODINO; LACASTA, 2007).

En el marco del EOS se ha profundizado sobre la mirada sistémica de los objetos matemáticos introduciendo la idea de significados parciales y la descripción de estos significados parciales en términos de prácticas y configuraciones de objetos primarios activados en dichas prácticas. Esta mirada compleja se ha aplicado a diferentes objetos matemáticos como se acaba de comentar. En cambio, sobre la noción de articulación se ha profundizado menos. En diferentes trabajos, en los que se usa el EOS como marco teórico, la articulación entre los componentes de una configuración epistémica se modela por medio de funciones semióticas, por ejemplo en Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy (2011) y en Rojas (2012 y 2013). La articulación entre configuraciones se ha modelado en términos de (a) generalización (o mayor formalismo), por ejemplo en Godino, Font, Wilhelmi y Arrieche (2009), Wilhelmi, Godino y Lacasta (2007) y Pino, Godino y Font (2011) y (b) proyecciones metafóricas, por ejemplo en Acevedo (2008). En Rondero y Font (2015) se han utilizado los tres mecanismos simultáneamente.

La reflexión realizada en el EOS sobre la complejidad del objeto matemático, la articulación de los componentes en los que estalla dicha complejidad y los niveles de emergencia que facilita esta articulación, provee al EOS de una reflexión muy elaborada sobre la emergencia de los objetos matemáticos a partir de las prácticas. En síntesis dado un objeto matemáticos, el camino que se sigue es el siguiente: 1) se muestra la complejidad asociada al objeto matemático, 2) se analizan las diferentes maneras de relacionar, conectar o articular (en la terminología del EOS) los diferentes componentes de esta complejidad y 3) se analiza cómo esta articulación permite pasar de una visión compleja sobre el objeto matemático a una visión unitaria sobre dicho objeto. Esta manera de entender la emergencia de los objetos matemáticos a partir de las prácticas permite al EOS coordinarse con otras teorías en las que la noción de objeto matemático juega un papel importante. Por ejemplo, con la Teoría acción-proceso-objeto-esquema (APOE) (DUBINSKY; MCDONALD, 2001), la Teoría del embodiment (LAKOFF; NÚÑEZ, 2000), la Teoría de la objetivación de Luis (RADFORD, 2008) y la Teoría de la Génesis Instrumental (TGI) (RABARDEL; WAERN, 2003) y la

Teoría de los Registros Semióticos (TRRS) de Duval (1996), entre otras. A continuación comentamos algunos resultados de estas coordinaciones

Coordinación EOS-APOE

La teoría APOE es una teoría básicamente cognitiva en la que no se ha profundizado aún en la reflexión sobre la naturaleza de los objetos matemáticos, mientras que el EOS es una teoría más general en la que este tipo de reflexión ya se ha realizado. Al ser dos tipos de teorías diferentes es difícil hacer una comparación entre ellas, incluso si nos limitamos al uso que hacen ambas teorías del término objeto, por tanto hemos optado por la siguiente metodología (FONT; BADILLO; TRIGUEROS; RUBIO, 2012, 2016): 1) partir del APOE y, de acuerdo con esta teoría, elaborar una descomposición genética de la derivada, que sirva como contexto de reflexión. 2) reflexionar sobre dicha descomposición genética desde las herramientas teóricas que se proponen en el EOS. Este proceso nos permite concluir que la manera de conceptualizar la emergencia de objetos en el APOS – básicamente como resultado de dos procesos cognitivos, llamados encapsulación y tematización en esta teoría – resalta aspectos parciales del complejo proceso que, según el EOS, hace emerger los objetos matemáticos personales de los alumnos a partir de las prácticas matemáticas realizadas en el aula.

Coordinación EOS -TGI

En un trabajo reciente (DRIJVERS; GODINO; FONT; TROUCHE, 2013) se ha abordado la comparación y articulación del EOS con la TGI, en este caso mediante la aplicación de las respectivas herramientas al análisis de un episodio instruccional. Además de analizar el mismo episodio con las herramientas teóricas de cada teoría se realiza una comparación de: a) Principios, b) Métodos, c) Cuestiones paradigmáticas y d) Conocimientos que el uso de la teoría aporta. Los principales resultados son, además de que las dos teorías nos hemos comprendido mutuamente: a) El análisis conjunto del episodio no es contradictorio y permite tener una visión más completa que la que se tiene usando un solo marco teórico. B) Se han visto muchos puntos de contacto en las nociones teóricas que permiten una buena coordinación entre las dos teorías, c) El EOS ha incorporado la noción de artefacto (FONT; GODINO; GALLARDO, 2013).

Coordinación TRRS-EOS

En Pino-Fan, Guzmán, Font y Duval (2015 y 2016) se reflexiona sobre la relación entre las representaciones y la actividad matemática subyacente durante el desarrollo de una tarea (sobre derivadas). Para ello, se utilizan dos enfoques teóricos, uno de tipo cognitivo, la TRRS, que considera que el aprendizaje de un concepto matemático y su aplicación se produce cuando varias representaciones internas apropiadas son desarrolladas e integradas junto con las relaciones funcionales entre ellas. El otro, de tipo semiótico y pragmático, el EOS, también da importancia a la utilización de diversas representaciones, sin embargo, a diferencia del enfoque cognitivo que considera las representaciones básicamente desde un punto de vista representacional (algo por algo), pone el énfasis en su perspectiva instrumental (lo que se puede hacer con ellas).

Las nociones de sistema semiótico y registro de representación semiótica de la TRRS son esenciales para la comprensión de la actividad cognitiva necesaria para resolver una tarea, mientras que el EOS proporciona un nivel de análisis de la actividad cognitiva del sujeto que muestra los objetos matemáticos primarios que están involucrados en el procesos de tratamiento y conversión entre registros de representación semiótica. Este último tipo de análisis complementa el llevado a cabo utilizando las herramientas de TRSR. Con las herramientas de configuración de objetos primarios y procesos y la función semiótica, los contenidos de las representaciones se hacen explícitos y se utilizan como parte de dicha actividad cognitiva. Los resultados de la comparación de los análisis realizados muestran que entre estas dos perspectivas teóricas existen complementariedades.

Referências

ACEVEDO, J. I. **Fenómenos relacionados con el uso de metáforas en el discurso del profesor. El caso de las gráficas de funciones**. Tesis doctoral. Universitat de Barcelona, 2008.

CONTRERAS; ORDÓÑEZ, L.; WILHELMI, M.. Influencia de las pruebas de acceso a la Universidad en la enseñanza de la integral definida en el Bachillerato. **Enseñanza de las Ciencias**. 28(3, 2010), p. 367-384.

CONTRERAS, A.; GARCÍA, M.; FONT, V. Análisis de un Proceso de Estudio sobre la Enseñanza del Límite de una Función. **Bolema**, 26(42B), p. 667-690.

CRISOSTOMO, E. **Idoneidad de procesos de estudio del cálculo integral en la formación de profesores de matemáticas: una aproximación desde la investigación en didáctica del cálculo y el conocimiento profesional**. Tesis Doctoral. Universidad de Granada, 2012.

DRIJVERS, P.; GODINO, J. D.; FONT, V.; TROUCHE, L. One episode, two lenses; a reflective analysis of student learning with computer algebra from instrumental and onto-semiotic perspectives. **Educational Studies in Mathematics**, 82, 2013, p. 23-49.

DUBINSKY, E.; MCDONALD, M. A. APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In Derek Holton, et al. (Eds.), The teaching and learning of mathematics at university level*:* **An ICMI study**, pp. 273–280. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001.

DUVAL, R. **Sémiosis et pensée**: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berne, Switzerland: Peter Lang, 1995.

FONT, V. Una organización de los programas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. **Revista EMA**, 7(2), 2002, p. 127-170.

FONT, V. Una perspectiva ontosemiótica sobre cuatro instrumentos de conocimiento que comparten un aire de familia: particular-general, representación, metáfora y contexto. **Educación Matemática**, 19, 2, 2007, p. 95-128.

FONT, V.;BADILLO E.; TRIGUEROS, M.; RUBIO, N. La encapsulación de procesos en objetos analizada desde la perspectiva del enfoque ontosemiótico. En A. Estepa A. Contreras, J. Delofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVI. **Actas del XVI SEIEM**, pp. 239-247. Jaen, España, 2012.

FONT, V.; GODINO, J. D.; GALLARDO, J. The emergence of objects from mathematical practices **Educational Studies in Mathematics**, 82, 2013, p. 97-124.

FONT, V.; GODINO, J. D.; PLANAS, N.; ACEVEDO, J. I. The object metaphor and sinecdoque in mathematics classroom discourse. **For the Learning of Mathematics**, 30, 2010, p. 15-19.

FONT, V.; RUBIO, N. Onto-semiotic tools for the analisis of our own practice, en B. Czarnocha (ed.), **Handbook of Mathematics Teaching Research: Teaching Experiment - A Tool for Teacher-Researchers** (pp. 165-180). University of Rzeszów: Rzeszów, Poland, 2008.

FONT, V.;TRIGUEROS, M.; BADILLO, E.; RUBIO, N. Mathematical objects through the lens of two different theoretical perspectives: APOS and OSA. **Educational Studies in Mathematics**. DOI 10.1007/s10649-015-9639-6, 2015.

GARCÍA, M. **Significados institucionales y personales del límite de una función en el proceso de instrucción de una clase de primero de bachillerato**. Tesis Doctoral. Universidad de Jaén, 2008.

GLASER, B. G.; STRAUSS, A. L. **The discovery of grounded theory: Strategies for qualitative research**. New York: Aldine Publishing Company, 1967.

GODINO, J. D. La consolidación de la educación matemática como disciplina científica. **Números**, 40, 2000, p. 347-350.

GODINO, J. D.; BENCOMO, D.; FONT, V.; WILHELMI, M. R. Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. **Paradigma**, *27* (2), 2006, p. 221-252.

GODINO, J. D.; FONT, V.; WILHELMI, M. R.; ARRIECHE, M. ¿Alguien sabe qué es el número? **Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, *19*, 2009, p. 34-46.

GODINO, J. D.; FONT, V.; WILHELMI, M.; LURDUY, O. Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. **Educational Studies in Mathematics**, 77(2), 2011, p. 247-265.

LAKOFF, G.; NUÑEZ, R. **Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being.** New York, NY: Basic Books, 2000.

ORDÓÑEZ, J. **Restricciones institucionales en las matematicas de 2º de bachillerato en cuanto al significado del objeto integral definida**. Tesis Doctoral. Universidad de Jaén, 2011.

PINO-FAN, L.; CASTRO, W.; GODINO, J. D.; FONT, V. Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. **Paradigma**, *34*(2), 2013, p. 123-150.

PINO-FAN, L.; GODINO, J.D.; FONT, V. Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. **Educação Matematica Pesquisa**, *13*(1), 2011, p. 141-178.

PINO-FAN, L.; GUZMÁN, I.; FONT, V.; DUVAL, R. The theory of registers of semiotic representation and the onto-semiotic approach to mathematical cognition and instruction: linking looks for the study of mathematical understanding. In Beswick, K., Muir, T., & Wells, J. (Ed.), **Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education** (Vol. 4, pp. 33-40). Hobart, Australia: PME, 2015.

PINO-FAN, L.; GUZMÁN, I.; FONT, V.; DUVAL, R. Analysis of the underlying cognitive activity in the resolution of a task on derivability of the function $f(x) = |x|$. **An approach from two theoretical perspectives.** *PNA* (en prensa), 2015.

PREDIGER, S.; BIKNER, A.; ARZARELLO, F. Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: first steps towards a conceptual framework. *ZDM.* **The International Journal on Mathematics Education**, 40(2), 2008, p. 165-178.

RABARDEL, P.; WAERN, Y. From artefact to instrument. **Interacting with Computers**, 15, 2003, p. 641-645.

RADFORD, L. The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning. In L. Radford, G. Schubring, & F. Seeger (Eds.), **Semiotics in mathematics education: Epistemology, history, classroom, and culture**, pp. 215–234. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers, 2008.

ROJAS, P. J. **Articulación y cambios de sentido en situaciones de tratamiento de representaciones simbólicas de objetos matemáticos**. Tesis doctoral no publicada, Bogotà, Colombia, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2012.

ROJAS, P. J. Articulation and Change of Senses Assigned to Representations of Mathematical Objects. **Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education**, 12(1-2), 2013, p. 155-181.

RONDERO, C.; FONT, V. Articulación de la complejidad matemática de la media aritmética. **Enseñanza de las Ciencias**, 33(2), 2015, p. 29-49.

SHAPIRO, S. Thinking about mathematics. **The philosophy of mathematics**. Oxford: Oxford University Press, 2000.

WILHELMI, M. R.; GODINO, J. D.; LACASTA, E. Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. **Recherches en Didactique des Mathematiques**, 27 (1), 2007, p. 77-120.

WITTGENSTEIN, L. **Philosophical investigations**. New York: The MacMillan Company, 1953.

Submetido em agosto de 2016

Aprovado em novembro de 2016